数据满足多项式增长条件下确定性均场博弈的近似

JUSTINA GIANATTI[1], FRANCISCO J. SILVA[2], AND AHMAD ZORKOT[3]

Abstract. 我们考虑一个确定性平均场博弈问题，其中典型智能体需要求解一个最优控制问题：动力学关于控制变量呈仿射形式，代价泛函关于状态变量具有多项式增长。在此框架下，我们构造了一个离散时间、有限状态空间的平均场博弈问题，用以近似原博弈的均衡。文中给出了两个采用虚拟博弈法求解的数值例子。

arXiv:2305.01445v1 [math.OC] 2 May 2023

美国数学学会学科分类： 91A16, 49N80, 35Q89, 65M99, 91A26.
关键词： 确定性平均场博弈、控制仿射动力学、拉格朗日均衡、均衡近似、收敛结果、数值实验。

1. Introduction

平均场博弈（简称 MFG）问题理论由 [25, 26, 27] 以及独立地由 [24] 提出，旨在描述具有大量不可区分参与者的非合作对称微分博弈中纳什均衡的渐近行为；每个参与者单独对博弈的影响都很小。关于平均场博弈理论的综述，包括其数值近似以及在人群运动、经济学和金融领域的应用，读者可参阅 [22, 21, 15, 16, 1], 及其中的参考文献。平均场博弈中的均衡通常由一组称为 MFG系统的两个方程来描述：一个哈密顿-雅可比-贝尔曼方程，用于描述典型参与者的最优成本；以及一个福克-普朗克方程，用于描述参与者群体的演化。

本文研究确定性平均场博弈问题的数值近似，即底层微分博弈为确定性的情形。在此框架下，针对均衡的一种松弛形式（亦称拉格朗日形式）已被提出，其中涉及在参与者轨迹上的概率测度空间中求解一个不动点问题，见 [6, 12, 10]。我们假设，MFG 中典型参与者的受控动力学具有如下形式

$$\dot{\gamma}(t) = A(t,\gamma(t)) + B(t,\gamma(t))\alpha(t) \quad \text{for a.e. } t \in]0,T[. \tag{1.1}$$

这里， $T>0$ 表示时间范围， γ 和 α分别取值于 $\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{R}^r$，表示典型参与者的状态和控制，而 A: $[0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$和 B： $[0,T] \to \mathbb{R}^{d\times r}$是给定函数。当典型参与者控制其速度，即 $\dot{\gamma}(t) = \alpha(t$，且均场博弈均衡由均场博弈系统刻画时，文献 [9] 提出了一种半离散格式，并证明其收敛到均场博弈系统的一个解。文献 [13]提出了这一近似方法的一个可实现版本，其中还对空间变量进行了离散化，并证明当空间维数为一时该方法收敛。在同一框架下，文献 [14] 中，作者针对均场博弈系统中的连续性方程提出了一种拉格朗日-伽辽金格式，并证明了全离散近似在一般状态维数下的收敛性。采用松弛表述后，文献 [23]证明了以离散时间有限状态平均场博弈（下文称为有限平均场博弈）的形式书写的均场博弈问题近似在一般维数下收敛。此外，在相互作用代价项满足单调性假设的条件下（见 [27, 第2节3]），文献 [8, 28]证明，虚拟博弈法的一种改进方法收敛，因而可以对有限平均场博弈的一个解进行严格近似。最后，在文献 [19]中，作者采用有限平均场博弈对均场博弈进行近似，其中典型参与者的动力学具有一般形式（1.1）。该方法在一般维数下的收敛性得到了证明，

[1]CIFASIS-CONICET-UNR，奥坎波街与埃斯梅拉达街，S2000EZP，罗萨里奥，阿根廷（gianatti@cifasis-conicet.gov.ar）。[2]XLIM-DMI研究所，UMR-CNRS7252，利摩日大学理工学院，87060 利摩日，法国（francisco.silva@unilim.fr）。[3] XLIM-DMI研究所，UMR-CNRS7252，利摩日大学理工学院，87060 利摩日，法国（ahmad.zorkot@unilim.fr）。

关键在于对底层最优控制问题进行细致的离散化。特别是， [19] 涵盖了典型参与者控制其加速度时的均场博弈近似（见 [2, 11]）。

在上述所有参考文献中，关于代价泛函对状态的依赖所作的假设都不允许其呈多项式增长。特别是，代价不能以二次形式依赖于状态，而这在应用中是典型情形。本工作的目标是补充 [19], ，涵盖这一情形。代价呈多项式增长带来的主要困难在于，典型参与者的价值函数关于状态并非全局 Lipschitz 连续。特别是，最优反馈律仅局部有界，因此需要进行细致分析，才能构造出具有良好稳定性的价值函数数值格式。在我们的假设下，其中包括 $B(t,\gamma(t))$ 与 $\gamma(t)$ 相互独立，最优反馈控制关于状态呈线性增长。这一性质仍使我们能够构造均场博弈问题的近似，使智能体状态分布的时间边缘分布支撑在一个与离散化步长无关的紧集上。接下来， [19] 中的分析适用，并可得出当离散化参数趋于零时数值格式收敛。与 [23, 19], 一样，我们在本工作中采用均场博弈均衡的松弛表述，关键在于，在研究近似的收敛性时，较容易确立数值格式解的紧性性质。

本文其余部分安排如下。第2节确定本文使用的记号和假设，并回顾拉格朗日平均场博弈均衡的概念，给出存在唯一性结果。第3节是本文的核心部分，构建用于近似典型参与者价值函数的数值格式。我们阐述该数值格式与标准半拉格朗日格式之间的关系（见 [18]），并给出一项收敛结果。第 4 节介绍用于近似连续均场博弈的有限平均场博弈，并给出存在性、唯一性和收敛结果。最后，第5节考察两个数值例子，其中代价泛函关于状态变量呈多项式形式，且交互项是单调的，因此可以使用虚拟博弈法近似有限均场博弈问题的解。

致谢。F. J. Silva 和 A. Zorkot 部分获得了法国国家研究署（ANR）项目 ANR-22-CE40-0010 的资助，以及阿卜杜拉国王科技大学通过转拨协议 ORA-2021-CRG10-4674.6 提供的资助。为实现开放获取，作者已将知识共享署名许可（CC-BY）公共版权许可应用于因本次投稿而产生的任何作者接受稿（AAM）版本。

2. Preliminaries

下文中， $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^d$上的无穷范数；给定 $R>0$， $B_\infty(0,\ R)$（分别为$B_\infty(0,\ R)$）表示以 0 为中心、半径为 R的相应开球（分别为闭球）。我们用 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$表示 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度集合；对于 $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, 记 supp($\mu$) 为其支集。我们将 $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$定义为 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$的子集，其中的概率测度具有有限的一阶矩，即

$$\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)=\left\{\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)\,\middle|\,\int_{\mathbb{R}^d}|x|\mathrm{d}\mu(x)<\infty\right\},\tag{2.1}$$

该空间赋有 Wasserstein距离

$$d_1(\mu_1,\mu_2)=\inf_{\mu\in\Pi(\mu_0,\mu_1)}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|x-y|\mathrm{d}\mu(x,y)\quad\text{for all }\mu_1,\,\mu_2\in\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d),\tag{2.2}$$

其中， $\Pi(\mu_0,\ \mu_1)$表示 $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$中第一边缘分布和第二边缘分布分别为 μ_1 和 μ_2的概率测度子集。给定 $\nu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$和一个 Borel函数 $\Psi\colon\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^q$ ($q\in\mathbb{N}$)，定义在 σ-代数 Borel集 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$上的推前测度 $\Psi\sharp\nu$定义为

$$\Psi\sharp\nu(A)=\nu(\Psi^{-1}(A))\quad\text{for all }A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^q),\tag{2.3}$$

令 $T>0$。本文讨论的平均场博弈问题由以下条件定义：$\ell\colon\ [0,T]\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$, $g\colon$ $\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^d$, $A\colon\ [0,T]\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^d$, $B\colon\ [0,T]\to\mathbb{R}^{d\times r}$， 以及$m_0^*\in\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$。我们将考虑以下假设：

(H1) </style}函数 和 连续。此外，存在 , $\infty[$, $C_{\ell,1}, C_{\ell,2}, C_{\ell,3}, C_{\ell,4} \in]0,\infty[$ and$C_{g,\ 1}$，　$C_{g,\ 2}$，　$C_{\ g,3} \in]0,\infty[$ 使得，对于每个 $(t,a,x,\mu) \in [0,T]\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$,

$$C_{\ell,1}|a|^p - C_{\ell,2} \le \ell(t,a,x,\mu) \le C_{\ell,3}(1+|a|^p+|x|^p), \tag{2.4}$$

$$-C_{g,1} \le g(x,\mu) \le C_{g,2}(1+|x|^p), \tag{2.5}$$

$$|\ell(t,a,x,\mu)-\ell(t,a,y,\mu)| \le C_{\ell,4}\big(1+|x|^{p-1}+|y|^{p-1}+|a|^{p-1}\big)|x-y| \quad \text{for all } y\in\mathbb{R}^d, \tag{2.6}$$

$$|g(x,\mu)-g(y,\mu)| \le C_{g,3}(1+|x|^{p-1}+|y|^{p-1})|x-y| \quad \text{for all } y\in\mathbb{R}^d. \tag{2.7}$$

(H2) 以下条件成立:

(i) 函数 A 和 B 连续。

(ii) 存在 $L_A \in]0,\infty[$ 使得，对于每个 $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$,

$$|A(t,x)-A(t,y)| \le L_A|x-y| \quad \text{for all } y\in\mathbb{R}^d.$$

(iii) 我们有 $r \le d$，并且存在 $\{i_1,\dots,i_r\} \subset \{1,\dots,d\}$，使得对于所有 $t\in[0,T]$，$B(t)$ 的行$i_1,\dots,i_r$均线性无关。

(H3) 存在 $C^* \in]0,\infty[$，使得 $\operatorname{supp}(m_0^*) \subset \overline{B_\infty(0,C^*)}$。

(H4) 以下条件成立:

(i) 函数 ℓ 可写为

$$\ell(t,a,x,\mu) = \ell_0(t,a,x) + f(t,x,\mu) \quad \text{for all } t\in[0,T],\ a\in\mathbb{R}^r,\ x\in\mathbb{R}^d,\ \mu\in\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d),$$

where $\ell_0\colon [0,T]\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ satisfies **(H1)** and $f\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$ is continuous, bounded, and there exists $L_f>0$ such that, for all $(t,\mu)\in[0,T]\times\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$,

$$|f(t,x,\mu)-f(t,y,\mu)| \le L_f|x-y| \quad \text{for all } x,y\in\mathbb{R}^d.$$

(ii) 函数 $f(t,\cdot,\cdot)$ 对所有 $t\in[0,T]$ 均成立，且 g 是单调的，即对于 $\Psi = f(t,\cdot,\cdot)$ g它成立　　ds that

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big(\Phi(x,\mu_1)-\Phi(x,\mu_2)\big)\mathrm{d}(\mu_1-\mu_2)(x) \ge 0 \quad \text{for all } \mu_1,\ \mu_2\in\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d). \tag{2.8}$$

假设 **(H1)**、**(H2)**和**(H3)** 确保下文问题 2.1 中定义的均场博弈问题及其在第 4 节中引入的近似问题至少存在一个解。假设**(H4)** 对于均场博弈及其近似问题的均衡唯一性，以及证明用于求解有限均场博弈问题的数值方法收敛方面，都发挥着重要作用（见 [19]）。

注意，**(H2)** 意味着

$$|A(t,x)| \le C_A(1+|x|) \quad \text{for all } (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d, \tag{2.9}$$

其中 $C_A = \max\{\max_{t\in[0,T]}|A(t、0)|,\ L_A\}$。下文中，将 $B(t)$ 在 $\mathbb{R}^r$ 上由无穷范数诱导的矩阵范数记为 $|B(t)|$，并令 $C_B = \sup_{t\in[0,T]}|B(t)|$；根据 **(H2)(i)**，该值有限。

下面介绍本文所研究的均场博弈问题。给定 $x\in\mathbb{R}^d$和 $m\in C\left([0,T];\ \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)\right)$，一位在时刻 $t=0$ 位于 x 的典型参与者，需要求解如下形式的最优控制问题

$$\begin{cases} \inf \displaystyle\int_0^T \ell\left(s,\alpha(s),\gamma(s),m(s)\right)\mathrm{d}s + g(\gamma(T),m(T)) \\ \text{s.t.} \quad \dot\gamma(s) = A(s,\gamma(s)) + B(s)\alpha(s) \quad \text{for a.e. } s\in]0,T[, \\ \qquad \gamma(0) = x, \\ \qquad \gamma\in W^{1,p}([0,T];\mathbb{R}^d),\ \alpha\in L^p([0,T];\mathbb{R}^r). \end{cases} \tag{$OC_{x,m}$}$$

注意，假设**(H1)** 指出，($OC_{x,m}$)中的代价泛函关于状态变量和控制变量具有多项式增长。特别地，我们对代价泛函的条件比 [19]中的条件更一般。另一方面，关于($OC_{x,m}$)中的动力学，在 [19] 中，矩阵 B 也可以依赖于状态变量。

赋予 $\Gamma := C\left([0,T];\ \mathbb{R}^d\right)$ 上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$，并对所有 $t\in[0,T]$定义e_t: $\Gamma\to\mathbb{R}^d$，通过 $e_t(\gamma) = \gamma(t)$ 对所有 $\gamma\in\Gamma$ 成立。我们还令

$$\mathcal{P}_{m_0^*}(\Gamma) = \{\xi\in\mathcal{P}_1(\Gamma) \mid e_0\sharp\xi = m_0^*\}.$$

以下概　我们所考虑的均衡是拉格朗日均场博弈均衡，其定义为以下内容的一个解：t　　he
念　　问题：

问题 *2.1.* 求 $\xi^* \in \mathcal{P}_{m_0^*}(\Gamma)$，使得 $[0,T] \ni t \mapsto e_t\sharp\xi^* \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ 属于 $C\big([0,T];$ 对于 ξ^*-几乎处处的 $\gamma^* \in \Gamma$，存在 $\alpha^* \in L^p([0,T];\mathbb{R}^r)$，使得 (γ^*,α^*) 是满足 $x=\gamma^*(0)$ 和 $m(t)=e_t\sharp\xi^*$ 的 $(OC_{x,m})$ 的解，其中对所有 $t\in[0,T]$ 均成立。

我们有如下结果。

定理 2.1。假设**(H1)**、**(H2)**和**(H3)** 成立。则问题 *2.1* 至少存在一个解。此外，若**(H4)** 成立，且对每个 $m \in C([0,T];\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ 以及 m_0^*-几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^d$，问题$(OC_{x,m})$存在唯一解，则均场博弈均衡是唯一的。

证明。至少存在一个解这一结论可由下文的定理 4.2 得出，而唯一性结论可通过完全仿照以下定理的证明进行论证：[19, 定理 2。2]。□

3. The value function of a typical player and its approximation

本节中，我们固定 $p\in]1,\infty[$。对于每个 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$和 $\alpha\in L^p([t,T];\mathbb{R}^r)$，注意到这意 **(H2)** 味着

$$\dot\gamma(s)=A(s,\gamma(s))+B(s)\alpha(s)\quad\text{for a.e. } s\in]t,T[,\quad \gamma(t)=x. \tag{3.1}$$

存在唯一解 $\gamma^{t,\,x,\,\alpha}\in W^{1,\,p}([0,T];\ \mathbb{R}^d)$。给定 $m\in C([0,T];\ \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$，设

$$J^{t,x}[m](\alpha)=\int_t^T \ell(s,\alpha(s),\gamma^{t,x,\alpha}(s),m(s))\mathrm{d}s+g(\gamma(T),m(T))\quad\text{for all }\alpha\in L^p([t,T];\mathbb{R}^r).$$

价值函数 $v[m]\colon[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 定义为

$$v[m](t,x)=\inf\left\{J^{t,x}[m](\alpha)\,|\,\alpha\in L^p([t,T];\mathbb{R}^r)\right\}\quad\text{for all }(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d. \tag{3.2}$$

命题 3.1. 假设 **(H1)** 和 **(H2)** 成立，令 $m\in C([0,T];\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$，并令 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$。则存在 $\alpha^*\in L^p\big([t,T];\mathbb{R}^d\big)$，使得 $v[m](t,x)=J^{t,x}[m](\alpha^*)$。此外，以下结论成立：

(i) 存在 $C_{\mathrm{Lip}}>0$，且与 (t,x,m) 无关，使得

$$\big|v[m](t,x)-v[m](t,y)\big|\le C_{\mathrm{Lip}}(1+|x|^{p-1}+|y|^{p-1})|x-y|\quad \textit{for all } t\in[0,T],\ y\in\mathbb{R}^d. \tag{3.3}$$

(ii) 存在 $C_{\mathrm{b}}>0$，且与 (t,x,m)无关，使得

$$|\alpha^*(s)|\le C_{\mathrm{b}}\big(1+|\gamma^{t,x,\alpha^*}(s)|\big)\quad \textit{for a.e. } s\in[t,T]. \tag{3.4}$$

证明。设 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset L^p([t,T];\mathbb{R}^r)$ 是 (3.2) 右端的一个极小化序列。估计 (2.4) 和 (2.5) 表明 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $L^p([t,T];\mathbb{R}^r)$ 中有界，因此，取某个子序列后，它弱收敛到某个 $\alpha^*\in L^p([t,T];\mathbb{R}^r)$。由 (3.1) 和 (H2)(i)-(ii) 可知，γ^{t,x,α_n} 在 $[t,T]$ 中一致收敛到 γ^{t,x,α^*}，因而由 [17, 定理 3.23]，可推出 $v[m](t,x)=J^{t,x}[m](\alpha^*)$。记 α^0 为零控制，并令 $\gamma^0=\gamma^{t,x,\alpha_0}$，估计 (2.9) 和 Gr¨onwall 引理可推出 $\sup_{s\in[t,T]}|\gamma^0(s)|\le e^{C_AT}(|x|+C_AT)$。进而，由 (2.4)、(2.5)、(2.9) 以及 Gr¨onwall 不等式可得。

$$\begin{aligned}C_{\ell,1}\int_t^T|\alpha^*(s)|^p\mathrm{d}s&\le TC_{\ell,2}+J^{t,x}[m](\alpha^0)+C_{g,1}\\&\le\Big(C_{\ell,2}+C_{\ell,3}(1+e^{pC_AT}(|x|+C_AT)^p)\Big)T+C_{g,1}+C_{g,2}\Big(1+e^{pC_AT}(|x|+C_AT)^p\Big)\end{aligned} \tag{3.5}$$

˜因此，存在一个与 (t,x,m) 无关的 $C>0$，使得

$$\|\alpha^*\|_{L^p}\le\tilde C(1+|x|). \tag{3.6}$$

特别地，有

$$v[m](t,x)=\text{下确界}\left\{J^{t,x}[m](\alpha)\,|\,\alpha\in L^p([t,T];\mathbb{R}^r)\ \ \|\alpha\|_{L^p}\le\tilde C(1+|x|)\right\}\text{对所有 }(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d. \tag{3.7}$$

现在证明断言 (i)-(ii)。

(i)：令 $y \in \mathbb{R}^d$ 并设 $\gamma^* = \gamma^{t,x,\alpha^*}$ 和 $\tilde{\gamma} = \gamma^{t,y,\alpha^*}$。由标准论证可知，根据 **(H2)**(i)- (ii) 以及 Gr¨onwall 引理，

$$\sup_{s\in[t,T]} |\gamma^*(s)| \le C(1+|x|), \quad \sup_{s\in[t,T]} |\tilde{\gamma}(s)| \le C(1+|x|+|y|), \quad \text{and} \quad \sup_{s\in[t,T]} |\tilde{\gamma}^*(s)-\gamma^*(s)| \le C|x-y|, \tag{3.8}$$

对于某个 $C>0$ 与（t，x，y，m）无关。进而，由于（2.5）、（2.6）、H¨older 不等式和（3.6），我们有 ve

$$\begin{aligned} v[m](t,y) - v[m](t,x) &\le \int_t^T \Big(\ell(s,\alpha^*(s),\tilde{\gamma}(s),m(s)) - \ell(s,\alpha^*(s),\gamma^*(s),m(s))\Big)\mathrm{d}s \\ &\quad + g(\tilde{\gamma}(T),m(T)) - g(\gamma^*(T),m(T)) \\ &\le C_{\ell,4}\int_t^T \left(1+|\tilde{\gamma}(s)|^{p-1}+|\gamma^*(s)|^{p-1}+|\alpha^*(s)|^{p-1}\right)|\tilde{\gamma}(s)-\gamma^*(s)|\mathrm{d}s \\ &\quad + C_{g,3}\left(1+|\tilde{\gamma}(T)|^{p-1}+|\gamma^*(T)|^{p-1}\right)|\tilde{\gamma}(T)-\gamma^*(T)| \qquad (3.9) \\ &\le C_{\mathrm{Lip}}(1+|x|^{p-1}+|y|^{p-1})|x-y|, \qquad (3.10) \end{aligned}$$

对于某个 $C_{\mathrm{Lip}}>0$，其与（t，x，y，m）无关。对于 $v[m]$（t，x）$-v[m]$（t，y）的不等式，可通过在前面的计算中交换 x 和 y 的角色得到。

(ii)：设 $s\in[t,T[$，$h\in[0,T-s[$，并令 $y^*=\gamma^*(s)$。由于 $v[m]$ 满足动态规划不等式（例如参见 [4]）

$$v[m](s,\gamma^*(s)) \le \int_s^{s+h} \ell(r,\gamma^{s,y^*,\alpha}(r),\alpha(r),m(r))\mathrm{d}r + v[m]\big(s+h,\gamma^{s,y^*,\alpha}(s+h)\big), \tag{3.11}$$

对所有 $\alpha\in L^p([t,T];\mathbb{R}^d)$，当 $\alpha=\alpha^*$ 时取等号；取 $\alpha=\alpha_0$（零控制）和 $\alpha=\alpha^*$，等式 $v[m](s,y^*) = J^{s,y^*}[m](\alpha^*|_{[s,T]})$ 以及估计式 (2.4) 可得

$$\begin{aligned} C_{\ell,1}\int_s^{s+h}|\alpha^*(r)|^p\mathrm{d}r &\le C_{\ell,2}h + C_{\ell,3}\int_s^{s+h}\big(1+|\gamma^{s,y^*,\alpha_0}(r)|^p\big)\mathrm{d}r \\ &\quad + v[m](s+h,\gamma^{s,y^*,\alpha_0}(s+h)) - v[m](s+h,\gamma^*(s+h)). \qquad (3.12) \end{aligned}$$

下文中，$C>0$ 表示一个与 $(t,\ x,\ y,\ m)$ 无关的常数，该常数可随推导步骤而变化。由于**(H2)**(i)、(2.9) 和 Gr¨onwall 引理可推出存在 $C>0$ 使得

$$|\gamma^*(s+h)-\gamma^{s,y^*,\alpha_0}(s+h)| \le C\int_s^{s+h}|\alpha^*(r)|\mathrm{d}r, \tag{3.13}$$

由 (3.12)、(3.8)、(i) 和杨氏不等式可推出存在 $C>0$ 使得

$$\int_s^{s+h}|\alpha^*(r)|^p\mathrm{d}r \le Ch(1+|y^*|^p) \tag{3.14}$$

因此，由勒贝格微分定理（例如参见 [7]）可得 (3.4)。 □

注 **3.1.** 命题 *3.1*(ii) 意味着，对于任意 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$，$v[m](t,x)$，都可以改写为 *as*

$$v[m](t,\ x) = \inf\left\{J^{t,x}[m](\alpha)\,|\,\alpha\in L^\infty([t,T];\mathbb{R}^r),\ |\alpha(s)|\le C_{\mathrm{b}}(1+|\gamma^{t,x,\alpha}(s)|)\ \textit{for a.e.}\ s\in[t,T]\right\}. \tag{3.15}$$

现在考虑由 $v[m]$ 给出的价值函数的近似（见式 (3.2)）。设 $N_t\in\mathbb{N}$、$N_s\in\mathbb{N}$，其中 $N_s\ge N_t$，并令 $\Delta t=1/N_t$、$\Delta x=1/N_x$、$\mathcal{I}=\{0,\dots,N_t\}$、$\mathcal{I}^*=\mathcal{I}\setminus\{N_t\}$ 和 $\mathcal{G}=\{i\Delta x\,|\,i\in\mathbb{Z}^d\}$。给定一个正则网格 $\mathscr{T}$，其顶点位于 $\mathcal{G}$ 中，设 $(\psi_x)_{x\in\mathcal{G}}$ 为一个 $\mathbb{Q}_1$ 基，即对于每个 $x\in\mathcal{G}$，ψ_x 在 $\mathscr{T}$ 的每个单元上都是次数不超过 1 的非负多项式，$\psi_x(x)=1,\psi_x(y)=0$ 对所有满足 $y\ne x$ 的 $y\in\mathcal{G}$ 都成立，并且 $\sum_{x\in\mathcal{G}}\psi_x(z)=1$ 对所有 $z\in\mathbb{R}^d$ 都成立。给定 $\varphi\colon\mathcal{G}\to\mathbb{R}$，将其插值函数 $I[\varphi]\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 定义为

$$I[\varphi](x) = \sum_{y\in\mathcal{G}}\psi_y(x)\varphi(y) \quad \text{for all } x\in\mathbb{R}^d.$$

鉴于注 3.1，用于近似 [18]的一种标准半拉格朗日格式（例如参见 $v[m]$）为

$$\begin{aligned} V_k(x) &= \min_{a\in\overline{B}_\infty(0,C_{\rm b}(1+|x|))}\left\{\Delta t\ell(t_k,a,x,m(t_k))+I[V_{k+1}](\Phi(k,x,a))\right\} \\ V_{N_t}(x) &= g(x,m(T)) \quad \text{for all } x\in\mathcal{G}, \end{aligned} \qquad \text{for all } k\in\mathcal{I}^*,\ x\in\mathcal{G}, \tag{3.16}$$

其中

$$\Phi(k,x,a)=x+\Delta t(A(t_k,x)+B(t_k)a) \quad \text{for all } k\in\mathcal{I}^*,\ x\in\mathcal{G},\ a\in\mathbb{R}^r. \tag{3.17}$$

现在我们介绍前述数值格式的一种变体，该变体利用了（3.1）中动力学的特殊结构。首先注意到，根据 （**H2**）（iii），不失一般性，我们可以写成

$$A(t,x)=\begin{pmatrix} A_1(t,x)\\ A_2(t,x)\end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B(t)=\begin{pmatrix} B_1(t)\\ B_2(t)\end{pmatrix} \quad \text{for all } (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d, \tag{3.18}$$

其中 $A_1\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^r$, $A_2\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d-r}$, $B_1\colon [0,T]\to\mathbb{R}^{r\times r}$，使得对于所有 $t\in[0,T]$, $B_1(t)$ 都可逆，并且 $B_2\colon [0,T]\to\mathbb{R}^{(d-r)\times r}$。我们相应地划分 $x\in\mathbb{R}^d$ 的坐标，写作 $x=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)$，其中 $\mathrm{x}_1\in\mathbb{R}^r$ 和 $\mathrm{x}_2\in\mathbb{R}^{d-r}$ 分别表示 x 的前 r 个和后 $d-r$ 个分量。我们还写作 $\mathcal{G}=\mathcal{G}_r\times\mathcal{G}_{d-r}$，其中

$$\mathcal{G}_r=\{i\Delta x\mid i\in\mathbb{Z}^r\} \quad \text{and} \quad \mathcal{G}_{d-r}=\left\{i\Delta x\mid i\in\mathbb{Z}^{d-r}\right\},$$

并且我们假设基底 $(\psi_x)_{x\in\mathcal{G}}$ 可以分解为两个定义在正则网格上的 $\mathbb{Q}_1$ 基底 $(\eta_{\mathrm{x}_1})_{\mathrm{x}_1\in\mathcal{G}_r}$ 和 $(\beta_{\mathrm{x}_2})_{\mathrm{x}_2\in\mathcal{G}_{d-r}}$ 的张量积，这些网格的顶点分别位于 $\mathcal{G}_r$ 和 $\mathcal{G}_{d-r}$。更确切地说，我们假设对于每个 $x=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\in\mathcal{G}$，都有

$$\psi_x(y)=\eta_{\mathrm{x}_1}(\mathrm{y}_1)\beta_{\mathrm{x}_2}(\mathrm{y}_2) \quad \text{for all } y=(\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2)\in\mathbb{R}^d. \tag{3.19}$$

接下来，我们假设存在与 Δx无关的 $C_I>0$，使得

$$\operatorname{supp}(\beta_{\mathrm{x}_2})\subseteq\{\mathrm{y}_2\in\mathbb{R}^{d-r}\,|\,|\mathrm{y}_2-\mathrm{x}_2|\le C_I\Delta x\} \quad \text{for all } \mathrm{x}_2\in\mathcal{G}_{d-r}. \tag{3.20}$$

设 $k\in\mathcal{I}^*$ 和 $x\in\mathbb{R}^d$。在 (3.16) 的修正版中，我们只考虑满足以下条件的控制 $a\in B_\infty(0,\ C_{\rm b}(1+|x|))$：记 $\Phi(k,\ x,\ a)=(\Phi_1(k,\ x,\ a)\ \Phi_2(k,\ x,\ a))$，则有 $\Phi_1(k,\ x,\ a)\in\mathcal{G}_r$。注意，对于每个 $\mathrm{y}_1\in\mathcal{G}_r$，都有

$$\mathrm{y}_1=\Phi_1(k,x,a)\ \Leftrightarrow\ a=B_1(t_k)^{-1}\left[\frac{\mathrm{y}_1-\mathrm{x}_1}{\Delta t}-A_1(t_k,x)\right]. \tag{3.21}$$

因此，令

$$\begin{aligned} \alpha(k,x,\mathrm{y}_1) &:= B_1(t_k)^{-1}\left[\tfrac{\mathrm{y}_1-\mathrm{x}_1}{\Delta t}-A_1(t_k,x)\right]\in\mathbb{R}^r,\\ \mathbf{y_2}(k,x,\mathrm{y}_1) &:= \mathrm{x}_2+\Delta t\left[A_2(t_k,x)+B_2(t_k)\alpha(k,x,\mathrm{y}_1)\right]\in\mathbb{R}^{d-r}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

自然地定义集合

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^1_{k+1}(x) &= \left\{\mathrm{y}_1\in\mathcal{G}_r\ \middle|\ |\alpha(k,x,\mathrm{y}_1)|\le C_{\rm b}(1+|x|)\right\},\\ \mathcal{S}^2_{k+1}(x,\mathrm{y}_1) &= \left\{\mathrm{y}_2\in\mathcal{G}_{d-r}\ \middle|\ \mathbf{y_2}(k,x,\mathrm{y}_1)\in\operatorname{supp}\beta_{\mathrm{y}_2}\right\} \quad \text{for } \mathrm{y}_1\in\mathcal{S}^1_{k+1}(x),\\ \mathcal{S}_{k+1}(x) &= \left\{(\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2)\in\mathcal{G}\ \middle|\ \mathrm{y}_1\in\mathcal{S}^1_{k+1}(x),\ \mathrm{y}_2\in\mathcal{S}^2_{k+1}(x,\mathrm{y}_1)\right\}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

按照 [19, 引理 3.2], 中的论证可以验证，若 $\Delta x/\Delta t$ 足够小，则 $\mathcal{S}_{k+1}(x)\neq\emptyset$。从初始网格 $\mathcal{S}_0=\mathcal{G}\cap B_\infty(0,\ C^*)$出发，接着可以构造一族随时间变化的网格

$$\mathcal{S}_{k+1}=\bigcup_{x\in\mathcal{S}_k}\mathcal{S}_{k+1}(x) \quad \text{for all } k\in\mathcal{I}^* \tag{3.24}$$

满足性质：$(\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2)\in\mathcal{S}_{k+1}$ 当且仅当存在 $x\in\mathcal{S}_k$ 和 $a\in\mathbb{R}^r$，使得 $|a|\le C_{\rm b}(1+|x|)$，$\mathrm{y}_1=\Phi_1(k,\ x,\ a)$，且 $\Phi_2(k,\ x,\ a)\in\operatorname{supp}\beta_{\mathrm{y}_2}$。

另一方面，请注意，对于每个 $\varphi\colon\ \mathcal{G}\to\mathbb{R}$、$\mathrm{y}_1\in\mathcal{G}_r$ 和 $\mathrm{y}_2\in\mathbb{R}^{d-r}$，我们都有

$$\begin{aligned} I[\varphi](\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2) &= \sum_{\mathrm{z}_1\in\mathcal{G}_r,\mathrm{z}_2\in\mathcal{G}_{d-r}}\psi_z(\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2)\varphi(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2)\\ &= \sum_{\mathrm{z}_1\in\mathcal{G}_r}\eta_{z_1}(\mathrm{y}_1)\sum_{\mathrm{z}_2\in\mathcal{G}_{d-r}}\beta_{\mathrm{z}_2}(\mathrm{y}_2)\varphi(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2)=\sum_{\mathrm{z}_2\in\mathcal{G}_{d-r}}\beta_{\mathrm{z}_2}(\mathrm{y}_2)\varphi(\mathrm{y}_1,\mathrm{z}_2). \end{aligned} \tag{3.25}$$

综上，(3.16)–(3.25) 表明可以考虑 (3.16) 的以下变体：

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_k(x) &= \min_{\mathrm{y}_1\in\mathcal{S}^1_{k+1}(x)}\Big\{\Delta t\ell(t_k,\alpha(k,x,\mathrm{y}_1),x,m(t_k))+I_{\mathcal{S}^2_{k+1}(x,\mathrm{y}_1)}[\mathcal{V}_{k+1}(\mathrm{y}_1,\cdot)](\mathbf{y_2}(k,x,\mathrm{y}_1))\Big\}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{对所有 } k\in\mathcal{I}^*,\quad x\in\mathcal{S}_k,\\ \mathcal{V}_{N_t}(x) &= g(x,m(T))\quad\text{for all } x\in\mathcal{S}_{N_t},\end{aligned}\tag{3.26}$$

其中，对于 $F\subseteq\mathcal{G}_{d-r}$ 和 $\varphi\colon\ F\to\mathbb{R}$，我们设

$$I_F[\varphi](\mathrm{y}_2)=\sum_{\mathrm{x}_2\in F}\beta_{\mathrm{x}_2}(\mathrm{y}_2)\varphi(\mathrm{x}_2)\quad\text{for all } \mathrm{y}_2\in\mathbb{R}^{d-r}.$$

注意，(3.26) 可改写为

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_k(x)=\min_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{S}^1_{k+1}(x))}\Big\{&\sum_{\mathrm{y}_1\in\mathcal{S}^1_{k+1}(x)}p(\mathrm{y}_1)\Big[\Delta t\ell(t_k,\alpha(k,x,\mathrm{y}_1),x,m(t_k))\\ &+I_{\mathcal{S}^2_{k+1}(x,\mathrm{y}_1)}[\mathcal{V}_{k+1}(\mathrm{y}_1,\cdot)]\big(\mathbf{y_2}(k,x,\mathrm{y}_1)\big)\Big]\Big\}\quad\text{for all } k\in\mathcal{I}^*,\ x\in\mathcal{S}_k,\\ \mathcal{V}_{N_t}(x)=g(x,m(T))&\quad\text{for all } x\in\mathcal{S}_{N_t}.\end{aligned}\tag{3.27}$$

以下结果表明，随时间变化的网格族 $(\mathcal{S}_k)_{k\in\mathcal{I}}$ 相对于离散化参数始终一致有界，并将在后续内容中发挥关键作用。

引理 3.1。存在一个非空紧集 $K\subset\mathbb{R}^d$，只要$\Delta x/\Delta t\le 1$成立，该集合就与 Δt 和 Δx 无关，使得

$$\mathcal{S}_k\subset K\quad \textit{for all } k\in\mathcal{I}^*.$$

证明。考虑以下紧集族：集合 $K_0=B_\infty(\mathbf{0},C^*)$ 和

$$K_{k+1}:=K_k+\left(\Delta t\left[\big(C_A+C_BC_{\mathrm{b}}\big)\big(1+\sup_{x\in K_k}|x|\big)\right]+C_I\Delta x\right)\overline{B}_\infty(0,1)\quad\text{for all } k\in\mathcal{I}^*,\tag{3.28}$$

其中回忆一下，C_A 由 (2.9) 给出，$C_B=\sup_{t\in[0,T]}|B(t)|$，且 C_I 满足 (3.20)。由 (3.23) 和 (3.24) 可得，对所有 $k\in\mathcal{I}$，$\mathcal{S}_k\subset K_k$，因此只需证明族 $(K_k)_{k\in\mathcal{I}}$一致有界。令 $k\in\mathcal{I}$，并设 $c_k=\sup_{x\in K_k}|x|$。等式 (3.28) 给出

$$\begin{aligned}c_{k+1}&\le c_k+\big(\Delta t\left[\big(C_A+C_BC_{\mathrm{b}}\big)\big(1+c_k\big)+C_I\tfrac{\Delta x}{\Delta t}\right]\big)\\ &\le \big(1+\Delta t(C_A+C_BC_{\mathrm{b}})\big)c_k+\Delta t(C_A+C_BC_{\mathrm{b}}+C_I),\end{aligned}$$

根据离散 Gr¨onwall 引理，这意味着集合 $\{c_k\,|\,k\in\mathcal{I}\}$ 一致有界。结论随即得证。□

命题 *3.2.* 假设 *(H1)* 和 *(H2)* 成立。考虑三个序列 $(N^n_t,N^n_s)\subset\mathbb{N}^2$和 $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C([0,T];\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$，使得当 $n\to\infty$ 时，$N^n_t\to\infty$、$N^n_s\to\infty$、$N^n_t/N^n_s\to 0$，且对某个 $m^*\in C([0,T];\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ 有 $m_n\to m^*$。令 $\mathcal{I}^n=\{0,\dots,N^n_t\}$，并且对于与参数 (N^n_t,N^n_s) 和m^n相关联的量，按 *(3.23)* 定义 $\mathcal{S}^n_k$，并将 *(3.26)* 的解记作 $\mathcal{V}^n$。那么有

$$\sup\left\{|\mathcal{V}^n_k(x)-v[m^*](t^n_k,x)|\ \middle|\ k\in\mathcal{I}^n,\ x\in\mathcal{S}^n_k\right\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,\tag{3.29}$$

其中，$v[m^*]$ 由(3.2)定义。

证明思路。令 $m\in C([0,T];\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$，并将以下半离散数值格式作为逼近 $v[m]$的中间步骤：

$$\begin{aligned}v_d(k,x)&=\min_{a\in\mathbb{R}^r}\left\{\Delta t\ell(t_k,a,x,m(t_k))+v_d[m]\left(k+1,x+\Delta t[A(t_k,x)+B(t_k)a]\right)\right\}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{for all } k\in\mathcal{I}^*,\ x\in\mathbb{R}^d,\\ v_d(N_t,x)&=g(x,m(T))\quad\text{for all } x\in\mathbb{R}^d.\end{aligned}\tag{3.30}$$

令 v^n_d 为与前一数值格式相关的解 m^n，采用 [5], 中发展的框架，并按照 [19, 命题 3。1] 中的论证，可以证明对于每个紧集 $K\subset\mathbb{R}^d$，都有

$$\sup_{(k,x)\in\mathcal{I}^n\times K}|v^n_d(k,x)-v[m^*](t^n_k,x)|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.\tag{3.31}$$

另一方面，通过将命题 3.1 的证明调整到离散情形，可以验证，(3.30) 右端的极小化可以限制在集合 $\{a \in \mathbb{R}^d \,|\, |a| \le C_{\mathrm{b}}(1+|x|)\}$。利用这一事实、引理 3.1，并按照 [19, 引理 5.3 (ii)] 的证明进行推导，我们得到

$$\max\{|v_d^n(k,x) - \mathcal{V}_k^n(x)| \;|\; k \in \mathcal{I}^n,\ x \in \mathcal{S}_k^n\} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty, \tag{3.32}$$

因此，(3.29) 可由 (3.31) 和 (3.32) 得出。 □

4. The finite mean field game approximation

本节中，给定 $N_t \in \mathbb{N}$、$N_s \in \mathbb{N}$，且满足 $N_s \ge N_t$，我们用映射 **br** 的不动点问题来近似问题 2.1。该映射定义在离散时间边缘分布空间 $\mathcal{M} = \prod_{k\in\mathcal{I}} \mathcal{P}(\mathcal{S}_k)$ 上，称为**最佳响应映射**。由此得到的近似将采用离散时间有限状态平均场博弈的形式（见 [20]）。为构造映射 **br**，我们先引入一些有用的定义。对于每个 $k \in \mathcal{I}$，我们将 $p \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_k)$ 视为概率测度 $\sum_{x\in\mathcal{S}_k} p(\{x\})\delta_x \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$；给定有限集合 F，(非正) 熵函数 $\mathcal{E}_F\colon \mathcal{P}(F) \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{E}_F(p) = \sum_{x\in F} p(x)\log(p(x)) \quad \text{for all } p \in \mathcal{P}(F),$$

约定 $p(x) = p(\{x\})$，且 $0\log(0) = 0$。给定 $M \in \mathcal{M}$ 和 $\varepsilon > 0$，考虑 (3.27) 的如下变体：

$$\begin{aligned} V_k^M(x) = \min_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{S}^1_{k+1}(x))} \Bigg\{ \sum_{\mathrm{y}_1\in\mathcal{S}^1_{k+1}(x)} p(\mathrm{y}_1)\Big[\Delta t\ell(t_k,\alpha(k,x,\mathrm{y}_1),x,M_k) \\ + I_{\mathcal{S}^2_{k+1}(x,\mathrm{y}_1)}[V^M_{k+1}(\mathrm{y}_1,\cdot)](\mathbf{y_2}(k,x,\mathrm{y}_1))\Big] + \varepsilon\mathcal{E}_{\mathcal{S}^1_{k+1}(x)}(p)\Bigg\} \quad \text{for all } k \in \mathcal{I}^*,\ x \in \mathcal{S}_k, \\ V^M_{N_t}(x) = g(x, M_{N_t}) \quad \text{for all } x \in \mathcal{S}_{N_t}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

请注意，在上述数值格式中加入熵项意味着，对于任意 $k \in \mathcal{I}^*$和 $x \in \mathcal{S}_k$，定义 $V_k^M(x)$ 的优化问题都有唯一解 $p_k^M(x,\ \cdot)$，该解满足$p_k^M(x,\ \mathrm{y}_1) > 0$ 对所有 $\mathrm{y}_1 \in \mathcal{S}^1_{k+1}(x)$ 均成立。给定 $y \in \mathcal{S}_{k+1}$，我们还定义

$$P_k^M(x,y) := \begin{cases} p_k^M(x,\mathrm{y}_1)\beta_{\mathrm{y}_2}(\mathbf{y_2}(k,x,\mathrm{y}_1)) & \text{if } y \in \mathcal{S}_{k+1}(x), \\ 0 & \text{if } y \in \mathcal{S}_{k+1}\setminus\mathcal{S}_{k+1}(x). \end{cases} \tag{4.2}$$

令 $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \,|\, |x-y| \le \Delta x/2\}$ 对所有 $x \in \mathcal{G}$ 均成立，我们将 $\mathbf{br}(M)$ 定义为以下问题的解：

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{k+1}(y) &= \sum_{x\in\mathcal{S}_k} P_k^M(x,y)\widehat{M}_k(x) \quad \text{for all } k \in \mathcal{I}^*,\ y \in \mathcal{S}_{k+1}, \\ \widehat{M}_0(x) &= m_0^*(E(x)) \quad \text{for all } x \in \mathcal{S}_0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

本文所考虑的问题 2.1 的离散化如下。

问题 4.1。求 $M \in \mathcal{M}$，使得 $M = \mathbf{br}(M)$。

我们有如下结果。

定理 4.1. 假设**(H1)**、**(H2)**和**(H3)** 成立。那么问题 *4.1* 至少有一个解。此外，若**(H4)** 成立，则该解唯一。

证明. 由于对每个 $M \in \mathcal{M}$、$k \in \mathcal{I}^*$ 和 $x \in \mathcal{S}_k$，$p_k^M(x,\cdot)$ 都是唯一的，因此容易验证**br** 是连续的。进而，根据布劳威尔不动点定理，**br** 存在不动点。唯一性结论可由 [19, 命题 4.2], 的证明中的论证得到。关键在于，若 $M = \mathbf{br}(M)$，则对所有 $k \in \mathcal{I}$ 和 $x \in \mathcal{S}_k$，$M_k(x) > 0$。□

现在，我们讨论当离散化参数 Δt、Δx 和 ε 趋于零时，(4.1) 的解收敛到问题 2.1 的一个解。令 $(N_t^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$、$(N_s^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$、$(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,\infty[$，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$，设 $\Delta t_n = T/N_t^n$、$\Delta x_n = 1/N_s^n$、$\mathcal{I}^n = \{0,\dots,N_t^n\}$、$\mathcal{I}^n,* = \mathcal{I}^n \setminus \{N_t^n\}$、$t_k^n = k\Delta t_n (k \in \mathcal{I}^n)$ 和 $\mathcal{G}^n = \{i\Delta x_n \,|\, i \in \mathbb{Z}^d\}$。我们假设 $N_s^n \ge N_t^n$。对于 $k \in \mathcal{I}^n,*$ 和 $x \in \mathcal{G}^n$，我们用 $\mathcal{S}^1,{}^n_{k+1}(x)$、$\mathcal{S}^2,{}^n_{k+1}(x,\mathrm{y}_1)$（$\mathrm{y}_1 \in \mathcal{S}^1,{}^n_{k+1}(x)$）和 $\mathcal{S}^n_{k+1}(x)$ 表示 (3.23) 中定义的、与以下内容相关的集合。

Δt_n 和 Δx_n。对于 $k \in \mathcal{I}^n$，集合 $\mathcal{S}_k^n$ 定义如 (3.24) 中所示。记 Γ^n 为连续函数γ的集合：$[0,T] \to \mathbb{R}^d$ 满足对于每个 $k \in \mathcal{I}^n$，$\gamma(t_k^n) \in \mathcal{S}_k^n$，并且对于每个 $k \in \mathcal{I}^{n,*}$，γ在区间 $[t_k^n, t_{k+1}^n]$上的限制是仿射的。最后，令 $M^n \in \mathcal{M}$为与前述参数相关联的问题 4.1 的一个解，并回顾 (4.2)，定义 $\xi^n \in \mathcal{P}(\Gamma)$ 为

$$\xi^n = \sum_{\gamma \in \Gamma^n} M_0^n(\gamma(0)) P^n(\gamma) \delta_\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma), \quad \text{where} \quad P^n(\gamma) := \prod_{k=0}^{N_t^n - 1} P_k^{M^n}(\gamma(t_k^n), \gamma(t_{k+1}^n)). \tag{4.4}$$

我们将 M^n 扩展为 $C([0,T]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ 中定义的元素，其定义为

$$[0,T] \ni t \mapsto M^n(t) := e_t \sharp \xi^n \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d). \tag{4.5}$$

引理 4.1. 假设**(H1)**、**(H2)**和**(H3)** 均成立。则以下结论成立。 :

(i) 族 ξ^n 在 $\mathcal{P}(\Gamma)$ 中至少有一个聚点。(ii) 族 M^n 在 $C([0,T]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ 中至少有一个聚点。

证明。 **(i)**：由于 $\text{supp}(\xi^n) \subset \Gamma^n$，由引理 3.1 可知，存在 $C_\infty > 0$，使得

$$\|\gamma\|_\infty \le C_\infty \quad \text{for all } \gamma \in \text{supp}(\xi^n). \tag{4.6}$$

此外，若 $\gamma \in$supp(ξ^n)，则 γ 是绝对连续的，具有

$$\dot\gamma(t) = \frac{\gamma(t_{k+1}^n) - \gamma(t_k^n)}{\Delta t_n} \quad \text{for all } k \in \mathcal{I}^{n,*},\ t \in]t_k^n, t_{k+1}^n[. \tag{4.7}$$

记 $\gamma(t_k^n) = (\gamma_1(t_k^n)\ \gamma_2(t_k^n)) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{d-r}$，由 $\mathcal{S}^1_{,k+1}{}^n(\gamma(t_k^n))$ 的定义以及 (4.6) 可得

$$\gamma_1(t_{k+1}^n) = \gamma_1(t_k^n) + \Delta t_n \left[A_1(t_k^n, \gamma(t_k^n)) + B_1(t_k^n)\alpha(k, \gamma(t_k^n), \gamma_1(t_{k+1}^n))\right],$$

其中 $\left|\alpha(k, \gamma(t_k^n)\ \gamma_1(t_{k+1}^n))\right| \le C_{\text{b}}(1 + C_\infty)$。因此，利用 (2.9) 可推得

$$\left|\frac{\gamma_1(t_{k+1}^n) - \gamma_1(t_k^n)}{\Delta t_n}\right| \le (C_A + C_B C_{\text{b}})\,(1 + C_\infty),$$

并且，由 (3.22) 和 (3.23) 可得

$$\left|\frac{\gamma_2(t_{k+1}^n) - \gamma_2(t_k^n)}{\Delta t_n}\right| \le C_I \frac{\Delta x_n}{\Delta t_n} + (C_A + C_B C_{\text{b}})\,(1 + C_\infty). \tag{4.8}$$

由于 $\Delta x_n \le \Delta t_n$，由 (4.7) 可推得存在 $D_\infty > 0$，使得

$$\|\dot\gamma\|_\infty \le D_\infty \quad \text{for all } \gamma \in \text{supp}(\xi^n)$$

因此 $\text{supp}(\xi^n) \subset \{\gamma \in W^{1,\infty}([0,T]; \mathbb{R}^d) \mid \|\gamma\|_\infty \le C_\infty,\ \|\dot\gamma\|_\infty \le D_\infty\}$，它是 $(\Gamma, \|\cdot\|_\infty)$ 的紧子集。因此，由普罗霍罗夫定理（例如参见 [3, 定理 5.1。3]）。

(ii)：由 (4.6)，对于每个 $t \in [0,T]$ 和 $n \in \mathbb{N}$，有

$$\text{supp}\,(M^n(t)) \subset \overline{\text{B}}_\infty(0, C_\infty),$$

并且，由 (2.2) 和 (4.8)，

$$d_1\,(M^n(s), M^n(t)) \le D_\infty |s - t| \quad \text{for all } s, t \in [0,T],\ n \in \mathbb{N}.$$

由于 $\{\mu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d) \mid \text{supp}(\mu) \subset \overline{\text{B}_\infty(0, C_\infty)}\}$ 在 $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ 中是紧的（参见例如 [3, 命题 7.1.5]），由 Arzel`a-Ascoli 定理可得结论。□

利用前述紧性结果，并仿照 [19, 定理 5.1], 的证明进行论证，可得到以下收敛结果。

定理 4.2。假设**(H1)**、**(H2)**和**(H3)** 成立，且当 $n \to \infty$, $N_t^n \to \infty$, $N_s^n \to \infty$,$N_t^n / N_s^n \to 0$ 和 $\varepsilon_n = o(1/(N_t^n \log(N_s^n)))$ 时。则存在问题 *2.1* 的一个解 ξ^*，使得取某个子序列后，$\xi^n \to \xi^*$ 在 $\mathcal{P}(\Gamma)$ 中窄收敛，且 $M^n \to m^* := e_{(\cdot)} \sharp \xi^*$ 在 $C([0,T]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ 中。

此外，如果满足 **(H4)**，并且对于每个 $m \in C([0,T]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ 以及 m_0^*-几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^d$，问题 $(OC_{x,\ m})$ 存在唯一解，那么整个序列 $(\xi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ 按窄收敛意义收敛于问题 *2.1* 的唯一解。

5. Numerical results

本节将通过两个示例实现我们的数值方法。为简化计算，我们在此考虑一维问题，即 $d=1$，以及具有以下形式的动力学（3.1）： $\dot{\gamma}=\alpha$。关于数值格式在二维示例中的实现，请参阅 [19, 示例 2]；在该示例中，典型的智能体控制其加速度，且代价泛函满足 **(H1)**。我们重点研究满足 **(H1)** 和 **(H4)**的代价泛函，其中 $\ell_0(t,\ a,\ x)$ 在（$a,\ x$）上具有多项式增长，并且 f和 g 定义为

$$\begin{aligned} f(t,x,\mu) &= \theta_1(\rho_\sigma \star \mu)(x) \quad \text{for all } (t,x,\mu)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathcal{P}_1(\mathbb{R}),\\ g(x,\mu) &= g_0(x)+\theta_2(\rho_\sigma\star\mu)(x) \quad \text{for all } (x,\mu)\in\mathbb{R}\times\mathcal{P}_1(\mathbb{R}), \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中 $\theta_1,\theta_2\in[0,\infty[$, $\sigma\in]0,\infty[$, $g_0\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 **(H1)**，且

$$\rho_\sigma(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2} \quad \text{for all } x\in\mathbb{R}. \tag{5.2}$$

请注意， f 和 g中的卷积项刻画了典型参与者对拥挤区域的厌恶，并满足**(H4)(ii)**中的单调性条件。

设 $(\Delta t,\Delta x)\in]0,\infty[^2$ 和 $\varepsilon>0$。在上述假设下，与这些参数相关的有限均值场博弈问题**4.1**存在唯一解 $M^*\in\mathcal{M}$。为近似 M^*，我们考虑虚拟博弈序列

$$\overline{\mathsf{M}}^0\in\mathcal{M} \text{ arbitrary}, \quad (\forall\, n\geq 1)\quad \mathsf{M}^{n+1}=\mathbf{br}(\overline{\mathsf{M}}^n), \quad \overline{\mathsf{M}}^{n+1}=\frac{n}{n+1}\overline{\mathsf{M}}^n+\frac{1}{n+1}\mathsf{M}^{n+1},$$

根据 [23, 定理 3.2],，该序列满足 $(\mathsf{M}^n,\mathsf{M}^n)\xrightarrow[n\to\infty]{}(M^*,M^*)$。在下面的测试中，令

$$|\mathbf{br}(\overline{\mathsf{M}}^n)-\overline{\mathsf{M}}^n|_{L^1}:=\frac{1}{N_t+1}\sum_{k=0}^{N_t}\sum_{x\in\mathcal{S}_k}|\mathbf{br}(\overline{\mathsf{M}}^n)_k(x)-\overline{\mathsf{M}}^n_k(x)|$$

并给定容差参数 $\delta>0$，我们实现如下虚拟博弈算法:

Data: $\mathsf{M}^0\in\mathcal{M}$, $\delta>0$
$e\leftarrow\delta+1$
$n\leftarrow 1$
$\overline{\mathsf{M}}^1\leftarrow\mathsf{M}^0$
while $e>\delta$ **do**
  $\mathsf{M}^{n+1}=\mathbf{br}(\overline{\mathsf{M}}^n)$
  $e\leftarrow|\mathsf{M}^{n+1}-\overline{\mathsf{M}}^n|_{L^1}$
  $\overline{\mathsf{M}}^{n+1}=\frac{n}{n+1}\overline{\mathsf{M}}^n+\frac{1}{n+1}\mathsf{M}^{n+1}$
  $n\leftarrow n+1$
end
return $\overline{\mathsf{M}}^{n-1}$

在下面两个示例中，我们考虑时间范围 $T=1$、 $\sigma=0.07$，并且

$$\Delta t=1/30,\quad \Delta x=1/150,\quad \text{and}\quad \varepsilon=0.002.$$

给定初始分布 $m_0^*\in\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$，我们通过定义时间边缘分布恒定为 $\mathbf{M}_k^0=M_0$ 的 $\mathbf{M}^0\in\mathcal{M}$ 来初始化虚拟博弈算法，其中 $k=1,\dots,30$，$\mathbf{M}$ M_0 是根据 (4.3) 对初始分布 m_0^* 进行离散化后得到的。如上所述，对于任意初始条件 $\mathbf{M}^0\in\mathcal{M}$，算法都能收敛。然而，由于计算 $(\mathbf{M}^n,\mathbf{M}^{n+1})$ 时涉及项 $\mathbf{M}^0/n$ ，算法的收敛可能会较慢。为加速该方法，我们可以在达到某个容差后更新初始条件，即将给定容差参数 $\delta>0$ 下得到的近似均衡 $\mathbf{M}^{n-1}$ 作为初始分布，然后运行算法，

较小的 t 容差参数。在我们的测试中，我们将初始条件更新两次，取容差 ce 参数 s $\delta_1 = 0.1$ 和 $\delta_2 = 0.01$。当达到容差 $\delta_3 = 0.001$ 时，我们停止该算法。

5.1. **例1**。 我们考虑一个绝对连续初始分布 $m_0^* \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$，其定义为 b y

$$\mathrm{d}m_0^*(x) = \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)\frac{e^{-x^2/0.04}}{\int_{-1}^{1} e^{-y^2/0.04}\mathrm{d}y}\mathrm{d}x \quad \text{for all } x \in \mathbb{R},$$

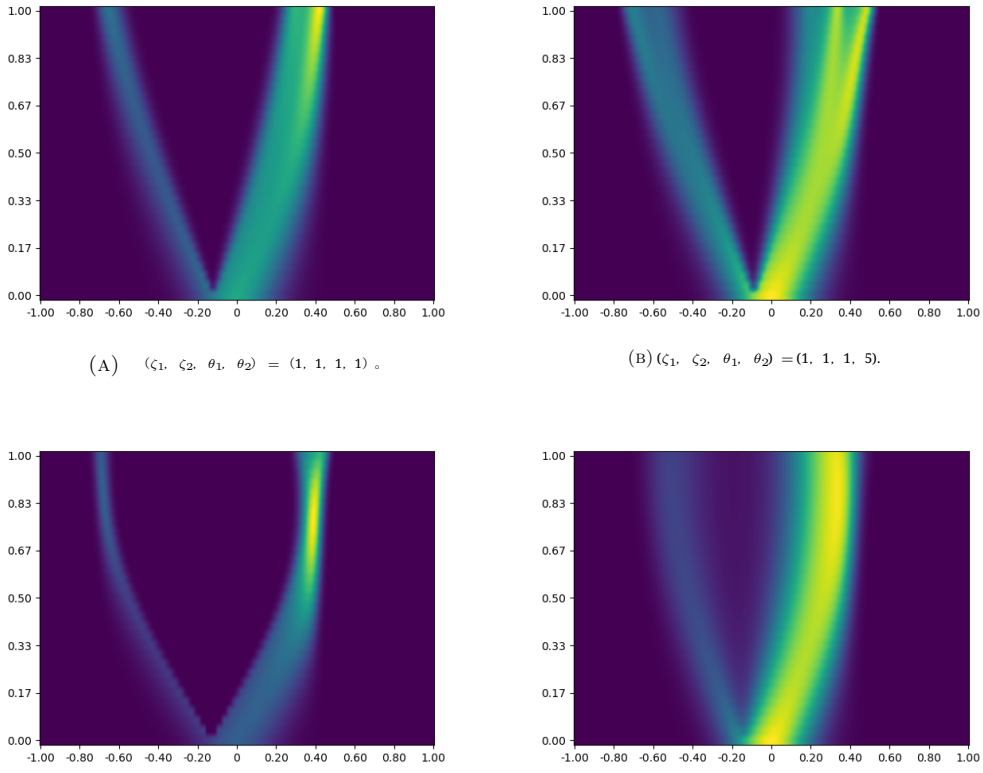
其中，当 $x \in [-1,1]$ 时，$\mathbb{I}_{[-1,1]}(x) = 1$ 且 $\mathbb{I}_{[-1,1]}(x) = 0$；否则。给定 ζ_1、$\zeta_2 \in \mathbb{R}$，我们定义 e

$$\ell(t,a,x,\mu) = \frac{|a|^4}{4} + \zeta_1|x-0.4|^2|x+0.7|^2 + \theta_1 f(x,\mu) \quad \text{and} \quad g(x,\mu) = \zeta_2|x-0.4|^2|x+0.7|^2 + \theta_2 f(x,\mu).$$

注意，函数 ℓ 和 g 在 $p = 4$ 时满足 **(H1)** 。我们针对 $(\zeta_1,\zeta_2,\theta_1,\theta_2)$ 的不同取值运行算法。图 1 展示了容差参数 δ_3 取最小时得到的分布。表 1 列出了达到容差 δ_1、δ_2 和 δ_3 所需的迭代次数。

$(\zeta_1,\zeta_2,\theta_1,\theta_2)$	$\delta_1 = 0.1$	$\delta_2 = 0.01$	$\delta_3 = 0.001$
(1,1, 1, 1)	14	10	9
(1,1,1,5)	10	12	9
(5, 1, 1, 1)	18	11	9
(1, 0, 1, 0)	8	7	6

TABLE 1. 获得所需准确率所需的迭代次数。



(A) $(\zeta_1, \zeta_2, \theta_1, \theta_2) = (1, 1, 1, 1)$。

(B) $(\zeta_1, \zeta_2, \theta_1, \theta_2) = (1, 1, 1, 5)$.

(C) $(\zeta_1, \zeta_2, \theta_1, \theta_2) = (5,1,1,1)$.

(D) $(\zeta_1, \zeta_2, \theta_1, \theta_2) = (1, 0, 1, 0)$。

FIGURE 1. 例1测试的近似均衡

在这个例子中，初始分布集中在 $x = 0$ 附近。代价泛函会惩罚与点 -0.7 和 0.4 的距离以及较大的速度，并促使典型参与者避开

拥挤区域。由于 0.4 更接近零，我们看到大多数智能体倾向于集中在该点附近；随着拥堵项变得更加重要，我们可以看到智能体彼此分散。

5.2. **例2.** 初始分布 $m_0^* \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ 给定为

$$\mathrm{d}m_0^*(x) = \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)\frac{e^{-(x-0.2)^2/0.01} + e^{-(x+0.2)^2/0.01}}{\int_{-1}^{1}(e^{-(y-0.2)^2/0.01} + e^{-(y+0.2)^2/0.01})\mathrm{d}y}\mathrm{d}x \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}.$$

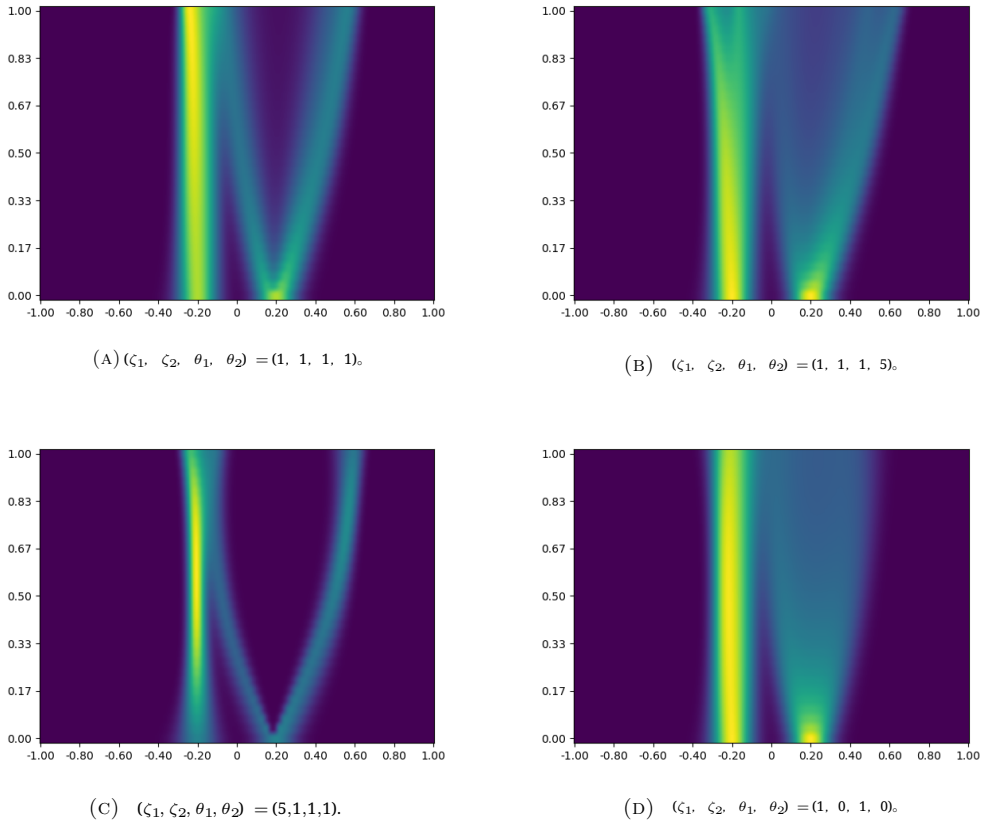
给定 ζ_1、 $\zeta_2 \in \mathbb{R}$，我们定义

$$\ell(t,a,x,\mu) = \frac{|a|^4}{4} + \zeta_1|x-0.6|^2|x+0.2|^2 + \theta_1 f(x,\mu) \quad \text{and} \quad g(x,\mu) = \zeta_2|x-0.6|^2|x+0.2|^2 + \theta_2 f(x,\mu).$$

我们考虑与例1中相同的参数，并在图2中展示使用最小容差 $\delta_3 = 0.001$ 得到的分布。在表2中，我们展示达到容差 δ_1、 δ_2 和 δ_3 所需的迭代次数。

$(\zeta_1, \zeta_2, \theta_1, \theta_2)$	$\delta_1 = 0.1$	$\delta_2 = 0.01$	$\delta_3 = 0.001$
(1,1, 1, 1)	7	6	6
(1,1,1,5)	10	12	9
(5, 1, 1, 1)	12	10	9
(1, 0, 1, 0)	4	6	6

TABLE 2. 达到所需准确率所需的迭代次数。



(A) $(\zeta_1, \zeta_2, \theta_1, \theta_2) = (1, 1, 1, 1)$。

(B) $(\zeta_1, \zeta_2, \theta_1, \theta_2) = (1, 1, 1, 5)$。

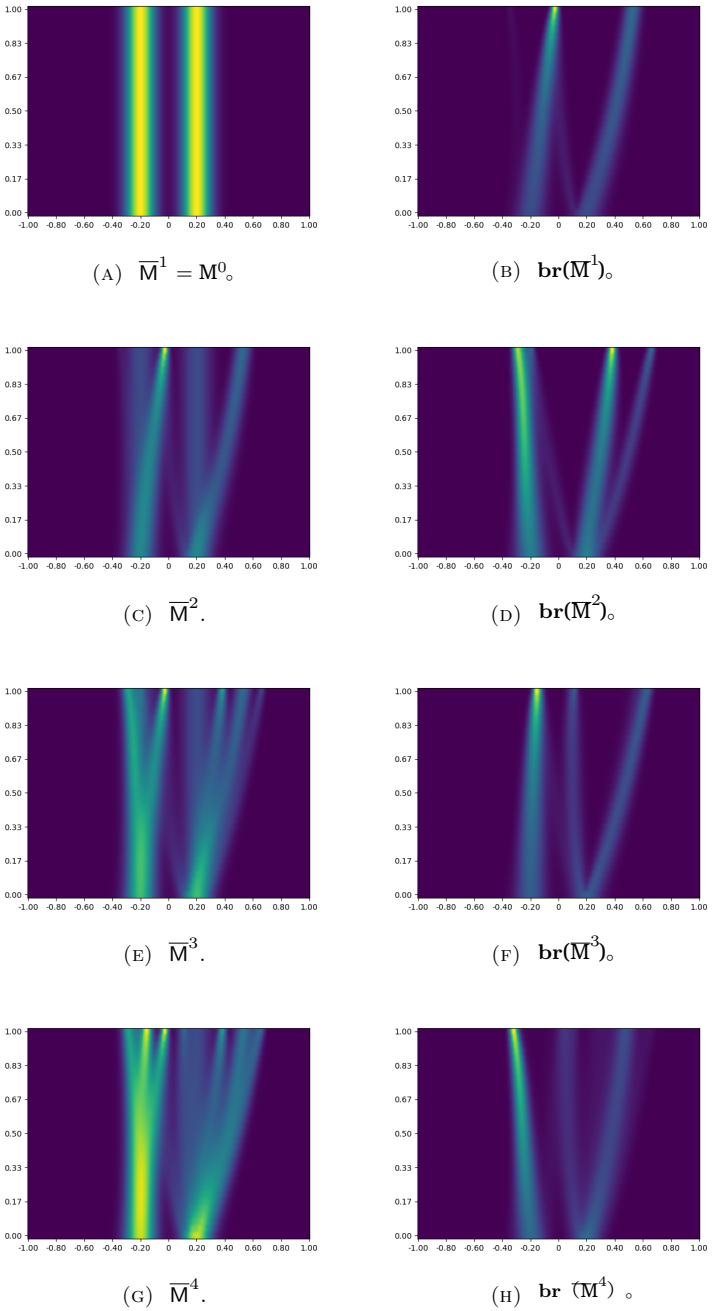
(C) $(\zeta_1, \zeta_2, \theta_1, \theta_2) = (5,1,1,1)$.

(D) $(\zeta_1, \zeta_2, \theta_1, \theta_2) = (1, 0, 1, 0)$。

FIGURE 2. 例2中测试的近似均衡

在本例中，我们从集中在点 -0.2 和 0。2 附近的分布开始。代价泛函对到点 -0.2 和 0。6 的距离进行惩罚。尽管这两个点关于 0。2 对称，但我们看到，为了避开拥挤区域，在 $t = 0$ 时集中在 0。2 附近的更多智能体倾向于前往 0。6，而不是 -0.2。我们再次观察到拥堵项对智能体最终分布的影响。

为了更好地理解虚拟博弈法，我们在本节最后通过图3展示当 $(\zeta_1, \zeta_2, \theta_1, \theta_2) = (1, 1, 1, 5)$ 时算法的前几次迭代。此情形下的最终分布显示在图2的右上角。



(A) $\overline{\mathbb{M}}^1 = \mathbb{M}^0$。　(B) $\mathbf{br}(\overline{\mathbb{M}}^1)$。

(C) $\overline{\mathbb{M}}^2$.　(D) $\mathbf{br}(\overline{\mathbb{M}}^2)$。

(E) $\overline{\mathbb{M}}^3$.　(F) $\mathbf{br}(\overline{\mathbb{M}}^3)$。

(G) $\overline{\mathbb{M}}^4$.　(H) $\mathbf{br}(\overline{\mathbb{M}}^4)$。

FIGURE 3. $(\zeta_1, \zeta_2, \theta_1, \theta_2)$ 的前几次算法迭代 $= (1, 1, 1, 5)$。

References

[1] Y. Achdou、P. Cardaliaguet、F. Delarue、A. Porretta 和 F. Santambrogio。*Mean field games* 2281 *Lecture* ，第 卷。Springer，沙姆；夏季国际数学中心 *Notes in Mathematics* 1 （C.I.M.E.），佛罗伦萨，。[2] 2020 Y. Achdou、P. Mannucci、C. Marchi 和 N. Tchou。具有加速度控制的确定性平均场博弈。 *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 27 3 33, 32, 2020 2 ，（）：论文编号 。[3] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savare。 *Gradient Flows: In Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*。数学讲义。苏黎世联邦理工学院。Birkhäuser Basel，2008。9[4] M. Bardi 和 I. Capuzzo-Dolcetta。 *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*。Birkhäuser，马萨诸塞州波士顿，。G. Barles 和 P.E. Souganidis。完全非线性二阶方程的逼近格式收敛性。 *Asymptotic Analysis* 4 271 283, 1991 7 ，：–。J.-D. Benamou、G. Carlier 和 F. Santambrogio。变分平均场博弈。载于 *Active particles. Vol. 1. Advances in theory models and applications* 141 171 [6] ¨ ，，，Model. Simul. Sci. Eng. Technol.，第–页。Birkhauser/Springer，沙姆，2017。1[7] *Measure theory. Vol. I II* 2007 5 V. I. Bogachev。，。Springer-Verlag，柏林，。G. W. Brown。通过虚拟博弈迭代求解博弈。载于 *Activity Analysis of Production and Allocation*，考尔斯委员会专著，第13号，第374–376页。John Wiley & Sons, Inc.，纽约州纽约；Chapman & Hall, Ltd.，伦敦，1951。1[9] F. Camilli 和 F. J. Silva。一阶平均场博弈问题的半离散逼近。 *Netw. Heterog. Media* 7 2 263 277, 2012 ，（）：–。[10] P. Cannarsa 和 R. Capuani。具有状态约束的平均场博弈的存在唯一性。载于 *PDE models for multi-agent phenomena* 28 *Springer INdAM Ser.* 49 71 2018 ，第 卷，第–页。Springer，沙姆，。[11] P. Cannarsa 和 C. Mendico。线性控制系统平均场博弈问题的温和解与弱解。*Theory Appl.* 5 2 221 250, 2020 *Minimax* ，（）：–。[12] P. Cardaliaguet 和 S. Hadikhanloo。平均场博弈中的学习：虚拟博弈。 *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 23 2 569 591, 2017 ，（）：–。[13] E. Carlini 和 F. J. Silva。一阶平均场博弈问题的全离散半拉格朗日格式。 *SIAM J. Numer. Anal.* 52 1 45 67, 2014 ，（）：–。[14] E. Carlini、F. J. Silva 和 A. Zorkot。一阶平均场博弈系统的拉格朗日-伽辽金格式。预印本，arXiv:2303.14941，2023。1[15] R. Carmona 和 F. Delarue。 *Probabilistic theory of mean field games with applications. I* 83 *Probability* ，第 卷。Springer，沙姆，。平均场正倒向随机微分方程、控制与博弈。[16] R. Carmona 和 F. Delarue。 *Probabilistic theory of mean field games with applications. II* 84 *Probability* ，第 卷。Springer，沙姆，。带共同噪声的平均场博弈与主方程。1[17] *Direct Methods in the Calculus of Variations* 1989 4 B. Dacorogna。，。Springer-Verlag，柏林、海德堡，。M. Falcone 和 R. Ferretti。。工业与应用数学学会（SIAM），宾夕法尼亚州费城，2014 2, 6 。J. Gianatti 和 F. J. Silva。具有控制仿射动力学的确定性平均场博弈的近似。预印本，arXiv:2212.09854，2022。1，2，3，4，6，7，8，9，10[20] D. A. Gomes、J. Mohr 和 R. R. Souza。离散时间、有限状态空间平均场博弈。 *J. Math. Pures Appl. (9)*, 93 3 308 （）：– 328, 2010 1, 8 。D. A. Gomes、E. A. Pimentel 和 V. Voskanyan。 *Regularity theory for mean-field game systems*。Springer 数学简明丛书。Springer，2016 1 。D. A. Gomes 和 J. Saude。平均场博弈模型——简要综述。 *Dyn. Games Appl.* 4 2 110 154, 2014 1 ，（）：–。S. Hadikhanloo 和 F. J. Silva。有限平均场博弈：虚拟博弈及其向一阶连续平均场博弈的收敛。 *J. Math. Pures Appl. (9)* 132 369 397, 2019 1, 2, 10 ，：–。M. Huang、R. P. Malhame 和 P. E. Caines。大规模群体随机动态博弈：闭环 McKean-Vlasov 系统与 Nash 确定性等价原理。 *Commun. Inf. Syst.* 6 3 221 251, 2006 1 ，（）：–。J.-M. Lasry 和 P.-L. Lions。平均场博弈。I. 平稳情形。，343 625，2006 9 619 1（）：–。[26] J.-M. Lasry 和 P.-L. Lions。平均场博弈。II. 有限时域与最优控制。 *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343 10 679 684, 2006（）：–。[27] J.-M. Lasry 和 P.-L. Lions。平均场博弈。 *Jpn. J. Math.* 2 1 229 260, 2007 1 ，（）：–。J. Robinson。求解博弈的迭代方法。，：–301，1951。1 [28] *Ann. of Math. (2)* 54 296