arXiv:2305.01440v1 [cs.LO] 2 May 2023

正公式证明的枚举

Gilles Dowek*和 Ying Jiang†

摘要

我们为最小谓词逻辑中正公式的正规证明集合提供了一种半文法描述： *i.e.* 一种生成一组 *schemes* 的文法，我们可以据此分别构造有限个正规证明。该方法是完备的，因为该公式的每个正规证明项都由文法生成的某个方案产生。作为推论，我们为一大类理论中的正公式正规证明集合得到了类似的描述，其中包括简单类型论和 System F。

1 引言

证明某个逻辑中的可证性是可判定的，一个简单的方法是构造一种证明搜索方法，枚举给定公式的所有潜在证明，并证明该方法的搜索树是有限的。在这种情况下，如果一个公式可证，我们甚至可以得出结论：它只有有限个证明。这通常是某些经典命题序列演算表述中的情形 [1]。

另一些情况下，通常是某些直觉主义或极小命题序列演算表述中的情形，搜索树是无限的，但具有规律性，也就是说，它只有有限个不同的子树 [1]。在这种情况下，可证性仍然是可判定的，但证明集合可能是无限的。不过，我们可以用上下文无关文法来描述它。

与 Kleene 的结果相反，Zaionc 证明了，在极小命题逻辑中，给定公式的正规证明项集合（也就是简单类型 λ 演算中给定类型的正规项集合）不是上下文无关语言 [2]。这一结果源于简单类型 λ 演算中可定义性不可判定性 [3]（另见 [4]，其中给出了一个极简示例），并解释了为什么此前对给定类型的正规项集合进行文法描述时，都需要无限多个符号 [5, 6, 7, 8]。

Kleene 与 Zaionc 的结果之所以存在这种差异，是因为前者采用的序列式概念中，左侧是集合；而后者采用的序列式概念中，左侧是列表。使用集合时，无法区分诸如 $\lambda\alpha : P\ \lambda\beta : P\ \alpha$ 和 $\lambda\alpha :\ P\ \lambda\beta :\ P\ \beta$ 这样的证明项。按照模式记法，这两个证明项都应写成 $\lambda\alpha : P\ \lambda\alpha : P\ \alpha$。

基于这一思路，Takahashi、Akama 和 Hirokawa [5]，以及 Broda 和 Damas [9, 10]，证明了：如果我们对证明项使用这样的模式语言，将相同的假设称为同一个名称，那么极小命题逻辑中给定公式的证明项集合就是一种上下文无关语言。此外，这种上下文无关语言中的每个模式证明项都对应有限个真正的证明项。例如，模式证明项 $\lambda\alpha :\ P\ \lambda\alpha :\ P\ \alpha$对应两个证明项： $\lambda\alpha : P\ \lambda\beta :\ P\ \alpha$ 和 $\lambda\alpha :\ P\ \lambda\beta :\ P\ \beta$。更一般地，模式证明项中的每个变量出现位置都可以替换为从某个有限集中选取的变量，从而得到有限个证明项。

当存在这样的文法时，我们称其为给定公式的证明项集合的半文法描述。更准确地说，一个集合的半文法描述由一个上下文无关文法和一个算法构成，该算法从文法所定义的语言中的每个元素生成该集合中的有限个元素。

在 [11], 中，我们为最小谓词逻辑中所有量词均为正的片段给出了新的可判定性证明，并由此得到一个推论：System F 中正类型的类型可居留性是可判定的。研究最小逻辑正片段的动机有两个方面。首先，在经典情形下，众所周知，不可判定性源于否定量词，而且

* ´巴黎综合理工学院和法国国家信息与自动化研究院，LIX，´巴黎综合理工学院，91128 帕莱索 Cedex，法国。 gilles.dowek@polytechnique.fr

†计算机科学国家重点实验室，中国科学院软件研究所，北京 100190，中华人民共和国。 jy@ios.ac.cn

$$\frac{\Delta, \alpha : A_1 \to ... \to A_n \to P \vdash t_1 : A_1 \quad ... \quad \Delta, \alpha : A_1 \to ... \to A_n \to P \vdash t_n : A_n}{\Delta, \alpha : A_1 \to ... \to A_n \to P \vdash (\alpha\ t_1\ ...\ t_n) : P}\, L \to$$

若 P 是原子公式。

$$\frac{\Delta \vdash t : A}{\Delta \vdash \lambda x\ t : \forall x\ A}\, R\forall$$

若 x 在 Δ中不是自由的。

$$\frac{\Delta, \alpha : A \vdash t : B}{\Delta \vdash \lambda \alpha\ t : A \to B}\, R \to$$

图 1：系统 LJ$^+$：一个用于正序列的序列演算

$$\frac{\Gamma^* \downarrow \vdash A_1 \quad ... \quad \Gamma^* \downarrow \vdash A_n}{\Gamma \vdash P}\, L \to$$

其中
$\Gamma = \Gamma_1, [\Gamma_2, [...\Gamma_{i-1}, [\Gamma_i, A_1 \to ... \to A_n \to P]_{V_{i-1}} ...]_{V_2}]_{V_1}$,
$\Gamma^* = ([...[[\Gamma_1]_{V_1}, \Gamma_2]_{V_2}, ...\Gamma_{i-1}]_{V_{i-1}}, \Gamma_i, A_1 \to ... \to A_n \to P)$,
并且 P 是原子公式，在 $V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_{i-1}$ 中没有自由变量。

$$\frac{[\Gamma]_V \downarrow \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x\ A}\, R\forall$$

其中 V 是 $\forall x\ A$ 中所有受约束变量的集合。

$$\frac{(\Gamma, A) \downarrow \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\, R \to$$

图 2：系统 LJB：带括号的序列演算

正片段是可判定的。无论是经典谓词逻辑还是最小谓词逻辑，正片段似乎都是一个范围广泛且自然的可判定片段。其次，在 System F 中，数据类型表示为正类型。例如，一元自然数的类型编码为 $\forall X\ (X \to (X \to X) \to X)$，二进制数的类型编码为 $\forall X\ (X \to (X \to X) \to (X \to X) \to X)$。然而，有些正类型，例如 $\forall X\ (X \to ((X \to X) \to X) \to X)$，并非数据类型。尽管如此，我们可能仍希望描述这类类型的正规项集合，因为它们可用于高阶抽象语法，或作为从完备性定理的构造性证明 [12] 中提取的算法的输入类型。

[11] 中定义的算法通过构建正则搜索树来实现，其基础是借助括号系统谨慎处理变量名。本文扩展了这一结果，并为最小谓词逻辑正片段中给定公式的 β-正规 η-长证明项集合提供半文法描述。

首先，由于 [11] 中引入的搜索树是正则的，我们可以定义一种枚举模式证明项的文法。然后，我们给出一种算法，用于生成与给定方案相对应的有限项集。该算法比命题情形下的算法更复杂，因为替换变量时，类型可能会发生变化。由此得到的方法是完备的，即公式的每个正规证明项都可由文法生成的某个方案导出。最后，这种对正公式正规证明项的半文法描述也适用于简单类型论和 System F 等若干理论。

2 系统 LJ$^+$ 和 LJB

更完整的描述留待 [11], ，本节简要回顾正公式的概念、序列演算 LJ$^+$ 和 LJB。我们还引入证明项的概念，用以表示这些演算中的推导。LJ$^+$ 的证明项是通常的 λ项，简称证明项；而 LJB 的证明项则称为方案。

2.1 正公式

最小谓词逻辑是仅包含一个联结词 $\rightarrow$ 和一个量词$\forall$的谓词逻辑片段。项和公式的定义与通常相同。上下文是公式的有限多重集，序列式$\Gamma \vdash A$ 是由上下文 Γ 和公式 A构成的有序对。

如果最小谓词逻辑中的一个公式的所有全称量词出现都为正，则称该公式为正。更准确地说，最小谓词逻辑中的正公式、负公式和正序列通过以下归纳方式定义。

定义 2.1（正公式和负公式）

- 原子公式既是正公式，也是负公式。
- 形如 $A \rightarrow B$ 的公式是正公式（分别为负公式），当且仅当 A 是负公式（分别为正公式），且 B 是正公式（分别为负公式）。
- 形如 $\forall x\ A$ 的公式是正公式，当且仅当 A 是正公式。

如 [11], 所指出的，负公式的形式为 $A_1 \rightarrow ... \rightarrow A_n \rightarrow P$，其中 P 是一个原子公式，而 A_1、...、 A_n 是正公式。

定义 2.2（正序列）如果 A_1、...、 $A_n \vdash B$ 是负公式，且 A_1、...、 A_n 是正公式，那么序列式 B 就是正的。

2.2 LJ$^+$：正序列的序列演算

我们在最小谓词逻辑中使用正序列的无切序列演算。该序列演算包含全称量词的标准右规则，但由于所有序列式都是正的，无需全称量词的左规则。它还包含蕴含的标准右规则。但蕴含的左规则

$$\frac{\Delta, A \rightarrow B \vdash A \quad \Delta, A \rightarrow B, B \vdash C}{\Delta, A \rightarrow B \vdash C}$$

以及公理规则

$$\frac{}{\Delta, A \vdash A}$$

被一个限制更多但等价的规则所取代

$$\frac{\Delta, A_1 \rightarrow ... \rightarrow A_n \rightarrow P \vdash A_1 \ \ ... \ \ \Delta, A_1 \rightarrow ... \rightarrow A_n \rightarrow P \vdash A_n}{\Delta, A_1 \rightarrow ... \rightarrow A_n \rightarrow P \vdash P}$$

其中 P 是一个原子公式。

为了将 λ项与证明关联起来，我们必须将证明变量与上下文中的公式关联起来。带名公式的上下文是由若干对构成的有限多重集，每对由一个证明变量和一个公式组成，且每个证明变量至多出现一次。带名公式的序列式 $\Delta \vdash A$ 是由带名公式的上下文 Δ 和一个公式 A 组成的一对。这些证明变量有别于谓词逻辑中通常使用的项变量。

系统 LJ$^+$ 的规则及其证明项如图 1 所示。注意，所有这些证明项都是 β-正规且 η-长的。忽略这些证明项后，便得到文献 [11] 中给出的 LJ$^+$ 原始表述。当 $\Delta \vdash t : A$ 可导出时，我们也称 t 是序列式 $\Delta \vdash A$ 的证明项。

2.3 LJB：带括号的序列演算

LJ$^+$ 中的搜索树并不总是有限的，甚至未必是正则的。例如，公式$((P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow Q$ 的搜索树是无限的，而公式$((\forall x\ (P(x) \rightarrow Q)) \rightarrow Q) \rightarrow Q$ 的搜索树甚至不是正则的。为了证明最小谓词逻辑正片段的可判定性，我们在 [11] 中引入了另一种称为 LJB 的序列演算。

在 LJ$^+$中，要对序列式 $\Gamma \vdash \forall x\ A$应用 R$\forall$ 规则，我们必须重命名变量 x ，要么在$\forall x\ A$ 中，要么在 Γ 中，以确保该规则引入的变量不出现在上下文中。在 LJB 中，我们不重命名变量 x，而是用括号将其绑定在上下文 Γ 中，从而得到序列式 $[\Gamma]_x \vdash A$。事实上，出于技术上的原因，我们在 Γ中绑定的不仅是变量 x，还有 A的所有约束变量。

定义 2.3（LJB-上下文和项）LJB-上下文和项按如下方式相互归纳定义。

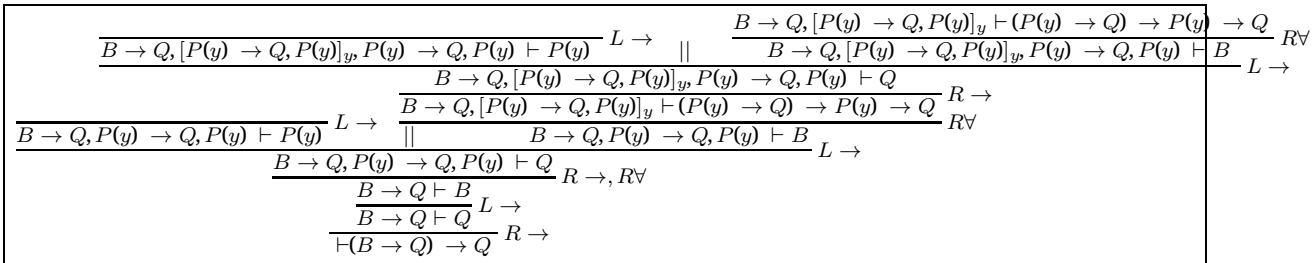


图 3：LJB 中的一个搜索树示例。

$$\frac{\Gamma^*\downarrow \vdash \pi_1 : A_1 \quad ... \quad \Gamma^*\downarrow \vdash \pi_n : A_n}{\Gamma \vdash (\alpha\ \pi_1\ ...\ \pi_n) : P}\, L\rightarrow$$

其中
$\Gamma = \Gamma_1, [\Gamma_2, [...\Gamma_{i-1}, [\Gamma_i, A_1 \rightarrow ... \rightarrow A_n \rightarrow P]_{V_{i-1}} ...]_{V_2}]_{V_1}$,
$\Gamma^* = ([...[[\Gamma_1]_{V_1}, \Gamma_2]_{V_2}, ...\Gamma_{i-1}]_{V_{i-1}}, \Gamma_i, A_1 \rightarrow ... \rightarrow A_n \rightarrow P)$,
P在 $V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_{i-}$ 中是原子公式，且没有自由变量 $_1$,
并且 α 是类型为 $A_1 \rightarrow ... \rightarrow A_n \rightarrow P$ 的典范变量。

$$\frac{[\Gamma]_V\downarrow \vdash \pi : A}{\Gamma \vdash \lambda x\ \pi : \forall x\ A}\, R\forall$$

其中， V 是在 $\forall x$ 中绑定的所有变量的集合 A.

$$\frac{(\Gamma, A)\downarrow \vdash \pi : B}{\Gamma \vdash \lambda\alpha : A\ \pi : A \rightarrow B}\, R\rightarrow$$

其中， α 是类型为 A 的典范变量。

图 4：带项模式的 LJB 系统。

- 一个 LJB 上下文 Γ 是由项构成的有限多重集 $\{I_1, ..., I_n\}$。
- 一个项 I 要么是一个公式，要么是形如 $[\Gamma]_V$ 的表达式，其中 V 是变量集合，而Γ是一个 LJB 上下文。

在项 $[\Gamma]_V$中， V 中的变量由符号 [ ]约束。
一个 LJB-序列 $\Gamma \vdash A$ 是由一个 LJB 上下文 Γ 和一个公式 A组成的有序对。

LJB 系统由两组规则构成：通常的演绎规则，以及处理括号操作的附加变换规则。这些变换规则构成一个终止的重写系统：第一条规则允许将形如 $[I, \Gamma]_V$ 的项替换为两个项 I 和 $[\Gamma]_V$，前提是 I 中没有自由变量属于 V；第二条规则允许删除平凡项；第三条规则允许将两个相同的项替换为一个。

定义 2.4（清理 LJB-上下文）清理规则如下：

$$[I, \Gamma]_V \longrightarrow I, [\Gamma]_V, \quad if\ FV(I) \cap V = \varnothing$$
$$[\ ]_V \longrightarrow \varnothing$$
$$II \longrightarrow I$$

其中， I 是一个项， Γ 是一个 LJB 上下文。

我们不证明定义 2.4 的重写系统的合流性，而是固定一个任意策略，并将上下文 Γ 的范式 $\Gamma\downarrow$ 定义为相对于该策略的范式。例如，我们可以按如下方式进行。如果 $\Gamma = \varnothing$ ，则令 $\Gamma\downarrow = \varnothing$。否则，我们在 Γ 中选择一个项 I ，并令 $\Gamma' = \Gamma \setminus \{I\}$。然后，我们递归地对项 I 和 LJB 上下文 Γ' 进行规范化。如果 $I\downarrow$ 是 $\Gamma'\downarrow$ 的一个元素且 $\Gamma\downarrow = I\downarrow$，则令 $\Gamma\downarrow = \Gamma'\downarrow$；否则令 $\Gamma'\downarrow$ 。要对项 I进行规范化，我们需要考虑以下两种情况。如果 I 是一个公式，则令 $I\downarrow = I$。如果它的形式为 $[\Delta]_V$，我们首先递归地规范化 Δ，然后令 Δ_1 为由 $\Delta\downarrow$ 中具有自由变量的元素构成的部分

$$s_{\Gamma\vdash P} \longrightarrow (\alpha\ s_{\Gamma^*\downarrow\vdash A_1}\ \ldots\ s_{\Gamma^*\downarrow\vdash A_n})$$

其中
$\Gamma = \Gamma_1, [\Gamma_2, [\ldots\Gamma_{i-1}, [\Gamma_i, A_1 \to \ldots \to A_n \to P]_{V_{i-1}}\ldots]_{V_2}]_{V_1}$,
$\Gamma^* = ([\ldots[[\Gamma_1]_{V_1}, \Gamma_2]_{V_2}, \ldots\Gamma_{i-1}]_{V_{i-1}}, \Gamma_i, A_1 \to \ldots \to A_n \to P)$,
P是原子公式，且在 $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_i$_中没有自由变量 $_1$，
并且 α 是类型为 $A_1 \to \ldots \to A_n \to P$的典范变量。

$$s_{\Gamma\vdash\forall x\ A} \longrightarrow \lambda x\ s_{[\Gamma]_V\downarrow\vdash A}$$

其中， V 是 $\forall x\ A$中绑定的所有变量的集合。

$$s_{\Gamma\vdash A\to B} \longrightarrow \lambda\alpha : A\ s_{(\Gamma,A)\downarrow\vdash B}$$

其中 α 是类型为 A的典范变量。

图 5：方案文法。

V并设 $\Delta_2 = \Delta\downarrow \setminus \Delta_1$。最后，如果 $[\Delta_1]_V$是 Δ_2 中的一个元素，则设 $I\downarrow = \Delta_2$ 为 $I\downarrow = [\Delta_1]_V$；否则设为 Δ_2。

演绎规则适用于相对于清理规则已规范化的 LJB-序列式，其中约束变量彼此命名不同，且其名称也不同于自由变量。容易验证，这些性质在规则作用下得以保持。此外，在 LJB 中，我们处理的是公式，而不是模去 α-等价关系后的公式。

系统 LJB 的规则如图 2 所示。在 $L \to$ 规则中，括号从 LJB 上下文中的某些项移到其他项上，使括号内的公式 $A_1 \to \ldots \to A_n \to P$ 显露出来，以便使用。例如，LJB-序列式 $Q(x)\ [Q(x) \to P]_x \vdash P$ 自底向上变换为 $[Q(x)]_x, Q(x) \to P \vdash Q(x)$。关键在于， $Q(x)$ 中的两个 x 与 $Q(x) \to P$ 中的两个 x，在第一个 LJB-序列式中彼此分离，而变换后仍保持分离。

LJB 系统的主要价值在于，正如例 2.3 所示，任意正公式在 LJB 中的搜索树都是规则的。这一性质是以下命题的结果，该命题已在[11] （命题 4.5）中得到证明。

命题 2.1 设 A 为一个正公式。存在一个有限集 $\mathcal{S}$，使得所有出现在于 LJB-证明中的序列式 $\vdash A$ 都属于 $\mathcal{S}$。

例：令 $A = (B \to Q) \to Q$，其中 $B = \forall y\ ((P(y) \to Q) \to (P(y) \to Q))$。序列式 $\vdash A$ 的搜索树见图 3。

注意，在尝试证明序列式 $B \to Q$、 $P(y) \to Q$、 $P(y) \vdash Q$ 时，我们可以将 $L \to$规则应用于命题 $B \to Q$，也可以应用于命题 $P(y) \to Q$，从而在搜索树中产生两个分支。对于序列式 $B \to Q$、 $[P(y) \to Q$、 $P(y)]_y$、 $P(y) \to Q$、 $P(y) \vdash Q$，情况也是如此。还要注意，搜索树是无限且正规的。当序列式 $B \to Q$、 $[P(y) \to Q$、 $P(y)]_y \vdash (P(y) \to Q) \to P(y) \to Q$ 第二次出现时，我们截断了这条无限分支。

2.4 图式

现在我们引入图式，它们是系统 LJB 的证明项。不同于我们对 LJ$^+$ 所做的处理，我们不为 LJB 中的假设指定名称。相反，我们为每个这样的公式选择一个规范的证明变量。带有图式的 LJB 规则如图 4 所示。

3 用于枚举图式的文法

在本节中，我们将证明，尽管给定规范化 LJB 序列式的图式集合可能是无限的，但仍可用上下文无关文法来描述。

定义 3.1（方案文法）设 $\Gamma \vdash A$ 是一个规范化 LJB 序列式， $\mathcal{S}$ 是在 $\Gamma \vdash A$ 的推导中可能出现的序列式的有限集。对于 $\mathcal{S}$ 中的每个序列式 S，我们将其与一个非终结符 s_S 关联起来，并建立图 5 中所示的规则。

生成例 2.3 中给出的 A 类型的图式的文法，以及由该文法生成的一个图式，详见下面的例子。

例：生成类型为 $A = (B \to Q) \to Q$ where $B = \forall y\,((P(y) \to Q) \to (P(y) \to Q))$ 图式的文法为

$$\begin{array}{lcl} S & \to & \lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda y\lambda\beta\lambda\gamma\ (\beta\ \gamma)) \\ S & \to & \lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda y\lambda\beta\lambda\gamma\ (\alpha\ \lambda y\ S_1)) \\ S_1 & \to & \lambda\beta\lambda\gamma\ (\beta\ \gamma) \\ S_1 & \to & \lambda\beta\lambda\gamma\ (\alpha\ \lambda y\ S_1) \end{array}$$

其中，S是与序列式 $\vdash A$, S_1关联的非终结符；$B \to Q$是与 $[P(y) \to Q, P(y)]_y \vdash (P(y) \to Q) \to P(y) \to Q$关联的非终结符；$\alpha$是类型为 $B \to Q$, β的典范变量；$P(y) \to Q$是类型为 $\gamma(P)$的典范变量。

由该文法生成的一个图式为

$$\lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda y\lambda\beta\ \lambda\gamma\ (\alpha\ \lambda y\lambda\beta\ \lambda\gamma\ (\beta\ \gamma)))$$

命题 3.1（可靠性）设 $\Gamma \vdash A$ 是一个规范化 LJB 序列式。那么，对于在 $s_{\Gamma\vdash A}$中生成的任意图式 π，有 $\Gamma \vdash \pi : A$。

证明。对文法中 π 的推导作归纳。 □

命题 3.2（完备性）设 $\Gamma \vdash A$ 是一个规范化 LJB 序列式。那么，每个满足 $\Gamma \vdash \pi : A$ 的图式 π 都在 $s_{\Gamma\vdash A}$ 中生成。

证明。对带项模式的 LJB 系统中 $\Gamma \vdash \pi : A$ 的推导进行归纳。 □

4 生成证明项

现在，我们可以通过上一节介绍的文法项模式枚举算法，给出一个项枚举算法。为此，我们将定义一个函数 $\mathcal{H}$，粗略地说，它以一种满足以下条件的方式将一个图式映射到一个有限项集：t 是证明项，当且仅当存在一个图式 π，使得 $t \in \mathcal{H}(\pi)$。要定义这个函数 $\mathcal{H}$，我们需要一个处理上下文清理的函数 $\mathcal{G}$。定义函数 $\mathcal{G}$ 时，唯一非平凡的情形是规则 $II \longrightarrow I$，而该情形将由另一个函数 $\mathcal{F}$ 处理。

下面的定义 4.1 和 4.2 将公式通常的 α-等价概念扩展到 LJ^+ 和 LJB 的序列式，并且在本节余下部分中会派上用场。

定义 4.1（序列式的 α-等价）若存在一个项变量的变量重命名 σ（即一个将变量映射到变量的单射代换），使得 Γ' 与 $\sigma\Gamma$ 是 α-等价的，且 A' 与 σA 是 α-等价的，则称两个序列式 $\Gamma \vdash A$ 和 $\Gamma' \vdash A'$ 是 α-等价的。

例如，序列式 $P(x) \vdash P(x)$ 和 $P(y) \vdash P(y)$ 是 α-等价的。其直观含义是，在序列式 $\Gamma \vdash A$ 中，Γ 和 A 中的自由变量被视为由符号 $\vdash$ 隐式约束。

We 我们还将 α-等价的概念扩展到带名公式的 LJ^+ 序列式，如下所示。

定义 4.2（带名公式的序列式的 α-等价）若存在一个针对项变量和证明变量的变量重命名 σ，使得 $\Gamma \vdash A$ 与 $\Gamma' \vdash A'$ 是 α-等价的，当且仅当 Γ' 与 $\sigma\Gamma$ 是 α-等价的，且 A' 与 σA 是 α-等价的。

例如，序列式 $\alpha : P(x) \vdash P(x)$ 和 $\beta : P(y) \vdash P(y)$ 是 α-等价的。

定义 4.3（新鲜的 α-变体与扁平化）设 $\Gamma \vdash A$ 是一个规范化 LJB 序列式，$\Gamma \vdash A$ 的一个新鲜 α-变体 $\Gamma' \vdash A'$ 是一个与 $\Gamma \vdash A$ α-等价、且所有约束变量名称各不相同的 LJB 序列式。

如果一个 LJ^+-序列式 $\Delta \vdash B$ 是通过在 $\Gamma \vdash A$ 的新鲜变体 α 中删去所有括号，并用不同的证明变量为 Γ 中的所有公式命名而得到的，那么它就称为规范化 LJB 序列式 $\Gamma \vdash A$ 的一种扁平化。

例：LJB-序列式 $[P(x)\ P(x)\ \to Q]_x, [P(x)\ P(x)\ \to Q]_x \vdash Q$ 的一种扁平化是 LJ$^+$-序列式$\alpha_1 :\ P(x_1)\ \beta_1 :\ (P(x_1)\ \to Q)\ \alpha_2 :\ P(x_2)\ \beta_2 :\ (P(x_2)\ \to Q) \vdash Q$。

注意，同一 LJB-序列的两种扁平化结果是 α-等价的 LJ$^+$-序列式。

定义 4.4（部分重复）设 $\Sigma \vdash A$ 是 LJ$^+$的一个序列式。若存在两个定义域相同的项变量代换 σ_1 和 σ_2，将其定义域中的变量重命名为新且互异的变量，并且对于 Σ中的每个变量 $\gamma : C$，Δ 包含变量 $\gamma_1 : \sigma_1 C$ 或变量 $\gamma_2 : \sigma_2 C$，或同时包含二者，且 B为 $\sigma_1 A$或 $\sigma_2 A$，则称 LJ$^+$ 中的序列式 $\Delta \vdash B$ 是 $\Sigma \vdash A$ 的部分重复。

例：如果序列式 $\Sigma \vdash A$ 是

$$\alpha : (Px \to Q), \beta : Px \vdash Q$$

并且 $\sigma_1 = \sigma_2 = id$，那么一种部分重复是序列式

$$\alpha_1 : (Px \to Q), \beta_1 : Px, \alpha_2 : (Px \to Q), \beta_2 : Px \vdash Q$$

如果序列式 $\Sigma \vdash A$ 是

$$\alpha : (Px \to Q), \beta : Px \vdash Q$$

但 $\sigma_1 = x_1/x$ 和 $\sigma_2 = x_2/x$，那么一种部分重复是序列式

$$\alpha_1 : (Px_1 \to Q), \beta_1 : Px_1, \alpha_2 : (Px_2 \to Q), \beta_2 : Px_2 \vdash Q$$

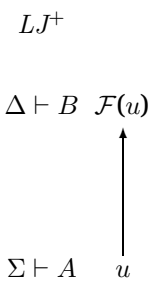
如果序列式 $\Sigma \vdash A$ 是

$$\alpha : (Px \to Q), \beta : Px \vdash Px$$

并且 $\sigma_1 = x_1/x$ 和 $\sigma_2 = x_2/x$，那么一个部分重复是序列式

$$\alpha_1 : (Px_1 \to Q), \beta_1 : Px_1, \alpha_2 : (Px_2 \to Q), \beta_2 : Px_2 \vdash Px_1$$

定义 4.5（函数 $\mathcal{F}$）设 $\Sigma \vdash A$ 是 LJ$^+$ 的一个序列式，$\Delta \vdash B$ 是通过代换 σ_1 和 σ_2从该序列式得到的一个部分重复。



设 u 是 $\Sigma \vdash A$ 的一个证明项。我们按照 u 的结构进行归纳，定义一个有限集 $\mathcal{F}^{\Delta \vdash B}_{\Sigma \vdash A}(u)$，其中包含 $\Delta \vdash B$ 的证明项。

- 如果 $u = (\alpha\ u_1\ ...\ u_n)$，那么 A 是原子公式。设 $C_1 \to ... \to C_n \to A$ 是 α的类型。对于 $i \in \{1, 2\}$，如果 Δ 包含变量 $\alpha_i : \sigma_i C_1 \to ... \to \sigma_i C_n \to \sigma_i A$ 和 $\sigma_i A = B$，那么我们取所有形如 $(\alpha_i\ u'_1\ ...\ u'_n)$ 的项，其中 u'_1 是 $\mathcal{F}^{\Delta \vdash \sigma_i C_1}_{\Sigma \vdash C_1}(u_1)$ 的一个元素，....., u'_n 是 $\mathcal{F}^{\Delta \vdash \sigma_i C_n}_{\Sigma \vdash C_n}(u_n)$ 的一个元素；否则，不取任何以变量 α_i 为头部的项。

- 若 $u = \lambda x\ u_1$，则 A 的形式为 $\forall x\ A_1$，而 B 的形式为 $\forall x\ B_1$，其中 B_1 要么是 $\sigma_1 A_1$，要么是$\sigma_2 A_1$；我们取所有形式为 $\lambda x\ u'_1$ 的项，其中 u'_1 是 $\mathcal{F}^{\Delta \vdash B_1}_{\Sigma \vdash A_1}(u_1)$ 的一个元素。
- 如果 $u = \lambda\alpha\ u_1$，那么 A 具有 $A_1 \to A_2$ 的形式，而 B 具有 $B_1 \to B_2$的形式，其中 B_1 是 $\sigma_1 A_1$ 或 $\sigma_2 A_1$，B_2 是 $\sigma_1 A_2$ 或 $\sigma_2 A_2$，我们取所有具有 $\lambda\alpha'\ u'_1$ 形式且 u'_1 是 $\mathcal{F}^{\Delta, \alpha' : B_1 \vdash B_2}_{\Sigma\ \alpha\ A_1 \vdash A_2}$ 的项。

例：如果序列式 $\Sigma \vdash A$ 是

$$\alpha : (Px \to Q), \beta : Px \vdash Q$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = id$ 且一个部分重复是该序列式

$$\alpha_1 : (Px \to Q), \beta_1 : Px, \alpha_2 : (Px \to Q), \beta_2 : Px \vdash Q$$

then

$$\mathcal{F}^{\Delta \vdash Q}_{\Sigma \vdash Q}((\alpha\ \beta)) = \{(\alpha_1\ \beta_1), (\alpha_1\ \beta_2), (\alpha_2\ \beta_1), (\alpha_2\ \beta_2)\}$$

如果序列式 $\Sigma \vdash A$ 是

$$\alpha : (Px \to Q), \beta : Px \vdash Q$$

$\sigma_1 = x_1/x$ 且 $\sigma_2 = x_2/x$ 且一个部分重复是该序列式

$$\alpha_1 : (Px_1 \to Q), \beta_1 : Px_1, \alpha_2 : (Px_2 \to Q), \beta_2 : Px_2 \vdash Q$$

then

$$\mathcal{F}^{\Delta \vdash Q}_{\Sigma \vdash Q}((\alpha\ \beta)) = \{(\alpha_1\ \beta_1), (\alpha_2\ \beta_2)\}$$

注意，在选择了 α_1之后，在第一种情况下，我们得到

$$\mathcal{F}^{\Delta \vdash Px}_{\Sigma \vdash Px}(\beta) = \{\beta_1, \beta_2\}$$

而在第二种情况下，我们得到

$$\mathcal{F}^{\Delta \vdash Px_1}_{\Sigma \vdash Px}(\beta) = \{\beta_1\}$$

我们相对宽松的部分重复概念允许出现集合$\mathcal{F}^{\Delta \vdash B}_{\Sigma \vdash A}(u)$为空的“病态”例子：如果序列式 $\Sigma \vdash A$ 是

$$\alpha : (Px \to Q), \beta : Px \vdash Q$$

以及 $\sigma_1 = x_1/x$ 以及 $\sigma_2 = x_2/x$，那么一个部分重复就是序列式

$$\alpha_1 : (Px_1 \to Q), \beta_2 : Px_2 \vdash Q$$

以及 $\mathcal{F}^{\Delta \vdash B}_{\Sigma \vdash A}((\alpha\ \beta)) = \varnothing$。

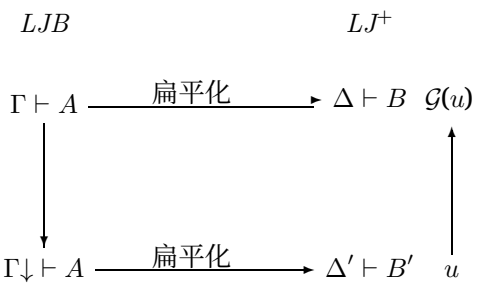
命题 4.1（可靠性）设 $\Delta \vdash B$ 是 $\Sigma \vdash A$的一个部分重复。若 u 是 $\Sigma \vdash A$的证明，且 $t \in \mathcal{F}^{\Delta \vdash B}_{\Sigma \vdash A}(u)$，那么 t 是 $\Delta \vdash B$的证明。

证明。对 u的结构作归纳。 □

命题 4.2（完备性）设 $\Delta \vdash B$ 是 $\Sigma \vdash A$的一个部分重复。若 t 是$\Delta \vdash B$ 的证明，则存在一个与 t高度相同的证明 u，它证明 $\Sigma \vdash A$，且满足 $t \in \mathcal{F}^{\Delta \vdash B}_{\Sigma \vdash A}(u)$。

证明。对 t的结构作归纳。项 u 是通过将每个形如 $\sigma_1 x$ 或 $\sigma_2 x$ 的变量替换为 x得到的。□

定义 4.6（函数 $\mathcal{G}$）设 $\Gamma \vdash A$ 为规范化 LJB 序列式，$\Gamma\downarrow \vdash A$ 为其范式。设 $\Delta \vdash B$ 为 $\Gamma \vdash A$ 的扁平化，$\Delta' \vdash B'$ 为 $\Gamma\downarrow \vdash A$的扁平化。



对于任意证明项 u of $\Delta' \vdash B'$，我们通过对从 Γ to $\Gamma\downarrow$ 的归约长度进行归纳，构造由 $\Delta \vdash B$ 的证明项组成的集合 $\mathcal{G}^{\Delta \vdash B}_{\Delta' \vdash B'}(u)$。

• 若 $\Gamma\downarrow = \Gamma$，则 $\Delta' \vdash B'$ and $\Delta \vdash B$ 是 α-等价的，因此存在对 Δ and B 的自由变量进行重命名的操作 σ，使得 Δ 与 $\sigma\Delta'$ 是 α-等价的，且 B 与 $\sigma B'$ 是 α-等价的。我们取$\mathcal{G}^{\Delta\vdash B}_{\Delta'\vdash B'}(u) = \{\sigma u\}$。

• 如果 Γ 在一个清理步骤中重写为 Γ_1，然后 Γ_1 重写为 $\Gamma\downarrow$，那么令 $\Delta_1 \vdash B_1$ 为 $\Gamma_1 \vdash A$ 的一个扁平化，并令 $S = \mathcal{G}^{\Delta_1\vdash B_1}_{\Delta'\vdash B'}(u)$。现在考虑用于将 Γ 约简为 Γ_1的规则。如果此规则是 $[\ ]_V \to \varnothing$ 或 $[\Gamma, I]_V \to [\Gamma]_V$，$I$那么 $\Delta \vdash B$和 $\Delta_1 \vdash B_1$是 α-等价的，因此存在一个重命名 σ，它作用于 Δ 和 B 的自由变量，使得 Δ 与 $\sigma\Delta_1$ 是 α-等价的，且 B 与 σB_1是 α-等价的。我们取 $\mathcal{G}^{\Delta\vdash B}_{\Delta'\vdash B'}(u) = \{\sigma t \mid t \in S\}$。如果此规则是 $II \to I$，那么 $\Delta \vdash B$ 是 $\Delta_1 \vdash B_1$的部分重复。我们取 $\mathcal{G}^{\Delta\vdash B}_{\Delta'\vdash B'}(u) = \bigcup_{t\in S} \mathcal{F}^{\Delta\vdash B}_{\Delta_1\vdash B_1}(t)$。

例：序列式

$$[P(x), P(x) \to Q]_x, [P(x), P(x) \to Q]_x \vdash Q$$

规范化为

$$[P(x), P(x) \to Q]_x \vdash Q$$

第一个序列式的扁平化结果为 $\Delta \vdash Q$，其中 Δ 是上下文

$$\alpha_1 : P(x_1), \beta_1 : (P(x_1) \to Q), \alpha_2 : P(x_2), \beta_2 : (P(x_2) \to Q)$$

第二个序列式的扁平化结果为序列式 $\Delta' \vdash Q$，其中 Δ' 是上下文

$$\alpha : P(x), \beta : (P(x) \to Q)$$

Then

$$\mathcal{G}^{\Delta\vdash Q}_{\Delta'\vdash Q}((\alpha\ \beta)) = \{(\beta_1\ \alpha_1), (\beta_2\ \alpha_2)\}$$

命题 4.3（可靠性） 设 $\Gamma \vdash A$ 是规范化 LJB 序列式， $\Gamma\downarrow \vdash A$ 是其范式。设 $\Delta \vdash B$ 是 $\Gamma \vdash A$ 的扁平化结果，$\Delta' \vdash B'$ 是 $\Gamma\downarrow \vdash A$的扁平化结果。设 u 是 $\Delta' \vdash B'$和$t \in \mathcal{G}^{\Delta\vdash B}_{\Delta'\vdash B'}(u)$的证明项。那么 t 是 $\Delta \vdash B$的证明项。

证明。根据从 Γ 到 $\Gamma\downarrow$的归约长度进行归纳，在规则 $II \longrightarrow I$的情形下使用命题 4.1。□

命题 4.4（完备性）设 $\Gamma \vdash A$ 是一个规范化 LJB 序列式， $\Gamma\downarrow \vdash A$ 是它的范式。设 $\Delta \vdash B$ 是 $\Gamma \vdash A$ 的一个扁平化， $\Delta' \vdash B'$ 是 $\Gamma\downarrow \vdash A$的一个扁平化。若 t 是 $\Delta \vdash B$的一个证明，则存在一个与 t高度相同的 $\Delta' \vdash B'$ 的证明 u，使得$t \in \mathcal{G}^{\Delta\vdash B}_{\Delta'\vdash B'}(u)$。

证明。对从 Γ 到 $\Gamma\downarrow$的归约长度进行归纳；规则 $II \longrightarrow I$的情形使用命题 4.2。□

定义4.7（函数 $\mathcal{H}$）设 $\Gamma \vdash A$ 是一个规范化 LJB 序列式， $\Delta \vdash B$ 是$\Gamma \vdash A$的一个扁平化。

$$\begin{array}{ccc} LJB & & LJ^+ \\ \Gamma \vdash A & \xrightarrow{\text{扁平化}} & \Delta \vdash B \\ \pi & \longrightarrow & \mathcal{H}(\pi) \end{array}$$

设 π 是序列式 $\Gamma \vdash A$ 的一个方案，我们通过对 π 的结构进行归纳，将一组类型为 $\Delta \vdash B$ 的 LJ^+ 证明项 $\mathcal{H}^{\Delta\vdash B}_{\Gamma\vdash A}(\pi)$ 与 π 关联起来。

• 若 $\pi = (\alpha\ \pi_1\ \ldots\ \pi_n)$，则令 $A_1 \to \ldots \to A_n \to A$ 为 α的类型。选取 Γ中公式 $A_1 \to \ldots \to A_n \to A$ 的出现位置，使得规则 $L \to$可应用于该位置，并且对于所有 i，方案 π_i 具有类型 $\Gamma^*\downarrow \vdash A_i$，其中 $\Gamma^*\downarrow$ 是通过将 $L \to$ 应用于该位置而得到的上下文。对于每个选定的出现位置，令 α': $B_1 \to \ldots \to B_n \to B$为 Δ中对应的声明。序列式 $\Delta \vdash B$ 也是 $\Gamma^* \vdash A$ 的一个扁平化，而序列式 $\Delta \vdash B_i$是 $\Gamma^* \vdash A_i$的一个扁平化。考虑 $\Gamma^*\downarrow \vdash A_i$的一个扁平化 $\Delta' \vdash B'_i$，构造 $S_i = \mathcal{H}^{\Delta'\vdash B'_i}_{\Gamma^*\downarrow\vdash A_i}(\pi_i)$ 和 $S'_i = \bigcup_{t\in S_i} \mathcal{G}^{\Delta\vdash B_i}_{\Delta'\vdash B'_i}(t)$。集合 $\mathcal{H}^{\Delta\vdash B}_{\Gamma\vdash A}(\pi)$ 包含形如 $(\alpha'\ t_1\ \ldots\ t_n)$ 的项，其中 α': $B_1 \to \ldots \to B_n \to B$属于 Δ、对应于一个选定的出现位置，并且满足 $t_i \in S'_i$。

• 若 $\pi = \lambda x\ \pi_1$，则 $A = \forall x\ A_1$、$B = \forall y\ B_1$ 和 π_1 是 $[\Gamma]_V\downarrow \vdash A_1$的一个方案。序列式 $\Delta \vdash B_1$是 $[\Gamma]_V \vdash A_1$的一个扁平化。令 $[\Gamma]_V\downarrow \vdash A_1$的一个扁平化为 $\Delta' \vdash B_1'$，构造 $S = \mathcal{H}^{\Delta' \vdash B_1'}_{[\Gamma]_V\downarrow \vdash A_1}(\pi_1)$ 和 $S' = \bigcup_{t\in S} \mathcal{G}^{\Delta\vdash B_1}_{\Delta'\vdash B_1'}(t)$。集合 $\mathcal{H}^{\Delta\vdash B}_{\Gamma\vdash A}(\pi)$ 是由 S'中形如 $\lambda y\ t$ 的项构成的集合。

• 如果 $\pi = \lambda\alpha:\ A_1\ \pi_1$，那么 $A = A_1 \to A_2$ 和 $B = B_1 \to B_2$ 和 π_1 是 $(\Gamma, A_1)\downarrow \vdash A_2$的方案。序列式 $\Delta, \alpha':\ B_1 \vdash B_2$是 $\Gamma, A_1 \vdash A_2$的扁平化。令 $\Delta' \vdash B_2'$为 $(\Gamma, A_1)\downarrow \vdash A_2$的扁平化，设 $S = \mathcal{H}^{\Delta'\vdash B_2'}{}_{(\Gamma,A_1)\downarrow\vdash A_2}(\pi_1)$ 和 $S' = \bigcup_{t\in S} \mathcal{G}^{\Delta}_{,\ \Delta'\vdash B_2'}{}^{\alpha':\ B_1\vdash B_2}(t)$。集合 $\mathcal{H}^{\Delta\vdash B}_{\Gamma\vdash A}(\pi)$ 是形如 $\lambda\alpha':\ B_1\ t$（其中 t 属于 S'）的项的集合。

例：继续例 2.3，令

$$\pi = \lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda y\lambda\beta\ \lambda\gamma\ (\alpha\ \lambda y\lambda\beta\ \lambda\gamma\ (\beta\ \gamma)))$$

集合 $\mathcal{H}^{\vdash A}_{\vdash A}(\pi)$ 包含以下两个项

$$\lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda y_1\lambda\beta_1\lambda\gamma_1\ (\alpha\ \lambda y_2\lambda\beta_2\lambda\gamma_2\ (\beta_1\ \gamma_1)))$$
$$\lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda y_1\lambda\beta_1\lambda\gamma_1\ (\alpha\ \lambda y_2\lambda\beta_2\lambda\gamma_2\ (\beta_2\ \gamma_2)))$$

其中 $\alpha:\ B \to Q$, $\beta_1:\ P(y_1)\ \to Q$, $\gamma_1:\ P(y_1)$, $\beta_2:\ P(y_2)\ \to Q$, $\gamma_2:\ P(y_2)$.

命题 4.5（可靠性）设 $\Gamma \vdash A$ 是一个规范化 LJB 序列式，$\Delta \vdash B$ 是 $\mathbf{LJ}^+$ 的一个序列式，且它是 $\Gamma \vdash A$ 的扁平化。那么对于 $\Gamma \vdash A$ 的每个方案 π，$\mathcal{H}^{\Delta\vdash B}_{\Gamma\vdash A}(\pi)$ 中的每个证明项都是 $\Delta \vdash B$ 的证明项。

证明。对 π 的高度进行归纳，并使用命题 4.3 进行上下文清理。 □

命题 4.6（完备性）设 $\Gamma \vdash A$ 是一个规范化 LJB 序列式，$\Delta \vdash B$ 是 $\mathbf{LJ}^+$ 的一个序列式，且 $\Delta \vdash B$ 是 $\Gamma \vdash A$ 的扁平化。那么对于 $\Delta \vdash B$ 的每个证明项 t，都存在 $\Gamma \vdash A$ 的一个方案 π，使得 $t \in \mathcal{H}^{\Delta\vdash B}_{\Gamma\vdash A}(\pi)$。

证明。根据 t的结构进行归纳。

• 如果 $t = (\alpha'\ t_1\ ...\ t_n)$，那么变量 $\alpha':\ B_1 \to ... \to B_n \to B$ 在 Δ 中声明，且 t_i 是 $\Delta \vdash B_i$的证明项。变量 α' 对应于 Γ中的一个公式 $A_1 \to ... \to A_n \to A$ 的出现，且 Γ 具有形式 Γ_1, $[\Gamma_2, [...\Gamma_{i-1}, [\Gamma_i, A_1 \to ... \to A_n \to A]_{V_{i-1}}...]_{V_2}]_{V_1}$。由于 $\Delta \vdash B$是 $\Gamma \vdash A$ 的扁平化，且 $A_1 \to ... \to A_n \to A$ 的这次出现对应于 $B_1 \to ... \to B_n \to B$，因此 A 在 $V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_{i-1}$中没有自由变量。因此，序列式 $\Delta \vdash B$ 也是 $\Gamma^* \vdash A$ 的扁平化，而$\Delta \vdash B_i$ 是 $\Gamma^* \vdash A_i$的扁平化。

令 $\Delta' \vdash B_i'$ 为 $\Gamma^*\downarrow \vdash A_i$的扁平化。根据命题 4.4，存在一个证明项 u_i，它是 $\Delta' \vdash B_i'$ 的证明项，且高度与 t_i 相同，使得 $t_i \in \mathcal{G}^{\Delta\vdash B_i}_{\Delta'\vdash B_i'}(u_i)$。根据归纳假设，对于每个$i \in \{1, \ldots, n\}$，都存在一个 $\Gamma^*\downarrow \vdash A_i$的方案 π_i，使得 $u_i \in \mathcal{H}^{\Delta'\vdash B_i'}_{\Gamma^*\downarrow\vdash A_i}(\pi_i)$。因此，若 α是类型为 $A_1 \to ... \to A_n \to A$ 的典范变量，则 $(\alpha\ \pi_1\ ...\ \pi_n)$ 是 $\Gamma \vdash A$的一个方案，并且 $(\alpha'\ t_1\ ...\ t_n) \in \mathcal{H}^{\Delta\vdash B}_{\Gamma\vdash A}(\alpha\ \pi_1\ ...\ \pi_n)$。

• 若 $t = \lambda y\ t_1$，则 $B = \forall y\ B_1$、$A = \forall x\ A_1$ 和 t_1 是 $\Delta \vdash B_1$ 的一个证明项，它是$[\Gamma]_V \vdash A_1$的扁平化。令 $\Delta' \vdash B_1'$ 为 $[\Gamma]_V\downarrow \vdash A_1$的扁平化。根据命题 4.4，存在一个证明项 u_1，它是 $\Delta' \vdash B_1'$ 的证明项，且高度与 t_1 相同，使得 $t_1 \in \mathcal{G}^{\Delta\vdash B_1}_{\Delta'\vdash B_1'}(u_1)$。根据归纳假设，存在一个 $[\Gamma]_V\downarrow \vdash A_1$ 的方案 π_1，使得 $u_1 \in \mathcal{H}^{\Delta'\vdash B_1'}_{[\Gamma]_V\downarrow\vdash A_1}(\pi_1)$。由此可得 $\lambda y\ t_1 \in \mathcal{H}^{\Delta\vdash B}_{\Gamma\vdash A}(\lambda x\ \pi_1)$。

• 若 $t = \lambda\alpha':\ B_1\ t_1$，则 $B = B_1 \to B_2$, $A = A_1 \to A_2$ 和 t_1 是 $\Delta, B_1 \vdash B_2$ 的一个证明项，它是 $\Gamma, A_1 \vdash A_2$的扁平化。设 $\Delta' \vdash B_2'$是 $(\Gamma, A_1)\downarrow \vdash A_2$的一个扁平化。由命题 4.4，存在一个 $\Delta' \vdash B_2'$ 的证明项 u_1，其高度与 t_1 相同，使得 $t_1 \in \mathcal{G}^{\Delta}_{,\Delta'\vdash B_2'}{}^{B_1\vdash B_2}(u_1)$。根据归纳假设，存在一个 $(\Gamma, A_1)\downarrow \vdash A_2$ 的方案 π_1，使得 $u_1 \in \mathcal{H}^{\Delta'\vdash B_2'}{}_{(\Gamma,A_1)\downarrow\vdash A_2}(\pi_1)$。设 α 为类型为 A_1的典范变量，则有 $\lambda\alpha'\ t_1 \in \mathcal{H}^{\Delta\vdash B}_{\Gamma\vdash A}(\lambda\alpha\ \pi_1)$。□

定理 4.1 设 A 为一个公式。那么，t 是 $\mathbf{LJ}^+$ 中 $\vdash A$ 的一个证明项，当且仅当存在一个由定义 3.1 中给出的文法生成的方案 π，使得 $t \in \mathcal{H}^{\vdash A}_{\vdash A}(\pi)$。

证明。由命题 3.1、3.2、4.5 和 4.6 可得。 □

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B\to X, Y\to X, Y\vdash Y}\,L\to \quad || \quad \dfrac{}{B\to X, Y\to X, Y\vdash X}\,R\to}{B\to X, Y\to X, Y\vdash B}\,L\to}{\dfrac{B\to X, Y\to X, Y\vdash X}{B\to X\vdash B}\,R\to}\,L\to$$
$$\dfrac{\dfrac{B\to X\vdash X}{\vdash \forall X\forall Y((B\to X)\to X)}\,R\to, R\forall}$$

图6：System F 中的一棵搜索树。

5 枚举 System F 中正类型的正规项

正如 [11], 所指出的，对于 System F 的每个正类型 T，我们都可以将谓词逻辑中的一个公式 $\Phi(T)$ 与单个一元谓词 ε 关联起来。

$$\Phi(X) = \varepsilon(X)$$
$$\Phi(T\to U) = \Phi(T)\to\Phi(U)$$
$$\Phi(\forall X\ T) = \forall X\ \Phi(T)$$

并且，在 System F 中，类型为 T 的正规项恰好是谓词逻辑中 $\Phi(T)$ 的证明项。因此，前几节所述的枚举算法可直接应用于 System F。下面的例子（其中我们用 X 表示 $\varepsilon(X)$）展示了该算法。

例：设 $A = \forall X((\forall Y((Y\to X)\to(Y\to X))\to X)\to X)$。设 $\alpha\colon \forall Y((Y\to X)\to(Y\to X))\to X, \beta\colon Y\to X$ 并且 $\gamma\colon Y$。设 $S = S_{\vdash A}$ 和 $S_1 = S_{B\to X,\ [Y\to X, Y]_Y\vdash\ (\ Y\to X\ )\ \to Y\to X}$。方案文法如下：

$$\begin{array}{lcl} S & \to & \lambda X\ \lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda Y\lambda\beta\ \lambda\gamma\ (\beta\ \gamma)) \\ S & \to & \lambda X\ \lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda Y\lambda\beta\ \lambda\gamma\ (\alpha\ \lambda Y\ S_1)) \\ S_1 & \to & \lambda\beta\ \lambda\gamma\ (\beta\ \gamma) \\ S_1 & \to & \lambda\beta\ \lambda\gamma\ (\alpha\ \lambda Y S_1) \end{array}$$

很容易验证，下面的方案由该文法生成

$$\lambda X\ \lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda Y\ \lambda\beta\ \lambda\gamma\ (\alpha\ \lambda Y\ \lambda\beta\ \lambda\gamma\ (\beta\ \gamma)))$$

而该方案又生成两个证明项：

$$\lambda X\ \lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda Y_1\ \lambda\beta_1\ \lambda\gamma_1\ (\alpha\ \lambda Y_2\ \lambda\beta_2\ \lambda\gamma_2\ (\beta_1\ \gamma_1)))$$
$$\lambda X\ \lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda Y_1\ \lambda\beta_1\ \lambda\gamma_1\ (\alpha\ \lambda Y_2\ \lambda\beta_2\ \lambda\gamma_2\ (\beta_2\ \gamma_2)))$$

其中 $\alpha\colon\ B\to X,\ \ \beta_1\colon\ Y_1\to X,\ \ \gamma_1\colon\ Y_1,\ \ \beta_2\colon\ Y_2\to X,\ \ \gamma_2\colon\ Y_2$。

更一般地，由该文法生成的一个深度为 n 的方案，会产生 $n-1$ 个类型为 A 的证明项。E

xample: Consider 现在 t he 前束 f式 o f the formula of the 先前ious 示例 le. Let $A = \forall X\forall Y((B\to X)\to X)$，其中 $B = (Y\to X)\to(Y\to X)$。A 的搜索树见图6。

设 $\alpha\colon((Y\to X)\to(Y\to X))\to X, \beta\colon Y\to X$ 且 $\gamma\colon Y$。设 $S = S_{\vdash A}$ 和 $S_1 = S_{B\to X, Y\to X, Y\vdash X}$。相应的方案文法为

$$\begin{array}{lcl} S & \to & \lambda X\ \lambda Y\ \lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda\beta\ \lambda\gamma\ S_1) \\ S_1 & \to & (\beta\ \gamma) \\ S_1 & \to & (\alpha\ \lambda\beta\ \lambda\gamma\ S_1) \end{array}$$

容易验证，下面的方案由该文法生成

$$\lambda X\ \lambda Y\ \lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda\beta\ \lambda\gamma\ (\alpha\ \lambda\beta\ \lambda\gamma\ (\beta\ \gamma)))$$

而该方案又生成四个证明项

$$\lambda X\ \lambda Y\ \lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda\beta_1\ \lambda\gamma_1\ (\alpha\ \lambda\beta_2\ \lambda\gamma_2\ (\beta_1\ \gamma_1)))$$
$$\lambda X\ \lambda Y\ \lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda\beta_1\ \lambda\gamma_1\ (\alpha\ \lambda\beta_2\ \lambda\gamma_2\ (\beta_1\ \gamma_2)))$$
$$\lambda X\ \lambda Y\ \lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda\beta_1\ \lambda\gamma_1\ (\alpha\ \lambda\beta_2\ \lambda\gamma_2\ (\beta_2\ \gamma_1)))$$
$$\lambda X\ \lambda Y\ \lambda\alpha\ (\alpha\ \lambda\beta_1\ \lambda\gamma_1\ (\alpha\ \lambda\beta_2\ \lambda\gamma_2\ (\beta_2\ \gamma_2)))$$

其中 $\alpha\colon\ B\to X, \beta_1\colon\ Y\to X, \gamma_1\colon\ Y, \beta_2\colon\ Y\to X, \gamma_2\colon\ Y$。

Mor一般而言，由此文法生成的深度为 n 的一个方案会产生 $(n-1)^{\ 2}$ 个证明项。

结论

再说一次，谓词逻辑的复杂性源于否定量词：去除它们后，逻辑不仅变得可判定，而且证明也具有简单的结构。

通常将证明解释为项，是基于上下文为多重集或列表的演绎表述。上下文为集合时，与这些项相对应的是图式。图式的结构甚至比项更简单，其意义或许不止于证明枚举问题。

参考文献

[1] Kleene, S.C.（1952）《元数学导论》。North-Holland。[2] Zaionc, M.（2005）四阶类型 λ可定义性的概率方法。《电子理论计算机科学札记》，140，41–54。[3] Loader, R.（2001）λ可定义性的不可判定性。《逻辑、意义与计算：纪念 Alonzo Church 文集》，Kluwer，331–342。[4] Joly, Th.（2005）论 λ可定义性 I：固定模型问题与匹配问题的推广。《基础信息学》，65(1-2)，135–151。[5] Takahashi, M.、Akama, Y. 和 Hirokawa, S.（1996）正规证明及其文法。《信息与计算》，125(2)，144–153。[6] Ben-Yelles, C.B.（1979）λ演算中的类型赋值；《句法与语义》。博士论文。[7] Hindley, J.R.（1997）《基础简单类型论》。Cambridge Universty Press。[8] Zaionc, M.（1988）通过类型化 λ演算中的闭项构造证明的机械化过程。《自动推理杂志》，4，173–190。[9] Broda, S. 和 Damas, L.（2001） TA-lambda 中类型正规项的上下文无关文法表示。EPIA’01，LNAI 2258。[10] Broda, S. 和 Damas, L.（2005）论某类型的长正规项。《逻辑与计算杂志》15，353–390。[11] Dowek, G. 和 Jiang, Y.（2006）特征变量、括号化与正极小谓词逻辑的可判定性。《理论计算机科学》，360，193–208。[12] Krivine, J.-L.（1996）经典逻辑完备性定理的一个形式化直觉主义证明。《符号逻辑通报》2(4)，405–421。