arXiv:2305.01458v1 [cs.RO] 2 May 2023

一种用于三段恒曲率机器人逆运动学的高效多解求解器

Ke Qiu、Jingyu Zhang、Danying Sun、Rong Xiong、Haojian Lu、Yue Wang 浙江大学工业控制技术国家重点实验室，中国

摘要——**分段恒曲率是连续体机器人常用的运动学框架。根据期望的末端位姿计算模型参数，即逆运动学问题，是操作、跟踪和规划任务的基础。本文提出一种高效的多解求解器，通过结合理论化简与数值修正，求解三段恒曲率机器人的逆运动学问题。我们推导出解析条件，将原问题简化为一维问题，并进一步形式化论证了两个问题的等价性。此外，我们引入了一种有界误差近似，使这一维问题可遍历，同时其余参数可通过解析方法求解。基于这些理论结果，我们采用全局搜索和数值修正来实现该求解器。实验验证了在只需一个解时，我们的求解器相比数值方法效率更高、成功率更高；实验还表明，该求解器能够在带障碍物的空间中通过最优路径规划获得多个解。**

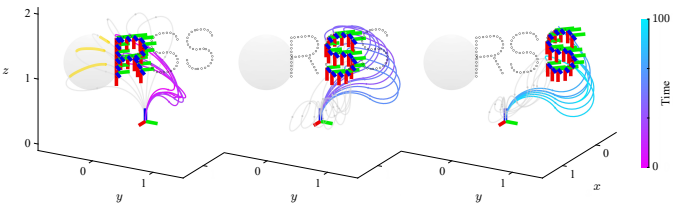


图 1. 我们利用多解逆运动学求解器，在参数空间中实现了最优 RSS形状路径规划。实线表示经过动态规划后得到的运动轨迹，虚线表示多重解。碰撞区域以黄色标出。

I. 引言

连续体机器人在驱动下能够弯曲、伸长或扭转 [1, 2], , 因此可应用于仿生抓取 [3] 和微创手术[4, 5, 6]等多种任务。分段恒曲率是一种广为人知的运动学框架，它将机器人建模为串联的恒曲率弧段 [7]。在操作 [8],、跟踪 [9, 10], 和规划任务 [11], 中，需要根据期望的末端位姿计算模型参数，以引导机器人运动，这就是逆运动学问题 [12]。由于许多采用不可伸长中心骨架的连续体机器人具有固定的段长 [9, 13, 14], , 因此使用分段常曲率模型到达指定末端位姿至少需要 3 个分段。然而，多分段机器人的逆运动学仍是一个尚未解决的问题。

逆运动学的解析方法通常更受青睐，因为它计算快速且能够找到所有解。在[15],，本文针对指定的.....提出了一种闭式几何方法

末端平移，但未考虑末端方向。文献 [16] 推导了两个可伸缩分段的显式解析表达式。然而，该方法无法直接推广到包含不可伸缩分段的机器人 [16]。

在缺少解析表达式时，逆运动学通常被表述为针对模型参数的局部优化问题，例如牛顿-拉夫森方法 [10]和阻尼最小二乘法 [17]。还可以实施控制方案来驱动参数，直到尖端到达目标位置 [9]。然而，数值逆运动学只能找到一个接近初始值的解，而且其迭代过程对初始猜测非常敏感，导致性能低下 [18]。

本文提出一种高效的多解求解器，用于求解三段式恒曲率机器人的逆运动学问题。其核心思路是通过理论化简简化数值搜索。具体而言，在理论方面，我们推导出用于降低三段式逆运动学维数的解析条件，最终将问题转化为等价的一维问题。通过进一步引入近似，使唯一的维度变得可遍历，并解析求出其余参数。我们证明了该近似存在误差界。在数值方面，我们对这一维进行全局搜索，从而确保近似问题具有分辨率完备性，同时不影响效率。经过少量数值迭代，我们便能够找到原始逆运动学问题的多个解。实验结果表明，在只需一个解的情况下，与纯数值方法相比，我们的求解器效率更高、成功率更高。此外，获取多个解的能力使我们能够在带障碍物的空间中实现最优路径规划。如图 1 所示，我们求解每个中间路径点处的构型，进而得到一条路径，之后再为其分配时间。总之，本文的贡献如下。

1) 我们针对指定末端旋转或平移的两段式机器人，提出了两个解析条件。进一步，我们提出了针对指定末端位姿的三

Yue Wang 和 Haojian Lu 为通讯作者。电子邮件：ywang24@zju.edu.cn；luhaojian@zju.edu.cn。

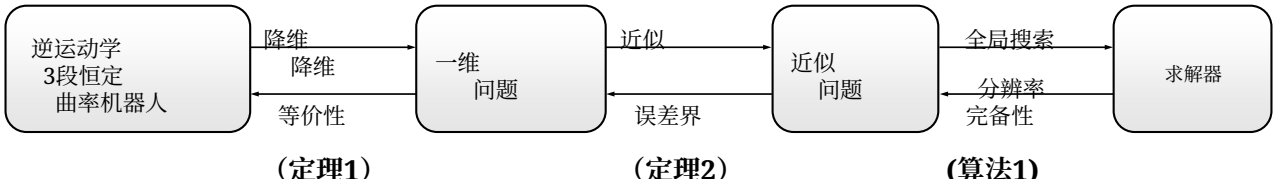


图2. 本文工作的流程图。向右的箭头表示操作步骤。向左的箭头表示理论保证。

段机器人所需的条件。2) 利用这些条件，我们将原始逆运动学问题的维度从六维降至一维。我们对这个一维问题进行了形式化，并证明了其等价性。3) 我们引入一种近似方法，使简化后的问题具备可通行性，并推导出该近似方法的误差界。4) 我们提出了该求解器，它采用全局搜索和少量迭代步骤。通过不同任务的实验，验证了其计算效率和多解可达性。代码已发布。[1]

II. 相关工作

建模与应用。为了更好地操控特定的连续体机械臂，运动学建模所采用的策略至关重要，它涉及机械设计、材料属性和几何特性。对于拟合传感器观测 [19] 或进行状态估计 [20]，这也不可或缺。常见的三种建模技术包括：(1) 分段常曲率模型（有关综述，请参见 Webster III 和 Jones [21] ）；(2) Cosserat杆模型 [22, 23, 24]，；以及 (3) 有限元模型[25]。其中，分段常曲率模型或许是连续体机器人 [7, 20, 26]最广为人知、应用最广泛的运动学框架。实际上，运动规划 [11] 和轨迹跟踪[9, 10, 13] 等许多任务都需要求解逆运动学。Cosserat杆模型和有限元模型通过求解正向偏微分方程来考虑机器人的力学特性，通常需要数秒至数分钟才能得到精确的轨迹 [26]，；而分段常曲率模型是一种纯几何模型，可求解各中间路径点处的构型，从而生成一条路径，之后还需为其分配时间并进行插值。其计算通常只需毫秒级。

解析方法。对于多个分段，提出了一种闭式几何方法：将每个分段视为一段直线刚性连杆，并与一个球面关节相连，然后利用三角关系 [15]。该方法未考虑末端方向；当机器人具有固定的分段长度时，近似不可避免。采用四元数描述可对常曲率模型进行简洁表述，并由此得到逆运动学的显式解析表达式 [16]。遗憾的是，这项研究针对的是具有 2 个可伸缩分段的常曲率连续体机器人，不能直接推广到具有不可伸缩分段的机器人 [16]。

数值方法。在没有可用解析方法时，自然会采用数值方法。非线性优化可用于寻找使位姿误差最小的弧参数。结合雅可比矩阵的伪逆，牛顿-拉夫森方法是一种常见选择[10, 17, 27]。此外，为了获得更好的收敛性，通常会采用阻尼最小二乘法 [17]。然而，这些方法容易受到问题非线性的影响，可能收敛到局部极小值，或陷入反复震荡。通常需要多个初始猜测值，才能得到一个解或尝试寻找其他解。从控制的角度也可以求解该问题。近期，有研究采用比例-积分-微分控制方案，实现了精确跟踪 [9]。参数的稳态值就是逆运动学的解。然而，由于耦合效应会造成响应和稳态误差的差异，因此需要分别调整每个参数的控制常数。尽管数值方法能够求得合适的模型参数，但它们依赖初始猜测值的选择，需要大量计算，而且无法找到多个解。因此，需要一种新的求解器来处理分段恒定曲率模型的逆运动学问题。

III. 三段恒曲率机器人的逆运动学

符号说明。四元数代数 $\mathbb{H}$ 是定义在 $\mathbb{R}$上的四维结合代数，而 $\mathbb{S}^n$ 表示位于 $\mathbb{R}^{n+1}$ [28]内部的n维单位球面。单位四元数 $q \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ 可写为实部和虚部之和，即：

$$q = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}, \tag{1}$$

其中

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 1. \tag{2}$$

四元数乘法满足结合律，

$$\otimes : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H},$$
$$q_1, q_2 \rightsquigarrow q_1 \otimes q_2.$$

对于单位四元数 q，其乘法逆元 q^{-1} 与其共轭 q^*相同，定义如下：

$$q^* = a - b\boldsymbol{i} - c\boldsymbol{j} - d\boldsymbol{k}. \tag{3}$$

[1]主页：https://sites.google.com/view/micsolver.

我们用 $(\cdot)^T$ 表示矩阵的转置运算。更详细的说明请参见附录A。

分段恒定曲率机器人的正运动学。 我们遵循恒定曲率模型 [21]的常规假设：(1) 将各分段建模为一系列圆弧，其弯曲方向和角度彼此独立；(2) 相邻分段之间的连接件可忽略不计；(3) 相邻圆弧彼此相切。

考虑一个由 N 个弧段组成的机器人模型。笛卡尔坐标系分别记为 $\{F_1\}$、$\{F_2\}$、.....、$\{F_N\}$，其原点位于各弧段的近端端点。此外，在第 N个弧段的远端端点处还连接有一个笛卡尔坐标系$\{F_{N+1}\}$ 。对于$\lambda = 1$、.....、 N，从 $\{F_\lambda\}$到 $\{F_{\lambda+1}\}$ 的相对旋转和平移分别用单位四元数 q_λ 和相对于 $\{F_\lambda\}$的向量${}^{\lambda+1}_{\lambda}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\lambda$ 表示，且已知段长 L_λ 。因此，正运动学可写为

$$q = q_1 \otimes q_2 \otimes \cdots \otimes q_N, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{r} = {}^{N+1}_{1}\boldsymbol{r}, \tag{5}$$

其中，平移 $\boldsymbol{r}$ 的计算方式为

$${}^{N+1}_{\lambda}\boldsymbol{r} = {}^{\lambda+1}_{\lambda}\boldsymbol{r} + q_\lambda \otimes {}^{N+1}_{\lambda+1}\boldsymbol{r} \otimes q^*_\lambda, \tag{6}$$

其中， λ 从 N 到 1。

模型参数化。 图 3 展示了使用恒定曲率模型对单段机器人进行参数化的过程，其中 κ_1 为曲率， ϕ_1 表示弯曲平面。假设 $\kappa_1 L_1 \in [0, \pi]$ 和 $\phi_1 \in [0, 2\pi]$，因为在大多数情况下，连续体机器人无法超出此限制；根据几何关系，我们得到

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{1}{\kappa_1}\begin{pmatrix}\cos\phi_1 - \cos\kappa_1 L_1 \cos\phi_1 \\ \sin\phi_1 - \cos\kappa_1 L_1 \sin\phi_1 \\ \sin\kappa_1 L_1\end{pmatrix} \tag{7}$$

由于旋转轴恰好位于（$\boldsymbol{i}$， $\boldsymbol{j}$）平面上，因此对应四元数最后一个维度的元素必须为零。事实上，我们有

$$q_1 = \cos\frac{\kappa_1 L_1}{2} + \sin\frac{\kappa_1 L_1}{2}\left(-\sin\phi_1 \boldsymbol{i} + \cos\phi_1 \boldsymbol{j}\right). \tag{8}$$

将其与 (1) 比较可得

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos\frac{\kappa_1 L_1}{2}, & b_1 &= -\sin\frac{\kappa_1 L_1}{2}\sin\phi_1, \\ c_1 &= \sin\frac{\kappa_1 L_1}{2}\cos\phi_1, & d_1 &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

由于弯曲角 $\kappa_1 L_1 \le \pi$，我们有 $a_1 \ge 0$ 。由此可见

$$\kappa_1 = \frac{2}{L_1}\arccos a_1, \quad \phi_1 = \arctan2(-b_1, c_1). \tag{10}$$

因此，参数 q_1， $\boldsymbol{r}_1$ 等同于广泛使用的弧参数 κ_1， ϕ_1。此外，我们注意到

$$\hat{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{r}_1 / \|\boldsymbol{r}_1\| = \begin{pmatrix} c_1 & -b_1 & a_1 \end{pmatrix}^T, \tag{11}$$

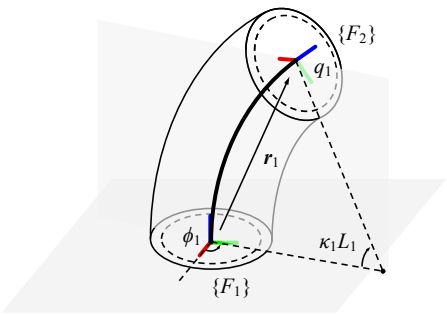


图 3. 采用恒曲率运动学建模的连续体机器人。长度为 L_1 的粗线表示圆形骨架曲线。这些参数描述了弧线所在弯曲平面的角度 ϕ_1 、曲率 κ_1、末端旋转 q_1 和平移 $\boldsymbol{r}_1$。

and

$$\|\boldsymbol{r}_1\| = \frac{L_1\sqrt{1-a_1^2}}{\arccos a_1}. \tag{12}$$

因此，可以根据 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 的三个分量和常数长度 L_1计算出 q_1 和 $\boldsymbol{r}_1$。因此，$\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 仅表征单段机器人本身。同样的论证表明，若已知 $\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda$ ，则 q_λ 和 $\boldsymbol{r}_\lambda$ 都可以唯一确定。因此，我们使用 $\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda$ 作为模型参数。

问题陈述。 由于 $\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda \in \mathbb{S}^2$，每段提供 2 个自由度。当 $N = 2$时，无论给定末端平移还是旋转，机器人始终有一个冗余自由度。当 $N = 3$时，由 3 段组成的机器人在末端提供 6 个自由度。这个数量与任务空间中的位姿自由度数量相同，因此机器人能够同时满足旋转和平移约束，且不存在冗余。这就是三段模型被广泛采用的原因。展开式 (4) 和 (5)，即可得到三段恒曲率机器人的逆运动学问题。

问题 1 （三段机器人的逆运动学）。 给定末端旋转 $q = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}^T$和平移 $\boldsymbol{r}$，对于 $\lambda = 1$，2、3，令 $\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda = \begin{pmatrix} c_\lambda & -b_\lambda & a_\lambda \end{pmatrix}^T$，则 q_λ和 $\boldsymbol{r}_\lambda$ 由 $\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda$确定。求 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$、$\hat{\boldsymbol{r}}_2$、$\hat{\boldsymbol{r}}_3$，使得

$$q = q_1 \otimes q_2 \otimes q_3, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + q_1 \otimes (\boldsymbol{r}_2 + q_2 \otimes \boldsymbol{r}_3 \otimes q_2^*) \otimes q_1^*. \tag{14}$$

IV. 理论结果与求解器

如图 2 所示，我们推导出理论结果，将问题 1 的解范围限制在一条一维隐式曲线上（第 IV-A 节）。通过将该曲线近似为单位球面上的一个圆，并保证误差有界，我们便能够遍历该圆，并以解析方式求出其余变量（第 IV-B 节）。对该圆进行遍历可确保分辨率完备性。随后采用数值校正，得到更精确的问题 1 的解。通过衔接解析方法与数值方法，我们完成了求解器算法的设计（第 IV-C 节）。

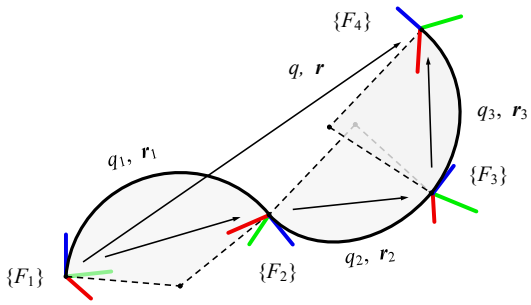


图 4. 由 3 段圆弧组成、总计具有六个自由度的机器人中变量 q_λ，$\boldsymbol{r}_\lambda$ 和坐标系 $\{F_\lambda\}$ 的示意图。

A. 降维

两段式机器人。我们从两段式机器人的逆运动学问题入手，其形式化表示如下：

$$q = q_1 \otimes q_2, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + q_1 \otimes \boldsymbol{r}_2 \otimes q_1^*. \tag{16}$$

下一个引理给出了指定末端旋转时，2 段恒曲率机器人的逆运动学的一个性质。

引理 1 (旋转约束)。 给定末端旋转 $q = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}^T$，式 *(15)* 的解为满足线性约束的那些$\hat{\boldsymbol{r}}_1 \in \mathbb{S}^2$s

$$\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_1 = 0, \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} b & c & d \end{pmatrix}^T$。指定$\hat{}\boldsymbol{r}_1$ 后，也可以通过以下线性方式求得$\hat{}\boldsymbol{r}_2$

$$\hat{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{r}}_1, \tag{18}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -a & -d & c \\ d & -a & -b \\ c & -b & a \end{pmatrix}. \tag{19}$$

证明： 参见附录 B。 ■

接下来，我们分析给定末端平移时 $\hat{}\boldsymbol{r}_1$ 的约束。根据 (12)，我们定义

$$\rho\left(a_\lambda, L_\lambda\right) = \|\boldsymbol{r}_\lambda\| = \frac{L_\lambda\sqrt{1-a_\lambda^2}}{\arccos a_\lambda}, \tag{20}$$

于是得到以下引理。

引理 2 (平移约束)。 给定末端平移$\boldsymbol{r}$，方程 *(16)* 的解为满足以下约束的$\hat{}\boldsymbol{r}_1$

$$\|\boldsymbol{v}\| = \rho\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}, L_2\right), \tag{21}$$

其中

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2a_1c_1 & -2a_1b_1 & 2a_1^2 - 1 \end{pmatrix}^T, \tag{22}$$

and

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} - \rho\left(a_1, L_1\right)\hat{\boldsymbol{r}}_1. \tag{23}$$

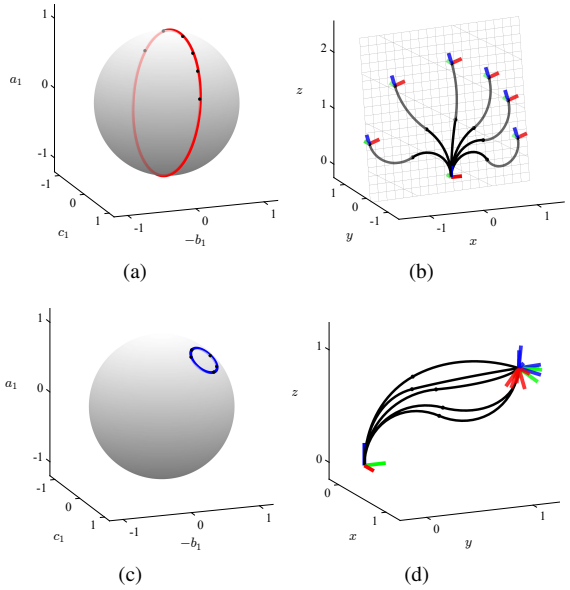


图 5. 选定末端旋转 $q = \pi/10 - \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}_1 - 17 - \alpha = \cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)$，其中，$\boldsymbol{\omega} = \left(\boldsymbol{i} - 4\sqrt{6}\boldsymbol{j} + \sqrt{3}\boldsymbol{k}\right)/10$，则 (a) $\hat{}$ 满足 ( )，由红色线表示（引理 1）；(b) 对于这些 $\hat{}\boldsymbol{r}_1$，末端旋转相同，且端点落在平面 (56) 上（附录 C 中的推论 1）。选定末端平移 $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ 后，则 (c) $\hat{}\boldsymbol{r}_1$ 满足 (21)，由蓝色线表示；(d) 对于这些 $\hat{}\boldsymbol{r}_1$，末端平移相同（引理 2）。左侧的黑点与右侧的机器人构型一一对应。

选择一个$\hat{}\boldsymbol{r}_1$后，我们可以通过以下方式计算$\hat{}\boldsymbol{r}_2$

$$\hat{\boldsymbol{r}}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\left(2\hat{\boldsymbol{r}}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1^T - \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}. \tag{24}$$

证明： 参见附录 D。 ■

请注意，$\|\boldsymbol{u}\| = 1$，如果我们近似处理 $\rho(a_1,\ L_1) \approx L_1$ 和 $\rho\left(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|,\ L_2\right) \approx L_2$，那么约束 (21) 就变成了 Neppalli 等人 [15]推导出的约束。

示例。 引理 2、推论 1（见附录 C）和引理 3 所预测的 $\hat{}\boldsymbol{r}_1$ 行为如图 5 所示。固定末端旋转 q时，旋转约束表明 $\hat{}\boldsymbol{r}_1$ 位于一个大圆上。固定末端平移 $\boldsymbol{r}$时，平移约束表明 $\hat{}\boldsymbol{r}_1$ 近似位于一个圆上。

三段机器人。 现在我们转向三段式逆运动学。根据先前的结果，我们为 $\hat{}\boldsymbol{r}_3$ 和 $\hat{}\boldsymbol{r}_1$找到了一个约束，下一条引理将对其进行形式化表述。

引理 3。 给定末端旋转 q 和平移 $\boldsymbol{r}$，设$\{\hat{}\boldsymbol{r}_1$、$\hat{}\boldsymbol{r}_2$、$\hat{}\boldsymbol{r}_3\}$是问题 *1* 的一个解，则对于 $\lambda = 1,\ 3$，$\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda$满足约束

$$\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda - \rho\left(a_\lambda, L_\lambda\right)d = 0. \tag{25}$$

其中

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} d & a & b \\ -a & d & c \\ -b & -c & d \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Proof: See Appendix E. ■

由（25）可知，$\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 和$\hat{\boldsymbol{r}}_3$ 被限制在形式相同的闭合球面曲线上，但由于非线性，尚未找到其显式表达式。为便于后续分析，我们将$\hat{\boldsymbol{r}}_3$ 的曲线形式化地参数化为一个变量 t ，

$$\hat{\boldsymbol{r}}_3 = \hat{\boldsymbol{r}}_3(t), t \in [0,1). \tag{27}$$

对于任意 t，我们通过 $\hat{\boldsymbol{r}}_3(t)$ 指定前两段的末端旋转和平移，从而构建一个两段式机器人逆运动学问题，

$$q_e(t) = q \otimes q_3^{-1}(t) = q \otimes q_3^*(t), \tag{28}$$

$$\boldsymbol{r}_e(t) = \boldsymbol{r} - q_e(t) \otimes \boldsymbol{r}_3(t) \otimes q_e^*(t). \tag{29}$$

我们有 $q_e(t) = \begin{pmatrix} a_e & b_e & c_e & d_e \end{pmatrix}^T$，并记

$$\boldsymbol{n}_e(t) = \begin{pmatrix} b_e & c_e & d_e \end{pmatrix}^T, \tag{30}$$

and

$$\boldsymbol{v}_e(t) = \boldsymbol{r}_e(t) - \rho(a_1, L_1)\hat{\boldsymbol{r}}_1. \tag{31}$$

现在给出本文的主要结果：单变量问题的表述，以及证明该问题与问题1等价的定理。

问题2。 给定末端旋转 q 和平移 $\boldsymbol{r}$，分别将 *(22)*、*(30)*、*(31)* 中的 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{n}_e$、$\boldsymbol{v}_e$ 记作如式所示。令 S 为满足以下条件的 $\hat{\boldsymbol{r}}_1 \in \mathbb{S}^2$ 集合

$$\boldsymbol{n}_e(t) \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_1 = 0, \tag{32}$$

$$\|\boldsymbol{v}_e(t)\| = \rho\left(\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_e(t)}{\|\boldsymbol{v}_e(t)\|}, L_2\right), \tag{33}$$

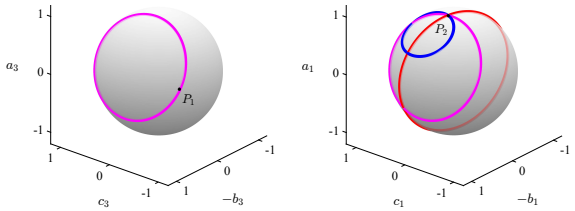
$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{r}}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\left(2\hat{\boldsymbol{r}}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1^T - \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{v}_e}{\|\boldsymbol{v}_e\|}, \tag{34}$$

求使 S 成为非空集的 t 。

定理1。 以下陈述等价：
(a) 求解问题 *1* 中的$\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda, \lambda = 1, 2, 3$。**(b)** 求解问题*2*中的一个变量 t 。

证明：给定 $q, \boldsymbol{r}$。设 $\{\hat{\boldsymbol{r}}_1, \hat{\boldsymbol{r}}_2, \hat{\boldsymbol{r}}_3\}$ 是问题 1 的解，则我们可以先通过参数化得到 t ，根据引理 1、2、3，该 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 同时满足 (32)-(34)。因此， S 非空，且 t 是问题2的解。这说明 (a) 推出 (b)。反过来，若已知 t，则$\hat{\boldsymbol{r}}_3$ 已确定，且由于 $S \neq \emptyset$，我们取$\hat{\boldsymbol{r}}_1 \in S$。由 (32) 和引理 1 可得$\hat{\boldsymbol{r}}_2'$ ，使得 $\{\hat{\boldsymbol{r}}_1, \hat{\boldsymbol{r}}_2', \hat{\boldsymbol{r}}_3\}$满足 (13)。由 (33) 和引理 2 也可得$\hat{\boldsymbol{r}}_2''$ ，使得 $\{\hat{\boldsymbol{r}}_1, \hat{\boldsymbol{r}}_2'', \hat{\boldsymbol{r}}_3\}$ 满足 (14)。由于 (34)，我们有$\hat{\boldsymbol{r}}_2' = \hat{\boldsymbol{r}}_2'' := \hat{\boldsymbol{r}}_2$。因此， $\{\hat{\boldsymbol{r}}_1, \hat{\boldsymbol{r}}_2, \hat{\boldsymbol{r}}_3\}$ 是问题 1 的解。这说明 (b) 推出 (a)。 ■

示例。 在图6中，我们以品红色展示了 $\hat{\boldsymbol{r}}_3$ 和 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 对应的式（25）。当 $\hat{\boldsymbol{r}}_3$ 位于 P_1时，$\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 的旋转约束和平移约束分别以红色和蓝色表示。在此示例中，点 P_2 是唯一的



(a) (b)

图 6. 在 (a) 和 (b) 中，闭合球面曲线以品红色表示（引理 3）。当 $\hat{\boldsymbol{r}}_3$ 位于点 P_1 时，(b) 中用红线表示 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 的旋转约束，蓝线表示其平移约束。三个约束相交于 P_2，该点是一个候选解。

交点，满足全部三个约束。因此，我们必须检查条件（34）是否适用于 P_1 和 P_2。如果适用，那么根据定理1，我们就找到了问题 1的一个解，即三段式逆运动学问题。

B. 近似

$\hat{\boldsymbol{r}}_3$ 的近似约束。$\hat{\boldsymbol{r}}_3$ 的约束由 (25) 给出。令 $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{r}$，我们将 (25) 近似为

$$\boldsymbol{n}_0 \cdot \left(\hat{\boldsymbol{r}}_3^{(0)} - \gamma L_3 \boldsymbol{r}_0\right) = 0 \tag{35}$$

通过将 (25) 中的第二项放宽为 $\gamma L_3 d$。它表示单位球面上的一个圆，因此可以通过一个变量 t 对 $\hat{\boldsymbol{r}}_3$ 进行解析遍历。在 (35) 中，因子 $\gamma \in (0, 1)$ 是一个稍后确定的常数，用于最小化定义域 $a_3 \in [0,1]$ 内的近似误差，并且

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{d\boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{n}_0\|^2}. \tag{36}$$

近似约束 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$。我们已知$\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 满足式 (32)，这是一个线性方程。根据引理 3，问题 1 的解满足式 (25)；因此，根据定理1，问题2的解也必须满足式 (25)。于是，我们作出与式 (35) 类似的近似，并将其与式 (32) 结合，从而得到对 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 的近似，

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}_e \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_1 = 0, \\ \boldsymbol{n}_0 \cdot \left(\hat{\boldsymbol{r}}_1^{(0)} - \gamma L_1 \boldsymbol{r}_0\right) = 0. \end{cases} \tag{37}$$

为了评估该近似，我们有以下定理。

定理2。 近似式 *(35)* 的误差有界，即

$$\left|\hat{\boldsymbol{n}}_0 \cdot \left(\hat{\boldsymbol{r}}_3^{(0)} - \hat{\boldsymbol{r}}_3\right)\right| \leq \frac{(\pi - 2) L_3 |d|}{2\pi \left\|\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{r}\right\|}, \tag{38}$$

并且当 $\|\boldsymbol{r}\| > L_1$ 时，近似（*37*）的误差也有界，即，

$$\left\|\hat{\boldsymbol{r}}_1^{(0)} - \hat{\boldsymbol{r}}_1\right\| \leq \arccos\frac{2L_1|d|}{\pi\left\|\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{r}\right\|} - \arccos\frac{L_1|d|}{\left\|\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{r}\right\|}. \tag{39}$$

Proof: See Appendix F. ■

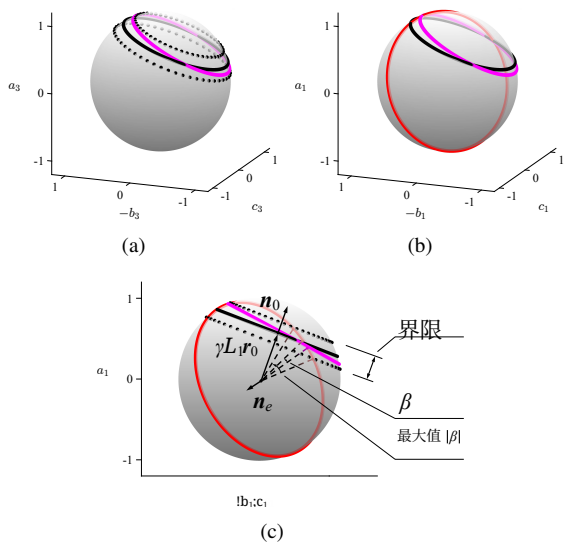


图 7. 黑色实线表示品红色线条的近似，如前所述，品红色线条表示式（25）；黑色虚线表示误差界。(a) 沿黑色实线而非品红色线条遍历 $\hat{\boldsymbol{r}}_3$ 时，误差有界。(b) 我们利用黑色线与红色线的交点，估算品红色线与红色线的交点。(c) 从沿垂直于 $\boldsymbol{n}_0$ 方向的视线方向观察，可见 β 是精确的 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 与近似的 $\hat{\boldsymbol{r}}_1^{(0)}$ 之间的夹角，因此误差界可表示为 $\max|\beta|$。

在图 7 中，黑色虚线表示使用（35）而非（25）遍历 $\hat{\boldsymbol{r}}_3$ 时的误差界。由（37）可知，$\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 是单位球面上两个圆的交点。我们将 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 与 $\hat{\boldsymbol{r}}_1^{(0)}$ 之间的夹角记为 β，那么从几何上看，$\max|\beta|$ 是 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 的误差界。

C. 逆运动学求解器

循环遍历。为确保分辨率完备性，我们需要遍历所有可能离散化的 $\hat{\boldsymbol{r}}_3$。幸运的是，上一小节中的近似使我们能够进行解析遍历。由（35）可知，当 $\boldsymbol{n}_0$ 不与 z-轴平行时，我们构造

$$\hat{\boldsymbol{r}}_3^{(0)}(t)=\gamma L_3\boldsymbol{r}_0+\sqrt{1-\|\gamma L_3\boldsymbol{r}_0\|^2}\cdot\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\sin 2\pi t\\ \cos 2\pi t\\ 0\end{pmatrix},\quad(40)$$

其中 $\hat{\boldsymbol{n}}_1=\hat{\boldsymbol{n}}_0\times\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}^T$、$\hat{\boldsymbol{n}}_2=\hat{\boldsymbol{n}}_0\times\hat{\boldsymbol{n}}_1$，且正交矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{n}}_1\hat{\boldsymbol{n}}_2\hat{\boldsymbol{n}}_0\end{pmatrix}$。

误差评估。对于任意 $t\in[0,1)$，都可唯一确定 $\hat{\boldsymbol{r}}_3$；当 $\boldsymbol{n}_0$ 不与 $\boldsymbol{n}_e$ 平行时，根据 (37) 可通过解析表达式求得 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$。我们利用引理 1 求得 $\hat{\boldsymbol{r}}_2'$，并利用引理 2 求得 $\hat{\boldsymbol{r}}_2''$。此时我们得到两组模型参数 $\{\hat{\boldsymbol{r}}_1,\hat{\boldsymbol{r}}_2',\hat{\boldsymbol{r}}_3\}$ 和 $\{\hat{\boldsymbol{r}}_1,\hat{\boldsymbol{r}}_2'',\hat{\boldsymbol{r}}_3\}$，我们选择误差较小的一组。为说明误差的计算方法，将由 $\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda$ 构造的实际末端位姿记为 $\boldsymbol{T}$，将由 q，$\boldsymbol{r}$ 构造的期望末端位姿记为 $\boldsymbol{T}_d$。定义一个从 $\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda\in\mathbb{S}^2$ 到 $\boldsymbol{\xi}_\lambda\in\mathsf{se(3)}$ 的映射，如下所示

$$\sigma:\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2\to\mathsf{se}(3)\times\mathsf{se}(3)\times\mathsf{se}(3),$$
$$\hat{\boldsymbol{r}}_1,\hat{\boldsymbol{r}}_2,\hat{\boldsymbol{r}}_3\rightsquigarrow\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_\lambda=L_\lambda\begin{pmatrix}-\kappa_\lambda\sin\phi_\lambda&\kappa_\lambda\cos\phi_\lambda&0&0&0&1\end{pmatrix}^T$ 是旋量坐标 [21]。由 (10) 可知，映射 σ 存在。根据指数积公式 [29]，末端位姿 $\boldsymbol{T}\in\mathsf{SE(3)}$ 的形式为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\exp\boldsymbol{\xi}_1^\wedge\exp\boldsymbol{\xi}_2^\wedge\exp\boldsymbol{\xi}_3^\wedge.\quad(41)$$

我们根据从 $\boldsymbol{T}$ 到 $\boldsymbol{T}_d$ 的体扭量范数来评估误差，即，

$$e=e(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\left\|\left(\log\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}_d\right)^\vee\right\|.\quad(42)$$

候选解筛选。通过在 $[0,1)$ 中遍历 t，我们得到一系列模型参数 $\{\hat{\boldsymbol{r}}_1,\hat{\boldsymbol{r}}_2,\hat{\boldsymbol{r}}_3\}$，据此可以构建误差函数 $e(t)$。假设 $\bar{t}$ 是问题2的一个解，那么误差函数在 t 处的导数必须为零，即 $\mathrm{d}\,e(t)/\mathrm{d}\,t\big|_{t=\bar{t}}=0$。因此，在遍历 t 时，我们可以通过检查来收集所有局部极小值

$$e(\bar{t})<e(\bar{t}+\Delta t),\quad e(\bar{t})\geq e(\bar{t}-\Delta t).\quad(43)$$

我们计算模型参数 $\{\hat{\boldsymbol{r}}_1,\hat{\boldsymbol{r}}_2,\hat{\boldsymbol{r}}_3\}$，并将其作为问题 1 的候选解。

数值修正。候选解的指数坐标被视为以下优化问题的初始值：

$$\begin{aligned}\underset{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3}{\text{minimise}}\quad&\left\|\left(\log\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)^{-1}\boldsymbol{T}_d\right)^\vee\right\|^2\\ \text{subject to}\quad&\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\in\mathsf{se}(3).\end{aligned}\quad(44)$$

我们采用牛顿-拉夫森法或阻尼最小二乘法，求得问题 1 的精确解。剔除无法收敛至精度阈值的候选解后，将成功收敛的候选解作为最终结果。

由于定理2中的误差界，初始值实际上非常接近真实解，因此数值修正只需进行少量迭代。综上，我们给出算法1。

V. 仿真结果

我们在两种场景中展示三段式逆运动学求解器：在自由任务空间或存在障碍物的任务空间中，针对随机给定的位姿求得一个无碰撞解（第 V-C、V-D 节）；以及根据给定的中间点序列进行路径规划（第 V-E 节）。

A. 设置

我们实验中使用的机器人由 3 段组成，每段长度均为 1。评估基准算法和我们的求解器包含以下步骤：(1) 从均匀分布中采样随机弧参数 $\{(\kappa_\lambda,\ \phi_\lambda):\ \lambda=1,\ 2,\ 3.\}$，并计算 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$。(2) 使用正运动学 (41) 生成期望位姿 $\boldsymbol{T}_d$，然后根据 $\boldsymbol{T}_d$ 计算 q，$\boldsymbol{r}$。(3) 使用不同算法求解逆运动学问题。(4) 重复以上步骤 2000 次，并对结果进行统计评估。

对于数值修正，成功的判据是误差 (42) 小于 0.01，且迭代总次数不超过允许的最大值。

算法1 逆运动学求解器。

要求： $q \in \mathbb{S}^3$，$\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$，$L_1$，$L_2$，$L_3 > 0$

过程 求解器(q，$\boldsymbol{r}$)
  $\Delta t \leftarrow$ 搜索分辨率
  对于 $t = 0$，$t \leftarrow t + \Delta t, t < 1$ **执行**
    $\hat{\boldsymbol{r}}_3, \hat{\boldsymbol{r}}_1 \leftarrow \hat{\boldsymbol{r}}_3^{(0)}(t), \hat{\boldsymbol{r}}_1^{(0)}(t)$ ▷ (40), (37)
    $\hat{\boldsymbol{r}}_2', \hat{\boldsymbol{r}}_2'' \leftarrow$ 计算 (18) 和 (24)
    $e, \hat{\boldsymbol{r}}_2 \leftarrow \min\{e(\hat{\boldsymbol{r}}_2'), e(\hat{\boldsymbol{r}}_2'')\}$ ▷ (42)
    若 t 是局部极小值，**则**
      收集 $\{\hat{\boldsymbol{r}}_1(t), \hat{\boldsymbol{r}}_2(t), \hat{\boldsymbol{r}}_3(t)\}$ 位于 S_c。
    结束条件判断
  结束循环
  对于 S中的每个元素 $_c$ **do**
    如果数值修正收敛**则**
      输出 $\hat{\boldsymbol{r}}_1, \hat{\boldsymbol{r}}_2, \hat{\boldsymbol{r}}_3$
    结束如果
  结束循环
  如果未找到解**则**
    转到第 3 行，并使用 Δt 更精细的搜索分辨率
  结束 if
结束过程

由于未成功且需要达到最大迭代次数的运行会显著影响整体平均运行时间，我们选取成功的部分，以便为性能比较提供更具定性意义的指标。

仿真代码使用 MATLAB R2022b 实现，并在搭载英特尔酷睿 i7-1260P 2.10 GHz 处理器的笔记本电脑上运行。

B. 基准方法

如前所述，求解逆运动学问题始终依赖数值方法。本质上，这是求解四元数方程 (13) 和 (14) 的求根问题。尤其是，在各种求根方法中，我们选取了几种具有代表性的方法。牛顿-拉夫森方法十分常用，因此我们将其选作基准方法之一 [10, 17, 27], 。此外，我们还针对该问题实现了梯度下降算法。我们也采用 MATLAB 内置优化器 fminsearch 作为基准方法；它是一种使用 Nelder-Mead 单纯形算法的无导数方法 [30], 。

我们的求解器不需要初始猜测，而对于基准方法，我们将随机弧参数作为初始猜测，因为直线构型本质上是一个奇异位形[31]。迭代过程中使用的雅可比矩阵已在 [32] 中推导。相关表达式列于附录 G。

C. 任务空间中的一个解

自由空间。 我们从一个自由的任务空间开始。由于目标位姿是根据随机模型参数通过正运动学计算得出的，因此可以确保逆运动学问题有解。不同方法可能会找到生成所需位姿的参数，也可能找到另一种解。无论找到哪一种，所有方法都会在找到一个解后立即停止。结果如表 I 所示。

有障碍物。 在此场景中引入了结构化障碍物。障碍物为直径为 0.4 的球体，其中心点在任务空间中构成正方形格点阵，在 x-轴和 y-轴上的间距为 0.8，在 z-轴上的间距为 1.0。每次重复时，我们都会生成相应构型同时应当无碰撞的参数，因此这里的每个逆运动学问题仍然有解。各方法在找到任意一个无碰撞解后便立即停止。对于只执行一次的纯数值方法，障碍物的影响必然会导致成功率下降。因此，牛顿-拉夫森方法最多允许执行 5 次，记为牛顿-拉夫森（5）。结果见表 II。

效率比较。 我们以运行时间衡量计算效率。没有障碍物时，我们的求解器运行时间约为牛顿-拉夫森方法的 15%，在所有基准方法中表现最佳。我们的求解器在开始数值修正前还会进行额外计算，而基准算法不需要这些计算。然而，结果表明，这些操作有助于提升整体效率，因为提供的初始值减少了后续数值修正所需的大量迭代。

存在障碍物时，与牛顿-拉夫森（5）方法相比，运行时间缩短至不到 19%。值得注意的是，在这项实验中，我们的求解器耗时几乎翻倍。运行时间增加有两个原因。一方面，当找到满足目标位姿但与障碍物碰撞的解时，会对下一个候选解进行数值修正，以寻找其他无碰撞解。这种情况占 9.35%。另一方面，当找不到解时，求解器会以更高的分辨率重新遍历。在自由空间中，重新遍历的比例为 0.50%；考虑障碍物时，该比例上升至 2.90%。

值得注意的是，使用我们的求解器时，我们发现某些初始值无需任何迭代即可直接作为解输出。两个实验中的这一比例分别为 17.55% 和 21.75%。这大幅减少了计算量，同时也验证了我们的理论结果。

成功率比较。成功率反映了数值算法对初始值的依赖程度，以及在存在障碍物时获得多重解的能力。无导数方法和梯度法更容易陷入局部极小值。牛顿-拉夫森方法有时能够摆脱局部极小值，但也更可能反复尝试，直到耗尽所有迭代。

我们的求解器在两项实验中均保持了百分之百的成功率，这得益于高效的多解搜索。结果验证了近似问题的分辨率完备性，也验证了误差界能够使数值修正在界限内经过少数几步迭代后收敛。

表 I 求解逆运动学问题的不同方法的性能。

方法	成功率（%）	运行时间（毫秒）	
		成功	总计
无导数	47.10	59.44	68.16
梯度	51.05	95.23	178.41
牛顿-拉夫森	94.20	10.54	12.18
我们的求解器	**100.00**	**1.59**	**1.59**

表 II 使用格点障碍物求解逆运动学问题的不同方法性能。

方法	成功率（%）	运行时间（毫秒）	
		成功次数	总数
无导数	40.00	57.28	67.40
梯度	45.65	95.22	181.11
牛顿-拉夫森	82.75	10.83	12.09
牛顿-拉夫森 (5)	98.75	16.15	17.00
我们的求解器	**100.00**	**3.05**	**3.05**

D. 多重解示例

我们展示了一个求解器在带障碍物的空间中进行多解搜索的示例。对于选定的末端旋转q 和末端平移 $\boldsymbol{r}$，图 8(a) 展示了以搜索分辨率$\Delta t = 0.01$遍历 $\hat{}\boldsymbol{r}_3$ 得到的误差曲线 $e(t), t \in [0, 1)$。我们将局部极小值框出，作为后续数值修正的候选解。最终，全部 4 个候选解均在不到 2 步迭代内收敛。因此，我们的求解器为期望的末端位姿求得了 4 个解，如图 8(b)-8(e) 所示。

有趣的是，在我们的实验中，最常观察到的结果是得到2到4个解。我们推测，三段式逆运动学问题的解的数量属于这一范围。

E. 路径规划

在此情形下，我们不采用随机采样，而是通过指定每个中间点的位置和方向，给出一条由一系列中间点组成的路径。

五角星形路径。图9展示了采用三种不同方法得到的规划结果。机器人依次经过点 P_1，P_2、……、P_6。对于梯度法和牛顿-拉夫森方法，当前位姿的解将用作下一个位姿的初始值。对于我们的求解器，每个点都会得到多个解，并采用贪心策略选择代价最小的解。代价通过对模型参数的平方差求和计算。

代价与效率比较。我们使用 10 个随机种子重复实验，误差条表示 95% 杰弗里斯置信区间 [33]。规划的总成本会因随机种子而异，反映了对初始值的依赖程度。因此，代价的偏差为 0，说明我们的算法具有确定性。与梯度法相比，求解器使总成本降低了约 10%。在效率方面，运行时间缩短了约

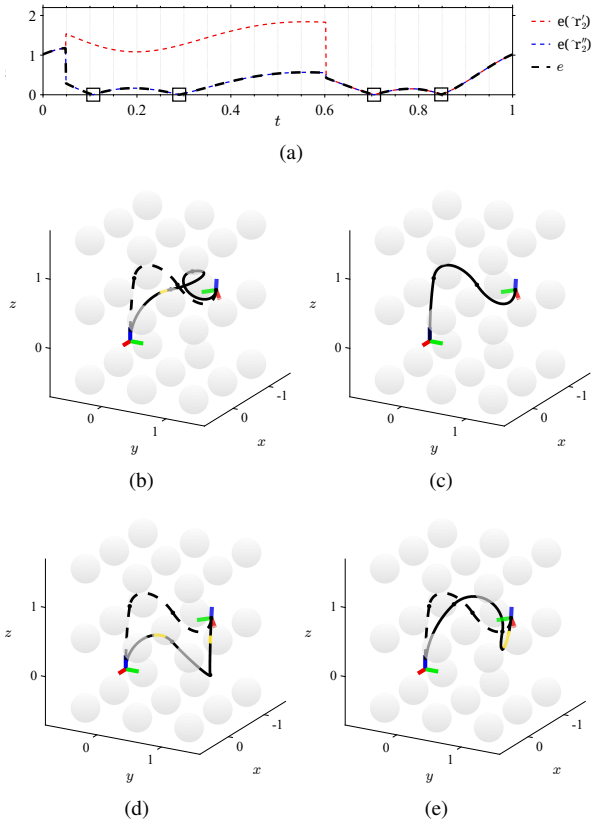


图 8. 我们选择末端旋转 $q = \cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)\,\boldsymbol{\omega}$ 以及平移 $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -0.4 & 1.1 & 0.8 \end{pmatrix}^T$ $\alpha = 15\pi/16$ $\boldsymbol{\omega} = 0.48\boldsymbol{i} + 0.1\sqrt{3}\boldsymbol{j} - 0.86\boldsymbol{k}$，其中 。使用我们的求解器，我们得到 (a) 误差曲线，其中共有 4 个平衡点，并用方框标出；(b-e) 从左到右分别对应这些平衡点的多重解。碰撞部分以黄色标示。

73%，与牛顿-拉夫森方法相比。使用上一次的解作为初始值，数值方法的表现确实优于使用随机初始值。不过，运行时间偏差较小，说明我们的求解器更加稳定。

最优 RSS形状路径。 我们构造了一条由 100 个中间点组成的序列，其形状为 RSS。所有姿态均相同，其 x轴垂直向下，并旋转 $-\pi/4$ 弧度。在路径一侧放置了一个直径为 0.8 的球形障碍物。求解器计算各中间点处的解时，我们舍弃与障碍物发生碰撞的解。代价与前述路径规划实验中定义的相同。通过应用动态规划，我们得到了图 1 所示的最优路径。为清晰起见，我们每隔 3 个点绘制一次解。

VI. 结论

本文提出了一种高效的多解求解器，用于求解三段恒曲率机器人的逆运动学问题。我们的理论将该问题简化为一个等价的一维问题，并给出了后续近似的误差界。此外，我们对近似问题采用循环遍历，从而实现分辨率完备性；经过少量

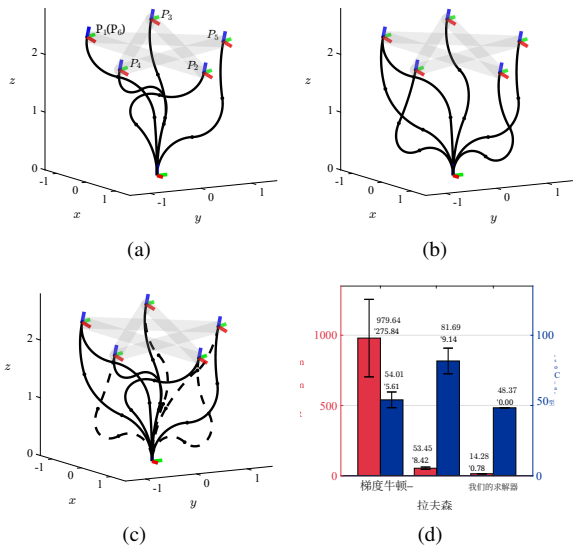


图 9. 使用（a）梯度法、（b）牛顿-拉夫森方法和（c）我们的求解器对五角星形路径进行规划的结果（P_1，P_2，……，P_6）。虚线表示多重解。使用不同的随机种子，运行时间和总成本汇总于（d）中。

迭代后，即可得到逆运动学问题的解。实验结果表明，在只需一个解的情况下，与基准方法相比，我们的求解器效率更高、成功率也更高。此外，多解搜索能力使其能够在带障碍物的空间中进行最优路径规划。

致谢

本研究得到中国国家重点研发计划（2021ZD0114500）、国家自然科学基金委员会（T2293724、62173293）、浙江省重点研发计划（2022C01022）、浙江省自然科学基金（LD22E050007）以及浙江省属高校基本科研业务费（2021XZZX021）的资助。

参考文献

[1]Ernar Amanov、Thien-Dang Nguyen 和 Jessica Burgner-Kahrs。具有可伸缩分段的腱驱动连续体机器人——基于模型的路径跟随运动评估。《国际机器人研究杂志》，40(1):7–23，2021。[2] Long Wang 和 Nabil Simaan。连续体机器人的几何标定：关节空间与平衡形状偏差。《IEEE机器人学汇刊》，35(2):387–402，2019。[3] Jinglin Li 和 Jing Xiao。杂乱空间中连续体抓取的渐进式规划。《IEEE机器人学汇刊》，32(3):707–716，2016。[4]Farshid Alambeigi、Sahba Aghajani Pedram、Jason L. Speyer、Jacob Rosen、Iulian Iordachita、Russell H. Taylor 和 Mehran Armand。Scade：配备光纤布拉格光栅的未建模连续体机械臂的传感器标定与变形估计。《IEEE机器人学汇刊》，36(1):222–239，2020。[5] Andrea Bajo 和 Nabil Simaan。多骨架连续体机器人的混合运动/力控制。《国际机器人研究杂志》，35(4):422–434，2016。[6]Aditya Brij Koolwal、Federico Barbagli、Christopher Carlson 和 David Liang。基于超声的左心房导管消融引导定位算法。《国际机器人研究杂志》，29(6):643–665，2010。[7]Jessica Burgner-Kahrs、D Caleb Rucker 和 Howie Choset。用于医疗应用的连续体机器人：综述。《IEEE机器人学汇刊》，31(6):1261–1280，2015。[8]Robert K Katzschmann、Andrew D Marchese 和 Daniela Rus。使用软体平面抓取机械臂进行自主物体操作。《软体机器人学》，2(4):155–164，2015。[9] David Alatorre、Dragos Axinte 和 Amir Rabani。连续体机器人的本体感知：离子液体方法。《IEEE机器人学汇刊》，38(1):526–535，2022。[10]Phanideep S. Gonthina、Michael B. Wooten、Isuru S. Godage 和 Ian D. Walker。腱驱动多分段连续体机械臂的力学。载于 *2020 IEEE*机器人与自动化国际会议 *(ICRA)*，第3896–3902页，2020。[11]Vincent Duindam；Ron Alterovitz；Shankar Sastry；Ken Goldberg。使用逆运动学的可操控针三维运动规划算法。《国际机器人研究杂志》，29(7):789–800，2010。[12] Daniela Rus 和 Michael T Tolley。软体机器人的设计、制造与控制。《自然》，521(7553):467–475，2015。[13] Jiewen Lai、Kaicheng Huang、Bo Lu、Qingxiang Zhao 和 Henry K Chu。可3D打印软体连续体机器人的垂直化尖端轨迹跟踪：实现手术吸血自动化。《IEEE/ASME机电一体化汇刊》，27(3):1545–1556，2022。[14] Weiming Ba、Xin Dong、Abdelkhalick Mohammad、Mingfeng Wang、Dragos Axinte 和 Andy Norton。面向腱驱动连续体机器人的新型基于模糊逻辑的静态反馈控制器的设计与验证。《IEEE/ASME机电一体化汇刊》，26(6):3010–3021，2021。[15] Srinivas Neppalli、Matthew A. Csencsits、Bryan A. Jones 和 Ian D. Walker。连续体机械臂的闭式逆运动学。《先进机器人学》，23(15):2077–2091，2009。[16] Arnau Garriga-Casanovas 和 Ferdinando Rodriguez y Baena。具有恒曲率弯曲和伸展能力的连续体机器人的运动学。《机构与机器人学期刊》，11(1):011010，2019。[17] Inderjeet Singh、Othman Lakhal、Yacine Amara、Vincent Coelen

紧凑型仿生操作助手逆运动学模型的性能评估。发表于*2017*年*IEEE*机器人与仿生国际会议（*ROBIO*），第264–269页，2017年。[18] Kevin M Lynch 和 Frank C Park。《现代机器人学》。剑桥大学出版社，2017年。[19] Arthur W Mahoney、Trevor L Bruns、Philip J Swaney 和 Robert J Webster。关于连续体机器人传感器选择、传感器布置与状态估计不可分割性的探讨，或“传感器应放在哪里以及如何使用”。发表于*2016*年*IEEE*机器人与自动化国际会议（*ICRA*），第4472–4478页。IEEE，2016年。[20] Sven Lilge、Timothy D. Barfoot 和 Jessica Burgner-Kahrs。基于SE(3)上的高斯过程回归进行连续体机器人状态估计。《国际机器人研究杂志》，41(13-14):1099–1120，2022年。[21] Robert J Webster III 和 Bryan A Jones。恒曲率连续体机器人的设计与运动学建模：综述。《国际机器人研究杂志》，29(13):1661–1683，2010年。[22]Frederic Boyer、Vincent Lebastard、Fabien Candelier 和 Federico Renda。连续体机器人与软体机器人的动力学：一种基于应变参数化的方法。《*IEEE*机器人学汇刊》，37(3):847–863，2021年。[23] Federico Campisano、Simone Cal´o、Andria A Remirez、James H Chandler、Keith L Obstein、Robert J Webster III 和 Pietro Valdastri。尖端跟随驱动下软体连续操作器的闭环控制。《国际机器人研究杂志》，40(6-7):923–938，2021年。[24] John Till、Vincent Aloi、Katherine E. Riojas、Patrick L. Anderson、Robert James Webster III 和 Caleb Rucker。同心管机器人的动力学模型。《*IEEE*机器人学汇刊》，36(6):1704–1718，2020年。[25] Kaitlin Oliver-Butler、Jake A. Childs、Adam Daniel 和 D. Caleb Rucker。同心推拉机器人：平面建模与设计。《*IEEE*机器人学汇刊》，38(2):1186–1200，2022年。[26] Federico Renda、Fr´ed´eric Boyer、Jorge Dias 和 Lakmal Seneviratne。多段软体操作器动力学的离散Cosserat方法。《*IEEE*机器人学汇刊》，34(6):1518–1533，2018年。[27] Isuru S. Godage、Emanuele Guglielmino、David T. Bran- son、Gustavo A. Medrano-Cerda 和 Darwin G. Cald- well。多段连续体机械臂运动学的新型模态方法。发表于*2011*年*IEEE/RSJ*智能机器人与系统国际会议，第1093–1098页，2011年。[28] Brian C Hall。《李群、李代数与表示》。施普林格，2013年。[29] Richard M Murray、Zexiang Li、S Shankar Sastry 和 S Shankara Sastry。《机器人操作数学导论》。CRC出版社，1994年。[30] Jeffrey C Lagarias、James A Reeds、Margaret H Wright 和 Paul E Wright。nelder–低维情况下的 Mead 单纯形法。《*SIAM* 优化杂志》，9(1):112–147，1998。[31] Cosimo Della Santina、Antonio Bicchi 和 Daniela Rus。关于软体机器人分段恒曲率的改进状态参数化及其在基于模型的控制中的应用。*IEEE* 机器人与自动化快报，5(2): 1001–1008，2020。doi: 10.1109/LRA.2020.2967269。[32]Gregory S Chirikjian。随机模型、信息论与李群，第 *2* 卷：解析方法与现代应用。施普林格科学与商业媒体，2011。[33] T Tony Cai。离散分布中的单侧置信区间。《统计规划与推断杂志》，131(1):63–88，2005。[34]Joan Sola。用于误差状态卡尔曼滤波器的四元数运动学。*arXiv* 预印本 *arXiv:1711.02508*，2017。[35] Timothy Barfoot、James R Forbes 和 Paul T Furgale。使用线性化旋转和四元数代数进行位姿估计。《航天学报》，68(1-2):101–112，2011。

附录

A. 常用公式目录

单位四元数 q 在式 (1) 中写成实部和虚部之和，但这种记法在我们的证明中并不总是方便。等价地，我们也可以将同一个四元数 q 表示为列向量的形式，即:

$$q=\begin{pmatrix}\delta\\ \boldsymbol{\varepsilon}\end{pmatrix},\quad \delta\in\mathbb{R},\quad \boldsymbol{\varepsilon}\in\mathbb{R}^3,\quad \sqrt{\delta^2+\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2}=1. \tag{45}$$

那么， q 的共轭为

$$q^*=\begin{pmatrix}\delta\\ -\boldsymbol{\varepsilon}\end{pmatrix}. \tag{46}$$

根据定义，两个四元数 q_1 和 q_2 的乘法计算如下:

$$q_1\otimes q_2=\begin{pmatrix}\delta_1\delta_2-\boldsymbol{\varepsilon}_1^T\boldsymbol{\varepsilon}_2\\ \delta_1\boldsymbol{\varepsilon}_2+\delta_2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\wedge}\boldsymbol{\varepsilon}_2\end{pmatrix}, \tag{47}$$

其中，楔算子 $(\cdot)^{\wedge}$ 生成通常的斜对称矩阵,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\wedge}=\begin{pmatrix}0&-\varepsilon_3&\varepsilon_2\\ \varepsilon_3&0&-\varepsilon_1\\ -\varepsilon_2&\varepsilon_1&0\end{pmatrix} \tag{48}$$

由于四元数乘法不满足交换律，我们通过定义 $(\cdot)^{+}:\mathbb{H}\to\mathbb{R}^{4\times4}$ 和 $(\cdot)^{\oplus}:\mathbb{H}\to\mathbb{R}^{4\times4}$引入左右复合算子 [34, 35],

$$q_1^{+}=\begin{pmatrix}\delta_1&-\boldsymbol{\varepsilon}_1^T\\ \boldsymbol{\varepsilon}_1&\delta_1\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\wedge}\end{pmatrix},\quad q_2^{\oplus}=\begin{pmatrix}\delta_2&-\boldsymbol{\varepsilon}_2^T\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2&\delta_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\varepsilon}_2^{\wedge}\end{pmatrix}, \tag{49}$$

因此，四元数乘法可用矩阵记法表示，即:

$$q_1\otimes q_2=q_1^{+}q_2=q_2^{\oplus}q_1. \tag{50}$$

若将向量 $\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^3$ 写成纯四元数 $\boldsymbol{r}=r_x\boldsymbol{i}+r_y\boldsymbol{j}+r_z\boldsymbol{k}$的形式，则可将其推广为向量，此时下列乘积表示 $\boldsymbol{r}$的旋转，即:

$$q\otimes\boldsymbol{r}\otimes q^*=q^{+}\left(q^*\right)^{\oplus}\boldsymbol{r}=\left(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T+\left(\delta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\wedge}\right)^2\right)\boldsymbol{r}. \tag{51}$$

B. 引理 1 的证明

证明: 首先，我们将 (15) 重新排列为 $q_2=q_1^*\otimes q$，因为对于单位四元数有 $q_1^{-1}=q_1^*$，然后应用矩阵表示法，得到

$$q_2=q^{\oplus}q_1^*, \tag{52}$$

or

$$\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\\ c_2\\ d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b&-c&-d\\ b&a&d&-c\\ c&-d&a&b\\ d&c&-b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ -b_1\\ -c_1\\ -d_1\end{pmatrix}. \tag{53}$$

已确定 $d_\lambda=0$。因此，我们将（53）的最后一行与另外三行分开，得到两个独立约束。按照$\begin{pmatrix}c_\lambda&-b_\lambda&a_\lambda\end{pmatrix}^T=\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda$ 的顺序重新排列各元素后，我们从最后一行得到 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 的恒等式,

$$\begin{pmatrix}b&c&d\end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{r}}_1=0,$$

以及由另外三行得到的 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{r}}_2$ 之间的关系,

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{r}}_1=\hat{\boldsymbol{r}}_2.$$

这表明了必要性。

从几何上看，(17) 表示空间 $\mathbb{R}^3$ 中一个经过原点且法向量为 $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}b&c&d\end{pmatrix}^T$的平面。由于$\hat{\boldsymbol{r}}_1\in\mathbb{S}^2\subseteq\mathbb{R}^3$，该平面与空间中的单位球面相交。交集就是一个圆

$$C(\boldsymbol{n})=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{S}^2:\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0\}. \tag{54}$$

接下来，我们证明充分性，以完成证明。必要性的证明是可逆的，因此只需通过证明 $\hat{\boldsymbol{r}}_2\in\boldsymbol{A}C(\boldsymbol{n})\subseteq\mathbb{S}^2$ 来验证该解可行。令$\hat{\boldsymbol{r}}_1=\begin{pmatrix}c_1&-b_1&a_1\end{pmatrix}^T\in C(\boldsymbol{n})$，则

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{r}}_1\|^2&=\hat{\boldsymbol{r}}_1^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{r}}_1\\ &=\left(1-b^2\right)c_1^2+2bcb_1c_1\\ &\quad+\left(1-c^2\right)b_1^2+2cda_1b_1\\ &\quad+\left(1-d^2\right)a_1^2-2bda_1c_1\\ &=c_1^2+b_1^2+a_1^2-\left(bc_1-cb_1+da_1\right)^2.\end{aligned} \tag{55}$$

由于 $\hat{\boldsymbol{r}}_1\in C(\boldsymbol{n})$，我们有 $\|\hat{\boldsymbol{r}}_1\|=\sqrt{c_1^2+b_1^2+a_1^2=1}$ and$\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_1=bc_1-cb_1+da_1=0$，因此

$$\|\hat{\boldsymbol{r}}_2\|=\|\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{r}}_1\|=1.$$

这证明了充分性。 ■

C. 推论

证明引理 1 后，我们得到了一个推论。

推论 1. 给定末端旋转 $q=\begin{pmatrix}a&b&c&d\end{pmatrix}^T$，对于末端旋转相同的两段连续体机器人，它们的端点位于一个经过原点且法向量为 $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}b&c&d\end{pmatrix}^T$ 的平面上，即

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=0. \tag{56}$$

证明: 将（16）改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\rho(a_1,L_1)\hat{\boldsymbol{r}}_1+\rho(a_2,L_2)q_1\otimes\hat{\boldsymbol{r}}_2\otimes q_1^*\\ &=\rho(a_1,L_1)\hat{\boldsymbol{r}}_1+\rho(a_2,L_2)q_1^{+}\left(q_1^*\right)^{\oplus}\hat{\boldsymbol{r}}_2.\end{aligned} \tag{57}$$

我们已知，末端旋转相同的两段连续体机器人都必须满足（17）中所述的垂直约束$\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_1=0$。因此，（57）右侧的第一项与 $\boldsymbol{n}$垂直。第二项也如此，因为若考虑内积 $\boldsymbol{n}\cdot q_1^{+}(q_1^*)^{\oplus}\hat{\boldsymbol{r}}_2$，再将（18）代入该表达式，可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{n}\cdot q_1^{+}\left(q_1^*\right)^{\oplus}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{r}}_1\\ &=ada_1-abc_1+acb_1+2bdb_1+2cdc_1\\ &\quad+2\left(abc_1-acb_1-bdb_1-cdc_1\right)\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\\ &=a\left(da_1+bc_1-cb_1\right).\end{aligned} \tag{58}$$

正如我们在引理1的证明中所见，我们得到$\boldsymbol{n}\cdot q_1^{+}(q_1^*)^{\oplus}\hat{\boldsymbol{r}}_2=a\cdot\boldsymbol{n}^T\hat{\boldsymbol{r}}_1=0$。这证明了 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=0$。因此，端点落在给定的平面上。 ■

D. 引理2的证明

证明：令 $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} -c_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix}^T$，然后使用矩阵记法 (49) 和 (3)，我们得到

$$\begin{aligned} & q_1^+ \left(q_1^*\right)^{\oplus} \hat{\boldsymbol{r}}_2 \\ = & \begin{pmatrix} 2c_1^2 - 1 & -2b_1c_1 & 2a_1c_1 \\ -2b_1c_1 & 2b_1^2 - 1 & -2a_1b_1 \\ 2a_1c_1 & -2a_1b_1 & 2a_1^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_2 \\ b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ = & \left(2\hat{\boldsymbol{r}}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1^T - \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{w}_2. \end{aligned} \tag{59}$$

对于上面的最后一个等式，我们利用了这一事实：$\hat{\boldsymbol{r}}_1^T\hat{\boldsymbol{r}}_1 = \|\boldsymbol{r}_1\|^2 = 1$。结合 (57) 和 (59) 可得

$$\boldsymbol{r} - \rho\left(a_1, L_1\right)\hat{\boldsymbol{r}}_1 = \rho\left(a_2, L_2\right)\left(2\hat{\boldsymbol{r}}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1^T - \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{w}_2. \tag{60}$$

我们还注意到矩阵 $2\hat{\boldsymbol{r}}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1^T - \boldsymbol{I}$ 是对称且对合的，即

$$\left(2\hat{\boldsymbol{r}}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1^T - \boldsymbol{I}\right)^T = \left(2\hat{\boldsymbol{r}}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1^T - \boldsymbol{I}\right), \left(2\hat{\boldsymbol{r}}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1^T - \boldsymbol{I}\right)^2 = \boldsymbol{I}.$$

因此，如果将（60）乘以 $2\hat{\boldsymbol{r}}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1^T - \boldsymbol{I}$，然后记 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} - \rho(a_1,\ L_1)\,\hat{\boldsymbol{r}}_1$，即可得到

$$\left(2\hat{\boldsymbol{r}}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1^T - \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{v} = \rho\left(a_2, L_2\right)\boldsymbol{w}_2. \tag{61}$$

由于上述推导可以逆推，这个方程等价于（16）。注意，左侧只涉及第一弧段的变量，右侧则只涉及第二弧段的变量。为了使其可解，一个必要条件是两侧的范数相等。根据 $\boldsymbol{w}_2$ 的定义，$\boldsymbol{w}_2$ 的范数等于 $\boldsymbol{r}_2$ 的范数，且二者恰好都为 1，因此必有

$$\|\boldsymbol{v}\| = \rho\left(a_2, L_2\right). \tag{62}$$

现在可由式 (61) 的最后一行（第三维）计算 a_2：

$$a_2 = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\rho\left(a_2, L_2\right)} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}, \tag{63}$$

其中，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2a_1c_1 & -2a_1b_1 & 2a_1^2 - 1 \end{pmatrix}^T$ 是矩阵 $2\hat{\boldsymbol{r}}_1\hat{\boldsymbol{r}}_1^T - \boldsymbol{I}$ 第三行的转置，如式 (26) 所定义。因此，内积 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ 提取了式 (61) 左侧部分向量的最后一个分量。

将式 (63) 代入式 (62)，即可得到式 (21)。将式 (62) 代入式 (61)，然后可按下式计算 $\boldsymbol{w}_2$：

$$\boldsymbol{w}_2 = \left(2\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1^T - \boldsymbol{I}\right)\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}, \tag{64}$$

因此，可以通过初等运算从 $\boldsymbol{w}_2$ 恢复 $\hat{\boldsymbol{r}}_2$。这证明了式 (24)。

■

E. 引理3的证明

在开始证明之前，我们先列出一些恒等式。

命题 1. 令 $\boldsymbol{B}$ 由式 (26) 定义，并记 $\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} c & -b & a \end{pmatrix}^T$，则对于 $\lambda = 1, 2, 3$，有

(a) $\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda^T\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda = \hat{\boldsymbol{r}}_\lambda^T\boldsymbol{B}^T\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda = d.$

(b) $\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda^T\left(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} + \boldsymbol{m}\boldsymbol{m}^T\right)\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda = 1.$

证明：利用 q 是单位四元数且 $\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda$ 是单位向量这一事实，可以直接证明这些恒等式。**(a)** 展开 $\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda^T\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda = d\left(a_\lambda^2 + b_\lambda^2 + c_\lambda^2\right) = d$，得到 $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^T$。由于 是反对称的，因此有 $\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda^T\left(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^T\right)\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda = 0$，所以 $\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda^T\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda = \hat{\boldsymbol{r}}_\lambda^T\boldsymbol{B}^T\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda = d$。**(b)** 展开左侧，得到 $\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda^T\left(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} \pm \boldsymbol{m}\boldsymbol{m}^T\right)\hat{\boldsymbol{r}}_\lambda$ $\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\left(a_\lambda^2 + b_\lambda^2 + c_\lambda^2\right) = 1 \cdot 1 = 1$。

■

由此，引理3的证明即可完成。

引理3的证明：如前所述，我们将三个分段划分为两组。划分方式只有两种，即 $\{1,2\}\cup\{3\}$ 和 $\{1\}\cup\{2,3\}$。我们很快会看到，前一种对应于情形 $\lambda = 3$，后一种对应于情形 $\lambda = 1$。首先证明情形 $\lambda = 3$。令

$$q_e = q_1 \otimes q_2 = q \otimes q_3^{-1} = q \otimes q_3^*, \tag{65}$$

然后通过基本的矩阵乘法可得

$$q_e = q^+q_3^* = \begin{pmatrix} \delta\delta_3 + \boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ \delta_3\boldsymbol{\varepsilon} - \delta\boldsymbol{\varepsilon}_3 - \boldsymbol{\varepsilon}^\wedge\boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}^T\hat{\boldsymbol{r}}_3 \\ \boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_3 \end{pmatrix}. \tag{66}$$

这里继续采用命题 1 中定义的符号 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{B}$。根据推论 1，我们知道，前两个弧段的端点位于一个经过原点且法向量为 $\boldsymbol{n}_e = \begin{pmatrix} b_e & c_e & d_e \end{pmatrix}^T = \boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_3$ 的平面上。记

$$\boldsymbol{r}_e = \boldsymbol{r} - q_e \otimes \boldsymbol{r}_3 \otimes q_e^*, \tag{67}$$

那么引理 1 告诉我们

$$\boldsymbol{n}_e \cdot \boldsymbol{r}_e = 0. \tag{68}$$

将 (68) 中的 $\boldsymbol{r}_e$ 替换为 (67)，得到

$$\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_3 - \rho\left(a_3, L_3\right)\boldsymbol{n}_e \cdot q_e \otimes \boldsymbol{r}_3 \otimes q_e^* = 0, \tag{69}$$

这与我们想要的结果很接近。只需证明

$$\boldsymbol{n}_e \cdot q_e \otimes \boldsymbol{r}_3 \otimes q_e^* = d. \tag{70}$$

注意，

$$\begin{aligned} & q_e \otimes \boldsymbol{r}_3 \otimes q_e^* \\ = & \left(\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_3\right)\left(\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_3\right)^T\hat{\boldsymbol{r}}_3 + \left(\boldsymbol{m}^T\hat{\boldsymbol{r}}_3\right)^2\hat{\boldsymbol{r}}_3 \\ & + 2\left(\boldsymbol{m}^T\hat{\boldsymbol{r}}_3\right)\left(\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_3\right)^\wedge\hat{\boldsymbol{r}}_3 + \left(\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_3\right)^\wedge\left(\left(\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_3\right)^\wedge\hat{\boldsymbol{r}}_3\right), \end{aligned} \tag{71}$$

因此我们有

$$\begin{aligned} & \left(\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_3\right)\cdot q_e \otimes \boldsymbol{r}_3 \otimes q_e^* \\ = & \left(\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_3\right)^T\left(\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_3\right)\left(\hat{\boldsymbol{r}}_3^T\boldsymbol{B}^T\hat{\boldsymbol{r}}_3\right) + \left(\boldsymbol{m}^T\hat{\boldsymbol{r}}_3\right)^2\left(\hat{\boldsymbol{r}}_3^T\boldsymbol{B}^T\hat{\boldsymbol{r}}_3\right) + 0 + 0 \\ = & \left(\hat{\boldsymbol{r}}_3^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_3 + \hat{\boldsymbol{r}}_3^T\boldsymbol{m}\boldsymbol{m}^T\hat{\boldsymbol{r}}_3\right)\left(\hat{\boldsymbol{r}}_3^T\boldsymbol{B}^T\hat{\boldsymbol{r}}_3\right) \\ = & d \end{aligned} \tag{72}$$

最后一个等式由命题 1 得出。因此，(25) 对 $\lambda = 3$ 成立。

情形 $\lambda = 1$ 的证明更简单。我们使用划分 $\{1\}\cup\{2,3\}$。令

$$q_e' = q_2 \otimes q_3 = q_1^{-1} \otimes q = q_1^* \otimes q, \tag{73}$$

并且我们可以找到一个矩阵 $\boldsymbol{B}'$，使得

$$q_e' = (q_1^*)^+ q = \begin{pmatrix} \delta_1\delta + \boldsymbol{\varepsilon}_1^T\boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta_1\boldsymbol{\varepsilon} - \delta\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^\wedge\boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{r}}_1 \end{pmatrix}. \tag{74}$$

重新整理（14）式可得

$$q_1^* \otimes (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \otimes q_1 = \boldsymbol{r}_2 + q_2 \otimes \boldsymbol{r}_3 \otimes q_2^*. \tag{75}$$

同样，推论 1 指出，存在一个经过原点且法向量为 $\boldsymbol{n}_e' = \boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 的平面，并说明（75）左侧的 $\mathbb{R}^3$ 中的向量位于该平面上。若 $\boldsymbol{R}_1^* \in$SO(3) 是 q_1^* 的旋转矩阵，则有

$$\left(\boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{r}}_1\right) \cdot \boldsymbol{R}_1^* (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) = 0. \tag{76}$$

由于 $\left(q_1^*\right)^{-1} = q_1$，我们知道 q_1 的相应旋转矩阵为 $\boldsymbol{R}_1 = \left(\boldsymbol{R}_1^*\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{R}_1^*\right)^T$。因此有

$$\left(\boldsymbol{R}_1^*\right)^T \boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{r}}_1 = q_1 \otimes \left(\boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{r}}_1\right) \otimes q_1^*. \tag{77}$$

利用（74）式可得

$$\begin{aligned} & q_1 \otimes \left(\boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{r}}_1\right) \otimes q_1^* \\ &= \left(\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_1^T + \left(\delta_1\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^\wedge\right)^2\right)\left(\delta_1\boldsymbol{\varepsilon} - \delta\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^\wedge\boldsymbol{\varepsilon}\right) \\ &= \delta_1\boldsymbol{\varepsilon} - \delta\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}^\wedge\boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ &= \boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_1. \end{aligned} \tag{78}$$

因此，由（77）式和（78）式可得

$$\left(\boldsymbol{R}_1^*\right)^T \boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_1. \tag{79}$$

结合（76）式和（79）式，并应用命题1(a)，可推得

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{r}}_1\right) \cdot \boldsymbol{R}_1^* (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \\ &= \boldsymbol{r}^T \left(\boldsymbol{R}_1^*\right)^T \boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{r}}_1 - \boldsymbol{r}_1^T \left(\boldsymbol{R}_1^*\right)^T \boldsymbol{B}'\hat{\boldsymbol{r}}_1 \\ &= \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_1 - \rho(a_1, L_1)\,\hat{\boldsymbol{r}}_1^T\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_1 \\ &= \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_1 - \rho(a_1, L_1)\,d. \end{aligned} \tag{80}$$

因此，(25) 对 $\lambda = 1$ 也成立。 ■

F. 定理*2*的证明

证明：确切地说，$\hat{\boldsymbol{r}}_3$ 满足方程

$$\boldsymbol{n}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_3 - \rho(a_3, L_3)\,d = 0. \tag{81}$$

将此式从 (35) 中相减，得到投影误差

$$\begin{aligned} \left|\hat{\boldsymbol{n}}_0 \cdot \left(\hat{\boldsymbol{r}}_3^{(0)} - \hat{\boldsymbol{r}}_3\right)\right| &= \frac{\gamma L_3 |d| - \rho(a_3, L_3)\,d}{\|\boldsymbol{n}_0\|} \\ &= \frac{L_3 |d|}{\left\|\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{r}\right\|}\left|\gamma - \frac{\sqrt{1-a_3^2}}{\arccos a_3}\right|. \end{aligned} \tag{82}$$

我们发现

$$\min_{\gamma}\left\{\max_{a_3\in[0,1]}\left\{\left|\gamma - \frac{\sqrt{1-a_3^2}}{\arccos a_3}\right|\right\}\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \tag{83}$$

取 $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$ 时，因此我们得到

$$\left|\hat{\boldsymbol{n}}_0 \cdot \left(\hat{\boldsymbol{r}}_3^{(0)} - \hat{\boldsymbol{r}}_3\right)\right| \le \frac{(\pi - 2)\,L_3 |d|}{2\pi\left\|\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{r}\right\|}. \tag{84}$$

接下来，我们来求 $\boldsymbol{r}_1$ 近似的界限。精确方程为

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}_e \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_1 = 0, \\ \boldsymbol{n}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_1 - \rho(a_1, L_1)\,d = 0, \end{cases} \tag{85}$$

其中 $\boldsymbol{n}_e = \boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{r}}_3$，$\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{r}$。由于 $\hat{\boldsymbol{r}}_1^{(0)}$ 和 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 都是 $\mathbb{S}^2$ 的元素，且与 $\boldsymbol{n}_e$ 垂直，因此我们假设

$$\hat{\boldsymbol{r}}_1 = \exp\left(\boldsymbol{n}_e^\wedge\beta\right)\hat{\boldsymbol{r}}_1^{(0)}, \tag{86}$$

因此，

$$\left\|\hat{\boldsymbol{r}}_1^{(0)} - \hat{\boldsymbol{r}}_1\right\| \le |\beta|. \tag{87}$$

按照证明式 (84) 的思路，我们可以得到关于 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 的类似有界投影误差

$$\left|\hat{\boldsymbol{n}}_0 \cdot \left(\hat{\boldsymbol{r}}_1^{(0)} - \hat{\boldsymbol{r}}_1\right)\right| \le \frac{(\pi - 2)\,L_1 |d|}{2\pi\left\|\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{r}\right\|}. \tag{88}$$

根据图 7(c)，我们有

$$\begin{aligned} |\beta| = \ & \arccos\left(\|\gamma L_1\boldsymbol{r}_0\| - \frac{(\pi - 2)\,L_1 |d|}{2\pi\left\|\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{r}\right\|}\right) \\ & - \arccos\min\left\{1, \|\gamma L_1\boldsymbol{r}_0\| + \frac{(\pi - 2)\,L_1 |d|}{2\pi\left\|\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{r}\right\|}\right\}. \end{aligned} \tag{89}$$

若假设平移距离 $\boldsymbol{r}$ 大于第一段的长度 L_1，即 $\|\boldsymbol{r}\| > L_1$，则有

$$\begin{aligned} \left\|\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{r}\right\| &= \sqrt{\|\boldsymbol{r}\|^2 d^2 + (\cdot)^2 + (\cdot)^2 + (\cdot)^2} \\ &\ge \|\boldsymbol{r}\|\,|d| > L_1\,|d|. \end{aligned} \tag{90}$$

因此，结合式 (87)、(89) 和 (90)，可知 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$ 的误差也有界，即

$$\left\|\hat{\boldsymbol{r}}_1^{(0)} - \hat{\boldsymbol{r}}_1\right\| \le \arccos\frac{2L_1 |d|}{\pi\left\|\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{r}\right\|} - \arccos\frac{L_1 |d|}{\left\|\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{r}\right\|}. \tag{91}$$

■

G. 雅可比矩阵

根据 [32], , SO(3) 的左雅可比和右雅可比矩阵计算如下

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{J}_l(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{I} + \frac{1 - \cos\|\boldsymbol{\omega}\|}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2}\boldsymbol{\omega}^\wedge + \frac{\|\boldsymbol{\omega}\| - \sin\|\boldsymbol{\omega}\|}{\|\boldsymbol{\omega}\|^3}\left(\boldsymbol{\omega}^\wedge\right)^2, \\ & \boldsymbol{J}_r(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{J}_l^T(\boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \tag{92}$$

因此，SE(3) 的右雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_r(\boldsymbol{\omega}) & 0_{3\times3} \\ \exp\left(-\boldsymbol{\omega}^\wedge\right)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\omega}}\left(\boldsymbol{J}_l(\boldsymbol{\omega})\,\boldsymbol{v}\right) & \boldsymbol{J}_r(\boldsymbol{\omega}) \end{pmatrix}. \tag{93}$$