arXiv:2305.01444v1 [math.CO] 2 May 2023

通过反转弧提高弧连通度

Pierre Hoppenot，Zolt´an Szigeti

格勒诺布尔-阿尔卑斯大学，格勒诺布尔国立综合理工学院，法国国家科学研究中心，G-SCOP。

2023年5月3日

摘要

我们证明，若有向图 D 的弧连通度至多为$\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor$，且对弧集 F 在 D 中重新定向后得到一个 k-弧连通的有向图，那么我们可以对 F 中的一条弧重新定向，而不降低 D. 的弧连通度。这改进了 Fukuda、Prodon、Sakuma [2] 以及 Ito 等人 [3] 针对 $k \in \{2,3\}$的结果。

1 引言

本文研究能够提高有向图弧连通度的重新定向。Nash-Williams [5] 证明，有向图 D 存在一个k-弧连通的重新定向，当且仅当D 的底层无向图是 $2k$-边连通的。Ito 等人 [3] 提出了一种原创算法，用于在此类定向存在时找到它：从任意一种定向开始，逐条反转有向边，并确保每一步都不会降低当前有向图的弧连通度。由此，他们为上述 Nash-Williams [5]的结果给出了新的算法证明。由此自然产生一个问题：如果 D 不是 k-弧连通的，而对D 中的弧集 F 重新定向后得到一个 k-弧连通的有向图，那么能否逐条对 F 中的弧重新定向，并确保每一步都不会降低当前有向图的弧连通度？对于 $k = 1$，答案显然是肯定的；对于 $k = 2$，根据 Fukuda、Prodon 和 Sakuma [2] 的一个结果，也可以做到。我们证明，对于$k = 3$，答案是肯定的；并说明对于 $k \geq 4.$，答案是否定的。$k \in \{2,3\}$ 的结果源于本文的主要贡献：若有向图 D 的弧连通度至多为 $\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor$，且对 D 中的弧集 F 重新定向后得到一个 k-弧连通的有向图，那么我们可以对 F 中的一条弧重新定向，而不降低 D.的弧连通度。我们还给出一个例子，说明在前述结果中，$\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor$ 不能替换为 $\lfloor\frac{2k}{3}\rfloor$.。

我们以必要的定义结束本节。若集合 $\mathcal{L}$ 的子集族 V满足：对于任意一对 X、$Y \in \mathcal{L}$，$X-Y$、$Y-X$、$X \cap Y$中至少有一个为空，则称其为层叠的。通常，对于 $X \subseteq V$，$\overline{X}$ 表示 $V-X$.

若对于 V的每个非空真子集 X，至少有 k 条边离开 X.，则无向图 $G = (V,E)$称为 k-边连通。G 的一个定向是由 G 得到的有向图：将 G 中的每条边 uv 替换为一条弧 uv 或 vu.

设 $D = (V, A)$为一个有向图，简称有向图。若 $V' \subseteq V$且 $A' \subseteq A.$，则有向图 $D' = (V', A')$是 D 的子图。当 $V' = V$时，我们称 D' 为生成子图。对于 $X \subseteq V$，$uv \in A$，若 $u \in V - X$ 且 $v \in X$（分别为 $u \in X$ 且 $v \in V - X$），则称 uv 进入（分别离开）X。我们用$\boldsymbol{\rho_A(X)}$（分别用 $\boldsymbol{\delta_A(X)}$）表示 A 中进入（分别离开）X的弧集。X 的入度 $|\rho_A(X)|$ 记为$\boldsymbol{d_A^-(X)}$。X 的出度 $|\delta_A(X)|$ 记为 $\boldsymbol{d_A^+(X)}$。对于互不相交的 $X, Y \subseteq V$，$\boldsymbol{d_A(X, Y)}$表示 A 中从 X 到 $Y.$ 的弧数。我们用 $\boldsymbol{\lambda(D)}$ 表示 $D.$ 的弧连通度，即 $= \min\{d_A^-(X) : \emptyset \neq X \subset V\}$。若 $\lambda(D) \geq k.$，则称 D 为 k-弧连通。若 $d_A^-(X) = \lambda(D)$（分别为 $d_A^+(X) = \lambda(D)$），则称 V 的子集X 为入紧（分别为出紧）。反转弧 $\vec{e} = uv$ 是指将 $\vec{e}$ 替换为$\boldsymbol{e} = vu.$ D。通过反转 $\vec{e}.$，从 D 得到的有向图记为e。通过反转所有弧，从 D 得到的有向图记为 $\boldsymbol{D}$。若 D' 可以通过反转 D.中的一些弧从 D 得到，则称有向图 D' 为D 的一个重新定向

2 先前结果

本节列出一些与我们的结果相关的定向和重新定向方面的结果。

关于连通性的无向图定向问题，其首个结果归功于 Robbins [6]。

定理1（Robbins[6]）。无向图存在 1-弧连通定向，当且仅当它是 2-边连通的。

Fukuda、Prodon 和 Sakuma [2] 的以下结果讨论了反转有向边而不降低 1-弧连通度的情形。

定理2（Fukuda、Prodon、Sakuma [2]）。设 $D = (V, A)$ 是 3-边连通无向图 G 的一个 1-弧连通定向。设 $F \subseteq A$，使得将 F 的有向边反转后由 D 得到的有向图是 1-弧连通的。则存在 F 的一条弧 $\vec{a}$，使得 $D(a)$ 是 1-弧连通的。

定理 2 立即推出推论1 关于通过反转有向边增强 1-弧连通度。

推论1. 设 $D_0 = (V, A)$ 为一个有向图，且 $F \subseteq A$ 满足：通过反转 F 的有向边从 D_0 得到的有向图是 2-弧连通的。那么，存在 D_0 的重新定向 D_1、...、D_ℓ，使得对于所有 $0 \leq i \leq \ell - 1$，D_{i+1} 均可通过反转 F 的一条有向边从 D_i 得到，且 $1 \leq \lambda(D_1) \leq \cdots \leq \lambda(D_\ell) = 2$。

Nash-Williams [5] 推广了定理 1 并刻画了存在 k-弧连通定向的无向图。

定理 3 (Nash-Williams[5])。一个无向图存在一个 k-弧连通定向，当且仅当它是 $2k$-边连通的。

Ito 等人的以下结果[3] 与推论1密切相关。他们提出了一种通过重新定向有向边来提高有向图弧连通度的新方法。他们的结果给出了定理 3的算法证明。

定理 4（Ito 等人 [3]）。设 $G = (V, E)$ 是一个 $2k$-边连通无向图，其中 $k \in \mathbb{Z}_+$，且 $D_0 = D$ 是 G. 的一个定向。那么存在 $D_1, \ldots, D_\ell$ 个 G 的定向，使得 $\ell \leq (k - \lambda(D))|V|^3$, D_{i+1} 可由 D_i 通过对所有 $0 \leq i \leq \ell - 1$ 反转一条弧得到，并且 $\lambda(D) \leq \lambda(D_1) \leq \cdots \leq \lambda(D_\ell) = k$.

我们提到，定理 4 最近已由 M 扩展到超图¨uhlenthaler、Peyrille 和 Szigeti，见 [4]。

我们需要一个关于极小 k-弧连通有向图的结果。

定理 5（Dalmazzo [1]）。每个 k-弧连通有向图 $D = (V, A)$ 都有一个生成的 k-弧连通有向图 $D' = (V, A')$，使得 $|A'| \leq 2k(|V| - 1)$。

3 新结果及其证明

本节给出我们的结果及其证明。

我们首先推广推论1。

定理 6. 设 D_0 是一个有向图，$k \geq 2$ 是一个整数，并且从 D_0 反转 F 的有向边后得到的有向图是 k-弧连通的。则存在 D_0 的重新定向 D_1、...、D_ℓ，使得对于所有 $0 \leq i \leq \ell - 1$、$\lambda(D) \leq \lambda(D_1) \leq \cdots \leq \lambda(D_\ell)$ 和 $\lambda(D_\ell) \geq \lfloor \frac{k+3}{2} \rfloor$.，$D_{i+1}$ 都可以通过反转 F 的一条弧而从 D_i 得到。

我们在以下定理 6 的推论中，对定理 4 作出了改进：对于 $k \in \{2, 3\}$，也就是说，k-弧连通度可以通过至多反转 $k(|V| - 1)$ 条弧来实现。

推论 2. 设 $G = (V, E)$ 是一个 $2k$-边连通的无向图，其中 $k \in \{2, 3\}$，且 $D_0 = (V, A)$ 是 G. 的一个定向。则存在 G 的定向 D_1、...、D_ℓ，使得对于所有 $0 \leq i \leq \ell - 1$、$\lambda(D_0) \leq \lambda(D_1) \leq \cdots \leq \lambda(D_\ell) = k$.，$\ell \leq k(|V| - 1)$、$D_{i+1}$ 可以通过反转一条弧而从 D_i 得到。

证明。（推论 2 的证明）根据定理 3，存在一个 k-弧连通的定向D' of G. 根据定理 5，存在一个 D' 的生成 k- 弧连通子图 $D'' =(V, A'')$，其中至多包含 $2k(|V| - 1)$ 条有向边。注意，D'' 也是一个 k- 弧连通有向图。由于 $|A \cap A''| + |A'' - A| = |A''| \leq 2k(|V| - 1)$，$A \cap A''$ 和 $A'' - A$ 中的一个（记为 F）至多包含 $k(|V| - 1)$ 条有向边。由于通过反转 D 中 F 的有向边或反向有向边而从 D 得到的有向图包含 D'' 或 D'' 作为生成子图，因此它是 k-弧连通的。因此，当 $k \in \{2, 3\}$, $\lfloor \frac{k+3}{2} \rfloor = k$. 时，我们可以应用定理 6 找到所需的定向序列。

□

定理 6 将由以下结果推出，该结果是本文的主要贡献。

定理 7. 设 $D = (V, A)$ 是一个有向图，$k \geq 2$ 是一个整数，且 $F \subseteq A$ 满足 $\lambda(D) \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$，并且通过反转 D 中 F 的弧所得到的有向图是 k-弧连通的。那么，F 中存在一条弧 $\vec{a}$，使得 $\lambda(D) \leq \lambda(D(a))$。

定理 7 可轻易推出定理 6。事实上，虽然 $\lambda(D_i) \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$，根据定理 7，我们可以找到一条弧 $\vec{a}_i$ 属于 F，使得对于有向图 $D_{i+1} = D_i(a_i)$，有 $\lambda(D_i) \leq \lambda(D_{i+1})$。由于对于 $k \geq 2$，我们有 $\lfloor \frac{k+3}{2} \rfloor \leq k$，因此可以找到所需的定向序列。

现在我们证明主要结果。

证明。（定理 7的）首先注意到，由于 $k \geq 2$，我们有

$$\lambda(D) \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \leq \frac{2k}{3} < k. \tag{1}$$

由此可得 $F \neq \emptyset$. 假设反证，对于所有 $\vec{a} \in F$， $\lambda(D) > \lambda(D(a))$。那么 $\lambda(D) \geq 1$.

断言 1. 对所有 $\vec{a} \in F$， $\vec{a}$ 进入 D. 中的一个入紧集

证明。设 $\vec{a} \in F$ 和 $X \subseteq V$ 满足 $\lambda(D(a)) = d^-_{D\ (a)}(X)$。由于 $\lambda(D) - 1 \geq \lambda(D(a)) = d^-_{D\ (a)}(X) \geq d^-_D(X) - 1 \geq \lambda(D) - 1$，处处都有等式成立，因此 $\vec{a}$ 进入 X，且 X 在 D. 中是入紧的 □

由断言 1，存在一个集合 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$，其中包含 D 中的入紧集，使得 F 的每条弧都进入 $\mathcal{L}$ 中的一个元素，并且 $\sum_{Z \in \mathcal{L}} |Z||V - Z|$ 最小。任取一个顶点 s，令其位于 V 中，并引入以下集合：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{F}_-} &= \{X \subseteq V - s, X \in \mathcal{L}\}, \\ \boldsymbol{\mathcal{F}_+} &= \{\overline{X} : s \in X \in \mathcal{L}\}, \\ \boldsymbol{\mathcal{F}} &= \mathcal{F}_- \cup \mathcal{F}_+. \end{aligned}$$

我们在以下断言中总结 $\mathcal{F}_-$、 $\mathcal{F}_+$ 和 $\mathcal{F}$ 的主要性质。

断言 2. $\mathcal{F}_-$、 $\mathcal{F}_+$ 和 $\mathcal{F}$ 满足以下性质。

$$\mathcal{F} \text{ is a non-empty laminar family,} \tag{2}$$
$$\text{Every arc of } F \text{ enters an element of } \mathcal{F}_- \text{ or leaves an element of } \mathcal{F}_+, \tag{3}$$
$$d^-_A(X) = \lambda(D) \text{ for all } X \in \mathcal{F}_-, \tag{4}$$
$$1 \leq k - \lambda(D) \leq d^+_F(X) - d^-_F(X) \leq d^+_F(X) - 1 \text{ for all } X \in \mathcal{F}_-, \tag{5}$$
$$d^+_A(Y) = \lambda(D) \text{ for all } Y \in \mathcal{F}_+, \tag{6}$$
$$1 \leq k - \lambda(D) \leq d^-_F(Y) - d^+_F(Y) \leq d^-_F(Y) - 1 \text{ for all } Y \in \mathcal{F}_+, \tag{7}$$

证明。由于 $F \neq \emptyset$，我们有 $\mathcal{F} \neq \emptyset$。应用众所周知的解交技术，结合 $\mathcal{L}$ 的极小性以及 [7]，的定理 2.1，容易看出 $\mathcal{F}$是一个层叠族，因此（2）成立。

设 $a \in F$。则 a 进入集合 $Z \in \mathcal{L}$。若 $s \in Z$，则 a 离开 $\overline{Z} \in \mathcal{F}_+$；若$s \notin Z$，则 a 进入 $Z \in \mathcal{F}_-$，因此（3）成立。

令 $X \in \mathcal{L}$。则 $d^-_A(X) = \lambda(D)$，且 (4) 成立。由$\mathcal{L}$的极小性， $d^-_F(X) \geq 1$。于是，由 $\lambda(D) < k \leq \lambda(D(F))$，可得 $1 \leq k - \lambda(D) \leq d^-_{D(F)}(X) - d^-_A(X) = d^+_F(X) - d^-_F(X)$，且 (5) 成立。若 $X \in \mathcal{F}_-$，则 $X \in \mathcal{L}$，因此 (4) 和 (5) 成立。若 $Y \in \mathcal{F}_+$，则 $\overline{Y} \in \mathcal{L}$，因此 $\overline{Y}$满足 (4) 和 (5)，从而Y 满足 (6) 和 (7)。 □

对于所有 $Z \in \mathcal{F} \cup \{V\}$，我们引入以下记号。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{I(Z)} &= \bigcup\{X \in \mathcal{F}_- : X \subsetneq Z\}, \\
\boldsymbol{O(Z)} &= \bigcup\{Y \in \mathcal{F}_+ : Y \subsetneq Z\}, \\
\boldsymbol{\mathcal{M}(Z)} &= \text{the maximal elements of } \mathcal{F} \text{ strictly contained in } Z, \\
\boldsymbol{\mathcal{M}_-(Z)} &= \mathcal{M}(Z) \cap \mathcal{F}_-, \\
\boldsymbol{\mathcal{M}_+(Z)} &= \mathcal{M}(Z) \cap \mathcal{F}_+, \\
\boldsymbol{M_-(Z)} &= \bigcup\{X \in \mathcal{M}_-(Z)\}, \\
\boldsymbol{M_+(Z)} &= \bigcup\{X \in \mathcal{M}_+(Z)\}.
\end{aligned}
$$

下面的引理将很容易推出该定理。

引理 1. 以下结论对所有 $X \in \mathcal{F}_- \cup \{V\}$ 和 $Y \in \mathcal{F}_+ \cup \{V\}$ 都成立。

$$
\begin{aligned}
\delta_F(X) \cap \delta_F(O(X)) &= \emptyset, && (8)\\
\rho_F(M_+(X)) &\subseteq \rho_F(X), && (9)\\
d_F^-(M_+(X)) - d_F^+(M_+(X)) &\geq (k - \lambda(D))|\mathcal{M}_+(X)|, && (10)\\
\rho_F(Y) \cap \rho_F(I(Y)) &= \emptyset, && (11)\\
\delta_F(M_-(Y)) &\subseteq \delta_F(Y), && (12)\\
d_F^+(M_-(Y)) - d_F^-(M_-(Y)) &\geq (k - \lambda(D))|\mathcal{M}_-(Y)|. && (13)
\end{aligned}
$$

证明。 反设引理不成立，并令 Z为违反条件（8）–（13）之一的极小集合。不妨设 $Z = Y \in \mathcal{F}_+ \cup \{V\}$，因为情形完全对称。令$S = M_-$（$Y$）且 $T = Y - S$.

断言 3. （12）对 Y成立

证明。反设存在 $uv \in \delta_F$（S）$\setminus \delta_F$（Y），即$u \in S$ 且 $v \in T$. 。于是 uv 留下了一个集合 $X \in \mathcal{M}_-$（Y）。由于 $X \in \mathcal{F}_-$ 且 $X \subsetneq Y$,， Y 的极小性蕴含 X 满足（8），因此 uv 不留下 O（X）。于是，根据（2）， uv 不留下 $\mathcal{F}_+$ 中的任何元素，因此，根据（3）， uv 进入 $\mathcal{F}_-$. 的一个元素 X'。由（2）和 $v \in T$，我们有 $X' \subseteq Y - M_-$（Y）。由于 $X' \in \mathcal{F}_-$，但 $X' \cap M_-$（Y） $= \emptyset$， X' 包含于集合 $Y' \in \mathcal{M}_+$（Y）中。由于 $u \in X$，$v \in X' \subseteq I$（Y'）$\subseteq Y'$ 且 $X \cap Y' = \emptyset$，我们得到 $uv \in \rho_F$（Y'）$\cap \rho_F$（I（Y'）），即（12）对 Y'. 不成立。这与 $Y' \subsetneq Y$，矛盾了 Y 的极小性，断言得证。 □

断言 4. (13)对 Y.成立

证明。 由 (2) 可知， $\mathcal{M}_-(Y)$ 是 S的一个划分。因此，由 (5) 可得

$$
\begin{aligned}
d_F^+(S) - d_F^-(S) &= \sum_{X \in \mathcal{M}_-(Y)} (d_F^+(X) - d_F^-(X)) \\
&\geq (k - \lambda(D))|\mathcal{M}_-(Y)|
\end{aligned}
$$

该断言得证。 □

根据断言 3 和 4 以及 Y 的定义，可知 Y 违反了 (11)，即 $1 \leq d_F(\overline{Y}, I(Y))$。注意，由 (2) 可得，$I(Y) \subseteq M_-(Y) \cup \bigcup_{Y_i \in \mathcal{M}_+(Y)} I(Y_i)$。还要注意，$Y_i \subsetneq Y$，因此对于所有 $Y_i \in \mathcal{M}_+(Y)$，都有 $\overline{Y} \subsetneq \overline{Y_i}$。于是，每条从 $\overline{Y}$ 到 $I(Y)$ 的弧，要么从 $\overline{Y}$ 到 $M_-(Y)$，要么从 $\overline{Y_i}$ 到 $I(Y_i)$，其中某个 $Y_i \in \mathcal{M}_+(Y)$。由 Y 的极小性，Y_i 满足 (11)，因此对于任意 $Y_i \in \mathcal{M}_+(Y)$，不存在从 $\overline{Y_i}$ 到 $I(Y_i)$ 的弧。由此可得

$$\begin{aligned} 1 &\leq d_F(\overline{Y}, I(Y)) \\ &\leq d_F(\overline{Y}, M_-(Y)) + \sum_{Y_i \in \mathcal{M}_+(Y)} d_F(\overline{Y_i}, I(Y_i)) \\ &= d_F(\overline{Y}, M_-(Y)). \end{aligned}$$

因此 $|\mathcal{M}_-(Y)| \geq 1$. 由式（6）、断言 3 和 4、式（5），可得

$$\begin{aligned} \lambda(D) &= d_A^+(Y) \\ &\geq d_F^+(S) + d_A(T, \overline{Y}) \\ &\geq d_F^-(S) + (k - \lambda(D))|\mathcal{M}_-(Y)| + 0 \\ &\geq 1 + (k - \lambda(D))|\mathcal{M}_-(Y)|. \end{aligned} \tag{14}$$

如果 $|\mathcal{M}_-(Y)| \geq 2$ 那么，根据（14）和（1），我们得到如下矛盾。

$$\begin{aligned} \lambda(D) &\geq 1 + 2(k - \lambda(D)) \\ &\geq 1 + 2(\frac{3}{2}\lambda(D) - \lambda(D)) \\ &= 1 + \lambda(D). \end{aligned}$$

因此，$\mathcal{M}_-(Y) = \{X\}$，接着，由（14）和（1），可得

$$\lambda(D) \geq 1 + k - \lambda(D) \geq \lambda(D).$$

因此，(14) 中处处取等式，故 $d_A(T, \overline{Y}) = 0$.

我们断言 $T \neq \emptyset$. 否则，根据（7）（若 $Y \neq V$），$Y = S$，断言 4、（7）以及 $|\mathcal{M}_-(Y)| = 1$，我们得到如下矛盾。

$$0 \geq d_F^+(Y) - d_F^-(Y) = d_F^+(S) - d_F^-(S) > 0.$$

最后，由（4），$d_A(T, \overline{Y}) = 0$，$d_F(\overline{Y}, M_-(Y)) \geq 1$，$T \neq \emptyset$，以及 $\lambda(D)$-弧-连通性 D，我们得到以下矛盾。

$$\begin{aligned} \lambda(D) &= d_A^-(X) + 0 \\ &\geq d_F(\overline{Y}, X) + d_A(T, X) + d_A(T, \overline{Y}) \\ &\geq 1 + d_A^+(T) \\ &\geq 1 + \lambda(D). \end{aligned}$$

引理的证明完成。 □

由 (2)，我们有 $\mathcal{M}(V) \neq \emptyset$，设 $\mathcal{M}_-(V) \neq \emptyset$.。对 V. 应用引理 1 即可得出结论。由 (12)，我们得到 $\delta_F(M_-(V)) \subseteq \delta_F(V) = \emptyset$，继而由 (13)、(7) 和 $\mathcal{M}(V) \neq \emptyset$，得到以下矛盾。

$$0 \geq d_F^+(M_-(V)) - d_F^-(M_-(V)) > 0.$$

这就完成了该定理的证明。 □

4 个示例

我们首先给出一个 3-弧连通有向图 $D_1 = (V, A)$ 的例子，它在 A 中有一个弧集 F，反转 F 中的弧后，我们得到一个 4-弧连通有向图；但是，反转 F 中的任何一条弧都会破坏 3-弧连通性。考虑图 1 中的有向图 D_1，弧上的数值表示其重数，没有标注数值的弧重数为 1，F 中的弧以蓝色表示。注意，D_1 是 3-弧连通的；反转 D_1 中的蓝色弧后，我们得到一个 4-弧连通的有向图 D_1'。定理 7 的证明中的集合 $\mathcal{F}_-$ 和 $\mathcal{F}_+$ 分别以红色和绿色圆圈表示。这些集合表明，反转任何一条蓝色弧都会破坏 3-弧连通性。注意，$\lambda(D_1) = 3 > \lfloor \frac{4+1}{2} \rfloor$. 这个例子表明，定理 7 中的条件 $\lambda(D_1) \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ 不能删除。

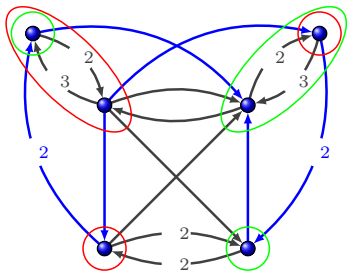

图 1：有向图 D_1，含有 $\lambda(D_1) = 3$，蓝色的有向边表示 F，以及 $\lambda(D_1') = 4$.

现在我们给出一个更复杂的例子，说明定理$\lambda(D) \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$中的条件7不能替换为 $\lambda(D) \leq \lfloor \frac{2k}{3} \rfloor$. 考虑图 2 中的有向图 D_2，其中，与前面一样，弧上的数值表示其重数，没有标注数值的弧重数为 1，而 F 的弧以蓝色标出。注意，D_2 是 4-弧连通的；将 D_2中的蓝色弧反向后，我们得到一个 D_2' 6-弧连通的有向图。证明定理 $\mathcal{F}_-$ 和 $\mathcal{F}_+$ 中的集合7 分别用红色和绿色圆圈表示。这些集合表明，反向任何一条蓝色弧都会破坏 4-弧连通性。注意 $\lambda(D_2) = 4 = \frac{2 \cdot 6}{3}$.

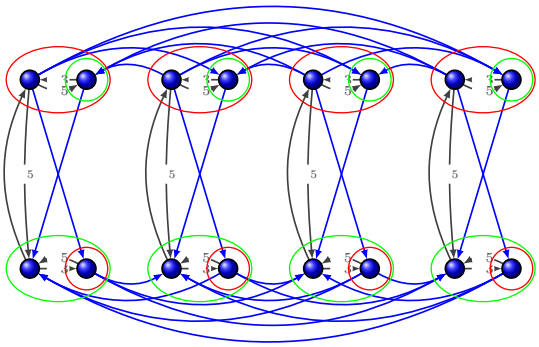

图 2：有向图 D_2，含有 $\lambda(D_2) = 4$，蓝色的有向边表示 F，以及 $\lambda(D_2') = 6$.

参考文献

[1] M. Dalmazzo，《最小 k-弧强连通图中的弧数》，巴黎科学院院刊，A-B辑，第 285 卷（1977年），第 5 期，341–344 页。[2] K. Fukuda、A. Prodon 和 T. Sakuma，《关于无环定向与剥壳引理的札记》，《理论计算机科学》，263（2001年），9–16 页。[3] T. Ito、Y. Iwamasa、N. Kakimura、N. Kamiyama、Y. Kobayashi、S. Maezawa、Y. Nozaki、Y. Okamoto 和 K. Ozeki，《将定向单调边翻转为最大边连通度：Nash-Williams 方法》，2023年，《ACM算法汇刊》，第 19 卷，第 1 期，文章 6。[4] M. M¨ühlenthaler、B. Peyrille、Z. Szigeti，《通过超弧重新定向增强有向超图连通性》，已提交至 ESA 2023。[5] C. St. J. A. Nash-Williams，《有限图中的定向、连通性与奇数顶点配对》，《加拿大数学杂志》，12：555–567，1960年。[6] H. E. Robbins，《一个图论定理及其在交通控制问题中的应用》，《美国数学月刊》46，281–283，1939年。[7]A. Schrijver，《组合优化：多面体与效率》，Springer，2003年