arXiv:2305.01460v1 [math.NT] 2 May 2023

# $p$进赋值超椭圆 $\lambda$ 函数的推广

YAACOV KOPELIOVICH

Abstract. 我们将超椭圆穆姆福德曲线的分支点交比表示为在 $p$ 进周期矩阵处取值的 $p$ 进θ函数之商

## 1. introduction引言

[1] 本文将复数情形下众所周知的超椭圆曲线的 $\lambda$ 函数[FK980] 推广到 $p$ 进情形。也就是说，给定一条亏格为 $g$ 、方程如下的 $p$进穆姆福德超椭圆曲线:

$$y^2 = x(x-1)\prod_{i=1}^{2g-1}(x-\lambda_i) \tag{1.1}$$

我们推导出公式，将超椭圆曲线 $\lambda_i$ 的分支点（更确切地说，是它们的交比）表示为 $p$-进 $\lambda$ ，即 $p$- 进 θ 函数之商。提出这类公式是继 [T] 的论文之后自然而然的问题。在该论文中，作者计算了某些素数 $p$ 下模曲线 $p$-进周期 $X_0(p)$，此时 $X_0(p)$ 的亏格为 2。周期的计算涉及以下 3 个步骤:

(1) 作者使用 $p$ 进 θ函数，得到 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的显式公式。(2) 他利用这些公式，将 $\lambda_i$ 表示为 $p-$ 进周期矩阵元素的无穷级数。(3) 他对这些级数求逆，得到以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. 为自变量的周期表达式。(4) 他将这些结果用于验证这些 $X_0(p)$ 的异常零点猜想。

我们着重研究第一部分，并针对任意 $g$ 得到 $\lambda_1, \ldots \lambda_{2g-1}$ 的公式，将 [T] 中得到的公式推广到任意亏格。 [T] 中这一部分的推导，遵循了对相关树及其基本域上基本 $p$-进群作用的详细分析；而我们的分析则采用经典方法，该方法已在 [FK980] 和 [M2] 中得到体现。只要知道某些除子是非特殊的，这种方法就能直接写出参与其中的 θ函数之商。在超椭圆情形（以及更一般的循环覆盖情形）下，我们可以完整刻画支撑在覆盖分支点上的这些非特殊除子。因此，剩下的唯一任务就是计算除子像的 $p$-进特征。我们依据 [V1],[V2] 的工作完成了这一任务。

本文分为三节。第一节汇集关于穆姆福德曲线和 $p$ adic θ函数的相关事实。第二节计算雅可比簇相关特征的像，最后一节证明我们的主要定理。

[1]若非 Jeremy Teitelbaum，这篇短文便不会问世。感谢他提出这个问题，并鼓励我继续探究。

## 2. Recap on Mumford curves

本节汇集关于非阿基米德域上的超椭圆穆姆福德曲线的相关事实。关于本节所述结论的证明，请读者参阅 [GV] 和 [V1] 及其中的参考文献。设 $k$ 为一个代数闭的完备非阿基米德域。设 $s_0$、 $...s_g$是 $PGL(2,k)$ 中的二阶元素，且由它们生成的群$\Gamma_0$ 满足：

(1) $\Gamma_0$ 不连续 (2) $\Gamma_0$ 是由元素 $s_i$.生成的群的自由积

由 $\phi(s_i) = -1$ 对所有 $i$ 给出的同态 $\phi: \Gamma_0 \mapsto \{\pm 1\}$ 所诱导的核称为 Whitakker 群。$\Gamma$ 是由生成元 $s_1 s_0$、 $...s_g s_0$. 生成的自由群。我们有如下结论：

命题 2.1. 群 $\Gamma$、$\Gamma_0$ 具有相同的普通点集，记为 $\Omega$。曲线 $X = \Omega/\Gamma$ 在解析意义下同构于超椭圆曲线 $X$，而曲线 $\Omega/\Gamma_0$ 同构于 $\mathbb{P}^1(k)$。此外，映射 $\Pi^{an}: X \mapsto \mathbb{P}^1(k)$ 为： $x$ 模 $\Gamma = x$ 模 $\Gamma_0$.

证明。见 [GV] 和 [V1]。 □

我们用 $\overline{s_0}$ 表示超椭圆曲线的自同构。

我们简要回顾一下曲线的雅可比簇是如何定义的。设 $H$ 是秩为 $g+1$ 的肖特基群， $X_H = \Omega/H$ 是相应的芒福德曲线。回忆一下， $\Omega \subset \mathbb{P}^1(k)$ 是 $H$. 的普通点集合。对每个 $a, b \in \Omega$，定义：

$$u_{a,b}(z) = \prod_{h \in H} \frac{z - ha}{z - hb} \tag{2.1}$$

该乘积在 $\Omega$ 上定义了一个亚纯函数，并满足方程：$c_{a,\ b}(h) u_{a,\ b}(z) = u_{a,\ b}(hz)$。若 $b$ 不属于 $a$ 的轨道，则 $h(z)$ 的零点恰好位于 $a$ 的轨道上，极点位于 $b$ 的轨道上。若 $b = ha, h \in H$ $u_{a,\ b}$ 不依赖于 $a$，我们将分别用 $u_h$ 和 $c_h$ 表示这些映射。 $u_h$ 没有零点或极点。对于一个肖特基群，令$G_H = Hom(H, k^\star)$。由于 $H$ 是自由的，我们可以将后一个群与 $(k^\star)^{g+1}$ 识别。群 $\Lambda_H = \{c_h | h \in H\}$ 是一个秩为 $g+1.$、在 $G_H.$中离散的自由阿贝尔群。设 $D = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)$ 是 $X_H.$ 上的一个除子。映射：

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \mapsto \prod_{i=1}^n c_{a_i, b_i}$$

诱导出一个从 $J(H)$ 到商 $G_H/\Lambda_H.$ 的映射。为定义相应的雅可比映射，令 $p \in \Omega$ 定义 $t_H: X_H \mapsto G_H$，其映射为 $t(x) = c_{x,\ p}$. 这是典范$\widehat{}$嵌入，并可扩展为除子上的映射。对偶簇 $J_H$ 可表示为： $\widehat{G_H}/\widehat{\Lambda_H}$。 $\widehat{G_H} = Hom(G_H, k^\star)$ 和 $\widehat{\Lambda_H} = \left\{ d \in \widehat{G_H} | \exists \alpha \in H, d(c_\gamma) = c_\alpha(\gamma) \right\}$定义 $\Lambda_H$ 在 $\mathbb{O}^\star(G_H\} = \{f | f,$上的作用（其全纯且处处不为零）， $G_H\}$为 $f^{c_\gamma}(c) = f(c_\gamma c)$。令 $\xi \in Z^1(\Lambda_H, O^\star(G_H))$ 为一余循环，并令

$$Ł_\xi = \left\{ g | g \text{ holomorphic function on } G_H, g(c) = \xi_{c_\gamma}(c) g(c_\gamma c), \forall c_\gamma \in \Lambda_H \right\}.$$

定义 2.1。 $L(\xi)$ 中的元素称为类型为 $\xi.$的 θ函数

现在我们构造基本 θ函数。设 $p_H: \Lambda_H \times \Lambda_H$ 是一个对称双线性型，使得 $p_H^2(c_\gamma, c_\delta) = c_\gamma(\delta)$ $\forall \gamma, \delta \in H.$定义一余循环为

$$\xi_{H, c_\gamma}(c) = p_H(c_\gamma, c_\gamma) c(\gamma), c_\gamma \in \Lambda_H, c \in G_H.$$

在这种情况下， $dim(L_\xi) = 1$. 由黎曼 theta 函数生成:

$$\theta_H(c) = \sum_{c_\gamma \in \Lambda_H} \xi_{H,c_\gamma}(c). \tag{2.2}$$

该函数的除子是 $\Lambda_H$ 不变的，因此在 $J_H$. 上诱导出一个除子。这个除子在 $J_H$. 上定义了一个极化 $\Theta_H$。黎曼定理在 $p$-阿代数情形下成立。更确切地说，我们有:

定理 2.2. 黎曼消失定理

(1) 全纯函数 $\theta_H \circ t_H$ 具有一个 $H$不变的除子；将其视为 $X_H$上的除子时，其次数为 $g+1$。(2) 如果映射$\overline{t_H}$: $X_H \mapsto J_H$ 以点 $p \in \Omega$为基点，且如果 $K_H = (div(\theta \circ t_H$模 $H \in Div(X_H)$，那么 $2K_H$ 是一个典范除子。此外， $K_H$在除子的线性等价下的类不依赖于 $p$.的选择。(3) 如果 $c \in G_H$，那么 $\theta_H(c) = 0$当且仅当对某个次数为 $g$. 的正除子 $D$ ，有 $\overline{c} = \overline{t_H}(D - K_H)$。 $t_H$ 在 $c$ 处的消失阶等于 $i(D)$，即 $D$.的特殊指标。

证明。参见 [V2] 和 [GV] □

## 3. The images of the branch points in the Jacobian

我们计算分支点的显式像。假设 $s_0, ...s_g$ 是 $\Gamma_0$ 的 2 阶生成元。那么， $s_i$ 的不动点是普通点 $a_i, b_i$. 令 $\gamma_i = s_i s_0, i = 1...g$我们的目标是证明以下定理:

定理 3.1。我们有以下等式:

(1) $c_{a_0,\ b_0}(\gamma_i) = -1$; $i = 0, ...g$(2) $c^2_{a_i,\ a_0} = c^2_{b_i,\ a_0} = c_{\gamma_i}$(3) $c_{b_i a_0} = c_{b_i a_i} c_{a_i a_0}$(4) $c_{b_i a_i}(\gamma_j) = (-1)^{\delta_{ij}}, i, j \geq 1$且 $\delta_{ij}$是克罗内克δ。

证明。我们分几个阶段重现 [V2] 中的定理证明。首先证明以下引理:

引理 3.2. 假设 $\alpha \in N(\Gamma)$，则 $u_{a,\ b}(\alpha z) = c u_{\alpha^{-1}(a)\ \alpha^{-1}(b)}(z)$ $c$取决于 $a, b, \alpha$.

证明. 引理的证明：对于上述的 $\alpha$ ，我们令

$$\alpha = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

首先假设 $\det \alpha = 1$ ，则有

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$$

$$u_{a,b}(\alpha(z)) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\alpha(z) - \gamma a}{\alpha(z) - \gamma b} = \prod_{\gamma \in \Gamma} = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\frac{pz+q}{rz+s} - \gamma a}{\frac{pz+q}{rz+s} - \gamma b} = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{pz + q - rz\gamma a - s\gamma a}{pz + q - rz\gamma b - s\gamma b} \tag{3.1}$$

但是， $z - \alpha^{-1}\gamma a = z - \frac{s\gamma a - q}{-r\gamma a + p} = \frac{-r\gamma a z + pz - s\gamma a + q}{-r\gamma a + p}$ 利用最后一个等式，我们可以将乘积写为:

$$\prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{z - \alpha^{-1}\gamma a}{a - \alpha^{-1}\gamma b} \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{-\gamma a + p}{-r\gamma b + p}$$

将 $c = \prod_{\gamma \in \Gamma_1} \frac{-r\gamma a+p}{-r\gamma b+p}$ 称为.....，因为它不依赖于 $z.$。因此我们有： $\prod_{\gamma\in\Gamma} {}^{\alpha}(\frac{z\ -\gamma a}{\alpha\ z})()$ $_{-\gamma b} = c\frac{z-\alpha}{a-\alpha^{-1}\gamma b}$ 现在利用 $\alpha^{-1}\gamma\alpha \in \Gamma$ 这一事实，即可得出引理。□

根据引理，我们得到以下推论：

推论 3.3. $u_\gamma(\alpha z) = cu_{\alpha^{-1}\gamma\alpha}(z)$ 。

推论的证明 根据定义，我们可以任取 $a$ ，于是有：

$$u_{\alpha a,\gamma\alpha a}(\alpha z) = cu_{a,\alpha^{-1}\gamma\alpha a}(z) \tag{3.2}$$

由上一个等式和 $u_{\gamma}.$的定义得出该推论 □

为继续证明主定理，注意对于覆盖$p,\ p_j$ 的任意两个分歧点，我们有 $c_{p_i,\ p_j}$ 在雅可比簇中必为 2 阶元，因为我们有因子为 $2P_i - 2P_j.$ 的函数。事实上，若 $\lambda_i$、 $\lambda_j$ 是这些点的像，取函数$\frac{x-\lambda_i}{x-\lambda_j}.$。对于 $\infty$，我们可以取函数 $x - \lambda_i.$。下面证明定理的各个部分：

证明。第（1）部分的证明 首先注意到：$c_{a_0,\ b_0}(\gamma_i) = {}^{u_{a_0,\ b_0}\ (s_0 s_i \underline{a_i})\ u_{a_0,\ b_0}\ (s_0 \underline{a}_i}\ = c_{a_0,\ b_0}(s_0)$ 但由于 $s_0^2 = 1$ 我们必须有 $c_{a_0,\ b_0}^2 = 1.$ 如果 $c_{a_0,\ b_0} = 1$ 则有 $u_{a_0,\ b_0}$在 $\Gamma$ 下保持不变，并在 $X_\Gamma.$ 上诱导出一个亚纯函数。该函数恰好有一个零点和一个极点，这意味着 $g(X_\Gamma = 0$ ，矛盾。

第（4）部分的证明 前面的证明给出了一个更强的结果，即 $c_{b_i a_i}(s_i s_j) = -1, i \neq j$ 我们立即得到 $c_{b_i,\ a_i}(s_0 s_i) = -1$ 如果 $i \neq j$ 我们利用 $s_i^2 = 1$这一事实，从而 $s_0 s_j = s_0 s_1 s_1 s_j$ 因此：$c_{b_i,\ a_i}(s_0 s_j) = c_{b_i,\ a_i}(s_0 s_i s_i s_j) = c_{b_i,\ a_i}(s_0 s_i) c_{b_i,\ a_i}(s_0 s_j) = (-1) \times (-1) = 1$ □

第（2）部分的证明 根据定义，我们有：

$$c_{a_i,a_0} = \frac{u_\gamma(a_i)^2}{c_\gamma(a_0)^2} = \frac{u_\gamma(a_i)u_\gamma(s_i^{-1}a_i)}{u_\gamma(s_0^{-1}a_0)} = \frac{u_\gamma(s_0^{-1}\gamma_i)}{u_\gamma(s_0^{-1}a_0)}\frac{u_\gamma(a_i)}{u_\gamma(a_0)} \tag{3.3}$$

根据 $c_\gamma$ 的定义，我们将最后一个表达式改写为：

$$c_\gamma(s_0^{-1}\gamma_i^{-1}s_0^{-1})\frac{u_\gamma(a_i)u_{s_0^{-1}\gamma s_0}(a_i)}{u_\gamma(a_0)u_{s_0^{-1}\gamma s_0}(a_0)} = c_\gamma(\gamma_i)c_{a_i,a_0}(s_0^{-1}\gamma s_0^{-1}\gamma_0^{-1}) \tag{3.4}$$

但是 $s_0^{-1}\gamma s_0^{-1}\gamma_0^{-1} = 1$ ，并且由于 $c_\gamma(\delta) = c_\delta(\gamma)$，我们完成了第2部分的证明 □

我们通过按照 [V2]计算 $p$ 进情形下的黎曼常数，结束本节。选择一个极化，使得 $p_\Gamma(c_{\gamma_i,\ c_{\gamma_i)}} = c_{a_i,a}.$ 对于此极化，我们按上述方式构造θ函数：

$$\theta_\Gamma(c) = \sum_{c_\gamma \in \Lambda_\Gamma} \xi_{\Gamma,c_\gamma}(c). \tag{3.5}$$

并且$\xi_{\Gamma,c_\gamma}$ 是与我们上面定义的极化相关联的上循环。我们有以下引理，可以据此确定刚才定义的 $\theta$ 函数的零点。

引理3.4。设 $c \in G_\Gamma$ ，使得 $c^2 = c_\gamma \in \Lambda_\Gamma$ ，其中 $\gamma \notin [\Gamma,\Gamma]$，并且满足 $c(\gamma) = -p_\Gamma(c_\gamma, c_\gamma)$。则 $\theta_\Gamma(c) = 0.$

证明。3.4 的证明如下：

$$\theta_\Gamma(c) = \theta_\Gamma(c^{-1}c_\gamma) = \xi_{\Gamma,c_\gamma}^{-1}(c^{-1})\theta_\Gamma(c^{-1}) \tag{3.6}$$

但是，由于 $\theta_\Gamma(c)$ 是一个偶函数，结论即可得出。

□

我们将最后一个引理应用于 $c_{a_0,a_i}$ 和 $c_{a_0,b_i}$，得到以下推论：

推论 3.5. 在选定的极化下，$\theta_\Gamma$ 的零点是点 $b_i$ .

注意，更一般地，对于任意极化，我们有 $c_{b_i,\ a} = -c_{a_i,\ a} = \pm p_\Gamma(c_{\gamma_i}, c_{\gamma_i})$，因此 $\theta_{\Gamma,\ p}$ 的零点对应于点 $a_i, b_i$. 。我们将在下一节证明，任何形如 $a_{i_1}...a_{i_k}, b_{i_{k+1}}...b_{i_g}$ 且 $a_{i_k}, b_{i_l}$ 互异的除子都是非特殊除子。结合黎曼定理，我们得到如下结果：

定理 3.6. 在上述极化的选择下，$K_\Gamma = \sum_{i=1}^{k} b_g$. 在 $J(X)$ 中。

## 4. Uniformizations of Hyper-elliptic curves的一致化

我们计算任意给定的、支撑在分支点 $\{a_1, ...a_g, b_1...b_{g-1}\}$ 上且次数为 $g$ 的除子 $\zeta$ 的消失阶数。我们利用这一结果，得到交比的一致化，将其推广到复分析通常情形下的表达式。由于我们的定理不区分 $a_1$、$...a_g$、$b_1$、$...b_g$，我们将它们记为 $P_1$、$...P_{2g}$，并假设 $P_1 = x^{-1}(\infty)$ 且 $P_2 = x^{-1}(0)$。

定理 4.1. 设 $r$、$s$ 为非负整数，使得 $2s + r = g - 1$. 。那么，对任意选取的分支点 $P_{i_1}...P_{i_r}$、$P_{j_1}$、$...P_{j_s}$，都有 $i(2\sum_{k=1}^{r} P_{i_k} \sum_{l=1}^{s} P_{j_l}) = s$.

证明. 定理 4.1 的证明。设 $U = 2\sum_{k=1}^{r} P_{i_k} \sum_{l=1}^{s} P_{j_l}$. 。应用 R.R 定理：根据黎曼–罗赫定理，我们有：$i(U) = g - 1 - degU + r(U^{-1})$。在我们的情形下，有：$i(U) = r(U^{-1}) - 1$，因此只需证明 $r(U^{-1}) = s + 1$. 。除子 $U^{-1}$ 在自同构的作用下保持不变，因此我们可以将 $\mathcal{O}(U^{-1})$ 分解为直和：$\mathcal{O}(-U) = V_0(-U) \bigoplus V_1(-U)$。其中 $V_0$、$V_1$ 是特征值为 $\pm 1$. 的特征子空间。现在，若 $f \in V_1$，则 $\frac{f}{y}$ 在自同构的作用下也保持不变，因此同构于 $V_0(-U - divy)$，而 $V_0(\mathcal{O}((-U - divy)$ 是 $\mathcal{O}(-(U - divy))$ 中在超椭圆曲线自同构作用下保持不变的子空间。现在，若 $D = \sum_{a_i} P_i$，则 $a_i = 0$、$1$ $\pi$ 诱导出 $V_0((O)(-D)$ 与 $(O)(-D_0)$ 之间的同构，且 $D_0 = \sum_i a_i \pi(P_i)$，而 $P_i$ 是分支点。现在对 $\mathbb{P}^1(k)$ 应用黎曼–罗赫定理，即得结论。□

我们有以下推论

推论 4.2。设 $D = \sum_{j=1}^{k} \overline{a_{i_j}} \sum_{m=1}^{l} \overline{b_{i_m}}$, $k + l = g(X)$ $i_j, i_m \neq 0$，则 $D$ 是一个非特殊除子。

我们将利用上一节的最后一个推论，得到超椭圆曲线的一致化，从而推广 [T] 的工作。考虑集合 $1, ...2g$ 中的两列 $\mathbf{P_1}$,$\mathbf{P_2}$，它们恰好只在一个元素上不同。例如，对于亏格为 2 的曲线，我们可以选择：$\mathbf{P_1} = \{1, 2\}, \mathbf{P_2} = \{1, 3\}$. 。为简化记号，我们将 $a_i, b_i$ 记法改为 $P_i$ 记法。在这种情况下，$a_0, a_1, ...a_g$ 将用偶数下标表示，即它们对应于点 $P_0, P_2...P_{2g+2}$；而 $b_1, ...b_g$ 对应于点 $P_1, P_3, ...P_{2g+1}$. 。因此，在这种情况下，$P_0$ 是映射的基点，而 $P_3...P_{2g+1}$ 对应于 $K_{P_0}$. 。我们还要求对应于 $\mathbf{P_1}$,$\mathbf{P_2}$ 的数列不等于数列 $P_3P_5...P_{2g+1}$. 。现在定义：$\theta_{\Gamma,\mathbf{P_j}}(c) = \theta_\Gamma(c - \sum_{P_i \in \mathbf{P_j}} P_i + K_{P_0})$. $\forall P \in X$考虑映射：

$$P \mapsto \frac{\theta^2_{\Gamma,\mathbf{P_1}}(t_\Gamma(P))}{\theta^2_{\Gamma,\mathbf{P_2}}(t_\Gamma(P))} \tag{4.1}$$

根据黎曼定理，这些函数的零点和极点为：

$$\frac{2\sum_{P_i\in\mathbf{P_1}}P_i}{2\sum_{P_k\in\mathbf{P_2}}P_k}=\frac{2P_l}{2P_m}$$

且 $P_l, P_m$ 是不同于 $\mathbf{P_1}$ 和 $\mathbf{P_2}$. 的唯一点。因此我们有：$\theta^2_{\Gamma,\ \mathbf{P1}}(t_\Gamma(P))\,\theta^2_{\Gamma,\ \mathbf{P_2}}(t_\Gamma(P))$ $=C\frac{z(\ \ P\ -\lambda_l)}{z\ P}$（）$-\lambda_m$为求出常数，任选满足 $P_h\notin\mathbf{P_1}\cup\mathbf{P_2}$. 的 $P_h$，我们有：$\mathbf{P_1}$ 和 $\mathbf{P_2}$. 。因此我们有：

$$\frac{\theta^2_{\Gamma,\mathbf{P_1}}(t_\Gamma(P_h))}{\theta^2_{\Gamma,\mathbf{P_2}}(t_\Gamma(P_h))}=C\frac{\lambda_h-\lambda_l}{\lambda_h-\lambda_m}$$

因此

$$\frac{\lambda_h-\lambda_m}{\lambda_h-\lambda_l}\frac{\theta^2_{\Gamma,\mathbf{P_1}}(t_\Gamma(P_h))}{\theta^2_{\Gamma,\mathbf{P_2}}(t_\Gamma(P_h))}=C$$

因此我们得到以下定理：

定理 4.3. 对于上述任意划分 $\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}$，设 $\lambda_l,\lambda_m$ 的原像为满足 $\lambda_l\notin\mathbf{P_2}$ 和 $\lambda_m\notin\mathbf{P_1}$. 的唯一点。设 $\lambda_h,\lambda_k$ 为满足 $\lambda_h,\lambda_l\notin\mathbf{P_1}\cup\mathbf{P_2}$. 的任意点。我们有：

$$\frac{\theta^2_{\Gamma,\mathbf{P_1}}(t_\Gamma(P_m))^2}{\theta^2_{\Gamma,\mathbf{P_2}}(t_\Gamma(P_m))^2}\frac{\theta^2_{\Gamma,\mathbf{P_2}}(t_\Gamma(P_h))}{\theta^2_{\Gamma,\mathbf{P_1}}(t_\Gamma(P_h))^2}=\frac{\lambda_h-\lambda_m}{\lambda_h-\lambda_l}\frac{\lambda_k-\lambda_m}{\lambda_k-\lambda_l}\tag{4.2}$$

注意，在这种情况下，我们可以精确计算与这些划分相对应的向量。事实上，对于每个子集 P $\subset\{1,...2g+2\}$，定义 $\delta_P=\sum_{i\in\mathbf{P}}\delta_{ij}$.。我们可以通过 $c_P=\sum_{i\in P}\gamma_i$. 在 $Hom(\Gamma,K^{star})$ 中定义一个元素 $c_P$。利用 $c_P$ 的定义，我们将定理改写为：因此我们得到以下定理：

定理 4.4. 对于任意如上所述的划分 $\mathbf{P_1},\mathbf{P_2}$，令 $\lambda_l$、$\lambda_m$ 的原像为满足 $\lambda_l\notin\mathbf{P_2}$ 和 $\lambda_m\notin\mathbf{P_1}$. 的唯一点。设 $\lambda_h$、$\lambda_k$ 为满足 $\lambda_h$、$\lambda_l\notin\mathbf{P_1}\cup\mathbf{P_2}$. 的任意点。定义 $\mathbf{P_{is}}=\mathbf{P_i}\cup\lambda_s$. 。用 O 表示奇数集合 $2j+1, 1\le j\le g$，并令 $\mathrm{O}_{is}=\mathbf{P_{is}}\triangle\mathrm{O}$。（△ 是两个集合的对称差）

$$\frac{\theta_\Gamma(c_{\mathbf{O}_{1m}})^2\theta_\Gamma(c_{\mathbf{O}_{2h}})^2}{\theta_\Gamma(c_{\mathbf{O}_{2m}})^2\theta_\Gamma(c_{\mathbf{O}_{1h}})^2}=\frac{\lambda_h-\lambda_m}{\lambda_h-\lambda_l}\frac{\lambda_k-\lambda_m}{\lambda_k-\lambda_l}\tag{4.3}$$

4.1. 结论。本文将经典情形中广为人知的公式推广了，这些公式通过 θ函数表示超椭圆曲线分支点的交比。此前，这些公式已知适用于 $g=2$ [T]。我们以直接计算取代了对 $PGL_2(K)$ 作用的基本域的考察，其中 $K$ 是一个非阿基米德域；这种做法见 [V1]。原则上，我们认为这些公式可以按照 [T] 的思路，用于计算所有高亏格超椭圆模曲线的周期。值得注意的是， [V1] 计算了作为循环覆盖的穆姆福德曲线的分支点像。因此，在这种情形下也应当存在类似的公式，并可进一步推广为更一般的 Thomae 型公式。我们计划在未来的工作中继续研究。

## References

[EG06] T. Grava, V.Enolskii *Thomae type formulae for singular $Z_N$ curves* 《数学物理快报》76 (2006), 第 2-3 期, 187–21[ER08] V. Z. Enolski 和 P. Richter, *Periods of hyperelliptic integrals expressed in terms of θ-constants by means of Thomae formulae* **366** 2008 ，《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑：数学、物理与工程科学》（）第 1867 期，1005-1024。

[FZ10] H., Farkas, S.Zemel *Generalizations of Thomae's Formula for Zn Curves* 数学进展 [FK980] Farkas, H. M. 和 Kra, I., *Riemann Surfaces* Springer，纽约，1980。[G] L.Gerritzen, *On Non Archimedean Representations of Abelian Varieties*，《数学年刊》275(1972)，第323-346页[Fay973] J. D. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces*，数学讲义（柏林），第352卷，Springer，1973。[Fay979] J. D. Fay，Fay, J. D. 1979 *On the Riemann–Jacobi formula*，《哥廷根科学院学报》II. 数学物理学部 5，(1979) 61–73。[GV] L. Gerritzen,M.Van Der Put *Schottky Groups and Mumford Curves* ，《数学讲义》（柏林），第817卷，Springer 1980[ Kle886] F. Klein，*Über hyperelliptische Sigmafunctionen*，《数学年刊》27 (1886), 431–464。[Kle888] F. Klein, *Über hyperelliptische Sigmafunctionen*，《数学年刊》32 (1888), 351–380。[Kop10] Y.Kopeliovich *Thomae Formula for General Cyclic Covers of* $CP^1$ 《数学物理快报》 **94** 2010 313 333 ( )，- MP S. [ 08] Matsutani 和 E. Previato，*Jacobi inversion on strata of the Jacobian of the* $C_{rs}$ *curve*，《日本数学会杂志》60, 4, (2008), 1009-1044。[MP10] S. Matsutani 和 E. Previato，*Jacobi inversion on strata of the Jacobian of the* $C_{rs}$ *curve II*，arXiv: 1006 1090 [ ] 。数学.AG M D.Mumford *Tata Lecture on Theta Vol.II* ，Birkhäuser [ 2] 2007 [ 997] *On the Thomae formula for* $Z_N$ *curves* Nak A. Nakayashiki《数理科学研究所出版物》33 (1997) 987-1015[Nak08a] A. Nakayashiki，*Algebraic Expression of Sigma Functions of* $(n, s)$ *Curves*，arXiv:0803.2083, 2008。[KT10] Matsumoto Keiji,Terasoma Tomohide *Degenerations of triple covering and Thomae's formula*，arXiv1001.4950M, 2010[Ros 851] .. *Mém. prés.* G. Rosenhain。*l'Acad. de Sci. de France des savants* 361 455, 1851 1846《关于具有四个周期的二元函数的论述》，XI：–。该论文日期为。德文译本：H. Weber（编），Engelmann 出版社，莱比锡，1895。[T] Teitelbaum Jeremy *p-adic periods of genus two Mumford Schottky Curves*，《纯粹与应用数学杂志》385 ( 1988 117 151 ) - Tho Thomae C.J [ 870] *Beitrag zur Bestimmung* $\theta$ 0 0 *durch die Klassenmuduln algebraicher Funktio-* ( , , ...0)《纯粹与 *nen* **71** 1870 201 222 应用数学杂志》( ) -[ 1] V Vansteen G. *Note on Coverings of the Projective Line by Mumford Curves* 比利时数学学会， **38** 1983 31 38 ( ) [ 2] B辑。- V Vansteen G. *The Schottky-Jung Theorem for Mumford curves* ，《傅里叶研究所年刊》39(1989) 1-15