补图熵、AND 积与图的不交并

NicolasCharpenay Maël le Treust Aline Roumy法国国家信息与自动化研究所（IRISA） 法国国家信息与自动化研究所（IRISA） 法国国家信息与自动化研究所（INRIA） 法国雷恩 法国雷恩 法国雷恩
nicolas.charpenay@irisa.fr mael.le-treust@irisa.fr aline.roumy@inria.fr

arXiv:2305.01459v1 [cs.IT] 2 May 2023

摘要——在零错误 Slepian-Wolf 信源编码问题中，最优码率由特征图的补图熵 $\overline{H}$ 给出。除完美图、具有均匀分布 G_5的五边形图及其不交并外，补图熵没有单字母公式。我们考虑两种特殊情况，其中的特征图分别表示为 AND 积 $\wedge$和不交并 $\sqcup$。我们推导出一项结构性结果，表明 $\overline{H}(\wedge\cdot)$ 与 $\overline{H}(\sqcup\cdot)$ 相差一个乘法常数，由此得到两个推论。首先，我们证明 $\overline{H}(\wedge\cdot)$ 与 $\overline{H}(\sqcup\cdot)$ 可线性化的情形完全相同。其次，我们确定了此前尚不清楚的情形下的 $\overline{H}$ ：完美图的积；以及当 G是完美图时的 $G_5 \wedge G$，这里用到了 Tuncel 等人关于 $\overline{H}(G_5 \sqcup G)$ 的结果。这些情形中的图通常并非完美图。

I. 引言

我们研究图 1 所示的 Slepian和Wolf 零错误信源编码问题变体，其中估计值 X^n 必须以概率 1 等于 X^n。Alon 和 Orlitsky 的工作 [1] 也将此问题称为“受限输入”。

A. 特征图与最优码率 $\overline{H}$

如 Witsenhausen 的工作 [2] 所示，可以为图 1 中给定的零错误信源编码问题实例关联一个恰当的概率图 G （即顶点上带有底层概率分布的图）。该图称为问题的“特征图”，因为其结构涵盖了问题数据：顶点是信源字母表，顶点上带有信源概率分布 P_X；若两个信源符号 xx' “不可区分”，即对于某个旁信息符号 y，，$_Y(x,y)P_{X,}$ $_Y(x',y) > 0$，则它们相邻。根据构造，为避免译码错误，编码器必须将 G 中相邻的符号映射为不同的码字：图的着色 G 与零错误编码映射直接对应。

在图 1 的问题中，使用 $n = 1$ 所能达到的最佳码率是 G 的着色的最小熵，如 [1] 所示。这个量称为着色熵，记作

$$H_\chi(G) \doteq \inf\{H(c(V)) \mid c \text{ is a coloring of } G\}. \quad (1)$$

图 1 所示问题中的渐近最优码率由下式刻画

$$\overline{H}(G) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\chi(G^{\wedge n}), \quad (2)$$

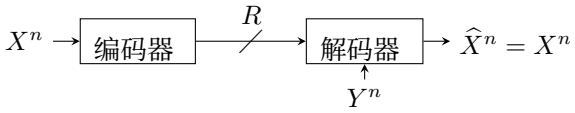

图 1. 零错误 Slepian-Wolf 信源编码问题。

其中 $G^{\wedge n}$ 是特征图 G 的 n 次迭代 AND 积，参见 [1]。如 [3]，所示，它等于 [4] 中定义的补图熵。

除完美图 [5] 外，尚无 $\overline{H}$ 的单字母公式；对于 $G_5 \sqcup G$ 及其补图，在所有完美图 G [6] 的情形下也有单字母公式，其中 G_5 是具有均匀分布的五边形图。

B. 特定实例中的特征图结构

由于确定 $\overline{H}$ 较为困难，我们来考虑图 1 中问题的一些特定实例，如图 2 所示。两种情形中的特征图都具有特定结构。得益于图 2.a 中编码器处的旁信息，特征图是由一族辅助概率图 $(G_z)_{z\in\mathcal{Z}}$ 构成的不交并 ($\sqcup$)；而在图 2.b 中，特征图是 $(G_z)_{z\in\mathcal{Z}}$ 的 AND 积 ($\wedge$)。 $\sqcup$ 和 $\wedge$ 都是概率图上的二元运算，在本研究中发挥着核心作用。结合图 2，一个自然的问题是：如果我们只知道对所有$z \in \mathcal{Z}$，$\overline{H}(G_z)$，能否确定最优码率？根据 [6, 定理 2], 中的次可加性结果，我们知道一般情况下 $\overline{H}\big(\bigsqcup_{z\in\mathcal{Z}}^{P_{g(Y)}} G_z\big) \le \sum_{z\in\mathcal{Z}} P_{g(Y)}\overline{H}(G_z)$ 和 $\overline{H}\big(\bigwedge_{z\in\mathcal{Z}} G_z\big) \le \sum_{z\in\mathcal{Z}} \overline{H}(G_z)$ 成立；然而，刻画等号成立的情形仍是一个开放问题。

C. 相关工作

如果解码器希望恢复函数 $f(X,Y)$，而不是 X，那么图 1 所示的设定就成为“计算编码”问题 [7] 的零错误变体。Charpenay 等人在 [8] 研究了编码器具有旁信息的变体，即图 2.a 所示的设定，其中解码器请求 $f(X,Y)$。在 [9], , Ravi 和 Dey 研究了带有双向中继的设定。在 [10], , Malak 在无损计算编码场景中引入了分数色熵。

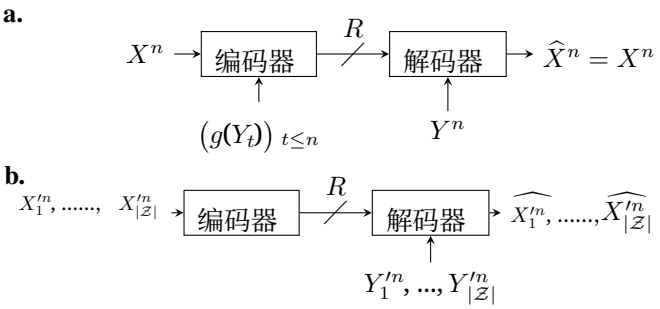

图 2. 零错误 Slepian-Wolf 信源编码问题的两个具体实例，其中 g: $\mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ 是确定性的，$(X_z'^n, Y_z'^n) \sim P_{X,\,Y|g(Y)=z}^{n}$ 对所有 $z \in \mathcal{Z}$ 均成立，并且各对 $((X_z'^n, Y_z'^n))_{z\in\mathcal{Z}}$ 相互独立。对所有 $z \in \mathcal{Z}$，辅助图 G_z 是变量对 (X_z', Y_z') 的维森豪森特征图。

另一个重要问题是图 [11]，的香农容量 Θ，它刻画了零错误信道编码场景中的最优码率。Marton 在 [12] 中证明，$\overline{H}(G) + C(G,P) = H(P)$，其中 P 是 G 的底层概率分布，而 $C(G,P)$ 是相对于 P 的图容量。对于 Θ，线性化也引出了同样的问题：对于哪些 G，G'，我们有 $\Theta(G \wedge G') = \Theta(G)\Theta(G')$? Haemers 在 [13]，中利用基于邻接矩阵秩的 Θ 上界给出了一个反例。Bukh 和 Cox 在 [14] 中、Gao 等人在 [15] 中对 Haemers 上界作了改进。最近，Schrijver 在 [16], 中证明，$\Theta(G \wedge G') = \Theta(G)\Theta(G')$ 等价于 $\Theta(G \sqcup G') = \Theta(G) + \Theta(G')$。Boche 和 Deppe 在 [17] 中研究了 Θ 的可计算性。Zuiddam 等人在 [18] 中利用半环同态给出了 Θ 的渐近表达式。在 [19]，中，Gu 和 Shayevitz 研究了双向信道情形。Wiese 等人在 [20] 中提出了面向安全通信的 Θ 扩展。

D. 贡献

本文将概率图不交并的补图熵与其积的补图熵联系起来，即 $\overline{H}(\sqcup\cdot)$ 和 $\overline{H}(\wedge\cdot)$。首先，我们给出关于不交并相对于型 P_A 的补图熵的一个结构性结果，该结果使用 $\wedge$ 而非 $\sqcup$。这使我们能够在相差一个乘法常数的意义下，令 $\overline{H}(\sqcup\cdot)$ 等于 $\overline{H}(\wedge\cdot)$。该公式有若干推论。

首先，我们可以据此推导出完美图乘积的单字母公式 $\overline{H}$。由于完美图的乘积通常并非完美图，这种情况此前尚未解决。然而，完美图的不交并仍是完美图，因此研究不交并是关键。最后，这使我们能够证明 $\overline{H}(\sqcup\cdot)$ 和 $\overline{H}(\wedge\cdot)$ 的线性化等价；也就是说，若 Tuncel 等人的次可加性结果 [6, 定理 2], 中的任一等式成立，则另一个等式也成立。我们利用这一结果确定当 G 为完美图时，非完美概率图 $G_5 \wedge G$ 的补图熵。

在第二节中，我们定义了用于在第三节表述主要定理所需的图论概念，以及这些概念的。

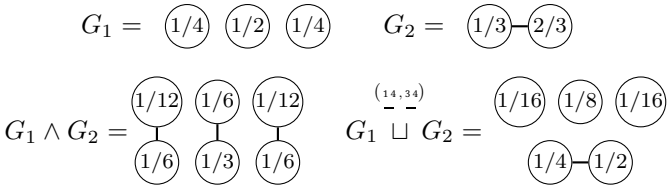

图 3。一个空图 $G_1 = (N_3, (1\,4,\ 1\,2,\ 1\,4))$ 和一个完全图 $G_2 = (K_2, (1\,3,\ 2\,3))$，以及它们的 AND 积 $G_1 \wedge G_2$ 和它们关于 $(1\,4,\ 3\,4)$ 的不交并 $G_1 \sqcup G_2$。

其推论见第 IV 节。这些定理的应用示例见第 V 节，主要证明则在第 VI 节、第 VII 节和第 VIII 节中展开。

II. 符号与定义

我们用 $x^n = (x_1, \ldots, x_n)$ 表示序列。

定义在 $\mathcal{X}$ 上的概率分布集合记为 $\Delta(\mathcal{X})$；$P_X \in \Delta(\mathcal{X})$ 表示随机变量 X 的分布。均匀分布记为 Unif。给定 Y 时 X 的条件分布记为 $P_{X|Y}$。

概率图 G 是一个三元组 $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, P_V)$，其中 $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 是一个图，且 $P_V \in \Delta(\mathcal{V})$。若对于所有 $x, x' \in \mathcal{S}$, $xx' \notin \mathcal{E}$，子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ 在 G 中均为独立集，则称其为独立集。若映射 $c: \mathcal{V} \to \mathcal{C}$ 满足对于所有 $i \in \mathcal{C}$，$c^{-1}(i)$ 都是独立集，则称其为着色。具有 n 个顶点的圈图、完全图和空图分别记为 C_n, K_n, N_n。

定义 II.1（AND 积 $\wedge$）$G_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1, P_{V_1})$ 与 $G_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2, P_{V_2})$ 的 AND 积是一个记为 $G_1 \wedge G_2$ 的概率图，其定义如下：

- $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ 作为顶点集，- $P_{V_1} P_{V_2}$ 作为顶点上的概率分布，- 当且仅当 $v_1 v_1' \in \mathcal{E}_1$ AND $v_2 v_2' \in \mathcal{E}_2$时，$(v_1 v_2)$、$(v_1' v_2')$相邻；约定所有顶点都具有自邻接。

我们用 $G_1^{\wedge n}$表示 n 阶 AND 幂：$G_1^{\wedge n} \doteq G_1 \wedge \ldots \wedge G_1$。

定义 II.2（概率图的 不交并 $\sqcup$）
设 $\mathcal{A}$ 为一个有限集，且 $P_A \in \Delta(\mathcal{A})$。对于所有 $a \in \mathcal{A}$，设 $G_a = (\mathcal{V}_a, \mathcal{E}_a, P_{V_a})$为概率图，则它们关于 P_A 的不交并是一个概率图 $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, P_V)$，记作 $\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a$，定义如下：

- $\mathcal{V} = \bigsqcup_{a\in\mathcal{A}} \mathcal{V}_a$ 是集合 $(\mathcal{V}_a)_{a\in\mathcal{A}}$的不交并；- 对所有 $v, v' \in \mathcal{V}$与 $vv' \in \mathcal{E}$ 当且仅当它们都属于同一个 $\mathcal{V}_a$ 且 $vv' \in \mathcal{E}_a$；- $P_V = \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a) P_{V_a}$；注意，$(P_{V_a})_{a\in\mathcal{A}}$ 在 $\mathcal{V}$中具有互不相交的支撑集。

注 II.3 我们在此考虑的不交并 $\sqcup$ 也被 Tuncel 等人在 *[6]* 中称为“图的和”。请注意，$\sqcup$ 是顶点上的不交并：它在性质上不同于文献中已研究过的边上的并 $\cup$，尤其是 *[21], [5]* 和 *[12]* 中的相关研究。

图 3 给出了 AND 积和不交并的一个示例。

III. 主要结果

在本节中，$\mathcal{A}$ 是一个有限集，P_A 是从$\Delta(\mathcal{A})$得到的分布，并且 $(G_a)_{a\in\mathcal{A}}$ 是一个概率图族。

在定理 III.2 中，我们给出了关于某个型的不交并的补图熵表达式；证明见 III-A 节。根据推论 III.3，当$P_A = \mathrm{Unif}(\mathcal{A})$时，我们将$\overline{H}(\sqcup\,\cdot\,)$与 $\overline{H}(\wedge\,\cdot)$等同起来，二者仅相差一个乘法常数。

定义 III.1（序列的类型）设 $a^k \in \mathcal{A}^k$，其类型T_{a^k} 为其经验分布。从 $\mathcal{A}^k$ 取值的序列的所有类型构成的集合记为 $\Delta_k(\mathcal{A}) \subset \Delta(\mathcal{A})$。

定理 III.2 若对于某个 $k \in \mathbb{N}^\star$，有 $P_A \in \Delta_k(\mathcal{A})$，则

$$\overline{H}\left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\right) = \frac{1}{k}\overline{H}\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge kP_A(a)}\right). \tag{3}$$

推论 III.3 $\overline{H}\big(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{\mathrm{Unif}(\mathcal{A})} G_a\big) = \frac{1}{|\mathcal{A}|}\overline{H}\big(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a\big)$。

A. 定理 III.2 的证明

为完成证明，我们需要引理 1；它是连接 $\overline{H}(\sqcup\,\cdot\,)$ 与 $\overline{H}(\wedge\,\cdot)$ 的基石。$\wedge$ 出现在 (4) 中的主要原因是 $\overline{H}$ 中使用了 AND 幂，以及 $\wedge$ 关于 $\sqcup$ 的分配律（见引理 2）。引理 1 的证明将在第 VI 节给出。

引理 1 设 $(\overline{a}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^\star}$ 为任意一个满足 $T_{\overline{a}^n} \to P_A$（当 $n\to\infty$ 时）的序列。则有

$$\overline{H}\left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\chi\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge nT_{\overline{a}^n}(a)}\right). \tag{4}$$

现在证明定理 III.2。设 $(\overline{a}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ 为一个 k-周期序列，满足 $T_{\overline{a}^k} = P_A$，则对所有 $n\in\mathbb{N}^\star$，都有 $T_{\overline{a}^{nk}} = T_{\overline{a}^k}$，并且 $T_{\overline{a}^n} \to P_A$。我们可以使用引理 1，并且$n\to\infty$在极限中考虑每第 k 项：

$$\begin{aligned}
\overline{H}\Big(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\Big) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{kn}H_\chi\Big(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge knT_{\overline{a}^{kn}}(a)}\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{kn}H_\chi\Big(\Big(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge kT_{\overline{a}^k}(a)}\Big)^{\wedge n}\Big)\\
&= \frac{1}{k}\overline{H}\Big(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge kP_A(a)}\Big). \qquad \square
\end{aligned}$$

IV. Consequences

A. 完美图的积的 $\overline{H}$ 单字母公式

除了已知 $\overline{H}(G)$ 时的 $G_5 = (C_5, \mathrm{Unif}(\{1,\dots,5\}))$、$G_5 \sqcup G$ 及其补图之外，已知 $\overline{H}$ 的情形仅有底层分布任意的完美图：其值由下文定义的 Körner 图熵给出。我们通过定理 IV.6 扩展了已知情形，该定理为完美图的 AND 积给出了单字母表达式。此前尚未解决这一情形，因为完美图的积一般并非完美图（反例见图 4）。定理 IV.6 的证明在第 VIII 节中给出。

定义 IV.1（诱导子图）图 G 中由顶点子集 $\mathcal{S}$ 诱导的子图，是从 G 中仅保留 $\mathcal{S}$ 中的顶点及其间的边所得到的图，记作 $G[\mathcal{S}]$。当 G 是概率图时，我们为其赋予底层概率分布 $P_V/P_V(\mathcal{S})$。

定义 IV.2（完美图）若图 $G=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ 满足 $\forall\mathcal{S}\subset\mathcal{V}$, $\chi(G[\mathcal{S}]) = \omega(G[\mathcal{S}])$，则称其为完美图；其中，$\omega$ 是最大团（即完全诱导子图）的大小；而 $\chi(G[\mathcal{S}])$ 是使得存在着色 $c\colon \mathcal{S}\to\mathcal{C}$ of $G[\mathcal{S}]$ 的最小 $|\mathcal{C}|$。推广而言，若概率图 $(\mathcal{V},\mathcal{E},P_V)$ 满足 $(\mathcal{V},\mathcal{E})$ 是完美图，则称该概率图为完美图。

定义 IV.3（Körner 图熵 H_κ）对于所有 $G=(\mathcal{V},\mathcal{E},P_V)$，令 $\Gamma(G)$ 表示 G 中顶点的独立集族。G 的 Körner 图熵定义为

$$H_\kappa(G) = \min_{V\in W\in\Gamma(G)} I(W;V), \tag{5}$$

其中，最小值取遍所有分布 $P_{W|V}\in\Delta(\mathcal{W}^{\mathcal{V}})$，$\mathcal{W}=\Gamma(G)$，满足 $(V,W)\in\mathcal{V}\times\mathcal{W}$，并且满足随机顶点 V 以概率 1 属于随机独立集 W，即 (5) 中的 $V\in W\in\Gamma(G)$。

定理 IV.4（强完美图定理，摘自 **[22]**）图 G 是完美图，当且仅当 G 及其补图都不含长度至少为 5 的诱导奇圈。

定理 IV.5（摘自 **[5]**）设 G 是一个完美概率图，则 $\overline{H}(G) = H_\kappa(G)$。

定理 IV.6 当 $(G_a)_{a\in\mathcal{A}}$ 是一族完美概率图时，以下单字母刻画成立：

$$\overline{H}\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a\right) = \sum_{a\in\mathcal{A}}\overline{H}(G_a) = \sum_{a\in\mathcal{A}} H_\kappa(G_a), \tag{6}$$

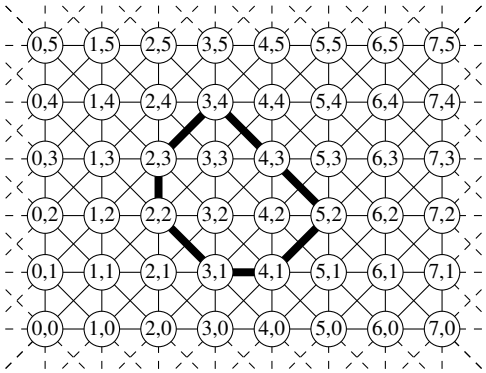

图4。此图是两个完美图 C_6 和 C_8的 AND 积。粗边表示一个诱导子图 C_7，这使得 $C_6\wedge C_8$ 不再完美（参见强完美图定理，即定理 IV.4）。

$$\overline{H}\left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\right)=\sum_{a\in\mathcal{A}}P_A(a)\overline{H}(G_a)=\sum_{a\in\mathcal{A}}P_A(a)H_\kappa(G_a). \tag{7}$$

B. 补图熵的线性化

在其次可加性结果中，[6, 定理 2], Tuncel 等人证明，对于所有概率图 G_1、G_2 和 $\alpha\in(0,1)$，

$$\overline{H}(G_1 \overset{(\alpha,1-\alpha)}{\sqcup} G_2)\le\alpha\overline{H}(G_1)+(1-\alpha)\overline{H}(G_2), \tag{8}$$

$$\overline{H}(G_1\wedge G_2)\le\overline{H}(G_1)+\overline{H}(G_2). \tag{9}$$

我们在定理 IV.7 中证明，等式 (8) 和 (9) 成立等号的情形相同。

定理 IV.7 对于所有概率图 G_1、G_2，以及所有$\alpha\in(0,1)$，均有：

$$\overline{H}(G_1 \overset{(\alpha,1-\alpha)}{\sqcup} G_2)=\alpha\overline{H}(G_1)+(1-\alpha)\overline{H}(G_2) \tag{10}$$

$$\iff \overline{H}(G_1\wedge G_2)=\overline{H}(G_1)+\overline{H}(G_2). \tag{11}$$

我们证明并使用定理 IV.8 中陈述的更一般公式。证明见第 VII 节。

定理 IV.8 设 $P_A\in\Delta(\mathcal{A})$ 具有全支撑，则以下等价关系成立

$$\overline{H}\left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\right)=\sum_{a\in\mathcal{A}}P_A(a)\overline{H}(G_a) \tag{12}$$

$$\iff \overline{H}\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a\right)=\sum_{a\in\mathcal{A}}\overline{H}(G_a). \tag{13}$$

Tuncel 等人在 [6, 引理 3]中给出了等式 (12) 成立的一种情形：$G_5\doteq(C_5,\mathrm{Unif}(\{1,\dots,5\}))$ 与任意完美图的组合。我们给出了$\overline{H}(G_5\wedge G)$ 的单字母公式，其中 G 为完美图；而 $G_5\wedge G$ 不是完美图，因为 $G_5\wedge G$ 含有一个诱导的 C_5（见定理 IV.4）。以下推论的证明见附录 A。

推论 IV.9 对于所有完美概率图 G，

$$\overline{H}(G\wedge G_5)=\overline{H}(G)+\overline{H}(G_5)=H_\kappa(G)+\tfrac{1}{2}\log 5. \tag{14}$$

V. Example

在本节中，对于所有 $i\in\mathbb{N}^\star$，G_i 表示具有 i 个顶点且服从均匀分布的环图，即 $G_i=(C_i,\mathrm{Unif}(\{0,\dots,i-1\}))$。$G_6$和 G_8 都是完美的，且如图 4 所示，$G_6\wedge G_8$ 不是完美图。我们有：

$$H_\kappa(G_6)=H(V_6)-\max_{V_6\in W_6\in\Gamma(G_6)}H(V_6|W_6) \tag{15}$$

$$=1+\log 3-\log 3=1 \tag{16}$$

由于式 (15) 中的 $H(V_6|W_6)$ 在取 $W_6=\{0,2,4\}$（当 $V_6\in\{0,2,4\}$ 时）以及取 $W_6=\{1,3,5\}$（其他情况）时达到最大值。

类似地，$H_\kappa(G_8)=1$。

我们可以利用定理 IV.5 求得 $\overline{H}(G_6\wedge G_8)$：

$$\overline{H}(G_6\wedge G_8)=H_\kappa(G_6)+H_\kappa(G_8)=2. \tag{17}$$

我们可以构造 $G_6\wedge G_8$，c^* 的最优着色：$(v_6,v_8)\mapsto(\mathbb{1}_{v_6}$为偶数 $\mathbb{1}_{v_8}$为偶数)。

VI. 引理 1 的证明

A. 预备结果

引理 2 证明了对于概率图，$\wedge$ 相对于 $\sqcup$ 满足分配律，这与没有底层分布的图中 [18] 的情况类似。引理 3 指出，$\overline{H}$ 可以通过由渐近概率为 1 的集合所诱导的子图计算；特别地，我们将对顶点的典型集使用这一结果。引理 2 和引理 3 的证明分别见附录 C 和附录 D。

引理 2 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 为有限集，设 $P_A\in\Delta(\mathcal{A})$ 且 $P_B\in\Delta(\mathcal{B})$。对于所有 $a\in\mathcal{A}$ 和 $b\in\mathcal{B}$，设 $G_a=(\mathcal{V}_a,\mathcal{E}_a,P_{V_a})$ 和$G_b=(\mathcal{V}_b,\mathcal{E}_b,P_{V_b})$ 为概率图。那么

$$\left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\right)\wedge\left(\bigsqcup_{b\in\mathcal{B}}^{P_B} G_b\right)=\bigsqcup_{(a,b)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}}^{P_AP_B} G_a\wedge G_b. \tag{18}$$

引理 3 设 $G=(\mathcal{V},\mathcal{E},P_V)$，且 $(\mathcal{S}^n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ 是一个集合序列，使得对于所有 $n\in\mathbb{N}^\star$、$\mathcal{S}^n\subset\mathcal{V}^n$，以及 $P_V^n(\mathcal{S}^n)\to 1$（当 $n\to\infty$ 时）。那么 $\overline{H}(G)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\chi\big(G^{\wedge n}[\mathcal{S}^n]\big)$。

定义 VI.1（同构概率图）设$G_1=(\mathcal{V}_1,\mathcal{E}_1,P_{V_1})$ 和 $G_2=(\mathcal{V}_2,\mathcal{E}_2,P_{V_2})$，我们称 G_1 与 G_2 同构，如果它们之间存在一个同构，即存在一个双射 $\psi:\ \mathcal{V}_1\to\mathcal{V}_2$，满足：

- *For all* $v_1,v_1'\in\mathcal{V}_1$, $v_1v_1'\in\mathcal{E}_1\iff\psi(v_1)\psi(v_1')\in\mathcal{E}_2$,
- *For all* $v_1\in\mathcal{V}_1$, $P_{V_1}(v_1)=P_{V_2}\big(\psi(v_1)\big)$.

引理 4（引自 [8]）设 $\mathcal{B}$ 为有限集，设 $P_B\in\Delta(\mathcal{B})$，并设 $(G_b)_{b\in\mathcal{B}}$为一族同构概率图，则对所有 $b\in\mathcal{B}$，有 $H_\chi\big(\bigsqcup_{b'\in\mathcal{B}}^{P_B}G_{b'}\big)=H_\chi(G_b)$。

B. 引理 1 的主要证明

对所有 $a\in\mathcal{A}$ $G_a=\mathcal{V}_a\,\mathcal{E}_a\,P_{V_A}$ $G=$，令（，，），$\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A}G_a$ $P_A\in\Delta\,\mathcal{A}$ $\overline{a}_n\ _{n\in\mathbb{N}^\star}\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}^\star}$
并令。令（），并令（）为一个序列，使得当 $n\to\infty$时 $T_{\overline{a}^n}\to P_A$。

令 $\epsilon>0$，并对所有 $n\in\mathbb{N}^\star$，令

$$\mathcal{T}_\epsilon^n(P_A)\doteq\big\{a^n\in\mathcal{A}^n\ \big|\ \|T_{a^n}-P_A\|_\infty\le\epsilon\big\}, \tag{19}$$

$$P'^n\doteq\frac{P_A^n}{P_A^n(\mathcal{T}_\epsilon^n(P_A))},\qquad \mathcal{S}_\epsilon^n\doteq\bigsqcup_{a^n\in\mathcal{T}_\epsilon^n(P_A)}\ \prod_{t\le n}\mathcal{V}_{a_t}.$$

由引理 3 可得

$$\overline{H}(G)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\chi\Big(G^{\wedge n}[\mathcal{S}_\epsilon^n]\Big), \tag{20}$$

当 $n\to\infty$时，$P_V^n(\mathcal{S}_\epsilon^n)\to 1$。我们来研究式 (20) 中的极限。对于所有足够大的 n，$\overline{a}^n\in\mathcal{T}_\epsilon^n(P_A)$ 当 $T_{\overline{a}^n}\to P_A$ 时。因此，对于所有 $a^n\in\mathcal{T}_\epsilon^n(P_A)$ 和 $a'\in\mathcal{A}$，

$$\big|T_{\overline{a}^n}(a')-T_{a^n}(a')\big|\le 2\epsilon. \tag{21}$$

一方面

$$H_\chi\Big(\big(\textstyle\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A}G_a\big)^{\wedge n}[\mathcal{S}_\epsilon^n]\Big)$$

$$=H_\chi\Big(\Big(\textstyle\bigsqcup_{a^n\in\mathcal{A}^n}^{P_A^n}\ \bigwedge_{t\le n}G_{a_t}\Big)[\mathcal{S}_\epsilon^n]\Big) \tag{22}$$

$$= H_\chi\Big(\bigsqcup_{a^n\in\mathcal{T}_\epsilon^n(P_A)}^{P'^n} \bigwedge_{t\le n} G_{a_t}\Big) \tag{23}$$
$$= H_\chi\Big(\bigsqcup_{a^n\in\mathcal{T}_\epsilon^n(P_A)}^{P'^n} \bigwedge_{a'\in\mathcal{A}} G_{a'}^{\wedge nT_{a^n}(a')}\Big) \tag{24}$$
$$\le H_\chi\Big(\bigsqcup_{a^n\in\mathcal{T}_\epsilon^n(P_A)}^{P'^n} \bigwedge_{a'\in\mathcal{A}} G_{a'}^{\wedge nT_{\overline{a}^n}(a')+\lceil 2n\epsilon\rceil}\Big) \tag{25}$$
$$= H_\chi\Big(\bigwedge_{a'\in\mathcal{A}} G_{a'}^{\wedge nT_{\overline{a}^n}(a')+\lceil 2n\epsilon\rceil}\Big) \tag{26}$$
$$\le H_\chi\Big(\bigwedge_{a'\in\mathcal{A}} G_{a'}^{\wedge nT_{\overline{a}^n}(a')}\Big) + H_\chi\Big(\bigwedge_{a'\in\mathcal{A}} G_{a'}^{\wedge\lceil 2n\epsilon\rceil}\Big) \tag{27}$$
$$\le H_\chi\Big(\bigwedge_{a'\in\mathcal{A}} G_{a'}^{\wedge nT_{\overline{a}^n}(a')}\Big) + \lceil 2n\epsilon\rceil|\mathcal{A}|\log|\mathcal{V}|; \tag{28}$$

其中，(22) 来自引理 2；(23) 来自 (19) 中 $\mathcal{S}_\epsilon^n$ 和 P'^n 的定义；(24) 是对积中各项的重新排列；(25) 来自 (21)；(26) 根据引理 4 得出，因为图 $\big(\bigwedge_{a'\in\mathcal{A}} G^{\wedge nT_{\overline{a}^n}(a')+\lceil 2n\epsilon\rceil}_{a'}\big)_{a^n\in\mathcal{T}^n_{P_A}}$ 彼此同构，且不依赖于 a^n；(27) 根据 H_χ 的次可加性得出；(28) 则是 H_χ 的上界，该上界由着色的最高熵给出。

另一方面，通过类似的论证，我们得到 nts

$$H_\chi\Big(\big(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\big)^{\wedge n}[\mathcal{S}_\epsilon^n]\Big)$$
$$\ge H_\chi\Big(\bigwedge_{a'\in\mathcal{A}} G_{a'}^{\wedge nT_{\overline{a}^n}(a')-\lceil 2n\epsilon\rceil}\Big) \tag{29}$$
$$\ge H_\chi\Big(\bigwedge_{a'\in\mathcal{A}} G_{a'}^{\wedge nT_{\overline{a}^n}(a')}\Big) - H_\chi\Big(\bigwedge_{a'\in\mathcal{A}} G_{a'}^{\wedge\lceil 2n\epsilon\rceil}\Big), \tag{30}$$
$$\ge H_\chi\Big(\bigwedge_{a'\in\mathcal{A}} G_{a'}^{\wedge nT_{\overline{a}^n}(a')}\Big) - \lceil 2n\epsilon\rceil|\mathcal{A}|\log|\mathcal{V}|. \tag{31}$$

注意，(30) 也来自 H_χ 的次可加性：$H_\chi(G_2) \ge H_\chi(G_1\wedge G_2) - H_\chi(G_1)$ 对所有 G_1, G_2 均成立。

结合 (28) 和 (31)，我们得到

$$\left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\chi(G^{\wedge n}[\mathcal{S}_\epsilon^n]) - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\chi\left(\bigwedge_{a'\in\mathcal{A}} G_{a'}^{\wedge nT_{\overline{a}^n}(a')}\right)\right| \le 2\epsilon|\mathcal{A}|\log|\mathcal{V}|. \tag{32}$$

由于这对所有 $\epsilon>0$ 均成立，结合 (20) 和 (32) 可得所需结果。

VII. 定理 IV.8 的证明

A. 预备结果

在引理 5 $P_A \mapsto$ 中，我们 $\overline{H}(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a)$ 5 给出了 的正则性。引理 的证明见附录 E。引理 6 指出，若 $\Delta(\mathcal{A})$ 上的凸函数 γ 在内点处与 $(\gamma(\mathbb{1}_a))_{a\in\mathcal{A}}$ 的线性插值相交，则 γ 为线性函数。我们通过考察 $\gamma = P_A \mapsto \overline{H}(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a)$，利用这一结论证明定理 IV.8 中的等价性。引理 6 的证明见附录 F。

引理 5 函数 $P_A \mapsto \overline{H}\big(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\big)$ 是凸函数，且为 $(\log \max_a |\mathcal{V}_a|)$-利普希茨函数。

引理 6 设 $\mathcal{A}$ 为有限集，且 $\gamma:\Delta(\mathcal{A})\to\mathbb{R}$ 为凸函数，则有以下结论：

$$\exists P_A\in\operatorname{int}(\Delta(\mathcal{A})),\ \gamma(P_A)=\textstyle\sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a)\gamma(\mathbb{1}_a) \tag{33}$$
$$\iff \forall P_A\in\Delta(\mathcal{A}),\ \gamma(P_A)=\textstyle\sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a)\gamma(\mathbb{1}_a) \tag{34}$$

其中 $\operatorname{int}(\Delta(\mathcal{A}))$ 是 $\Delta(\mathcal{A})$ 的内点（即 $\mathcal{A}$ 上的全支撑分布）。

B. 定理 IV.8 的主要证明

($\Longrightarrow$) 假设 $\overline{H}(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a) = \sum_{a\in\mathcal{A}}\overline{H}(G_a)$。我们可以使用推论 III. 3 $\overline{H}(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{\mathrm{Unif}(\mathcal{A})} G_a) =: \sum_{a\in\mathcal{A}}\frac{1}{|\mathcal{A}|}\overline{H}\ G_a$ $P_A \mapsto \overline{H}(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a)$ ()。因此，根据引理 5，该函数是凸的，并且满足式（33），其中内点为 $P_A =$Unif($\mathcal{A}$)：根据引理 6，我们有

$$\forall P_A\in\Delta(\mathcal{A}),\ \overline{H}\big(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\big) = \textstyle\sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a)\overline{H}(G_a). \tag{35}$$

($\Longleftarrow$) 反过来，假设 (35)，那么 $P_A \mapsto \overline{H}(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a)$是线性的。我们可以使用推论 III.3，从而得到 $\overline{H}(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a) = |\mathcal{A}|\overline{H}(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{\mathrm{Unif}(\mathcal{A})} G_a) = \sum_{a\in\mathcal{A}}\overline{H}(G_a)$。

VIII. 定理 IV.6 的证明

A. 预备结果

引理 7 由 [23, 推论 3.4], 得出，并指出函数 $P_A \mapsto H_\kappa(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a)$（其定义与 $P_A \mapsto \overline{H}(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a)$ 类似）始终是线性的。为完整起见，我们在附录 G 中给出引理 7 的证明。引理 8 的证明见附录 H。

引理 7 $G_a\ _{a\in\mathcal{A}}$ $P_A\ \in$ 对于所有概率 $\Delta\ \mathcal{A}$ $H_\kappa(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a) = \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A\ a\ H_\kappa\ G_a$ 图 () 和 ()，我们有 () ()。

引理 8 概率图 $\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a$ 是完美图，当且仅当对于所有 $a\in\mathcal{A}$，G_a 都是完美图。

B. 定理 IV.6 的主要证明

对于所有 $a\in\mathcal{A}$，设 $G_a = (\mathcal{V}_a, \mathcal{E}_a, P_{V_a})$ 是一个完美的概率图。根据引理 8，$\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a$ 也是完美的；并且根据定理 IV.5，我们有 $\overline{H}(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a) = H_\kappa(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a)$。根据引理 7 以及定理 IV.5（应用于完美图 $(G_a)_{a\in\mathcal{A}}$），我们还有 $H_\kappa(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a) = \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a)H_\kappa(G_a) = \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a)\overline{H}(G_a)$。

因此，图 $(G_a)_{a\in\mathcal{A}}$ 和P_A满足式 (12)：由定理 IV.8 可得 $\overline{H}(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a) = \sum_{a\in\mathcal{A}}\overline{H}(G_a) = \sum_{a\in\mathcal{A}} H_\kappa(G_a)$，最后一个等号由定理 IV.5 得出。

IX. 结论

定理 III. 2 $\overline{H}(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a) =$表明，$\frac{1}{k}\overline{H}(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge kP_A\ a})$ $P_A\ \in\ \Delta_k\ \mathcal{A}$ 对于所有 ()，()均成立。该结果的推论见定理 IV.6、定理 IV.8 和推论 IV.9。我们为一类新的图给出了 $\overline{H}$ 的单字母公式。根据式 (2)，这使我们能够刻画图 2 所示两个信源编码问题的最优码率。

命题 IX.1 图 2.a 和图 2.b 所示情形下的最优码率分别为 $\overline{H}(\bigsqcup_{z\in\mathcal{Z}}^{P_{g(Y)}} G_z)$ 和 $\overline{H}(\bigwedge_{z\in\mathcal{Z}} G_z)$。

参考文献

[1] N. Alon 和 A. Orlitsky，“信源编码与图熵”，IEEE 信息论汇刊，第 42 卷，1339，1996 5，1329，第 —— 页。[2] H. Witsenhausen，“零错误旁信息问题与色数（通信）”，IEEE 信息论汇刊，第 22 卷，第 5 期，第 592–593 页，1976 年。[3] P. Koulgi、E. Tuncel、S. L. Regunathan 和 K. Rose，“关于带解码器侧信息的零错误信源编码”，IEEE 信息论汇刊，第 49 卷，第 1 期，第 99–111 页，2003 年。[4] J. Korner 和 G. Longo，“有限信源的两步编码”，IEEE 信息论汇刊，第 19 卷，第 6 期，第 778–782 页，1973 年。[5] I. Csiszár、J. Körner、L. Lovász、K. Marton 和 G. Simonyi，“反阻塞角与完美图的熵分裂”，Combinatorica，第 10 卷，第 1 期，第 27–40 页，1990 年。[6] E. Tuncel、J. Nayak、P. Koulgi 和 K. Rose，“关于补图熵”，IEEE 信息论汇刊，第 55 卷，第 6 期，第 2537–2546 页，2009 年。[7] A. Orlitsky 和 J. R. Roche，“计算编码”，载于 IEEE 第36届计算机科学基础年会论文集。IEEE，1995 年，第 502–511 页。[8] N. Charpenay、M. l. Treust 和 A. Roumy，“带编码器侧信息的计算零错误编码”，arXiv 预印本 arXiv:2211 03649，2022 年。[9] J. Ravi 和 B. K. Dey，“通过双向中继进行零错误函数计算”，载于 2015年 IEEE 信息论研讨会 (ITW)。IEEE，2015 年，第 1–5 页。[10] D. Malak，“带旁信息的函数压缩中的分数图着色”，arXiv 预印本 arXiv:2204.11927，2022 年。[11] C. Shannon，“有噪信道的零错误容量”，IRE 信息论汇刊，第 2 卷，第 3 期，第 8–19 页，1956 年。[12] K. Marton，“关于概率图的香农容量”，组合理论杂志 B辑，第 57 卷，第 2 期，第 183–195 页，1993 年。[13] W. Haemers 等人，“关于 Lovász 有关图的香农容量的一些问题”，IEEE 信息论汇刊，第 25 卷，第 2 期，第 231–232 页，1979 年。[14] B. Bukh 和 C. Cox，“关于 Haemers 界的分数版本”，IEEE 信息论汇刊，第 65 卷，第 6 期，第 3340–3348 页，2018 年。[15] L. Gao、S. Gribling 和 Y. Li，“关于 Haemers 界的迹版本”，IEEE 信息论汇刊，2022 年。[16] A. Schrijver，“关于图的和与积的香农容量”，Indagationes Mathematicae，第 34 卷，第 1 期，第 37–41 页，2023 年。[17] H. Boche 和 C. Deppe，“有噪信道零错误容量的可计算性”，载于 2021年 IEEE 信息论研讨会 (ITW)。IEEE，2021 年，第 1–6 页。[18] J. Zuiddam 等人，《代数复杂度、渐近谱与纠缠多胞体》。逻辑、语言与计算研究所，2018 年。[19] Y. Gu 和 O. Shayevitz，“关于离散无记忆双向信道的非自适应零错误容量”，Entropy，第 23 卷，第 11 期，第 1518 页，2021 年。[20] M. Wiese、T. J. Oechtering、K. H. Johansson、P. Papadimitratos、H. Sandberg 和 M. Skoglund，“安全估计与零错误保密容量”，IEEE 自动控制汇刊，第 64 卷，第 3 期，第 1047–1062 页，2018 年。[21] J. Körner 和 K. Marton，“ 熵分裂图 ”，SIAM 离散数学杂志，第 1 卷，第 1 期，第 71–79 页，1988 年。[22] M. Chudnovsky、N. Robertson、P. Seymour 和 R. Thomas，“强完美图定理”，数学年刊，第 51–229 页，2006 年。[23] G. Simonyi，“图熵：综述”，组合优化，第 20 卷，第 399–441 页，1995 年。

附录 A 推论 IV.9 的证明

由 [6, 引理 3], 若 G 是完美的则

$$\overline{H}(G \overset{(\alpha,1-\alpha)}{\sqcup} G_5) = \alpha\overline{H}(G) + (1-\alpha)\overline{H}(G_5). \tag{36}$$

根据定理 IV.8，我们有 $\overline{H}(G \wedge G_5) = \overline{H}(G) + \overline{H}(G_5) = H_\kappa\ G + \frac{5}{2}$ [3, ()对数；其中最后一个等式来自例 1]，该例指出 $\overline{H(G_5)} = \text{对数}\,5\,2$，以及定理 IV.6。

附录 B 证明依赖关系

结果之间的依赖关系示意图见图 5。

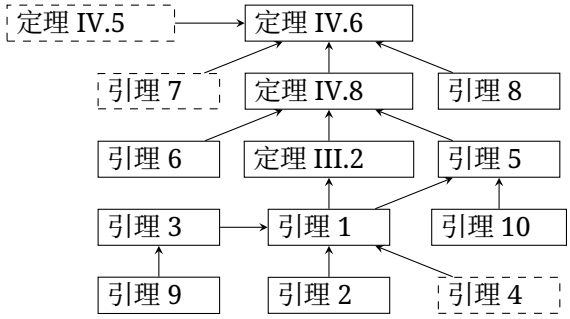

图 5。箭头从 A 指向 B 表示在证明 B 时使用了 A。文献中的结果以虚线轮廓表示。

附录 C 引理 2 的证明

(18) 两侧的概率图具有

$$\left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}} \mathcal{V}_a\right) \times \left(\bigsqcup_{b\in\mathcal{B}} \mathcal{V}_b\right) = \bigsqcup_{(a,b)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} \mathcal{V}_a \times \mathcal{V}_b \tag{37}$$

作为顶点集，其底层分布为

$$\left(\sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a)P_{V_a}\right)\left(\sum_{b\in\mathcal{B}} P_B(b)P_{V_b}\right) = \sum_{(a,b)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} P_A(a)P_B(b)P_{V_a}P_{V_b}. \tag{38}$$

现在证明这两个图具有相同的边。令 $(v_\mathcal{A}, v_\mathcal{B})$、$(v'_\mathcal{A}, v'_\mathcal{B}) \in (\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}} \mathcal{V}_a) \times (\bigsqcup_{b\in\mathcal{B}} \mathcal{V}_b)$；令 $a_*, a'_* \in \mathcal{A}$ 和 $b_*, b'_* \in \mathcal{B}$ 为满足以下条件的唯一索引

$$(v_\mathcal{A}, v_\mathcal{B}) \in \mathcal{V}_{a_*} \times \mathcal{V}_{b_*} \quad \text{and} \quad (v'_\mathcal{A}, v'_\mathcal{B}) \in \mathcal{V}_{a'_*} \times \mathcal{V}_{b'_*}. \tag{39}$$

我们有：

$$(v_\mathcal{A}, v_\mathcal{B}), (v'_\mathcal{A}, v'_\mathcal{B}) \text{ are adjacent in } \left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\right) \wedge \left(\bigsqcup_{b\in\mathcal{B}}^{P_B} G_b\right) \tag{40}$$

$$\iff v_\mathcal{A}, v'_\mathcal{A} \text{ adjacent in } \bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a \text{ and}$$

$$v_\mathcal{B}, v'_\mathcal{B} \text{ adjacent in } \bigsqcup_{b\in\mathcal{B}}^{P_B} G_b \tag{41}$$

$$\iff a_* = a'_* \text{ 和 } v_\mathcal{A}v'_\mathcal{A} \in \mathcal{E}_{a_*} \text{ 和 } b_* = b'_* \text{ 和 } v_\mathcal{B}v'_\mathcal{B} \in \mathcal{E}_{b_*} \tag{42}$$

$$\iff (a_*, b_*) = (a'_*, b'_*) \text{ and}$$

$$(v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{B}}), (v'_{\mathcal{A}}, v'_{\mathcal{B}}) \text{ are adjacent in } G_{a_*} \wedge G_{b_*} \tag{43}$$

$$\iff (v_{\mathcal{A}}, v_{\mathcal{B}}), (v'_{\mathcal{A}}, v'_{\mathcal{B}}) \text{ are adjacent in } \bigsqcup_{(a,b)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}}^{P_A P_B} G_a \wedge G_b. \tag{44}$$

APPENDIX D
PROOF OF LEMMA 3

A. 预备结果

在引理 9 中，我们给出了诱导子图 $G[\mathcal{S}]$ 的着色熵的上下界，这些界基于整个图 G 的着色熵以及概率$P_V(\mathcal{S})$。核心思想是，如果 $P_V(\mathcal{S})$ 接近 1，且 $H_\chi(G)$ 很大，那么 $H_\chi(G[\mathcal{S}])$ 就接近 $H_\chi(G)$。引理 9 的证明见附录 I

引理 9 设 $G=(\mathcal{V},\mathcal{E},P_V)$ 和 $\mathcal{S}\subset\mathcal{V}$，则

$$H_\chi(G) - 1 - (1-P_V(\mathcal{S}))\log|\mathcal{V}| \le H_\chi(G[\mathcal{S}]) \le \frac{H_\chi(G)}{P_V(\mathcal{S})}. \tag{45}$$

注 D.1 $H_\chi(G[\mathcal{S}])$ 可能大于 $H_\chi(G)$，即使 $G[\mathcal{S}]$ 的顶点数更少且继承了 G 的结构。这是因为 $G[\mathcal{S}]$ 的顶点上的归一化分布 $P_V/P_V(\mathcal{S})$ 赋予 $\mathcal{S}$ 中的顶点更大的权重。例如，考虑

$$G = \big(N_5, \mathrm{Unif}(\{1,...,5\})\big) \overset{(1-\epsilon,\epsilon)}{\sqcup} \big(K_5, \mathrm{Unif}(\{1,...,5\})\big),$$

其中 $\mathcal{S}$ 是 G 中连通分量 K_5 的顶点。于是 $H_\chi(G) = \epsilon \log 5$，而 $H_\chi(G[\mathcal{S}]) = \log 5$。

B. 引理 3 的主要证明

由引理 9 可知，对所有 $n\in\mathbb{N}^\star$，有：

$$\begin{aligned} &H_\chi(G^{\wedge n}) - 1 - (1-P_V^n(\mathcal{S}^n))\log|\mathcal{V}| \\ &\le H_\chi(G^{\wedge n}[\mathcal{S}^n]) \le \frac{H_\chi(G^{\wedge n})}{P_V^n(\mathcal{S}^n)}. \end{aligned} \tag{46}$$

由于 $P_V^n(\mathcal{S}^n) \to 1$，且当 $n\to\infty$ 时，$H_\chi(G^{\wedge n}) = n\overline{H}(G) + o(n)$，因此通过归一化和取极限即可立即得到所需结果。

附录 E 引理 5 的证明

A. 预备结果

引理 10 是将以下观察推广到无限序列的结果：若 $T_{\overline{a}^n} = P_A \in \Delta_n(\mathcal{A})$ 满足 $P_A = \frac{i}{n}P'_A + \frac{n-i}{n}P''_A$，其中 $P'_A\in\Delta_i(\mathcal{A})$ 且 $P''_A\in\Delta_{n-i}(\mathcal{A})$，则 $\overline{a}^n$ 可以分成两个子序列 a'^i 和 a''^{n-i}，使得 $T_{a'^i} = P'_A$ 且 $T_{a''^{n-i}} = P''_A$。证明见附录 J。

引理 10（型分裂引理）设 $(\overline{a}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}^\star}$ 是一个序列，使得当 $n\to\infty$ 时 $T_{\overline{a}^n}\to P_A\in\Delta(\mathcal{A})$，令$\beta\in$ 属于 $(0,1)$，并令 P'_A、$P''_A\in\Delta(\mathcal{A})$ 满足

$$P_A = \beta P'_A + (1-\beta)P''_A. \tag{47}$$

那么存在一个序列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}\in\{0,1\}^{\mathbb{N}^\star}$，使得两个抽取出的序列 $a' \doteq (\overline{a}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star,\, b_n=0}$ 以及 $a'' \doteq (\overline{a}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star,\, b_n=1}$ *satisfy*

$$T_{b^n} \underset{n\to\infty}{\to} (\beta, 1-\beta), \tag{48}$$

$$T_{a'^n} \underset{n\to\infty}{\to} P'_A, \qquad T_{a''^n} \underset{n\to\infty}{\to} P''_A. \tag{49}$$

B. 引理 5 的主要证明

（η 利普希茨）我们先证明 η 是利普希茨的。对于所有 P_A，$P'_A\in\Delta(\mathcal{A})$，我们需要对量 $|\eta(P_A) - \eta(P'_A)|$ 给出界；根据引理 1，这等价于对下式给出界

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left| H_\chi\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge nT_{\overline{a}^n}(a)}\right) - H_\chi\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge nT_{\overline{a}'^n}(a)}\right)\right| \tag{50}$$

其中，当 $n\to\infty$ 时，$(T_{\overline{a}^n}, T_{\overline{a}'^n}) \to (P_A, P'_A)$。

固定 $n\in\mathbb{N}^\star$，我们假设 (50) 中 $|\cdot|$ 内的量为正；另一种情况可利用角色的对称性，通过相同的论证处理。我们有

$$H_\chi\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge nT_{\overline{a}^n}(a)}\right) - H_\chi\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge nT_{\overline{a}'^n}(a)}\right) \tag{51}$$

$$\le H_\chi\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge nT_{\overline{a}^n}(a)}\right) - H_\chi\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge n\min(T_{\overline{a}^n}(a), T_{\overline{a}'^n}(a))}\right) \tag{52}$$

$$= H_\chi\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge n\min(T_{\overline{a}^n}(a), T_{\overline{a}'^n}(a))} \bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge n|T_{\overline{a}^n}(a) - T_{\overline{a}'^n}(a)|_+}\right) - H_\chi\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge n\min(T_{\overline{a}^n}(a), T_{\overline{a}'^n}(a))}\right) \tag{53}$$

$$\le H_\chi\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge n|T_{\overline{a}^n}(a) - T_{\overline{a}'^n}(a)|_+}\right) \tag{54}$$

$$\le \log\Big(\max_a|\mathcal{V}_a|\Big)\sum_{a\in\mathcal{A}} n|T_{\overline{a}^n}(a) - T_{\overline{a}'^n}(a)|_+ \tag{55}$$

$$\le n\log\Big(\max_a|\mathcal{V}_a|\Big)\|T_{\overline{a}^n} - T_{\overline{a}'^n}\|_1, \tag{56}$$

其中 $|\cdot|_+ = \max(\cdot, 0)$，且 $\|T_{\overline{a}^n} - T_{\overline{a}'^n}\|_1 = \sum_{a\in\mathcal{A}}|T_{\overline{a}^n}(a) - T_{\overline{a}'^n}(a)|$；(52) 由第二个积中项的删去得到，因为对于所有概率图 G, G'，$H_\chi(G\wedge G') \ge H_\chi(G)$；(53) 是对第一个积中各项的重新排列，因为对于所有实数 s,t，$\min(s,t) + \max(s-t, 0) = s$；(54) 来自 H_χ 的次可加性；(55) 由对所有 $a\in\mathcal{A}$，$H_\chi(G_a) \le \log\max_{a'}|\mathcal{V}_{a'}|$ 得出；(56) 则由对所有 $a\in\mathcal{A}$，$|T_{\overline{a}^n}(a) - T_{\overline{a}'^n}(a)|_+ \le |T_{\overline{a}^n}(a) - T_{\overline{a}'^n}(a)|$ 得出。

经过归一化并取极限，可得

$$|\eta(P_A) - \eta(P'_A)| \le \lim_{n\to\infty}\log\Big(\max_a|\mathcal{V}_a|\Big)\cdot\|T_{\overline{a}^n} - T_{\overline{a}'^n}\|_1 \tag{57}$$

$$= \log\Big(\max_a|\mathcal{V}_a|\Big)\cdot\|P_A - P'_A\|_1. \tag{58}$$

因此， η 是（$\log \max_a |\mathcal{V}_a|$）-利普希茨的。

（η凸）现在我们来证明 η 是凸的。设 P'_A、$P''_A \in \Delta$（$\mathcal{A}$）以及 $\beta \in$（0, 1），由引理 1 可得

$$\eta\big(\beta P'_A + (1-\beta)P''_A\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\chi\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge n T_{\overline{a}^n}(a)}\right), \tag{59}$$

其中，当 $n \to \infty$时， $T_{\overline{a}^n} \to \beta P'_A + (1-\beta)P''_A$。根据引理 10，存在$(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^\star}$，使得将$(\overline{a}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ 分解为两个子序列 $a' \doteq (\overline{a}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star,\ b_n=0}$ 和 $a'' \doteq (\overline{a}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star,\ b_n=1}$ satisfies

$$T_{b^n} \underset{n\to\infty}{\to} (\beta, 1-\beta), \tag{60}$$

$$T_{a'^n} \underset{n\to\infty}{\to} P'_A, \qquad T_{a''^n} \underset{n\to\infty}{\to} P''_A. \tag{61}$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}^\star$，令 $\Xi(n) \doteq nT_{b^n}(0)$，我们有

$$\eta\big(\beta P'_A + (1-\beta)P''_A\big) \tag{62}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\chi\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge \Xi(n) T_{a'^{\Xi(n)}}(a) + (n-\Xi(n)) T_{a''^{n-\Xi(n)}}(a)}\right) \tag{63}$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{\Xi(n)}{n} \frac{1}{\Xi(n)} H_\chi\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge \Xi(n) T_{a'^{\Xi(n)}}(a)}\right) \tag{64}$$

$$+ \frac{n-\Xi(n)}{n} \frac{1}{n-\Xi(n)} H_\chi\left(\bigwedge_{a\in\mathcal{A}} G_a^{\wedge (n-\Xi(n)) T_{a''^{n-\Xi(n)}}(a)}\right) \tag{65}$$

$$= \beta\eta(P'_A) + (1-\beta)\eta(P''_A); \tag{66}$$

其中，(63)由(59)得到；(65)由 H_χ的次可加性推出；(66)由(60)、(61)和引理 1 得到。由于(66)对所有 P'_A、$P''_A \in \Delta(\mathcal{A})$和 $\beta \in (0,1)$均成立，因此 η 是凸的。

Appendix F
Proof of Lemma 6

容易观察到

$$\exists P_A \in \operatorname{int}(\Delta(\mathcal{A})),\ \gamma(P_A) = \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a)\gamma(\mathbb{1}_a) \tag{67}$$

$$\Longleftarrow\ \forall P_A \in \Delta(\mathcal{A}),\ \gamma(P_A) = \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a)\gamma(\mathbb{1}_a). \tag{68}$$

现在证明 (67) $\Rightarrow$(68)。设 $P_A^* \in$ int $\Delta(\mathcal{A})$，使得$\gamma(P_A^*) = \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A^*(a)\gamma(\mathbb{1}_a)$。设 $m\colon \Delta(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$为线性的，使得 $m(P_A^*) = \gamma(P_A^*)$，且 $\forall P_A \in \Delta(\mathcal{A})$ $m(P_A) \le \gamma(P_A)$。于是

$$0 = \gamma(P_A^*) - m(P_A^*) = \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A^*(a)\big(\gamma(\mathbb{1}_a) - m(\mathbb{1}_a)\big); \tag{69}$$

因此，对于所有 $a \in \mathcal{A}$，有 $\gamma(\mathbb{1}_a) = m(\mathbb{1}_a)$，因为 $\gamma - m \ge 0$且对于所有 $a \in \mathcal{A}$，$P_A^*(a) > 0$。对于所有 $P_A \in \Delta(\mathcal{A})$，我们有

$$f(P_A) \le \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a)\gamma(\mathbb{1}_a) \tag{70}$$

$$= \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a) m(\mathbb{1}_a) = m(P_A), \tag{71}$$

因此， $\gamma = m$ 且 γ 是线性的。

Appendix G
Proof of Lemma 7

设 $G_a = (\mathcal{V}_a, \mathcal{E}_a, P_{V_a})$，且 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, P_V)$，使得 $G = \bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a$。设 A为服从分布 P_A的随机变量，满足 $V = V_A$，即 $P_{V|A=a} = P_{V_a}$。

可达性

对于所有 $a \in \mathcal{A}$，令 W_a^*为一个极小化者：

$$\min_{V_a \in W_a \in \Gamma(G_a)} I(V_a; W_a). \tag{72}$$

令 W^* 为按如下方式定义的随机变量：对于所有$\mathcal{S} \in \Gamma(G)$， $a \in \mathcal{A}$ 和 $v_a \in \mathcal{V}_a$，

$$P_{W^*|A=a,V=v_a}(\mathcal{S}) \doteq P_{W_a^*|V_a=v_a}(\mathcal{S}_a) \prod_{\substack{a'\in\mathcal{A}\\ a'\neq a}} P_{W_{a'}^*}(\mathcal{S}_{a'}), \tag{73}$$

其中， $\mathcal{S}$ 可唯一分解为 $\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}} \mathcal{S}_a$，且对所有 $a \in \mathcal{A}$，都有 $\mathcal{S}_a \in \Gamma(G_a)$。随机变量 W^* 的取值属于 $\Gamma(G)$，因此

$$P_{W^*}(\mathcal{S}) > 0 \Longrightarrow \forall a \in \mathcal{A},\ P_{W_a^*}(\mathcal{S}_a) > 0. \tag{74}$$

关于$(A = a)$的条件分布写为：

$$P_{W^*|A=a}(\mathcal{S}) = \sum_{v_a\in\mathcal{V}_a} P_{V_a}(v_a) P_{W^*|A=a,V=v_a}(\mathcal{S}) \tag{75}$$

$$= \sum_{v_a\in\mathcal{V}_a} P_{V_a}(v_a) P_{W_a^*|V_a=v_a}(\mathcal{S}_a) \prod_{\substack{a'\in\mathcal{A}\\ a'\neq a}} P_{W_{a'}^*}(\mathcal{S}_{a'}) \tag{76}$$

$$= \prod_{a'\in\mathcal{A}} P_{W_{a'}^*}(\mathcal{S}_{a'}). \tag{77}$$

由此可知，随机变量 W^* 与 A独立，因为表达式 (77) 不依赖于 a。注意，(73) 中定义的 P_{W^*}是一个概率分布，因为

$$\sum_{\mathcal{S}\in\Gamma(G)} P_{W^*}(\mathcal{S}) = \sum_{\mathcal{S}\in\Gamma(G)} \prod_{a'\in\mathcal{A}} P_{W_{a'}^*}(\mathcal{S}_{a'}) \tag{78}$$

$$= \sum_{(\mathcal{S}_{a'})_{a'\in\mathcal{A}} \in \prod_{a'\in\mathcal{A}} \Gamma(G_{a'})} \prod_{a'\in\mathcal{A}} P_{W_{a'}^*}(\mathcal{S}_{a'}) \tag{79}$$

$$= 1, \tag{80}$$

其中，(78) 由 (77) 得出；(79) 根据 $\Gamma(G) = \big\{\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}} \mathcal{S}_a \,\big|\, \forall a \in \mathcal{A}, \mathcal{S}_a \in \Gamma(G_a)\big\}$得出；而 (80) 成立，是因为对所有 $a \in \mathcal{A}$， W_a^*的取值都属于 $\Gamma(G_a)$。

现在，我们来证明 $V \in W^*$ 以概率 1 成立。对于所有 $a \in \mathcal{A}$ 和 $v_a \in \mathcal{V}_a$，

$$\{\mathcal{S} \cap \mathcal{V}_a \mid \mathcal{S} \in \operatorname{supp} P_{W^*|V=v_a}\} = \operatorname{supp} P_{W_a^*|V_a=v_a}; \tag{81}$$

其中 supp 表示概率分布的支撑集。由于 $V_a \in W_a^*$ 以概率 1 成立，中的所有集合

supp $P_{W_a^*|V_a=v_a}$都包含 v_a，因此 supp $P_{W^*|V=v_a}$中的所有集合也都包含 v_a：$V \in W^*$ 以概率 1 成立。

现在让我们结合关于 W^* 的结果：

$$
\begin{aligned}
H_\kappa(G) &\le I(V;W^*) && (82)\\
&= I(V,A;W^*) && (83)\\
&= I(A;W^*) + \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a) I(V;W^*|A=a) && (84)\\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a) I(V_a;W_a^*) && (85)\\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a) H_\kappa(G_a); && (86)
\end{aligned}
$$

其中，(82) 成立是因为 W^* 以概率 1 取值于 $\Gamma(G)$ 和 $V \in W^*$；(83) 成立是因为 A 是 V 的确定性函数；(84) 来自分解 $I(V,A;W) = I(V;W|A) + I(A;W)$；(85) 源于 A 和 W^* 的独立性；(86) 来自 W_a^* 使 (72) 取到最小值这一事实。

逆定理

$$
\begin{aligned}
H_\kappa\left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\right) &= \min_{V\in W\in\Gamma(G)} I(V,A;W) && (87)\\
&\ge \min_{V\in W\in\Gamma(G)} \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a) I(V;W|A=a) && (88)\\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a) \min_{V\in W\in\Gamma(G)} I(V;W|A=a) && (89)\\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a) \min_{V_a\in W\in\Gamma(G_a)} I(V_a;W) && (90)\\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} P_A(a) H_\kappa(G_a); && (91)
\end{aligned}
$$

其中，(87) 成立是因为 A 是 V 的确定性函数；(88) 源于分解 $I(V,A;W) = I(V;W|A) + I(A;W)$；(90) 成立是因为 $V = V_A$。

附录 H 引理 8 的证明

($\Longrightarrow$) 设 $G = \bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a$ 是一个完美概率图。设 $a' \in \mathcal{A}$ $\mathcal{S}_{a'} \subset \mathcal{V}_{a'}$ $\chi\left(\left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\right)[\mathcal{S}_{a'}]\right) =$ 和。由 $\omega\left(\left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\right)[\mathcal{S}_{a'}]\right)$ G 于是完美的，因此我们有，且 $\chi(G_{a'}[\mathcal{S}_{a'}]) = \omega(G_{a'}[\mathcal{S}_{a'}])$，这是因为 $\left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\right)[\mathcal{S}_{a'}] = G_{a'}[\mathcal{S}_{a'}]$。因此，所有图 $(G_a)_{a\in\mathcal{A}}$ 都是完美的。

($\Longleftarrow$) 反过来，假设对于所有 $a \in \mathcal{A}$，$G_a = (\mathcal{V}_a, \mathcal{E}_a, P_{V_a})$ 都是完美的。那么对于所有 $\mathcal{S} \subset \bigsqcup_{a\in\mathcal{A}} \mathcal{V}_a$，$\mathcal{S}$，都可以写成 $\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}} \mathcal{S}_a$，其中 $\mathcal{S}_a \subset \mathcal{V}_a$ 对所有 $a \in \mathcal{A}$ 都成立，并且对于所有 $P_A \in \Delta$，我们有 $(\mathcal{A})$：

$$
\begin{aligned}
\chi\left(\left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\right)[\mathcal{S}]\right) &= \chi\left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a[\mathcal{S}_a]\right) && (92)\\
&= \max_{a\in\mathcal{A}} \chi(G_a[\mathcal{S}_a]) && (93)\\
&= \max_{a\in\mathcal{A}} \omega(G_a[\mathcal{S}_a]), && (94)
\end{aligned}
$$

类似地，$\omega\left(\left(\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a\right)[\mathcal{S}]\right) = \max_{a\in\mathcal{A}} \omega(G_a[\mathcal{S}_a])$。因此 $\bigsqcup_{a\in\mathcal{A}}^{P_A} G_a$ 也是完美的。

附录 I 引理 9 的证明

令 $c^*\colon \mathcal{V} \to \mathcal{C}$ 和 $c^*_{\mathcal{S}}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ 分别为G 和 $G[\mathcal{S}]$的最优着色。考虑由 $c(v) = c^*_{\mathcal{S}}$ if $v \in \mathcal{S}$, $c(v) = v$ otherwise. 定义的 G 的着色 $c\colon \mathcal{V} \to \mathcal{C} \sqcup \mathcal{V}$。

（下界）一方面，我们有

$$
\begin{aligned}
H_\chi(G) &\le H(c(V), \mathbb{1}_{V\in\mathcal{S}}) && (95)\\
&= H(\mathbb{1}_{V\in\mathcal{S}}) + P_V(\mathcal{S}) H(c(V)|V\in\mathcal{S})\\
&\quad + (1-P_V(\mathcal{S})) H(c(V)|V\notin\mathcal{S}) && (96)\\
&\le 1 + H(c^*_{\mathcal{S}}(V)|V\in\mathcal{S}) + (1-P_V(\mathcal{S}))\log|\mathcal{V}| && (97)\\
&= H_\chi(G[\mathcal{S}]) + 1 + (1-P_V(\mathcal{S}))\log|\mathcal{V}|; && (98)
\end{aligned}
$$

其中，(95) 源于 c 是 G的一个着色；(96) 是利用条件熵进行的分解；(97) 源于 $c\colon c|_{\mathcal{S}} = c^*_{\mathcal{S}}$的构造；(98) 则由 $c^*_{\mathcal{S}}$ 作为 $G[\mathcal{S}]$的一种着色的最优性得出。

（上界）另一方面，

$$
\begin{aligned}
&H_\chi(G[\mathcal{S}])\\
&\le H(c^*(V)|V\in\mathcal{S}) && (99)\\
&= \frac{1}{P_V(\mathcal{S})}\Big(H(c^*(V)|\mathbb{1}_{V\in\mathcal{S}}) - (1-P_V(\mathcal{S}))H(c^*(V)|V\notin\mathcal{S})\Big) && (100)\\
&\le \frac{H(c^*(V))}{P_V(\mathcal{S})} = \frac{H_\chi(G)}{P_V(\mathcal{S})} && (101)
\end{aligned}
$$

其中，(99) 源于 c^* 对 $G[\mathcal{S}]$ 诱导出一种着色；(100) 是利用条件熵进行的分解；(101) 则是消去负项并利用 c^* 的最优性所得。

附录 J 引理 10 的证明

设 $(\overline{a}_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ 是一个序列，使得当 $n \to \infty$ 时，$T_{\overline{a}^n} \to P_A = \beta P'_A + (1-\beta)P''_A$。

考虑由独立伯努利随机变量组成的序列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}^*$，

$$
\Pr(B_n = 0) = \frac{\beta P'_A(\overline{a}_n)}{P_A(\overline{a}_n)}. \tag{102}
$$

根据强大数定律，

$$
\Pr\Big(T_{B^n,\overline{a}^n} \underset{n\to\infty}{\to} (\beta P'_A, (1-\beta)P''_A)\Big) = 1. \tag{103}
$$

因此，至少存在一个实现 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$，使得 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 满足 $T_{b^n,\ \overline{a}^n}$ 收敛到 $(\beta P'_A,\ (1-\beta)P''_A)$。边缘型和条件类型的收敛性给出

$$
\begin{aligned}
T_{b^n} &\underset{n\to\infty}{\to} (\beta, 1-\beta), && (104)\\
T_{a'^n} &\underset{n\to\infty}{\to} P'_A, \qquad T_{a''^n} \underset{n\to\infty}{\to} P''_A, && (105)
\end{aligned}
$$

其中，$a' \doteq (\overline{a}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star,\ \underset{b_n=0}{}}$ 以及 $a'' \doteq (\overline{a}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star,\ \underset{b_n=1}{}}$ 是提取出的序列。