自由积的不可约、位移为一的自同构的不动点

MATTHEW COLLINS

Abstract. 我们考察外自同构在由群 G的自由积分解所给出的 $\mathcal{O}$ 树空间G上的作用。我们证明，不可约且位移为 1 的自同构在 $\mathcal{O}_1$ 中恰好固定一个点（ $\mathcal{O}$的余体积为 1 的截面）。

arXiv:2305.01451v1 [math.GR] 2 May 2023

Contents

1. 引言 1 2. 在树上作用的群 3 - 度量单纯树 3 - G树 4 - 等价 5 3. Bass-Serre 理论 5 - 群图 5 - 商群图 6 - 万有覆盖 7 4. 自由因子系与变形空间 7 5. 自同构 9 - 在变形空间上的作用 9 - 拓扑代表 10 - 等距拓扑代表 12 6. $\mathcal{O}$ 13上的距离 - 伸缩因子 13 - 自同构的位移 14 7. 次级定理 14 8. 主定理 17 参考文献 19

1. Introduction

本文可视为对 Dicks & Ventura 的一篇论文的推广 [6], 。在那篇论文中，作者对自由群的不可约、增长率为 1 的自同构进行了分类 F_n。在此过程中，他们证明每个这样的自同构都可以表示为一个图

的图自同构，其基本群为 F_n。结合 [2]和 [8], 的结果，这意味着自由群的不可约、增长率为 1 的自同构 F_n 在 Culler-Vogtmann 空间 CV_n中固定一个点。本文的主要结果是对这一结果的推广：我们证明，自由积$G = G_1 * \ldots * G_k * F_r$的不可约、增长率为 1 的自同构在变形空间 $\mathcal{O}_1$中固定一个点。

这一结果的自由群版本在 [11, 第10页，定理 3.8], 中有明确表述，它可由 Dicks & Ventura 的分类得出，具体如下： F_n 的每个不可约外自同构都可由 Culler-Vogtmann空间 CV_n [2, 中某个图上的不可约列车轨道映射 f 在拓扑意义下表示（第9页，定理 1.7]）。如果该自同构的增长率为 1，那么 f 就是一个有限阶同胚——在这种情况下，它是一个图自同构。因此，Dicks & Ventura 在 [6] 中发现的图自同构实际上都是列车轨道映射。

CV_n 中不可约自同构的最小位移集恰好与支持列车轨道映射 [8, 的点集重合（第32页，定理 8.19]）。此外，可以证明，不可约自同构的增长率等于其位移；若该自同构的位移为 1，则最小位移集实际上就是一个不动点集。由此可知，支持 Dicks & Ventura 所发现的列车轨道映射的图，是 Culler-Voghtmann空间中的不动点。

最后一步是证明这些点的唯一性，这在 [11,第10页、定理3的证明中完成8]。

我们对自由积的推广沿用了类似的思路——不过，我们改用变形空间 $\mathcal{O}$，也称为外空间，它是 Culler-Vogtmann 空间向自由积的推广 $G = G_1 * \ldots * G_k * F_r$。变形空间的概念最早由 Forester 引入 [7], ，此后它们在 [5] 和 [4]中得到了研究。给定一个群 G，人们考虑 G 在度量单纯树上的极小、余紧等距作用。这些树及其作用称为 G-树。若两个 G-树之间存在等变等距映射，则称它们等价；进而将 $\mathcal{O}$ 定义为由具有相同椭圆子群集合的 G-树的等价类组成的空间——也就是说，这些子群在树上固定一个点。

保持共轭类集合 $\{[G_1], \ldots, [G_k]\}$ 的外自同构群通过“扭曲” G-树的作用，在 $\mathcal{O}$ 上作用。该群记作 $\mathrm{Out}(G, \mathcal{G})$。我们利用非对称 Lipschitz 度量研究它在 $\mathcal{O}$ 的余体积为一的截面（记作 $\mathcal{O}_1$）上的作用：对于任意两棵 G-树 $T, S \in \mathcal{O}_1$，我们用 $\Lambda_R(T, S)$ 表示它们之间的非对称 Lipschitz 距离，即伸缩因子。

对于自同构 $\alpha \in \mathrm{Out}(G, \mathcal{G})$，可以将 α 的位移定义为 $\lambda_\alpha = \inf\{\Lambda(T, \alpha T) \mid T \in \mathcal{O}_1\}$。$\alpha$ 的最小位移集 $\mathrm{Min}_1(\alpha)$ 是 $\mathcal{O}_1$ 中实现这一下确界的 G-树 T 的集合。可以证明，若 α 不可约，则位移 λ_α 不仅是下确界，而且是最小值，因此集合 $\mathrm{Min}_1(\alpha)$ 非空。此外，可以证明， $\Lambda_R(T, S) = 1$ 当且仅当 T 和 S 在 $\mathcal{O}_1$ 中代表同一个等价类；因此， $\lambda_\alpha = 1$ 意味着 $\mathrm{Min}_1(\alpha)$ 是 α 的不动点集。

$\mathcal{O}_1$ 可以看作开单形的并，其中，一个 G-树在其单形中的位置由其边的长度决定。在定理 7.6 中，我们证明了 α 在每个$T \in \mathrm{Min}_1(\alpha)$ 上的作用可以用 T的一个等距变换在拓扑上表示，并且该等距变换必定循环置换 T中 G-轨道的边。由此可知， T 的边必定具有相同的长度，因此 T 必定位于其开单形的中心——于是 $\mathrm{Min}_1(\alpha)$必定完全由单形中心组成。然而， [10, 第 19 页、推论 5.4]中表明，$\mathrm{Min}_1(\alpha)$ 是

由所谓的单形路径连接起来的。由于两个单形中心之间的一条非平凡单形路径必定经过一个不在单形中心的点，我们的主要结果如下:

定理 8.6. 设 $\alpha \in \mathsf{Out}(G, \mathcal{G})$ 不可约且位移为 1。那么 $\mathsf{Min}_1(\alpha) = \mathsf{Fix}_1(\alpha)$ 是一个点。

2. 群作用于树上

本章中，设 G 是一个群。

- 度量单纯树。

定义 2.1. $\mathbb{R}$-树是一个非空度量空间，其中任意两点之间都由唯一的一条弧连接，并且每条弧都与实数轴上的一个闭区间等距。

定义 2.2. 设 p 是非平凡 $\mathbb{R}$-树 T中的一个点。

- p 称为分支点，如果 $T - p$ 有三个或更多个连通分支。• p 称为正则点，如果 $T - p$ 恰有两个连通分支。否则，• p称为外部点。

非正则点称为非正则点。

定义 2.3. 度量单纯树是指其非正则点集为离散集的 $\mathbb{R}$-树。

为这些度量单纯树赋予组合结构将很有用。设 C 是一个一维单纯复形。其 1-单纯形称为边，0-单纯形称为顶点。可以按如下方式从单纯复形构造度量单纯树:

定义 2.4. 设 C 是一个一维单纯复形。 C 的几何实现是由 C 赋予 C 中每条边长度为 1 而得到的度量空间。我们赋予该几何实现路径度量拓扑。

定理 2.5. 一个 $\mathbb{R}$-树 T 是度量单纯的，当且仅当它同胚于某个基本群平凡的连通一维单纯复形 C 的几何实现。

备注. 对这一构造还有另一种理解方式。设 T 和 C 如定理 2.5 所述。那么可以把 T 看作由 C 得到：给 C 中每条边 e 赋予一个长度 $L(e)$（不一定为 1），并且为了确保非正则点的离散性，我们施加如下条件：对于每个顶点 $v \in C$，与 $v\} > 0$ 关联的 $\{L(e) \mid e$ 的下确界为.....

需要注意的是，如果 T 是一棵度量单纯树，那么与 T 同胚的几何实现并不唯一：将 C 的任意一条边一分为二并添加一个新顶点，就会得到一个新的单纯复形，其几何实现也与 T 同胚。因此，我们对树的结构有一定的选择余地。一旦选定了 C，我们便简单地说“ e 是 T 的一条边”，意即 e 是 C 的一条边；顶点的说法也类似。

当群 G 作用于 T 上时，可以利用这一作用来确定我们的结构，具体说明见下一节。我们也将采用的传统做法将在下一节中介绍。

- G-树。

定义 2.6。设 T 是一棵度量单纯树，其底层是一个单纯复形。我们将 T 的子森林定义为由一组 E' 边和一组 V' 顶点构成的子空间，并且 E' 中每条边的关联顶点都属于 V'。

T 的子树是连通的子森林。

这个定义的含义是，我们定义子森林和子树时要求它们遵循底层的单纯复形结构。一般来说，这并非必要，但符合本文的研究目的。

定义 2.7。设 G 作用于一棵度量单纯树 T，且该树具有一个底层单纯复形。

- 若该作用将顶点映射到顶点，并将边映射到边，则称其为单纯的。• 如果 T 的任何边都不会被 G 中的任何元素映射为其逆边，则称 G 的作用无反转。• 如果 T 不包含任何真 G-不变子树，则称 T 及其作用都是极小的。• 设 $x \in T$。 x 的稳定子 $\mathsf{stab}(x)$ 定义为 G 的子群 $\{g \mid x \cdot g = x\}$。设 T 中有一条边 e。那么， e 的稳定子 $\mathsf{stab}(e)$ 定义为 G 的子群，该子群固定 e，但不一定保持 e 的定向。如果 T 中每条边的稳定子都是平凡的，则称 T 为无边稳定子。设 T 中有一个顶点 p。若 $\mathsf{stab}(p) = 1$，则称 p 为自由的；否则称其为非自由的。

定义 2.8。一个 G-树是三元组 $(T, d_T, \cdot)$，其中 T 是一棵度量单纯树， d_T 是 T 上的度量，而 $\cdot$ 是一个等距群作用 $T \times G \to T$，$(x, g) \mapsto x \cdot g$。

如果度量和作用从上下文中显而易见，我们可以选择在记号中省略其中之一或两者。

备注。我们选择将 G-树定义为带有右作用，这样 $\forall x \in T, \forall g \in G$ 和 $\forall H \leqslant G$，$\mathsf{stab}(x \cdot g) = \mathsf{stab}(x)^g$，且 $\mathsf{Fix}(H^g) = \mathsf{Fix}(H) \cdot g$。

如果我们选择左作用，那么由 g 作用会使稳定子被 g^{-1} 共轭，不动点集的情况也类似。

现在我们可以为 G-树选择一个单纯结构了。设 T 是一棵 G-树。那么 T 上最简单的结构——也就是包含顶点最少的结构——可通过将顶点集定义为 T 的非正则点集来获得。接着，将顶点集中元素之间不包含其他顶点的简单弧集合作为边集。

采用最简单的结构， G 在 T 上的作用是单纯复形的。然而， G中的某些元素可能会将边映射到其逆向。为了便于后续计算，我们需要无反转作用，因此改用以下结构：

- 我们将 T 的非正则点集，以及 G 中某个元素反转的最简单结构的所有边的中点集，定义为顶点集。我们用 $V(T)$ 表示这个顶点集。• 接着，我们将顶点集中各元素之间不包含其他顶点的简单弧集定义为边集。我们用 $E(T)$ 表示这个边集。

本质上，我们在每条反向边的中点处加入一个新顶点，从而将其分成两条边。在这个新结构下，作用仍然是单纯复形的，而且没有反转。本文中，我们将对所有 G-树采用这一单纯结构。

备注。 $V(T)$ 如上所定义，是一个离散集，因此构成一个定义良好的顶点集。

以下两个命题直接由这一单纯结构的选择得出。

命题 2.9。极小的 G-树不含任何度为 1 的顶点（因此，非正则点集恰好就是分支点集）。

命题 2.10。 G-树不含任何度为 2 的自由顶点。

- 等价。

定义 2.11。设 $(T, d_T, \cdot)$, $(S, d_S, *)$ 是 G-树。我们称树的映射 $f\colon T \to S$ 是从 $(T, d_T, \cdot)$ 到 $(S, d_S, *)$ 的 G-等变映射，当且仅当对所有 $x \in T$，均有 $f(x \cdot g) = f(x) * g$；对所有 $g \in G$，亦然。

定义 2.12。若两个 G-树 $(T, d_T, \cdot)$, $(S, d_S, *)$ 之间存在 G-等变等距映射，则称它们等价。我们用 $(T, d_T, \cdot) \sim (S, d_S, *)$ 表示等价。

定义 2.13。若一个 G-树映射将顶点映到顶点，则称其为单纯复形的。注意，它不必将边映到边，因此此定义不同于单纯群作用的定义。

3. Bass-Serre Theory

- 群图。

定义 3.1. [3, p.113]图 Y 由以下部分组成：

• 两个互不相交的集合 $V(Y)$ 和 $E(Y)$，分别称为 Y的顶点集和边集。• 一个函数： $E(Y) \to E(Y)$，使得对所有 $e \in E(Y)$、 $\overline{e} \neq e$ 和 $\overline{\overline{e}} = e$均成立。• 一个函数 $\iota\colon E(Y) \to V(Y)$, 以及另一个由下式定义的函数 $\tau\colon E(Y) \to V(Y)\, \tau e := \iota\overline{e}$。我们称 ιe为 e的起始顶点，称 τe为 e的终止顶点。

如果 $V(Y)$ 和 $E(Y)$ 均为有限集，则称 Y是有限的。

以这种方式定义的图——将每条无向边视为一对有向边 $(e, \overline{e})$ ——通常称为 Serre 图。

定义 3.2. 度量图是由图 Y 和长度函数 $L\colon E(Y) \to \mathbb{R}$ 构成的，其中对于 Y 的所有边 e，都有 $L(e) = L(\overline{e})$。该长度函数在 Y 上诱导出度量 d_Y。

简要回顾上一章，我们指出，一维单纯复形可以视为 Serre 图，只需将每个 1-单形视为一对边。因此， G-树（及其商）可以视为度量图；根据上下文，我们也会将其如此看待。这使我们能够作出以下观察：

命 题 3.3. G 通过图自同构（不含反转）作用于 G-树上。

命题 3.4. 设 T 是一棵度量单纯树。当且仅当 T/G 有限时，它在路径度量拓扑下是紧致的。

现在我们回到群图的定义。

定义 3.5。 [3, p.198]群图 X 由以下部分组成：

(i) 一个连通图 Y(ii) 对于每个顶点 v，有一个群 G_v；对于每条边 e，有一个群 G_e，使得$G_{\overline{e}} = G_e$。（iii）对于每条边 Y，有一个单态射 ρ_e： $G_e \to G_{\tau e}$，其中 ιe 和 τe 是 e的端点。

如果 Y 是度量图，那么我们称 X 为度量群图。

设 X 是定义在图 Y上的群图。可以用类似于标准图的方式定义 X 的基本群：将群的元素视为图中的约化环路。不过，边群和顶点群还赋予了额外的结构。我们将采用改编自 [3, p.198], 的定义，并将其限定于 X 的边群均为平凡群（因此单态射 ρ_e也均为平凡单态射）的情形。

令 Y_0 为 Y中的一棵生成树。于是可以将 X 的基本群定义为

$$\pi_1(X) = \frac{\left(*_{v \in V(Y)} G_v \right) * F(E(Y))}{N}$$

其中， N 是集合$\{e\overline{e} \mid e \in E(Y)\} \cup \{e \in Y_0\}$的正规闭包。该定义可以简化为 $\pi_1(X) \cong G_1 * \ldots * G_k * F_r$的形式，其中 G_1、.....、 G_k是非平凡顶点群，而$F_r \cong \pi_1(Y)$ 是秩为 $r \geqslant 0$的自由群。该定义不依赖于Y_0的选择。

我们将研究基本群同构于特定群 G的群图。因此，我们考虑二元组 $(X$、 $\phi)$，其中 X 是一个群图，且$\phi : G \to \pi_1(X)$ 是一个同构。这种二元组称为标记群图，而 ϕ 称为标记。

- 商群图。给定一个 G-树 T，我们可以由此构造出一个称为商群图的度量群图。关于如何从一个在 G 作用下的任意连通图构造商群图的完整方法，可参见 [3]第204—205页。对于本文，我们将把他的构造限制于无边稳定子 G-树。

设 T 是一个 G-树。取商图 $T/G,$，并令 $p : T \to T/G$ 为投影映射， T/G的一个极大树为 Y_0。设映射 $j : Y_0 \to T$满足 $p \circ j$ 在 Y_0 上是恒等映射（即， j 是 Y_0 到 T的一个提升）。我们称 $j(Y_0)$ 为该作用的代表树。

接下来，我们在 T/G 上定义群图 X 如下：对于 $T/G,$ 的任意顶点 x，定义顶点群 G_x 为 stab $(j(x))$。所有边群以及相应的边单态射均取为平凡的，边的长度继承自 T。这样便完整定义了 X。

X 上的度量通过如下方式给出：将 X 中每条边 e 的长度指定为其在 T中对应边轨道的长度。

定理 3.6. *[3,* 第210页，定理26 (iii)*]*设 T 是一个 G-树，且 X 是 T的一个商群图。那么 X 的基本群同构于 G。

这个同构在 X 上给出一个标记，因此我们可以将该商群图视为带标记的群图。

- 万有覆盖。反过来，设 (X,ϕ) 是一个带标记度量群图，且具有 $G \overset{\phi}{\cong} \pi_1(X,v)$。那么，我们可以由 X 构造一棵 G-树，称为 Bass-Serre 树，或称为 X 的万有˜覆盖，记作 X。文献中已对万有覆盖的构造过程作了充分说明（例如 [3,第 205] 页），因此这里不再赘述。

定义 3.7。我们称两个标记度量群图等价，如果它们的万有覆盖是等价的 G-树。

定理 3.8（Bass-Serre 理论基本定理）。提升到万有覆盖的过程与下降到商群图的过程互为逆过程，所涉及的结构在等价意义下相同。

设 $T \in \mathcal{O}$。我们注意到， T 的商群图 (X,ϕ) 并不唯一：虽然底层图总是 $T/G,$，但顶点群取决于我们对 j 的选择，因此 X 并不唯一。此外，给定 X 的一种选择，标记 ϕ: $G \to \pi_1(X)$ 也不唯一。

然而，根据 Bass-Serre 理论基本定理， j 和 ϕ 的所有可能选择都会给出等价的标记群图。因此，为了简化记号，我们将标记群图 (X,ϕ) 简记为 X。

4. Free Factor Systems and the Deformation Space

设 G 为一个群，并设 T 为一棵 G-树。

定义 4.1. 若元素 $g \in G$ 固定 T 中的一个点，则称其为椭圆型（相对于 T）。若 g 不是椭圆型，则称其为双曲（相对于 T）。

若存在一点 $x \in T$ 使得 $x \cdot H = x$，则称 G 的子群 H 为椭圆型（相对于 T）。

定义 4.2（自由因子系）。设 T 是一棵极小、余紧、无边稳定子的 G-树，并令 $\mathcal{G}_T$ 表示 T 的椭圆子群集合。称 $\mathcal{G}_T$ 为 G 的自由因子系。

请注意，这并非自由因子系的通常定义。通常定义见 [1, 第 530 页-531],，我们将其称为传统自由因子系：

定义 4.3（传统自由因子系）。如果 $G_1 * \ldots * G_k * F_r$ 是群 G 的一个自由积分解，且每个 G_i 都非平凡，那么我们称共轭类的集合 $\{[G_1], \ldots, [G_k]\}$ 为传统自由因子系。空集 $\varnothing$ 是平凡的传统自由因子系。

推论 4.10 将说明，Bass-Serre 理论基本定理提供了一种自然的方法，可以从传统自由因子系构造自由因子系，反之亦然，而且这两种构造互为逆运算。从这个意义上说，这两种定义是等价的。

我们选择这种定义有两个原因。首先，采用传统定义时，必须单独定义平凡自由因子系。其次，我们的定义允许按包含关系对自由因子系进行排序，这与传统自由因子系统所采用的、稍微复杂一些的排序方式相对应，具体定义见 [1, 第 532] 页。

现在，我们回到自由因子系的定义，并注意到以下性质：

Lemma 4.4. 自由因子系在共轭和取子群的运算下封闭 .

引理 4.5. 设 $(T,\cdot),(S,*)$ 是等价的极小、余紧、无边稳定子 G-树。那么$\mathcal{G}_T=\mathcal{G}_S$

引理 4.6. 设 $(T,\cdot)$ 是一棵无边稳定子 G-树。 G 的非平凡元素不能在 T 中固定多个点，而且不动点总是一个顶点。

最后一个引理告诉我们， G 的子群相对于极小、余紧、无边稳定子 G-树是椭圆型的，因此属于相应的自由因子系，当且仅当它是一个顶点稳定子或顶点稳定子的子群。

定义 4.7. 设 $\mathcal{G}$ 是 G 的一个自由因子系。变形空间 $\mathcal{O}=\mathcal{O}(G,\mathcal{G})$ 是由极小、余紧、无边稳定子 G-树 T 的等价类构成的空间，满足 $\mathcal{G}_T=\mathcal{G}$

由引理 4.6， G 的子群属于 $\mathcal{G}$，当且仅当对于 $\mathcal{O}$ 中某个（因而每个） G-树而言，它是一个顶点稳定子或顶点稳定子的子群。此外，根据群作用的一般性质，两个顶点属于同一轨道，当且仅当它们的稳定子共轭。因此，我们可以为 $\mathcal{G}$定义一个极小生成集：

定义 4.8. 我们称自由因子系 $\mathcal{G}$ 的一个子集是 $\mathcal{G}$ 的极小生成集，当且仅当它在某个（因而也在每个） $T\in\mathcal{O}$ 中，恰好包含每个非自由顶点轨道中的一个顶点稳定子。

备注. 若 $\mathcal{G}$ 非平凡，则按照共轭和取子群这两种运算来定义极小生成集时，这一定义与通常定义一致。

若 $\mathcal{G}=\{1\}$ 是平凡自由因子系，则 $\mathcal{O}(G$ 中的树 $\mathcal{G})$ 不含任何非自由顶点。因此， $\mathcal{G}=\{1\}$ 的极小生成集是空集 $\varnothing$。

G 中的树是余紧的，因此由命题 3.4 可知， T 有有限个顶点轨道。所以， $\mathcal{G}$ 的极小生成集总是有限的。

定理 4.9. 以下各项等价：

(i) 存在一个极小、余紧、无边稳定子的 G-树 T，其中包含 T 中的一个代表树 T_0，并且 T_0 中的非平凡顶点稳定子恰好是 G_1、……、G_k。(ii) 存在一个极小、余紧、无边稳定子的 G-树 T，以及定义在 T/G 上的一个商群图，其非平凡顶点群恰好是 G_1、……、 G_k。(iii) G 可以写成自由积 $G=G_1*\ldots*G_k*F_r$，其中 F_r 是秩为 $r\geqslant 0$ 的自由群。

证明。 $(i)\Leftrightarrow(ii)$ 由 Bass-Serre 理论基本定理可得。

$(ii)\Rightarrow(iii)$ 由群图的基本群的定义和定理 3.6 立即可得。

$(iii)\Rightarrow(ii)$ 我们必须先考虑 $k=1$ 和 $r=0$ 的情形——也就是说，平凡自由积分解。在这种情况下，我们取 X 为由单个顶点构成的群图，其顶点群为 G。

否则，我们取 X 为由以下部分构成的群图：

- 一朵玫瑰图，其中心顶点为 v_∞（顶点群平凡），并有 r 个花瓣。
- 对于每个 $i\in\{1,\ldots,k\}$:

– 一个顶点 v_i，其关联顶点群为 G_i– 一条
边 e_i，连接 v_i 和 v_∞• 每条边的边群都平凡

那么 $\pi_1(X) = G_1 * \ldots * G_k * F_r = G$。提升到万有覆盖后，可以看出这是一个极小、余紧、无边稳定子的 G-树的商群图。□

现在我们可以证明自由因子系与传统自由因子系之间的对应关系。

设 $\mathcal{G}$ 是群 G的一个自由因子系。这意味着，$\mathcal{G}$ 是某个 $T \in \mathcal{O}(G、\ \mathcal{G})$的椭圆子群集合。取 T中的一棵代表树，并设 $\{G_1、\ .....、\ G_k\}$ 是这棵代表树的非平凡顶点群。那么根据定理 4.9，G 可以写成自由积 $G = G_1 * \ldots * G_k * F_r$。因此，集合 $\{[G_1]、\ .....、\ [G_k]\}$ 是一个传统自由因子系。由于每个 $[G_i]$ 都是一个共轭类，这个集合不依赖于代表树的选择。

反过来，设 $\{[G_1], \ldots, [G_k]\}$ 是一个传统自由因子系。那么我们有$G = G_1 * \ldots * G_k * F_r$，因此根据定理 4.9，存在一棵极小、余紧、无边稳定子的 G-树T，其中包含一个位于 T 中的代表树 T_0，并且 T_0 中的非平凡顶点稳定子恰好是 $G_1, \ldots, G_k$。这些顶点群构成自由因子系$\mathcal{G} = \mathcal{G}_T$的一个极小生成集。

推论 4.10。从传统自由因子系构造自由因子系的过程，与从自由因子系构造传统自由因子系的过程互为逆过程。从这个意义上说，这两种定义是等价的。

证明。由定理 4.9 可得。 □

由推论 4.10 可知，给定一个自由积 $G = G_1 * \ldots * G_k * F_r$，我们可以构造一个自由因子系 $\mathcal{G}$，进而得到相应的变形空间 $\mathcal{O}(G, \mathcal{G})$。随后可以利用该空间研究这个自由积的自同构。

5. Automorphisms

在本节中，令 $\mathcal{G}$ 表示群 G 的一个自由因子系，并令$\mathcal{O} = \mathcal{O}(G、\ \mathcal{G})$。

- 在变形空间上的作用。

记号。 G 的外自同构群定义为 $\mathsf{Out}(G) := \mathsf{Aut}^{(G)} \diagup \mathsf{Inn}(G)$；$\mathsf{Out}(G)$ 的元素是自同构的等价类，其中两个自同构等价，当且仅当它们相差一个内自同构。

当我们写作 $\alpha \in \mathsf{Out}(G)$ 时，意指 α 是 $\mathsf{Aut}(G)$ 中的一个自同构，它代表 $\mathsf{Out}(G)$ 中的一个等价类。

在本文中，G 的自同构将在右侧作用于 G。

定义 5.1. 设 $\alpha \in \mathsf{Aut}(G)$，且令 $\mathcal{G}\alpha = \{(H)\alpha \mid H \in \mathcal{G}\}$。如果 $\mathcal{G}$ 是 α-不变的，则称其为 α-不变的，当且仅当 $\mathcal{G}\alpha = \mathcal{G}$。

自由因子系在 G 中元素的共轭作用下封闭，因此 α-不变性只取决于 α 的外自同构类。由此，我们可以对 $\mathsf{Out}(G)$ 作类似定义：

定义 5.2. 设 $\alpha \in \mathsf{Out}(G)$，且设 $\mathcal{G}\alpha = \{(H)\alpha \mid H \in \mathcal{G}\}$。若 $\mathcal{G}\alpha = \mathcal{G}$，则称 $\mathcal{G}$ 为 α-不变的。

G的 $\mathcal{G}$-不变外自同构构成一个群，我们将其记为 $\mathsf{Out}(G, \mathcal{G})$。

群 $\mathsf{Out}(G, \mathcal{G})$ 在变形空间 $\mathcal{O} = \mathcal{O}(G, \mathcal{G})$上有左作用：设$(T, d_T, \cdot) \in \mathcal{O}$，再设 $\alpha \in \mathsf{Out}(G, \mathcal{G})$。那么 $\alpha(T, d_T, \cdot) := (T, d_T, \cdot_\alpha)$，即底层单纯树及度量相同的 G-树，但其“扭曲”作用由 $x \cdot_\alpha g = x \cdot (g)\alpha$ 给出，对所有$x \in T$均成立。

注意以下几点：

引理 5.3. 设 $T \in \mathcal{O}$ 为一棵 G-树，且设 $\alpha \in \mathsf{Out}(G, \mathcal{G})$。那么 T 的 G-轨道与 αT的轨道相同。也就是说，对所有 $x \in T$, $x \cdot G = x \cdot_\alpha G$均成立。

Proof. $x \cdot G = \{x \cdot g \mid g \in G\} = \{x \cdot (g)\alpha \mid g \in G\} = x \cdot_\alpha G$ □

因此我们看到，α 所施加于作用的“扭转”仅发生在各个轨道内部。这意味着，如果我们同时处理 $(T、\ \cdot)$ 和 $(T、\ \cdot_\alpha)$，就可以直接称为“一个 G-轨道T”，而无需说明使用的是哪种作用。

定义 5.4. 我们可以按包含关系对 G 的所有自由因子系集合进行偏序排列。设 $\mathcal{G}$ 是一个真 α-不变自由因子系。若 $\alpha \in \mathsf{Out}(G, \mathcal{G})$ 是 $\mathcal{G}$-不可约的，或称关于 $\mathcal{G}$不可约，则称 $\mathcal{G}$ 是一个极大的真 α-不变自由因子系统。

否则，我们称 α 关于 $\mathcal{G}$是可约的。

- 拓扑代表。

定义 5.5. [9, p.16] 设 $T, S \in \mathcal{O}(G, \mathcal{G})$。$\mathcal{O}$-映射 $f\colon T \to S$是一个 G-等变的 Lipschitz 连续函数。f 的 Lipschitz 常数记为 $\mathsf{Lip}(f)$。

注意，$\mathcal{O}$-映射不必将顶点映到顶点，因此也不必是图态射。

定义 5.6. [9, p.16] 如果一个 $\mathcal{O}$-映射 $f\colon T \to S$ 在边上具有恒定速度，我们就称它为直线的——也就是说，对于 T 中的每条边 e，都存在一个非负数 $l_e(f)$，使得对于任意 a、$b \in e$，都有 $d_T(f(a), f(b)) = l_e(f) d_S(a, b)$。

定义 5.7. 设 $\alpha \in \mathsf{Out}(G, \mathcal{G})$，且 $T \in \mathcal{O}$ 是一棵 G-树。那么，若映射 $f\colon T \to \alpha T$ 是一个直线的 $\mathcal{O}$-映射，就称它拓扑表示 α。

[9, p. 16] 的作者作出如下备注：

备注。任意两棵树 $T, S \in \mathcal{O}$ 之间都存在一个 $\mathcal{O}$-映射。此外，任意 $\mathcal{O}$-映射$f\colon T \to S$ 都可以唯一地「直线化」——也就是说，存在唯一的直线的 $\mathcal{O}$-映射 $\mathsf{Str}(f)\colon T \to S$，使得对每个顶点 $v \in T$，都有 $\mathsf{Str}\big(f\big)(v) = f(v)$。我们有 $\mathsf{Lip}(\mathsf{Str}(f)) \leqslant \mathsf{Lip}(f)$。

由此备注可知，$\forall \alpha \in \mathsf{Out}(G, \mathcal{G})$, $\forall T \in \mathcal{O}$，存在一个拓扑代表元 $f\colon T \to \alpha T$。

定义 5.8。设 F 是某个 $T \in \mathcal{O}$的子森林，且 A 是 F的一个连通分支。我们将 A 的稳定子定义为集合 $\mathrm{stab}(A) = \{g \in G \mid A \cdot g = A\}$ ——也就是说，我们取的是集合稳定子，而不是逐点稳定子。

若对于 F 的每个连通分支 A，$\mathrm{stab}(A) \in \mathcal{G}$，则称 F 是 $\mathcal{G}$-椭圆型。否则，称 F 是 $\mathcal{G}$-双曲型。

利用拓扑代表，我们可以构造一种检验自同构可约性的方法：

定理 5.9. 设 $\mathcal{G}$ 是群 G 的一个真自由因子系，设 $\alpha \in \mathrm{Out}(G, \mathcal{G})$，并设$T \in \mathcal{O}$。

假设 α 可以由一个 G-等变单纯映射 $f\colon T \to \alpha T$ 拓扑表示，并且存在 T 的一个真 f-不变、 G-不变的 $\mathcal{G}$-双曲子森林。那么 α 关于 $\mathcal{G}$ 是可约的。

证明。我们将通过构造一个新的余紧、极小、无边稳定子G-树 S，证明 α 是可约的；由此我们将得到另一个真 α-不变的自由因子系 $\mathcal{H}$，使得 $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$。

令 F 表示上述所述的 T 的子森林，以及T的所有其余顶点。这个扩展后的子森林仍然是真、 f-不变且 G-不变的。（此外，回想一下，我们定义子森林时要求它们遵循 G-树的单纯结构；因此， F 的补集是一个边集。）

我们通过将 F 的每个连通分支 A 压缩为一点 p_A，从 T 得到 S。未被压缩的边继承自 T的长度，从而在 S上赋予一个度量。由于 F 是 G-不变的，这次压缩诱导出 G在 S上的一个极小等距作用。因此， S 是一个 G-树。

此外，如果我们将顶点集定义为 p_A的集合，就在 S上诱导出一个新的单纯结构。（这是一个定义良好的顶点集，并且由该顶点集给出的单纯结构，与我们赋予所有 G-树的通常单纯结构完全相同，正如第2节中所定义的那样。）

S 继承了 T的余紧性和无边稳定子性质。因此，根据定义， S 的椭圆子群集合 $\mathcal{H}$ 是 G的一个自由因子系。

设 $v \in T$ 是一个顶点。由于 F 包含 T的每个顶点， v 必定属于F的某个连通分支 A。因此，由于 F 在 G作用下不变，$\mathrm{stab}(v)$必定保持 A 整体不变（不一定逐点固定）。因此，$\mathrm{stab}(v) \leqslant \mathrm{stab}(p_A)$。这对所有 v都成立，足以说明$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$。

F 的某个连通分支具有 $\mathcal{G}$-双曲稳定子。这意味着$\mathrm{stab}(p_A) \notin \mathcal{G}$，但$\mathrm{stab}(p_A) \in \mathcal{H}$。因此 $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$。

假设 $G \in \mathcal{H}$ ——也就是说， S 的一个顶点——由 G稳定。那么，与该顶点对应的 F 连通分支是 T的一个 G-不变子树，这与 T的极小性矛盾。因此 $G \notin \mathcal{H}$，所以 $\mathcal{H}$ 是一个真自由因子系。

最后，我们必须证明 $\mathcal{H}$ 是 α-不变的：

令 p_A 为 S 的一个顶点。我们首先要证明 $(\mathrm{stab}(p_A))\alpha$ 属于 $\mathcal{H}$ ——也就是说，它在 $(S, *)$ 中固定一个点。 F 是 f-不变的，因此 $f(A)$ 是 F 的一个连通分支，而 $p_{f(A)}$ 是 S 的一个顶点。此外， $\forall (g)\alpha \in (\mathrm{stab}(v_A))\alpha$, $p_{f(A)} * (g)\alpha = p_{f(A)\cdot(g)\alpha} = p_{f(A\cdot g)} = p_{f(A)}$，因此 $(\mathrm{stab}(p_A))\alpha \in \mathcal{H}$。这对所有 $p_A \in S$ 都成立。这说明 $\mathcal{H}\alpha \subseteq \mathcal{H}$，进而足以证明 $\mathcal{H} = \mathcal{H}\alpha$。

总之， $\mathcal{H}$ 是 G 的一个真 α-不变自由因子系统，并且 $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$。因此，根据定义 5.4， α 关于 $\mathcal{G}$ 是可约的。□

- 等距拓扑代表。我们的主要结果将用到等距拓扑代表，这使我们能够作出一些额外的观察：

备注。回想一下， $\mathcal{O}$ 是由 G-树的等价类组成的空间，其中两棵树等价，当且仅当它们之间存在等变等距映射。拓扑代表是等变的；因此，若存在等距拓扑代表 $f\colon T \to \alpha T$ ，则两棵G-树 T 和 αT 在 $\mathcal{O}$中代表同一个点。

命题 5.10。设 $f\colon T \to \alpha T$ 是某个 $T \in \mathcal{O}(G、\ \mathcal{G}$)的拓扑代表，其中 $\alpha \in$ 属于Out$(G、\ \mathcal{G})$。若 f 是等距变换，则它也是图自同构。

证明。只需证明 $f(v)$ 是顶点当且仅当 v 是顶点。 f 是等距变换——特别地，它是双射——因此， $f(v)$ 是分支点当且仅当 v 是分支点。剩下的顶点只有度为 2 的顶点。回想一下，这些顶点是作为反向边的中点引入的，因此它们的稳定子阶数均为 2。 f 是等变的，因此，$\mathsf{stab}(v)$ 的阶数为 2 当且仅当 $\mathsf{stab}(f(v))$ 的阶数为 2。由此，度为 2 的顶点集合也保持不变，而 f 是图自同构。□

定义 5.11。设 Y 是一个度量图。 Y 的体积记为 $\mathsf{Vol}(Y)$ ，定义为 Y 的边长之和。

设 $T \in \mathcal{O}$。 T 的余体积记为 $\mathsf{Covol}(T)$，定义为图 T/G 的体积。

命题 5.12。设 $f\colon T \to \alpha T$ 是某个 $T \in \mathcal{O}(G、\ \mathcal{G})$ 的拓扑代表，其中 $\alpha \in \in$Out$(G,\ \mathcal{G})$。那么 $\mathsf{Lip}(f) = 1$ 当且仅当 f 是等距变换。

证明。如果 f 是等距变换，那么 $\mathsf{Lip}(f) = 1$ 立即可得。下面证明反向结论。

设 D 是 T 的一个子森林，其中每个轨道恰好取一条边。于是 $\mathsf{Covol}(T) = \mathsf{Vol}(D)$。不失一般性，可以假设 $\mathsf{Covol}(T) = 1$。由于 T 和 αT 具有相同的度量，这意味着 $\mathsf{Covol}(\alpha T) = 1$

由于 f是等变的， $f(D)$ 包含 $f(T)$的一个基本域。由于 αT不包含任何真不变子树，我们必有 $f(T) = \alpha T$，因此 $f(D)$ 包含 αT的一个基-本域。由此可得 $\mathsf{Vol}(f(D)) \geqslant 1$。此外，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(f(D)) &\leqslant \sum_{\text{edges } e \in D} L(f(e)) && (*)\\
&\leqslant \sum_{\text{edges } e \in D} L(e) && (\text{as } \mathrm{Lip}(f) = 1)\\
&= \mathrm{Vol}(D)\\
&= \mathrm{Covol}(T)\\
&= 1
\end{aligned}$$

我们分为两种情况：

情形 1： f 不是局部单射。这等价于说， f 将一对边折叠了——也就是说，存在一个顶点 v、 v 的邻域 U_1、U_2 ，以及关联于 v的边 e_1、e_2

使得 $f(e_1 \cap U_1) = f(e_2 \cap U_2)$。（之所以需要这些邻域，是因为 f可能不会折叠整条边，而只折叠其初始线段。由于 f 可能会拉伸这些线段，因此这些邻域通常大小不同。）

只有当两条边属于不同的轨道时，它们才可能被折叠；注意，若 $e_1 \cdot g = e_2$，则 $f(e_1 \cap U_1)$必被 $\alpha(g)$固定，这与边自由性矛盾。因此，我们可以自由选择一个包含一对折叠边的 D。

若 e_1、e_2 是 D中的一对折叠边，则它们在 f 下的像的体积将严格小于它们原始长度之和。这意味着 (*) 是严格不等式，因此 $\mathrm{Vol}(f(D)) < 1$。这与 $\mathrm{Vol}(f(D)) \geqslant 1$矛盾，所以情形 1 不可能发生。

情形 2：f 是局部单射的。于是 (*) 是等式，因此 $\mathrm{Vol}(f(D)) = 1$。这足以说明，对于 D的每条边 e，$L(f(e)) = L(e)$，进而 T的所有边都如此；因此 f在 T的每条边上都是等距变换。再结合局部单射性可知，f 在整个 T上都是等距变换。

□

6. Distance on $\mathcal{O}$

- 伸缩因子。

定义 6.1. 设 $g \in G$，并设 $T \in \mathcal{O}(G, \mathcal{G})$。$g$在 T中的平移长度记为$l_T(g)$，定义如下：

$$l_T(g) = \inf_{x \in T} \{d_T(x, x \cdot g)\}$$

备注。此下确界实际上是一个最小值，并且由某个 x 取得。如果 g 是椭圆型的，那么根据椭圆元素的定义可知这一点成立，并且我们有 $l_T(g) = 0$。

如果 g 是双曲的，那么平移长度非零，而实现这一长度的元素集合将构成一条经过 T 的直线，称为 g的双曲轴。轴上的点将沿轴平移 $l_T(g)$。

备注。$\mathcal{O}$ 中的 G-树的一个等价类由其平移长度函数 [4] 唯一确定，因此可以认为 $\mathcal{O}$ 嵌入在空间 $\mathbb{R}^G$中。

定义 6.2. 令 $\mathrm{Hyp}(\mathcal{G})$ 表示 G 中不属于 $\mathcal{G}$任何子群的元素集合。（换言之，$\mathrm{Hyp}(\mathcal{G})$ 是相对于 $\mathcal{O}(G$中的某个，因而也相对于所有 G-树都为双曲的元素集合，$\mathcal{G})$。）

定义 6.3. [8, p.8] 设 T、$S \in \mathcal{O}(G$、$\mathcal{G})$。则我们将从 T 到 S 的左伸缩因子和右伸缩因子定义为

$$\Lambda_L(T, S) := \sup_{g \in \mathrm{Hyp}(\mathcal{G})} \frac{l_T(g)}{l_S(g)} \qquad \Lambda_R(T, S) := \sup_{g \in \mathrm{Hyp}(\mathcal{G})} \frac{l_S(g)}{l_T(g)} = \Lambda_L(S, T)$$

分别。我们还将从 T 到 S 的对称伸缩因子定义为

$$\Lambda(T, S) := \Lambda_L(T, S)\Lambda_R(T, S)$$

T下一个定理由 [8, 推论 6.8，第 18 页及定理 6.11，第19]页得出。

定理 6.4。设 $T, S \in \mathcal{O}$。则存在一个 Lipschitz 连续映射 $f\colon T \to S$ 使得 $\mathrm{Lip}(f) = \Lambda_R(T, S)$

- 自同构的位移。

定义 6.5。设 $\alpha \in \mathsf{Out}(G, \mathcal{G})$。则我们将 α 的位移定义为 b e

$$l_\alpha := \inf_{T \in \mathcal{O}} \Lambda_R(T, \alpha T)$$

定理 6.6. *[8,* p. *25]* 对于任意 $\mathcal{G}$-不可约 $\alpha \in \mathsf{Out}(G, \mathcal{G})$, α 的位移可取到最小值，且存在某个 $T \in \mathcal{O}$使其取到该值。

定义 6.7. 对于任意 $\alpha \in \mathsf{Out}(G, \mathcal{G})$, 我们定义

$$\mathrm{Min}(\alpha) = \{T \in \mathcal{O} \mid \Lambda_R(T, \alpha T) = \lambda_\alpha\}$$

也就是说，Min(α)是所有实现上述下确界的 T 所组成的集合。

定理 6.8. 设 $\alpha \in \mathsf{Out}(G, \mathcal{G})$ 是一个 $\mathcal{G}$-不可约、位移 1 自同构。那么对于所有 $T \in \mathsf{Min}(\alpha)$, 都存在一个 α 在 T上的等距拓扑代表。

证明。令 $T \in \mathsf{Min}(\alpha)$。那么根据最小位移集的定义, $\Lambda_R(T, \alpha T) = \lambda_\alpha = 1$, 因此由定理 6.4, 存在 Lipschitz 连续映射 $f\colon T \to \alpha T$, 其 Lip$(f) = 1$。因此, 由命题 5.12, f 是 α的等距拓扑代表。□

推论 6.9。设 $\alpha \in \mathsf{Out}(G, \mathcal{G})$ 是一个 $\mathcal{G}$-不可约、位移 1 自同构。那么 Min(α) =Fix(α)。

证明。令 $T \in$Fix(α)。那么 T和 αT是等价的 G-树, 因此 $\Lambda(T, \alpha T) = 1 = \lambda_\alpha$。由此 Fix $(\alpha) \subseteq$ Min(α)。

反过来, 设 $T \in$Min(α)。由定理 6.8, 存在一个从 T到 αT的等变等距映射。$\mathcal{O}$ 中的点是 G-树在等变等距映射下的等价类, 因此 T 和αT 表示 $\mathcal{O}$中的同一个点。由此 Min$(\alpha) \subseteq$ Fix(α)。□

7. Secondary Theorem

我们将关于 G-树的一些术语推广到群图:

定义 7.1. 设 $T \in \mathcal{O}(G、\ \mathcal{G})$, 并设 X 是 T/G 上的一个商群图。若 T/G 的一个顶点在 X 中的顶点群是平凡群，我们称该顶点为自由的；否则称其为非自由的。注意，此定义不依赖于我们对 X 的选择。

定义 7.2. 设 $T \in \mathcal{O}(G、\ \mathcal{G})$, 并设 X 是 T/G 上的一个商群图。当且仅当 X 的所有连通分支的基本群均包含于 $\mathcal{G}$ 中时，我们称 X 的子群图为 $\mathcal{G}$-椭圆型。否则，称其为 $\mathcal{G}$-双曲。

类似地，若 X 的相应子群图是 $\mathcal{G}$-椭圆型/双曲，我们就称 T/G 的子图是 $\mathcal{G}$-椭圆型/双曲。注意，此定义不依赖于 X 上标记的选择。

由 Bass-Serre 理论基本定理可知, G 的不变子森林是 $\mathcal{G}$-椭圆型的，当且仅当它可塌缩为 T/G 的 $\mathcal{G}$-椭圆型子图。

我们还注意到，根据基本群的定义, T/G 的子图是 G-椭圆型的，当且仅当每个连通分支都是一棵至多包含一个非自由顶点的树。

设 $f\colon T \to \alpha T$ 是一个拓扑代表。拓扑代表是等变的，因此 f 诱导出一个良定义的映射 $\varphi\colon T/G \mapsto T/G$。（注意，由于 T 和 αT 中的轨道相同，所以 $T/G = \alpha T/G$。)

假设 f 是一个等距变换。那么根据命题 5.10，f 是一个图自同构。由此可知，φ 也是一个等距图自同构——特别地，它是可逆的。因此，我们可以认为循环群 $\langle\varphi\rangle$ 作用在 T/G 上。

φ 可用于可约性检验（定理 5.9）的一个等价形式，这次使用商图：

定理 7.3。设 $\mathcal{G}$ 是群 G 的一个真自由因子系，设 $\alpha \in \mathrm{Out}(G,\mathcal{G})$，并设 $T \in \mathcal{O}$。

假设 α 可由一个 G-等变单纯映射 $f\colon T \to \alpha T$ 拓扑表示，并且 T/G 中存在一个真 φ-不变的、$\mathcal{G}$-双曲子图。那么 α 关于 $\mathcal{G}$ 是可约的。

这种形式的可约性检验无需检查 G-不变性。注意，T/G 的子图是 φ-不变的，当且仅当它在 $\langle\varphi\rangle$ 的作用下不变。

定义 7.4. 如果图 Y 是星形图，则它是一棵树，并且存在一个顶点 w，它关联于 Y 的每一条边。

引理 7.5. 设 $T \in \mathcal{O}$，且 X 是 T 的商群图。那么，X 中度为 1 或 2 的所有顶点都将具有非平凡的顶点群。

该引理的证明可直接由命题 2.9 和 2.10 得出。

定理 7.6. 设 $\mathcal{G}$ 是群 G 的一个自由因子系，且 $\alpha \in \mathrm{Out}(G,\mathcal{G})$ 是一个满足 $l_\alpha = 1$ 的不可约自同构。设 $T \in \mathrm{Min}(\alpha)$，并设 $f\colon T \to \alpha T$ 是一个等变等距映射（由定理 6.8 可知 f 存在）。

那么，f 循环置换 T 中的 G-轨道边。

证明. f 在 T/G, 上诱导一个映射 φ，且循环群 $\langle\varphi\rangle$ 作用于 T/G。定理的陈述等价于说，φ 循环置换 T/G 的各条边。

e 是 T/G中的一条边。我们定义 T/G的两个子图：

- 令 A 为 T 的子图，其 $E(A) = e\cdot\langle\varphi\rangle$ 为.....，且 $V(A)$ 等于与 $E(A)$关联的顶点集合。
- 令 B 为 T的子图，其边集为 $E(B) = E(T) - e\cdot\langle\varphi\rangle$，且 $V(B)$ 等于与 $E(B)$关联的顶点集合。

注意到这两个子图都是 $\langle\varphi\rangle$-不变的。

假设 φ 不循环置换 T/G的边。这意味着 A 和 B都是 T/G的真子图。我们将证明这两个子图中至少有一个是$\mathcal{G}$-双曲的。这意味着根据定理 7.3，α 是可约的，从而导致矛盾。

更具体地说，我们假设 A是 $\mathcal{G}$-椭圆型的。于是 A是一个森林，其中每个连通分支至多包含一个非自由顶点。如果 B 不是森林，那么 B 立即是 $\mathcal{G}$-双曲的，因此假设它是森林。我们将证明 B 的某个连通分支包含至少两个非自由顶点，因此 B 是 $\mathcal{G}$-双曲的。

首先我们注意到，根据引理 7.5，X 不包含任何度为 1 或 2 的自由顶点。因此我们提出以下断言：

断言 (i)：设 v是 T/G的一个自由顶点。则 $\deg_{T/G}(v) = \deg_A(v) + \deg_B(v) \geqslant 3$。由此可知，若 $\deg_A(v) = 1$ 或 2 或 $\deg_B(v) = 1$ 或 2，则 $v \in A \cap B$。此外，若 $\deg_A(v) = 1$，则 $\deg_B(v) \geqslant 2$；若 $\deg_B(v) = 1$，则 $\deg_A(v) \geqslant 2$

现在，$\langle\varphi\rangle$ 通过等距变换作用；由于 A 是单边的 $\langle\varphi\rangle$-轨道，$\langle\varphi\rangle$ 在 A的连通分支上传递作用。因此，A 的各个连通分支彼此等距，我们可以将 A分为两种情况：

情形 1：A 是单边

B 是有限森林，因此 B 的每个连通分支至少有两个度为 1 的 B顶点。根据断言 (i)，如果这些顶点中有自由的顶点，那么它们必定位于 $A \cap B$ 中，且其 A度至少为 2。然而，A 中的所有顶点的 A度均为 1。因此，度为 1 的 B顶点全都不是自由的，并且 B 是 $\mathcal{G}$双曲的。

情形 2：A 的每个连通分支都包含多于一条边

根据定义，A 至多包含两个 $\langle\varphi\rangle$顶点轨道。由于 A 是有限森林，$V(A)$ 中的某些顶点的 A度将为 1；又由于 A 的每个连通分支都包含多于一条边，$V(A)$ 中的某些顶点的 A度将严格大于 1。$\langle\varphi\rangle$ 通过图自同构作用（由命题 5.10 可知），且 A 是 $\langle\varphi\rangle$不变的，因此同一$\langle\varphi\rangle$轨道中的顶点具有相同的 A度。由此，A 恰好包含两个 $\langle\varphi\rangle$顶点轨道。

此外，$E(A)$ 是单边的 $\langle\varphi\rangle$-轨道，因此这条边的关联顶点分别是我们两个顶点轨道的代表元。因此，A 中的每条边都必须恰好有一个关联顶点的 A度为 1，由此可知，A 实际上是不交并的星形图。我们将A度为 1 的顶点称为辐条顶点。每个星形图中心处的其余顶点称为枢纽顶点。

根据 f的等变性，$\langle\varphi\rangle$ 将自由顶点映射到自由顶点，将非自由顶点映射到非自由顶点。辐条顶点都属于同一个 $\langle\varphi\rangle$-轨道，并且 A的每个连通分支至少包含 2 个辐条顶点。因此，由于 A 是 $\mathcal{G}$-椭圆型的，辐条顶点必定都是自由顶点。于是，根据断言 (i)，它们必定属于 B，且其 B度至少为 2。(*)

$\langle\varphi\rangle$在辐条顶点上传递。因此，$\langle\varphi\rangle$ 在 B 中包含辐条顶点的连通分支上传递，故这些连通分支彼此等距。我们用 B' 表示 B 中由这些连通分支构成的子森林。（注意，对于任意顶点 $v \in B'$，$\deg_B(v) = \deg_{B'}(v)$。）

我们再次分为两种情形：

子情形 1：B' 的每个连通分支都恰好包含一个辐条顶点

设 s 为辐条顶点的数量，l 为 A的连通分支数量。那么$s \geqslant 2l$。

B' 恰好有 s 个连通分支。这些连通分支都是有限树，因此每个连通分支至少包含两个 B'度为 1 的顶点。因此，B' 至少有 $2s$个 B'度为 1 的顶点。根据断言 (i)，这些顶点中任何自由顶点都必须位于 A 中，且其 A度至少为 2。然而，唯有 l 枢纽顶点的 A度至少为 2。因此，B' 中至少有 $2s - l$ 个顶点必定是非自由顶点。$2s - l > s =$ B'的连通分支数量，因此 B' 的某个连通分支必定包含两个或更多这样的非自由顶点。因此 B'，从而 B是 $\mathcal{G}$双曲的。

子情形 2：B' 中的每个连通分支都包含多个辐条顶点

我们将 B' 分成两个子森林，C 和 D：

- 设 $B'_1, \ldots, B'_n$ 为 B' 的连通分支。对于每个 $i = 1, \ldots, n$，令 C_i 为 B'_i 的唯一极小子树，其中包含 B'_i 中的所有辐条顶点。令 $C := \bigcup_{i=1}^{n} C_i$。由于 B' 和辐条顶点集是 $\langle\varphi\rangle$-不变的，C 也具有 $\langle\varphi\rangle$-不变性。

- 将 D 定义为 B' 的子森林，它由边集 $E(B') - E(C)$ 以及所有关联于该边集的顶点组成。由于 B' 和 C 是 $\langle\varphi\rangle$-不变的， D 也具有$\langle\varphi\rangle$-不变性。

由 C_i 的极小性可知，至少有一个辐条顶点的 C-度为 1。由于 C 是 $\langle\varphi\rangle$-不变的，且这些辐条顶点属于同一个 $\langle\varphi\rangle$-轨道，这意味着所有辐条顶点的 C-度都为 1。然而，回想这些辐条顶点的 B-度至少为 2（见 (*)），这说明这些辐条顶点都关联于 D 中的一条边（因此这些辐条顶点本身也都位于 D 中）。

断言 (ii)： D 的一个连通分支在 $C \cap D$ 中不能包含多个点 .

断言 (ii) 的证明。设 v、$w \in C \cap D$，并假设 v 和 w 位于 D 的同一个连通分支中。那么它们位于 B' 的同一个连通分支中，因而也位于 C 的同一个连通分支中。因此，存在一条从 v 到 w 、位于 D 中的唯一约化路径 γ_D ，以及一条从 v 到 w 、位于 C 中的唯一约化路径 γ_C 。

然而， B' 是森林，因此 $\gamma_D = \gamma_C$。根据 D的定义， $C \cap D$中没有边。因此两条路径都是平凡的，并且 $v = w$。至此，断言 (ii) 得证。□

特别地，断言 (ii) 意味着每个辐条顶点都属于 D的唯一一个连通分支。定义 D' 为 D 的子森林，它仅由包含辐条顶点的连通分支组成。于是，若令 s 表示辐条顶点的数量，则 D' 将有 s 个连通分支。（此外，对于任意 $v \in D'$，$\mathrm{deg}_D(v) = \mathrm{deg}_{D'}(v)$。）

D' 的每个连通分支都至少包含两个 D'-度为 1 的顶点。根据断言 (ii)，其中至少有一个不属于 $C \cap D$，因此它的 B'-度也为 1。此外，由于 $\langle\varphi\rangle$ 在辐条顶点上传递作用，它也会在 D'的连通分支上传递作用。因此，存在一个 $\langle\varphi\rangle$-轨道，其中至少有 s 个 B'-度为 1 的顶点；每个 D'的连通分支中至少有一个。

根据断言 (i)，如果这条顶点轨道是自由的，那么它必须位于 A 中，且具有至少 2 的 A 度。然而，唯一具有至少 2 的 A 度的 $\langle\varphi\rangle$ 顶点轨道是 l 枢纽顶点轨道。$s \geqslant 2l$ 因此，这些不可能是同一条轨道。由此，我们这条度为 1 的 B' 顶点轨道必定是非自由的。

B' 的每个连通分支都包含多个辐条顶点。因此，B' 的每个连通分支都包含 D' 的多个连通分支，进而包含多个我们的非自由顶点。因此， B' 是 $\mathcal{G}$-双曲的。□

8. Main Theorem

在本节中，设 $\mathcal{G}$ 是群 G 的一个自由因子系，并令 $\mathcal{O} = \mathcal{O}(G、\ \mathcal{G})$。

定义 8.1。 $\mathcal{O}$ 的余体积 1 切片记作 $\mathcal{O}_1$，定义为 $\mathcal{O}$ 中余体积为 1 的树所构成的子空间。

定义 8.2。令 $\alpha \in \mathrm{Out}(G, \mathcal{G})$。仿照 $\mathcal{O}$，我们将 $\mathcal{O}_1$ 中的最小位移集定义为 $\mathrm{Min}_1(\alpha) = \{T \in \mathcal{O}_1 \mid \Lambda_R(T, \alpha T) = \lambda_\alpha\}$，并定义 $\mathrm{Fix}_1(\alpha) = \{T \in \mathcal{O}_1 \mid T \sim \alpha T\}$。

备注。对于 $T \in \mathcal{O}$和 $\mu > 0$，我们用 μT表示 G-树 $(T, \mu d_T, \cdot)$。可以证明，对于所有 $T, S \in \mathcal{O}$，$\Lambda_R(T, S) = \Lambda_R(\mu T, \mu S)$-，也就是说，伸缩因子保持不变

在对两个 G-树的体积进行重新缩放时。此外，对于所有 $T \in \mathcal{O}$，T 和 αT 的体积相同，因此重新缩放其中一个，也会重新缩放另一个。因此我们得到以下结论：

$$\mathrm{Min}(\alpha) = \{\mu T \in \mathcal{O} \mid T \in \mathrm{Min}_1(\alpha), \mu > 0\}$$
$$\mathrm{Fix}(\alpha) = \{\mu T \in \mathcal{O} \mid T \in \mathrm{Min}_1(\alpha), \mu > 0\}$$

因此，由推论 6.9可得 $\mathbf{Min}_1(\alpha)$ =$\mathbf{Fix}_1(\alpha)$。

设 $T \in \mathcal{O}_1$。T 上的度量可完全由每个 G-轨道中一条边的长度来描述——等价地，由 T/G中各边的长度来描述。因此，若有 n 个边轨道，其长度分别为 $x_1, \ldots, x_n$，则开单形 $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 + \ldots x_n = 1, x_i > 0 \ \forall i\}$描述了 T上所有可能度量构成的集合。对 $\mathcal{O}_1$ 中的每棵树重复这一过程，就可以将 $\mathcal{O}_1$ 视为开单形的并集。

（等价地，也可以将相同的结构视为一个有若干缺失面的单纯复形。这些缺失面源于 T 中的一些边：若将它们的长度缩短至零，就会产生新的顶点，而这些顶点的稳定子不属于 $\mathcal{G}$，因此所得的树无法属于 $\mathcal{O}$。）

设 Δ 是 $\mathcal{O}_1$ 中的一个开单形。我们用 $\overline{\Delta}$ 表示 Δ 在 $\mathcal{O}_1$ 中的闭包。注意，这通常并不是一个闭单形。

定义 8.3。（改编自 [10, 第 19 页，定义 5.1]）

设 T、$S \in \mathcal{O}_1$。T 与 S 之间的单形路径由以下内容给出：

（i）点 $T = T_0$、T_1、.....、$T_k = S \in \mathcal{O}_1$ 的有限序列，使得 $\forall i = 1 \ldots k$ 存在一个单形 Δ_i，满足 X_{i-1} 和 X_i 都位于 $\overline{\Delta_i}$ 中。（ii）欧几里得线段 $\overline{X_{i-i}X_i} \subseteq \overline{\Delta_i}$。（此处欧几里得线段指 $\overline{\Delta_i}$ 上的坐标 $(x_1$、.....、$x_n)$）

定义 8.4。如果对于任意 x、$y \in \chi$，都存在一条完全包含于 χ 中的、连接 x 与 y 的单形路径，则称集合 $\chi \subseteq \mathcal{O}_1$ 由单形路径连通。

引理 8.5. $\mathcal{O}_1$ 中一条只经过单形中心的单纯路径是一个点。

证明. 任何这样的单纯路径都必须始于 $\mathcal{O}_1$中某个开单形的中心。注意，任何始于单形中心的非平凡欧几里得线段，都必须经过一个不位于单形中心的点。因此，整条单纯路径都是平凡的。□

现在可以陈述本文的主定理。

定理 8.6. 设 $\alpha \in \mathbf{Out}(G, \mathcal{G})$ 不可约且位移为 1。那么 $\mathbf{Min}_1(\alpha) = \mathbf{Fix}_1(\alpha)$是一个点。

证明. 根据定理 6.6，$\mathbf{Min}(\alpha)$非空，因此 $\mathbf{Min}_1(\alpha)$也非空。

设 $T \in \mathbf{Min}_1(\alpha)$。那么根据定理 6.8，存在一个等变等距映射 $f\colon T \to \alpha T$。根据定理 7.6，f 循环置换 T的边，这意味着 T中的所有边长度相同，因此 T 必定位于 $\mathcal{O}_1$中某个开单形的中心。因此，$\mathbf{Min}_1(\alpha)$是单形中心集合的子集。

如 [10, 第 19 页，推论 5.4] 所示，$\mathbf{Min}_1(\alpha)$ 由单纯路径连通。然而，根据引理 8.5，$\mathcal{O}_1$ 中一条仅经过单形中心的单纯路径是一个点。因此，$\mathbf{Min}_1(\alpha)$是一个点。□

推论 8.7。设 $\alpha \in \mathsf{Out}(G,\ \mathcal{G})$ 不可约且位移为 1。则 $\mathsf{Min}(\alpha) = \mathsf{Fix}(\alpha)$是一条直线。

证明。由定理 8.6 以及 $\mathsf{Min}(\alpha) = \{\mu T \in \mathcal{O} \mid T \in \mathsf{Min}_1(\alpha),$
$\mu > 0\}$ 这一事实可直接得出。 □

存在一个类似于 $\mathcal{O}_1$ 的空间，称为射影化空间 $\mathcal{PO}$。在该空间中，不再取 $\mathcal{O}$ 的余体积为一的子空间，而是通过将集合 $\{(T、\ \lambda d_T、\ \cdot) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ 中所有的 G-树按每个 $T \in \mathcal{O}$ 进行等同，取 $\mathcal{O}$ 的一个商空间。

在选择一个 G-树来表示 $\mathcal{PO}$ 中的一个点时，通常取唯一的余体积为一的 G-树。这样，我们便可在 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{PO}$ 之间构造一个自然双射。

自同构的位移 λ_α 在度量 d_T 重新缩放下保持不变，因此我们可以在 $\mathcal{PO}$ 中定义最小位移集 $\mathsf{Min}_{\mathcal{P}}(\alpha)$。集合 $\mathsf{Min}_1(\alpha)$ 是 $\mathsf{Min}_{\mathcal{P}}(\alpha)$ 的一组代表元，因此定理 8.6 表明 $\mathsf{Min}_{\mathcal{P}}(\alpha)$ 也只是一个点。

References

[1] Mladen Bestvina、Mark Feighn 和 Michael Handel。《Out(F_n) 的 Tits 二分性 I：指数增长自同构的动力学》。《数学年刊》（第二辑），151(2):517–623，2000 年。[2] Mladen Bestvina 和 Michael Handel。《自由群的列车轨道与自同构》。《数学年刊》，135(1):1–51，1992 年 1 月。[3] Daniel E. Cohen。《组合群论：一种拓扑方法》，伦敦数学会学生文本丛书第 14 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1989 年。[4] Marc Culler 和 John W. Morgan。《R-树上的群作用》。《伦敦数学会会刊》，s3-55(3):571–604，1987 年 11 月。[5] Marc Culler 和 Karen Vogtmann。《图的模空间与自由群的自同构》。《数学创刊》，84(1):91–119，1986 年 2 月。[6] Warren Dicks 和 Enric Ventura。《增长率为一的不可约自同构》。《纯粹与应用代数杂志》，88(1-3):51–62，1993 年。[7] Max Forester。《树上单纯群作用的变形与刚性》。《几何与拓扑》，6:219–267，2002 年。[8] Stefano Francaviglia 和 Armando Martino。《自由积的伸缩因子、度量与列车轨道》。《伊利诺伊数学杂志》，59(4):859–899，2015 年。[9]Stefano Francaviglia 和 Armando Martino。《自由群自同构的位移 I：位移函数、最小点与列车轨道》。《美国数学会汇刊》，374(5):3215–3264，2021 年。[10]Stefano Francaviglia 和 Armando Martino。《自由群自同构的位移 II：等值集的连通性与判定问题》。《美国数学会汇刊》，375(4):2511–2551，2022 年。[11]Stefano Francaviglia、Armando Martino 和 Dionysios Syrigos。《 F_N 的不可约自同构的最小位移集是余紧的》。《数学档案》，116(4):369–383，2021 年。