arXiv:2305.01472v1 [math.CO] 2 May 2023

群标号图的群顶点树状数

O-Joung Kwon 和 Xiaopan Lian

Abstract. 我们引入群标记图的顶点森林数。对于阿贝尔群 Γ， Γ-标记图是指边由 Γ中的元素标记的图。对于阿贝尔群 Γ和 $A \subseteq \Gamma$， Γ-标记图的（Γ， A）-顶点森林数是满足以下条件的最小整数 k：其顶点集可以划分为 k 个部分，且每个部分诱导出的子图都不含取值属于 A的圈。

我们证明，对于每个正整数 ω，存在一个函数 f_ω： $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$，使得如果$|\Gamma \setminus A| \leq \omega$，那么每个（$\Gamma$， A）-顶点森林数至少为 f_ω（t， d）的 Γ-标记图都包含完全图 K_n 的一个细分，其中所有分支路径的取值都属于 A，且长度至少为 d。这将一项著名结果沿多个方向加以推广：每个色数足够大的图都包含完全图 K_n 的一个细分。

1. Introduction

图的顶点森林数是 G 满足以下条件的最小整数 k：图 G 的顶点集被划分为 k 个部分，使得每个部分诱导出的子图都是森林。Chartrand、Kronk 和 Wall [2] 最早引入了这一概念，并证明平面图的顶点森林数至多为 3。显然，一个图类的色数有界，当且仅当其顶点森林数有界，因为每个森林都能划分为两个独立集。我们还可以考虑顶点森林数的一种变体，即考察具有某些特定性质的圈。例如，有向图的二色数考虑将图划分为不含有向圈的子有向图，它是顶点森林数的有向对应概念。Neumann-Lala 于 [4] 1982年引入了这一概念。

Mader [3] 证明，对于每个正整数 t，都存在一个整数 $d(t)$，使得每个平均度至少为 $d(t)$ 的图都包含 K_t的一个细分。这意味着不含 K_t-细分的图具有有界的色数和有界的顶点森林数。Aboulker 等人 [1]证明了一个有向对应结果：对于每个正整数 t，都存在一个整数 $D(t)$，使得每个二色数至少为 $D(t)$ 的有向图都包含一个由 t个顶点构成的双向完全有向图的细分。Thomassen [7] 和 Steiner [6] 推广了这些结果，证明还可以进一步得到满足某些模约束的完全图/有向图的细分。

本文将图的顶点森林数推广到群标记图。设 Γ 是一个阿贝尔群。一个 Γ-标记图 (G, γ) 是由一个图 G 和一个函数 γ: $E(G) \to \Gamma$ 组成的有序对。对于一个 Γ- 标记图 (G, γ) 以及 Γ 的一个子集 A，(Γ, A)-顶点森林数 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G, \gamma)$ 是满足以下条件的最小整数 k： G 的顶点集可以划分为 k 个部分，使得每个部分诱导出的子图都不含 γ-值属于 A 的圈，其中子图的 γ-值是该子图所有边 e 上的 $\gamma(e)$ 之和。如果 $A = \emptyset$，那么这个参数总是不超过 1。因此，我们将始终假设 $A \neq \emptyset$。在第 3 节中，我们观察到，只要 $A \neq \emptyset$，所有 Γ-标记图构成的类的 (Γ, A)-顶点森林数就无界。

由于 Γ 标记图（G， γ）的（Γ， A）顶点森林数不超过其底层图的顶点森林数 G，因此在任意顶点森林数足够大的 Γ 标记图中，都能找到 K_t 的细分

Date: 2023年5月3日。第一作者获得韩国国家研究基金会（NRF）资助的科学技术信息通信部拨款（编号：NRF-2021K2A9A2A11101617 和 RS-2023-00211670），以及基础科学研究院（IBS-R029-C1）的资助。第二作者获得国家自然科学基金委员会（编号：12161141006）的资助。

（Γ， A）顶点森林数。我们能否找到与给定群标记相关的结构？为此，我们提出以下具体问题：

- 在顶点森林数足够大的每个Γ标记图中，我们是否总能找到 K_t 的一个细分，使其中每条分支路径的 γ 值都属于 A?
- 在顶点森林数足够大的每个 Γ标记图中，我们是否总能找到一个长度足够长且 γ值属于 A 的圈?

我们的主要结果表明，当 $\Gamma \setminus A$ 是有限的时，这两个问题的答案都是肯定的。设（G, γ）是一个 Γ标记图，且 $A \subseteq \Gamma$。如果 G 中的 K_t 的一个细分满足每条分支路径的 γ值属于 A 且长度至少为 d，我们称其为 K_t 的一个（A, d）细分。如果 G 中的一个圈的 γ值属于 A 且其长度至少为 d，我们称其为（A, d）圈。

定理 1.1。 对于每个正整数 ω，都存在一个函数 $f_\omega\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$，满足以下条件。设 Γ 为阿贝尔群，$A \subseteq \Gamma$ 为满足 $|\Gamma \setminus A| \le \omega$的非空集合，并设$(G,\gamma)$为一个 Γ标记图。若$\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma) \ge f_\omega(t,d)$，则 G 包含 K_t 的一个(A,d)细分。

定理 1.2. 对于每个正整数 ω，都存在一个函数 $g_\omega\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$，满足以下条件。设 Γ 为阿贝尔群， $A \subseteq \Gamma$ 为满足 $|\Gamma \setminus A| \le \omega$的非空集合，且 (G,γ) 为一个 Γ-标号图。如果 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma) \ge g_\omega(d)$，那么 G 包含一个 (A,d)-圈。

注意，定理 1.1 并不能直接推出定理 1.2，因为我们无法保证 A 中的某些值之和仍属于 A。我们将在第 6 节证明：如果 Γ 中 2 阶元素的个数有界，那么每个 $(A,1)$-细分图 K_t 在色数足够大时都包含一个 (A,d)-圈。此外，定理 1.1 推广了一个已知结论：每个色数足够大的图都包含完全图 K_t 的一个细分。为此，我们可以取 $(\Gamma, A) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}\setminus\{0\})$，并给图中的所有边赋予标号 1。我们指出，定理 1.1 和定理 1.2 中的函数不依赖于 Γ 和 A的选择。

当Γ、 A为无限集时，我们距离刻画所有存在此类函数的对 $\Gamma \setminus A$ 尚远。有时，我们可以归结为定理 1.1 或1.2；例如，若 $\Gamma = \mathbb{Z}$ 且 A 为奇整数集，则等价地可以取（Γ， A）$=$（$\mathbb{Z}_2$，$\{1\}$），这可以看作是对偶整数取商群。下面的定理说明，对于某些 Γ 和 A，定理1.2 中的函数并不存在。

定理 1.3。令 d 和 t 为正整数。令 Γ 为阿贝尔群，令 $A \subseteq \Gamma$ 为非空集合，并满足存在一个元素 $x \in \Gamma$，其中 d 是使 $dx \in A$成立且大于2 的唯一整数。那么存在一个 Γ-标记图（G,γ），使得

- $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma) \ge t$ 并且，
- G 没有长度至少为 $d+1$ 且 γ值为 A的圈。

例如，若 $\Gamma = \mathbb{Z}$ 且 $A = \{100\}$，那么我们可以取 $x = 1$ 和 $d = 100$。由定理 1.3可知，存在一个任意大（Γ, A）顶点森林数的 Γ标号图，其中没有 γ值为 A 且长度至少为 $d+1$的圈。这意味着，不存在满足以下条件的函数 g：对于所有 $t \ge 1$，每个（Γ, A）顶点森林数至少为 $g(t)$ 的Γ标号图都包含一个 γ值为 A 且长度至少为 t 的圈。

我们给出定理 1.1的一个具体应用。设 G 是一个图， F 是 G的边集的一个子集。令 $\eta(G,F)$ 为满足以下条件的最小整数 k： G 的顶点集可以划分为 k 个部分，每个部分诱导出的子图都不含满足 $|E(C) \cap F| \equiv 1$（模 2）的圈 C。圈 C 的这一性质可以表述为一种 $\mathbb{Z}_2$标号，其中 $A = \{1\}$，F的边标记为 1，其余边标记为 0。由于 $|\Gamma \setminus A| = 1$，定理 1.1意味着，若$\eta(G,F) \ge f_1(t,1)$，则 G 包含 K_t的一个细分，其中每条分支路径都包含奇数条 F边。

本文组织如下。在第 2 节中，我们介绍一些预备概念，包括群标记图。在第 3 节中，我们证明，若 A 是一个非空集合，则所有 Γ- 标记图的（Γ， A）-顶点森林数无界。在第 4 节中，我们讨论如何找到一个

图的特定分层，它有助于构造 K_t 的细分。在第 5 节中，我们证明定理1.2 和1.3；在第 6 节中，我们证明定理1.1。

2. Preliminaries

对于整数 m，我们用 $[m]$ 表示所有不大于 m 的正整数所组成的集合。对于集合 A 和整数 m，我们用 $\binom{A}{m}$ 表示 A 的所有大小为 m 的子集所组成的集合。

本文中，除非另有说明，所有图都是没有自环和重边的无向图。设 G 为一个图。我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示 G 的顶点集和边集。对于 G 中由 A 构成的集合，设 $G[A]$ 为 G 中由 A 诱导的子图，并设 $G-A$ 为从 G 中删除 A 中的所有顶点以及与 A 中顶点关联的所有边后得到的图。若 $A=\{v\}$，则将 $G-A$ 记为 $G-v$。对于两个图 G 和 H，设 $G\cup H:=(V(G)\cup V(H)\ E(G)\cup E(H))$，以及 $G\cap H:=(V(G)\cap V(H)\ E(G)\cap E(H))$.

图 G 是图 H 的细分，如果 G 可以通过反复细分边从 H 得到。在 G 中，H 的顶点称为分支顶点；G 中端点为分支顶点且其余顶点均非分支顶点的路径称为分支路径。

设 A 和 B 是 G 中的顶点集。图 G 中的 (A,B)-路径是指一条路径，其起点为 A 中的一个顶点，终点为 B 中的一个顶点，且所有内部顶点均不属于 $A\cup B$。如果 A（或 B）是单元素集合 $\{v\}$，则可将 A（或 B）替换为 v。长度至少为 2 的 (A,A)-路径简记为 A-路径。

连通图 G 中由互不相交的顶点集组成的序列 $(L_0,L_1,\dots,L_p)$ 称为 G 中的分层，如果

- $|L_0|=1$ 和 $L_0\cup L_1\cup\cdots\cup L_p=V$（$G$），并且
- 对于每个 $i\in[p]$，L_i 中的每个顶点在 L_{i-1} 中都有一个邻点，在 $L_0\cup\cdots\cup$中则没有邻点L_{i-2}。

我们可以通过选择一个顶点 v来构造一个分层，并将 L_i 取为所有与 v的距离为i 的顶点所组成的集合。L_0 中的顶点称为（L_0，L_1，...，L_p）的起始顶点。

设 K_n 为具有 n 个顶点的完全图。对于正整数 n_1，...，n_r，令 $R(n_1,\dots,n_r)$为满足下述条件的最小整数 n：若 K_n 的边用 $[r]$中的元素着色，则 K_n 包含一个具有 n_i 个顶点的完全子图，且其所有边均被某个 $i\in[r]$对应的 i 着色。根据拉姆齐定理 [5]，$R(n_1,\dots,n_r)$的存在性得到保证。我们将 $R(n;q)$记作 $=R(n,n,\dots,n)$，其中n 出现 q 次。

2.1. 群标记图。

对于每个阿贝尔群，我们将其运算视为加法运算，并将其零元记为 0。

设 Γ 是一个阿贝尔群。设 $\Omega\subseteq\Gamma$。由 Ω 生成的 Γ 的子群记为 $\langle\Omega\rangle$。若 $\Omega=\{g\}$，则记 $\langle g\rangle$ 为 $\langle\Omega\rangle$。元素 $g\in\Gamma$ 的阶 记为 $\mathrm{ord}_\Gamma(g)$。若 Λ 是 Γ 的平凡 子群，则 $\Lambda=\Gamma$ 或 $\Lambda=\emptyset$。Γ-标记图 (G,γ) 的子图 是一个 Γ-标记图 (H,γ')，满足 H 是 G 的子图，且 γ' 是 γ 在 $E(H)$ 上的限制。稍微滥用一下记号，我们也可以用 (H,γ) 表示这个 Γ-标记图。

对于一个 Γ 标记图 $(G,\ \gamma)$ 及其子图 H，令 $\gamma(H)=\sum_{e\in E(H)}\gamma(e)$。我们称该值为 H 的 γ-值。

对于一个 Γ 标记图 $(G,\ \gamma)$ 及其子群 Λ，(Γ/Λ)-标记是 $(G,\ \gamma)$ 的诱导 Γ/Λ 标记 λ，定义为 $\lambda(e):=\gamma(e)+\Lambda$，对 G 的所有边 e 均成立。

我们称 G 中 K_t 的一个细分为 K_t 的 (A,d)-细分，如果每条分支路径在 A 中的 γ-值为 γ-值，且长度至少为 d。我们称 G 中的一个圈为 (A,d)-圈，如果其 γ-值属于 A，且长度至少为 d。

回顾一下，对于一个 Γ-标记图 (G,γ) 及其子集 A，(G,γ) 的 (Γ,A)-顶点森林数，记作 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)$，是满足以下条件的最小整数 k：$V(G)$ 可以划分为 k 个部分，并且每个部分所诱导的子图都不含 γ-值属于 A 的圈。

以下结论可直接由定义得到。

引理 2.1. 设 Γ 是一个阿贝尔群，$A\subseteq\Gamma$ 是一个非空集合。设 (G,γ) 是一个 Γ-标记图。那么，$\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)=\max\{\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G_i,\gamma): G_i \text{ 是 } G\}$的一个连通分支。

下面的引理说明，对于连通的 Γ-标记图 (G,γ)，若其具有一个分层（L_0，L_1，……，L_p），则存在一个部分 L_i，使其 (Γ,A)-顶点森林数至少为 G的一半。结合引理 2.1，我们可以在 $G[L_i]$ 中找到一个 (Γ,A)-顶点森林数较大的连通分支。这将在多个地方用到。

引理 2.2. 设 Γ 是一个阿贝尔群，$A\subseteq\Gamma$ 是一个非空集合。设 (G,γ) 是一个 Γ-标记图。若 G 是一个具有分层 $(L_0,L_1,\ldots,L_p)$的连通图，则存在 $i\in[p]$ 和 $Y\subseteq L_i$，使得

- $G[Y]$ 是 $G[L_i]$的一个连通分支，并且
- $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G[Y],\gamma)\geq\left\lceil\frac{\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)}{2}\right\rceil$。

证明。设

$$k=\left\lceil\frac{\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G,\gamma)}{2}\right\rceil.$$

这意味着 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)\in\{2k-1,2k\}$。设 (G_1,γ) 和 (G_2,γ) 分别为由奇数层和偶数层诱导的 (G,γ) 的子图。

我们声称存在 $i\in[p]$，使得 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G[L_i],\gamma)\geq k$。反设对每个 $i\in[p]$，都有 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G[L_i],\gamma)\leq k-1$。由于当$|i_1-i_2|\geq 2$时，$L_{i_1}$ 与L_{i_2} 之间没有边，因此 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G_1,\gamma)\leq k-1$ 且 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G_2,\gamma)\leq k-1$。由于我们可以为 G_1 和 G_2选取不同的颜色集合，因此 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)\leq\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G_1,\gamma)+\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G_2,\gamma)\leq 2k-2$，这与 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)\in\{2k-1,2k\}$ 的事实矛盾。

因此，存在某个 $i\in[p]$ 使得 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G[L_i],\gamma)\geq k$。根据引理 2.1，存在一个顶点集 $Y\subseteq L_i$ 使得 $G[Y]$ 是 $G[L_i]$ 的一个连通分支，并且 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G[Y],\gamma)=\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G[L_i],\gamma)\geq k$。引理得证。□

引理 2.3。设 Γ 为一个阿贝尔群，$A\subseteq\Gamma$ 为一个非空集合。设 $(G、\gamma)$ 为一个 Γ-标号图，且 $v\in V(G)$。则 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G-v、\gamma)\geq\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G、\gamma)-1$。

证明。反设结论不成立，即 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G-v,\gamma)\leq\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)-2$。通过为 v再增加一个部分，我们得到 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)\leq\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G-v,\gamma)+1\leq\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)-1$，矛盾。□

我们证明一个引理：若一个 Γ 标记图 (G,γ) 的 (Γ,A)-顶点森林数较大，则 G 中包含许多 γ 值属于 A 的点不交圈。

引理 2.4. 设 t 为正整数。设 Γ 为阿贝尔群，$A\subseteq\Gamma$ 为非空集合。设 (G,γ) 为一个 Γ 标记图。若 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)\geq 2t$，则 G 中包含 t 个点不交圈，其 γ 值属于 A。

证明. 我们对 t 使用归纳法证明。若 $t=1$，则 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)\geq 2$，且 G 包含一个 γ 值属于 A 的圈。我们假设 $t>1$。

设 C 为 G 中一个 γ 值属于 A 的最短圈，并设 $v\in V(C)$。若 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G-V(C)\ \gamma)\leq 2t-3$，则 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)\leq 2t-1$，因为 $G[v]$ 和 $G[V(C)$ 均不包含 γ 值属于 A 的圈。这与假设 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)\geq 2t$ 矛盾。因此，$\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G-V(C)\ \gamma)\geq 2t-2$。

根据归纳假设，$G-V(C)$ 包含 $(t-1)$ 个在 A 中具有 γ 值的点不交圈。因此，我们得到 t 个这样的圈以及 C。□

3. Group-labelled graphs with large (Γ, A)-chromatic number

在本节中，我们证明，如果 $A \neq \emptyset$，那么所有 Γ-标记图的集合具有无界的 (Γ, A)-顶点森林数。

引理 3.1. 设 Γ 是一个阿贝尔群，$A \subseteq \Gamma$ 是一个非空集合。对于每个正整数 t，存在一个 Γ标记图(G,γ)，使得 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma) \geq t$。

证明. 设 t 是一个正整数。

首先，考虑存在元素 $x \in \Gamma$ 和整数 $q \geq 3$ 使得$qx \in A$的情形。令 ℓ 为 $\{q \in \mathbb{N}$ 中最小的整数: $q \geq 3,\ qx \in A\}$。令 $G = K_{(\ell-1)(t-1)+1}$ 和$\gamma\colon\ E(G) \to \Gamma$，使得对于每条边 $e \in E(G)$，都有 $\gamma(e) = x$。

我们断言 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\ \gamma) \geq t$。反设 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\ \gamma) < t$，因此 G可以划分为至多 $t-1$ 个部分 $V_1,\ \ldots,\ V_s$，其中每个部分诱导出的子图都不含在 A中取值为 γ的圈。由于 G 有 $(\ell-1)(t-1)+1$ 个顶点，根据鸽巢原理，存在一个部分（记为 V_i）至少包含 ℓ 个顶点。于是 $G[V_i]$ 含有一个长度为 ℓ 的圈，并且根据构造，其 γ值为 ℓx，属于 A。这就导致矛盾。因此，$\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\ \gamma) \geq t$。

现在，我们可以假设不存在满足$\ell x \in A$的元素 $x \in \Gamma$ 与整数 $\ell \geq 3$。

由于 $A \neq \emptyset$，A中存在一个元素。令 $y \in A$。如果 $\mathrm{ord}_\Gamma(y)$ 是正整数，则存在一个整数 $\ell \geq 3$ 使得 $\ell y = y \in A$，这与假设矛盾。因此，y 具有无限阶。

现在，我们定义一个 Γ-标记图（$G,\ \gamma$），其 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\ \gamma) \geq k$ 如下。令 $G = K_{t^2}$，并令 $H_1,\ \ldots\ldots,\ H_t$ 为 G的 t 个顶点不交的诱导子图，且每个都同构于 K_t。令 $\gamma\colon\ E(G) \to \Gamma$使得

- 对于每条边 $e \in \bigcup_{i\in[t]} E(H_i)$，$\gamma(e) = y$，并且
- 对于每条边 $e \in E(K_{t^2}) \setminus \bigcup_{i\in[t]} E(H_i)$，$\gamma(e) = 0$。

假设 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma) < t$。考虑将 G划分为至多 $t-1$ 个部分，记为 $V_1,\ldots,V_s$。根据鸽巢原理，存在一个部分，记为 V_x，其中至少包含 $t+1$个顶点。由于每个H_i 恰好由 t 个顶点组成，V_x 与 $\{H_1,\ldots,H_t\}$的至少两个子图相交。此外，由于 V_x 至少有 $t+1$ 个顶点，存在 $j_1 \in [s]$，使得 H_{j_1} 在 V_x中包含两个顶点 u 和 v。令 $j_2 \in [s] \setminus \{j_1\}$，其中 H_{j_2} 包含 V_x的一个元素。令 $w \in V(H_{j_2})$。

由于 $\gamma(uvwu) = \gamma(uv) + \gamma(vw) + \gamma(wu) = y \in A$，这意味着 $G[V_x]$ 包含一个γ-值属于 A的圈，矛盾。因此，$\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma) \geq t$。□

4. Lemmas on finding a subset X with special X-paths

在本节中，我们证明，如果一个 Γ-标记图（$G,\ \gamma$）具有足够大的（$\Gamma,\ A$）-森林度，那么可以找到一个顶点集合 S，从而得到一个固定图的细分，其中分支顶点位于 S 中，且分支路径很长。此外，在推论4.3中，我们证明，如果 Λ 是 Γ 的某个子群，其中 $\Lambda \cap A = \emptyset$，那么可以得到这样的细分，使每条分支路径的$\gamma$-值都不属于 Λ。这是证明定理1.1的关键思路之一。

首先，我们先说明可以在 G 中找到一个顶点集合 X，使得 $G[X]$ 具有较大的（$\Gamma,\ A$）-森林度，并且对于 X中的任意一对顶点 x 和 y，都存在一条较长的 X-路径，其端点为 x 和 y。

引理 4.1。令 ℓ 为一个正整数。令 Γ 为一个阿贝尔群，令 $A \subseteq \Gamma$ 为一个非空集合。设（$G,\ \gamma$）为一个连通的 Γ-标记图。若$\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\ \gamma) \geq 2^\ell$，则 G 包含一个顶点集合 X，使得

- $G[X]$是连通的，
- $\mathrm{arb}^{(\Gamma,\ A)}(G[X],\gamma) \geq \mathrm{arb}^{(\Gamma,\ A)}(G,\ \gamma)\ 2^\ell$，且
- 对于 X 中任意一对不同的顶点 x 和 y，在 G 中都存在一条长度至少为 ℓ 的 X-路径，其端点分别为 x 和 y。

证明。我们断言，对于每个整数 $0 \leq j \leq \ell$，都存在一个顶点子集序列 $V(G) = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \cdots \supseteq X_j$，以及一个顶点序列 $x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}$，使得

(a) 对每个 $i \in \{0, 1, \ldots, j\}$, $G[X_i]$ 都是连通的，(b) 对每个 $i \in \{0, 1, \ldots, j-1\}$, $x_i \in X_i$，(c) 对每个 $i \in [j]$，$\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G[X_i], \gamma) \geq \mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G[X_{i-1}], \gamma)/2$，(d) 对每个 $i \in [j]$ 和每个顶点 $u \in X_i$，在 G 中存在一条 (x_{i-1}, u)- 路径 $P_{x_{i-1}, u}$，其长度至少为 1，且满足 $V(P_{x_{i-1}, u}) \cap X_i = \{u\}$ 和 $V(P_{x_{i-1}, u}) \subseteq X_{i-1}$。

注意，$(X_0 = V(G))$ 是 $j = 0$ 的一个序列。设 $V(G) = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \cdots \supseteq X_j$ 为一个顶点子集序列，且 $x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}$ 为一个顶点序列，满足前述条件 (a)–(d)，并且 j 是极大的。我们证明 $j = \ell$。

设 $j < \ell$。注意到 $G[X_j]$ 是一个具有

$$\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G[X_j], \gamma) \geq \frac{\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G, \gamma)}{2^j} \geq 2^{\ell - j}.$$

令 $x_j \in X_j$ 为任意顶点。令（L_0、L_1、.....、L_p）为 $G[X_j]$ 的一个以 x_j 为起始顶点的分层。根据引理 2.2，存在 $q \in [p]$ 和 $X_{j+1} \subseteq L_q \subseteq X_j$ 使得

- $G[X_{j+1}]$ 是 L_q 的一个连通分支，并且
- $\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G[X_{j+1}], \gamma) \geq \mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G[X_j], \gamma)/2$。

由于（L_0、L_1、.....、L_p）是 $G[X_j]$ 的一个分层，因此对于每个顶点 $u \in X_{j+1} \subseteq L_q$，都存在一条从 x_j 到 u 的长度为 q 的路径，其中恰好包含来自 L_0、.....、L_q 的每个集合各一个顶点。因此，该路径包含于 X_j 中。于是，我们得到满足 (a)–(d) 的序列 $V(G) = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \cdots \supseteq X_{j+1}$ 和 x_0、.....、x_j。这与 j 是极大的这一事实矛盾。因此，$j = \ell$。

令 $X := X_\ell$。根据这些序列的构造，我们有 $G[X]$ 是连通的，并且 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G[X], \gamma) \geq \mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)\, 2^\ell$。因此，只需证明，对于 X 中任意一对不同的顶点 x 和 y，存在一条 G 中以 x 和 y 为端点、长度至少为 ℓ 的 X-路径。

由于 $x \in X \subseteq X_1$，根据关于 $i = 1$ 的性质（d），在 G 中存在一条长度至少为 1 的 (x_0, x)-路径 $P_{x_0,x}$，使得 $V(P_{x_0,x}) \cap X_1 = \{x\}$。

由于 $y \in X = X_\ell$，根据关于 $i = \ell$ 的性质（d），在 G 中存在一条长度至少为 1 的 $(x_{\ell-1}, y)$-路径 $P_{x_{\ell-1},y}$，使得 $V(P_{x_{\ell-1},y}) \cap X_\ell = \{y\}$ 且 $V(P_{x_{\ell-1},y}) \subseteq X_{\ell-1}$。对于每个 $j \in [\ell-1]$，由于 $x_j \in X_j$，存在一条长度至少为 1 的 (x_{j-1}, x_j)-路径 P_{x_{j-1},x_j}，其中 $V(P_{x_{j-1},x_j}) \cap X_j = \{x_j\}$ 且 $V(P_{x_{j-1},x_j}) \subseteq X_{j-1}$。

注意，$\{P_{x_j,x_{j+1}} : j \in \{0, 1, \ldots, \ell-2\}\} \cup \{P_{x_{\ell-1},y}\}$ 中的所有路径两两内部点不相交。另一方面，路径 $P_{x_0,\, x}$ 与 $\{P_{x_j,x_{j+1}} : j \in [\ell-2]\} \cup \{P_{x_{\ell-1},y}\}$ 中的每条路径顶点不相交。设 Q 是 $P_{x_0,\, x} \cup P_{x_0,\, x_1}$ 中从 x_1 到 x 的最短路径。那么 $Q \cup P_{x_1,\, x_2} \cup \cdots \cup P_{x_{\ell-2},\, x_{\ell-1}} \cup P_{x_{\ell-1},\, y}$ 是 G 中的一条 X-路径，其端点为 x 和 y。它的长度至少为 ℓ，因为 $\{P_{x_j,x_{j+1}} : j \in [\ell-2]\} \cup \{Q, P_{x_{\ell-1},y}\}$ 中的每条路径长度至少为 1。□

我们递归应用引理 4.1 来找到一个子集 S，其中可以得到一个固定图的细分，使其分支顶点位于 S，且其分支路径使用不同的区域。

推论 4.2。设 ℓ 和 m 为正整数。设 Γ 为阿贝尔群，$A \subseteq \Gamma$ 为非空集合。设 (G, γ) 为一个连通的 Γ-标记图。若 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G, \gamma) \geq 2^{\ell m}$，则存在一个序列 $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_m$，其中的元素是 G 中的顶点集，使得

- 对于每个 $i \in [m]$ 以及 S_m 中的任意两个不同顶点 x 和 y，在 $G[S_m \cup (S_{i-1} \setminus S_i)]$ 中存在一条长度至少为 ℓ 的 S_m-路径，其端点为 x 和 y，并且
- 对于每个 $i \in [m]$, $G[S_i]$ 都是连通的，且 群标号图的导数$_{(\Gamma,A)}(G[S_i], \gamma) \geq$ 群标号图的导数$_{(\Gamma,A)}(G,\gamma)\, 2^{i\ell}$。

证明。我们声称，对于每个整数 $0 \leq t \leq m$，都存在一个顶点子集序列 $V(G) = S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_t$，使得

(i) 对于每个 $i \in [t]$ 以及 S_t 中任意两个不同的顶点 x 和 y，在 $G[S_t \cup (S_{i-1} \setminus S_i)]$ 中存在一条长度至少为 ℓ 的 S_t-路径，其端点为 x 和 y，并且
(ii) 对每个 $i \in [t]$，$G[S_i]$ 都是连通的，且 $\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G[S_i], \gamma) \geq \mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G, \gamma)\, 2^{i\ell}$。

注意，$(S_0 = V(G))$ 是 $t = 0$ 的一个序列。令 $V(G) = S_0 \supseteq S_1 \supseteq \cdots \supseteq S_t$ 为满足条件 (i) 和 (ii) 的顶点子集序列（如前所述），并令 t 为极大的。我们证明 $t = m$。假设 $t < m$。注意，$G[S_t]$ 是一个连通图，且

$$\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G[S_t], \gamma) \geq \frac{\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G, \gamma)}{2^{t\ell}} \geq 2^{\ell(m-t)} \geq 2^{\ell}.$$

我们应用引理 4.1 于 $G[S_t]$，并得到一个集合 $S_{t+1} \subseteq S_t$ 使得

- $G[S_{t+1}]$ 是连通的，
- $\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G[S_{t+1}], \gamma) \geq \mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G[S_t], \gamma)\, 2^{\ell} \geq \mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G, \gamma)\, 2^{(t+1)\ell}$，并且
- 对于 S_{t+1} 中任意两个不同的顶点 x 和 y，都存在一条 $G[S_t]$ 中长度至少为 ℓ 的 S_{t+1}-路径 P，其端点为 x 和 y。

我们有，序列 $V(G) = S_0 \supseteq S_1 \supseteq \cdots \supseteq S_t \supseteq S_{t+1}$ 满足条件 (i) 和 (ii)，这与 t 是极大的事实矛盾。因此，$t = m$。□

若 Λ 是 Γ 的一个子群，且 $A \cap \Lambda = \emptyset$，那么根据引理 4.1 和推论 4.2，我们可以找到一个顶点集 S，使得对于任意两个顶点 x，$y \in S$ 都存在一条 S-路径，其端点为 x 和 y，并且在 $\Gamma \setminus \Lambda$ 中具有 γ- 值，这是通过使用一条在 A 中具有 γ- 值的圈得到的。我们将其形式化为以下推论。

推论 4.3。设 ℓ 和 m 为正整数。设 Γ 为阿贝尔群，$A \subseteq \Gamma$ 为非空集合。设 (G, γ) 为一个连通的 Γ-标号图。假设存在一个由 G 中顶点集构成的序列 $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_m$，使得

(i) 对于每个 $i \in [m]$，以及 S_m 中任意两个不同的顶点 x 和 y，在 $G[S_m \cup (S_{i-1} \setminus S_i)]$ 中存在一条长度至少为 ℓ 的 S_m-路径，其端点为 x 和 y；*(ii)* (T_1, T_2) 是 S_m 的一个划分。

对于每个 $j \in [m]$，令 $L_j := S_{j-1} \setminus S_j$。则以下结论成立。

(1) 对于 T_1 中任意两个不同的顶点 x 和 y、任意满足 $|I| = 2$ 的 $I \subseteq [m]$，以及 T_2 中任意顶点 z，存在一条 (x, y)-路径 $P_{x,y}$，其长度至少为 2ℓ，且满足 $V(P_{x,y}) \subseteq \{x, y, z\} \cup (\bigcup_{i \in I} L_i)$。*(2)* 设 Λ 是 Γ 的一个非空子群，且满足 $\Lambda \cap A = \emptyset$。对于 T_1 中任意两个不同的顶点 x 和 y、任意满足 $|I| = 4$ 的 $I \subseteq [m]$，以及 $G[T_2]$ 中包含的任意一个在 A 中具有 γ-值的圈 C，存在一条 (x, y)-路径 $P_{x,y}$，其在 $\Gamma \setminus \Lambda$ 中具有 γ-值，且长度至少为 2ℓ，并满足 $V(P_{x,y}) \subseteq \{x, y\} \cup V(C) \cup (\bigcup_{i \in I} L_i)$。

证明。(1) 令 $I = \{i_1, i_2\}$。根据性质（i），存在

- 一条 (x, z)-路径 $P_{x,z}$，长度至少为 ℓ，且具有 $V(P_{x,z}) \subseteq \{x, z\} \cup L_{i_1}$，并且
- 一条 (y, z)-路径 $P_{y,z}$，长度至少为 ℓ，且具有 $V(P_{y,z}) \subseteq \{y, z\} \cup L_{i_2}$。

Then $P_{x,y} := P_{x,z} \cup P_{y,z}$ 长度至少为 2ℓ，且 $V(P_{x,y}) \subseteq \{x, y, z\} \cup (\bigcup_{i \in I} L_i)$.

(2) 反设该结论对 T_1 的某对顶点不成立，设这对顶点为 x 和 y，且存在一个 $I \subseteq [m]$，满足 $|I| = 4$，以及一个圈 C，它包含于 $G[T_2]$ 中，且其 γ-值属于 A。

设 $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$。设 u 和 v 是 C 的两个不同顶点。记 Q_1 和 Q_2 为这两条条从 u 到 v 的内部顶点不相交路径，它们位于 C 中。

由于 x，y，u，$v \in S_m$，根据性质（i），存在

- 一条 (x, u)-路径 $P_{x,u}$，其长度至少为 ℓ，且具有 $V(P_{x,u}) \subseteq \{x, u\} \cup L_{i_1}$，
- 一条 (x, v)-路径 $P_{x,v}$，其长度至少为 ℓ，且具有 $V(P_{x,v}) \subseteq \{x, v\} \cup L_{i_2}$，
- 一条 (y, u)-路径 $P_{y,u}$，其长度至少为 ℓ，且具有 $V(P_{y,u}) \subseteq \{y, u\} \cup L_{i_3}$，并且
- 一条长度至少为 ℓ、含有 $V(P_{y,v}) \subseteq \{y, v\} \cup L_{i_4}$ 的 (y, v)-路径 $P_{y,v}$。

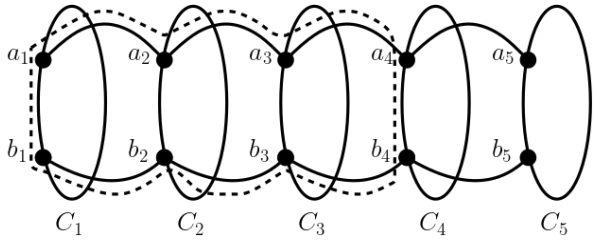


FIGURE 1. 在定理 C_i、Q_i、R_i、H_i 的证明中1.2。虚线圈表示圈 H_3。

令 $q_1 := \gamma(Q_1)$、$q_2 := \gamma(Q_2)$、$a_1 := \gamma(P_{x,u})$、$a_2 := \gamma(P_{x,v})$、$a_3 := \gamma(P_{y,u})$ 和 $a_4 := \gamma(P_{y,v})$。由于该断言在 x 和 y 处不成立，包含在 $\{x,y\} \cup V(C) \cup (\bigcup_{i\in I} L_i)$ 中的所有长度至少为 2ℓ 的 (x,y)-路径都应在 Λ 中具有 γ-值。因此，我们有如下结论：

$$a_1 + a_3 \in \Lambda,$$
$$a_2 + a_4 \in \Lambda,$$
$$a_1 + q_1 + a_4 \in \Lambda,$$
$$a_2 + q_2 + a_3 \in \Lambda.$$

因此，$\gamma(C) = q_1 + q_2 \in \Lambda \subseteq \Gamma \setminus A$，这与假设 $\gamma(C) \in A$ 矛盾。因此，存在一条 (x, y)-路径 $P_{x,y}$，其 γ 值为 $\Gamma \setminus \Lambda$，且长度至少为 2ℓ，使得 $V(P_{x,y}) \subseteq \{x,y\} \cup V(C) \cup (\bigcup_{i\in I} L_i)$。□

5. FINDING A LONG CYCLE OF γ-VALUE IN A

本节中，我们证明定理 1.2。

定理 1.2。 *对于任意正整数 ω，存在一个函数 $g_\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 满足以下条件。设 Γ 为阿贝尔群，$A \subseteq \Gamma$ 为满足 $|\Gamma \setminus A| \le \omega$ 的非空集合，并设 (G,γ) 为一个 Γ-标记图。若 $\mathbf{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma) \ge g_\omega(d)$，则 G 包含一个 (A,d)-圈。*

证明。令 $g_\omega(t) := (\omega+2)2^{t(\omega+1)+1}$。由推论 4.2 结合 $\ell = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ 和 $m = 2(\omega+1)$，存在一个序列 $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \cdots \supseteq S_m$，其元素是 G 中的顶点集，使得

(i) 对每个 $i \in [m]$ 以及 S_m 中任意两个顶点 x 和 y，在 $G[S_m \cup (S_{i-1} \setminus S_i)]$ 中存在一条长度至少为 ℓ 的 S_m-路径，其端点为 x 和 y；且 (ii) 对每个 $i \in [m]$，$G[S_i]$ 是连通的，并且 $\mathbf{arb}^{(\Gamma,A)}(G[S_i],\gamma) \ge \mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)\, 2^{i\ell}$。

注意到

$$\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G[S_m],\gamma) \ge \frac{\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G,\gamma)}{2^{m\ell}} \ge \frac{\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G,\gamma)}{2^{t(\omega+1)}} \ge 2(\omega+2).$$

根据引理 2.4，$G[S_m]$ 包含 $\omega+2$ 个点不交圈 C_1、C_2、……、$C_{\omega+2}$，它们的 γ-值均属于 A。对每个 $i \in [\omega+2]$，令 a_i 和 b_i 为 C_i 中两个不同的顶点。记 P_i 和 P_i' 为 C_i 中包含的从 a_i 到 b_i 的两条内部顶点不相交路径。对每个 $j \in [m]$，令 $L_j := S_{j-1} \setminus S_j$。于是，对不同的 i、$j \in [m]$，有 $L_i \cap L_j = \emptyset$。

对于每个 $i \in [\omega+1]$，

- 设 Q_i 是 $S_m \cup L_i$ 中一条长度至少为 ℓ 的 S_m-路径，其端点为 a_i 和 a_{i+1}，并且
- 设 R_i 是 $S_m \cup L_{i+\omega+1}$ 中一条长度至少为 ℓ 的 S_m-路径，其端点为 b_i 和 b_{i+1}。

根据性质（i），这样的路径存在。注意，$\{L_1,\dots,L_m\}$ 中的集合两两不相交。因此，$\{Q_i : i \in [\omega+1]\} \cup \{R_i : i \in [\omega+1]\}$ 中的路径两两内部点不交。

对于每个 $i \in [\omega+1]$，令

$$H_i = P_1 \cup P_{i+1} \cup \bigcup_{1\le j\le i} (Q_j \cup R_j).$$

参见图1 以示说明。注意，每个 H_i 的长度至少为 t，因为它在 $\{Q_i$ 中至少包含两条路径：$i \in [\omega+1]\} \cup \{R_i$: $i \in [\omega+1]\}$。如果存在某个 $i \in [\omega+1]$ 使得 $\gamma(H_i) \in A$，那么结论成立。因此，我们可以假设 $\gamma(H_i) \in \Gamma \setminus A$ 对每个 $i \in [\omega+1]$都成立。

由于 $|\Gamma \setminus A| \le \omega$，根据鸽巢原理，存在互不相同的整数 a，$b \in [\omega+1]$ 使得$\gamma(H_a) = \gamma(H_b) \in \Gamma \setminus A$。不失一般性，假设 $a < b$。于是，我们有

$$\gamma(P_{a+1}) = \gamma\left(P_{b+1} \cup \bigcup_{a+1\le j\le b} (Q_j \cup R_j)\right).$$

令 $C = P'_{a+1} \cup P_{b+1} \cup \bigcup_{a+1\le j\le b}(Q_j \cup R_j)$。由于 $P_{a+1} \cup P'_{a+1} = C_{a+1}$，我们有

$$\gamma(C) = \gamma(P'_{a+1}) + \gamma\left(P_{b+1} \cup \bigcup_{a+1\le j\le b} (Q_j \cup R_j)\right) = \gamma(P'_{a+1}) + \gamma(P_{a+1}) = \gamma(C_{a+1}) \in A.$$

此外 进一步，由于 $b > a$，C 的长度至少为 t。因此，C 就是所需的圈 . □

我们可以在1.2 当 $\Gamma \setminus A = \{0\}$时应用定理。这意味着，当1.2 时，存在一个与定理 $\Gamma \setminus A$ 中的类似函数 Γ是$\Gamma \setminus A$的子群。我们可以通过对$\Gamma \setminus A$取商群来简化问题。

推论5.1. 存在一个函数 g： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，满足以下条件。设 Γ 是一个阿贝尔群，且 $A \subseteq \Gamma$ 是一个非空集合，使得 $\Gamma \setminus A$ 是 Γ的非平凡子群。设$(G,\ \gamma)$ 是一个Γ标号图。如果$\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\ \gamma) \ge g(t)$，那么 G 包含一个长度至少为 t 且 γ-值位于 A中的圈。

证明. 设 g_w 为定理1.2的证明中定义的函数。令 $g(t) = g_1(t)$，对所有 $t \in \mathbb{N}$成立。令 $\Omega = \Gamma \setminus A$，并令 γ^* 为Γ/Ω)-标号 G所诱导的。注意到

$$\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G,\gamma) = \mathrm{arb}_{(\Gamma/\Omega,(\Gamma/\Omega)\setminus\{0+\Omega\})}(G,\gamma^*),$$

因为对于 G 的每个导出子图 H，$(H,\ \gamma)$ 含有一个 γ-值的圈，当且仅当 $(H,\ \gamma^*)$ 含有一个非零 γ^*-值的圈。

设 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\ \gamma) \ge g(t)$。于是 $\mathrm{arb}^{(\Gamma/\Omega,(\Gamma/\Omega)\setminus\{0+\Omega\})}(G,\ \gamma^*) \ge g(t) = g_1(t)$。因此，根据定理 1.2，$G$ 含有一个长度至少为 t 且具有非零 γ^*-值的圈。于是这个圈具有γ-值 A。□

我们证明定理1.3。

定理 1.3。设 d 和 t 为正整数。设 Γ 为一个阿贝尔群，并设 $A \subseteq \Gamma$ 使得存在一个元素 $x \in \Gamma$，其中 d 是满足 2 的唯一大于该数的整数 $dx \in A$。那么存在一个 Γ标记图 $(G,\ \gamma)$ 使得

- $\mathrm{arb}^{(\Gamma,\ A)}(G,\ \gamma) \ge t$ 以及，
- G 没有长度至少为 $d+1$ 的圈 C，其中 $\gamma(C) \in A$。

证明。我们考虑一个完全图 K_n，其中 $n = (t-1)(d-1)+1$。令 γ: $E(K_n) \to \Gamma$ 使得$\gamma(e) = x$ 对所有 $e \in E(K_n)$ 都成立。注意，根据定义，G 中每个 γ-值属于 A 的圈长度都恰好为 d。因此，G 没有 γ-值属于 A 且长度至少为 $d+1$ 的圈。

现在，我们验证 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\ \gamma) \ge t$。假设 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\ \gamma) < t$。那么，对于任意一个将 G 划分为至多 $t-1$ 个部分的顶点划分，都有一个部分至少包含 d 个顶点。根据构造，该部分包含一个长度为 d的圈，其 γ-值属于 A，这就产生了矛盾。由此我们得出 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\ \gamma) \ge t$。□

例如，若 $\Gamma = \mathbb{Z}$ 且 $A = \{100\}$，那么我们可以取 $x = 1$和 $d = 100$。根据定理 1.3，可以构造一个 Γ-标记图，使 $\mathbf{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)$ 任意大，且不存在 γ-值属于A 、长度至少为 $d+1$的圈。该定理还指出，若 $\Gamma = \mathbb{Z}$ 且 $A = \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\} \cup \{100\}$，那么可以构造一个 Γ-标记图，使 $\mathbf{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)$ 任意大，且不存在 γ-值属于 A 、长度至少为 $d+1$的圈，因为不存在负值的角色。

6. Finding an (A,d)-subdivision of K_t

本节中，我们证明定理1.1。令 K_r^t 为由 K_r 得到的多重图：对 e 中的每条边 K_r，添加 $t-1$ 条重边 e。注意，证明中不会出现多重图，但在归纳步骤中，我们将递归地找到某个构造，它是 K_r^t的一个细分，其中每条分支路径的长度至少为 d。

我们首先证明以下引理，该引理处理一种特殊情形。

引理 6.1. 设 d、t、q、ω 为满足 $q = t + \binom{t}{2}\omega$ 的正整数。设 Γ 为一个阿贝尔群，设$A \subseteq \Gamma$ 为满足 $|\Gamma \setminus A| \le \omega$ 的非空集合，并设 $g \in \Gamma \setminus A$，其中 $\langle g\rangle \cap A \neq \emptyset$。令 $(H$、$\gamma)$ 为一个Γ 标号图，它是 K_q 的一个细分，其分支路径的 γ- 值为 g，且长度至少为 d。那么 H 含有 K_t 的一个 $(A$、$d)$- 细分。

证明。 我们断言，存在一个正整数 p，使得 $p \le \omega + 1$ 且 $pg \in A$。若 g 的阶至多为 ω，则 $\langle g\rangle = \{0, g, \dots, (\mathrm{ord}_\Gamma(g) - 1)g\}$，并且根据假设 $\langle g\rangle \cap A \neq \emptyset$，这样的整数 p 存在。否则，由于 $|\Gamma \setminus A| \le \omega$， $\{g, 2g, \dots, (\omega+1)g\}$ 中的某个元素不属于 $\Gamma \setminus A$。因此，断言成立。

设 H的分支顶点为 w_1、.....、w_q，对每个 $\{a,b\} \in \binom{[q]}{2}$，设 $Q_{\{a,b\}}$ 为 H 的一条分支路径，其端点为 w_a 和 w_b。设 $\phi : \binom{[t]}{2} \to \left[\binom{t}{2}\right]$ 为一个双射。对于满足 $a < b$的每个$\{a,b\} \in \binom{[t]}{2}$，令

$$P_{\{a,b\}} := Q_{\{a,\zeta+1\}} \cup \left(\bigcup_{i \in [p-2]} Q_{\{\zeta+i,\ \zeta+i+1\}} \right) \cup Q_{\{\zeta+p-1,\ b\}},$$

其中 $\zeta = t + (\phi(\{a,b\}) - 1)(p-1)$。由于 $q = t + \binom{t}{2}\omega$, P_U 对所有 $U \in \binom{[t]}{2}$ 都有定义。

对于 $U \in \binom{[t]}{2}$, P_U 是 H 的 p 条分支路径的并，因此， $\gamma(P_U) = pg \in A$，且其长度至少为 d。此外，根据构造，对于 $\binom{[t]}{2}$ 中不同的 U_1 和 U_2， P_{U_1} 和 P_{U_2}是内部点不交的。因此，$\bigcup_{U \in \binom{[t]}{2}} P_U$ 是 K_t 的一个 (A,d)-细分。□

定理 *1.1.* 对于每个正整数 ω，存在一个函数 $f_\omega : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$，满足以下条件。设 Γ 为阿贝尔群， $A \subseteq \Gamma$ 为满足 $|\Gamma \setminus A| \le \omega$ 的非空集合，并设 (G,γ) 为一个 Γ- 标记图。如果 $\mathbf{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma) \ge f_\omega(t,d)$，那么 G 包含一个 K_t 的 (A,d)-细分。

证明。集合

$$\begin{aligned} r_{\omega+1}(t) &:= t + \binom{t}{2}(\omega^2 + \omega - 1), \\ r_{i-1}(t) &:= R(t, R(r_i(t); \omega)) \text{ for each } i \in [\omega+1], \\ c_i(t) &:= \sum_{j=0}^{i-1} \binom{r_j(t)}{2} \text{ for each } i \in [\omega+1], \text{ and} \\ f_\omega(t,d) &:= (r_0(t) + 2c_{\omega+1}(t))2^{2(d+1)c_{\omega+1}(t)}. \end{aligned}$$

显然，对每个 $i \in [\omega+1]$，都有 $r_{i-1}(t) \ge r_i(t)$。

令 (G,γ) 为一个 Γ-标记图，其 $\mathbf{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)$ 为 $\ge f_\omega(t,d)$。反设 G 不包含 K_t 的 (A,d)-细分。

由于 $\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G,\gamma) \geq f_\omega(t,d)$，由推论 4.2 取 $\ell := \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$ 和 $m := 4c_{\omega+1}(t$，存在一个由 G 中顶点集组成的序列 $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \cdots \supseteq S_m$，使得

(i) 对每个 $i \in [m]$ 以及 S_m中的任意两个不同顶点 x 和 y，在 $G[S_m \cup (S_{i-1} \setminus S_i)]$ 中存在一条长度至少为 ℓ 的 S_m-路径，其端点为 x 和 y，并且

(ii) 对每个 $i \in [m]$，$G[S_i]$ 是连通的，且 $\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G[S_i],\gamma) \geq \mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G,\gamma)/2^{i\ell}$。

F对每个 $j \in [m]$，令 $L_j := S_{j-1} \setminus S_j$。那么对于不同的 $i,j \in [m]$，有 $L_i \cap L_j = \emptyset$。

注意到

$$\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G[S_m],\gamma) \geq \frac{\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G,\gamma)}{2^{m\ell}} \geq r_0(t) + 2c_{\omega+1}(t).$$

设 $T_1 = \{v_1,\ldots,v_{r_0(t)}\}$ 是 $G[S_m]$ 中的一个 $r_0(t$顶点集合，并令 $T_2 := S_m \setminus T_1$。由于 $\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G[S_m],\gamma) \geq r_0(t) + 2c_{\omega+1}(t)$，由引理 2.3，可得

$$\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G[T_2],\gamma) \geq \mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G[S_m],\gamma) - |T_1| \geq 2c_{\omega+1}(t).$$

根据引理 2.4，$G[T_2]$ 包含 $c_{\omega+1}$ 个 γ 值为 A 的 t 点不交圈。令$C_1,\ldots,C_{c_{\omega+1}(t)}$ 为这些圈。

令 $\phi : \binom{[r_0(t}{2}) \to \left[\binom{r_0(t}{2}\right]$ 为一个双射。根据推论 4.3 (1)，对每个 $U = \{a,b\} \in \binom{[r_0(t}{2})$，存在一条长度至少为 d 的 (v_a,v_b)-路径 P_U，使得

- $V(P_U) \subseteq \{v_a,v_b\} \cup C_{\phi(U)} \cup (L_{4\phi(U)} \cup L_{4\phi(U)-1} \cup L_{4\phi(U)-2} \cup L_{4\phi(U)-3})$,

通过选取 $C_{\phi(U)}$的一个顶点。注意，$\{P_U : U \in \binom{[r_0(t}{2})\}$ 中的所有路径两两内部点不相交。令 $J := \bigcup_{U \in \binom{[r_0(t)]}{2}} P_U$。于是 J 是 $K_{r_0(t)}$ 的一个细分，其分支路径长度至少为 d。

由于 $|\Gamma \setminus A| \leq \omega$ 和 $r_0(t) = R(t, R(r_1(t);\omega))$，根据拉姆齐定理，$J$包含一个子图 J_1，使得

(1) J_1 要么是

- K_t 的一个细分，其分支路径在 A中的 γ-值为
- $K_{r_1(t)}$ 的一个细分，其分支路径的 γ-值为 g，其中某个 $g \in \Gamma \setminus A$，并且

(2) J_1 的每条分支路径都是 J的一条分支路径。

由于 G 不包含，d)- K_t的一个细分，J_1 是 $K_{r_1(t)}$ 的一个细分，其分支路径的 γ-值为 g，其中某个 $g \in \Gamma \setminus A$。若 $\langle g \rangle \cap A \neq \emptyset$，则根据引理 6.1，$G$ 包含 A，d)- K_t的一个细分，矛盾。因此，我们可以假设 $\langle g \rangle \cap A = \emptyset$。

注意，$K_{r_1(t)}$ 与 $K^1_{r_1(t)}$相同。因此，J_1 是$K^1_{r_1(t)}$ 的一个细分，其分支路径的 γ-值为 g，其中 $g \in \Gamma \setminus A$，并且 J_1 的每条分支路径都是 J的一条分支路径。因此，J_1 的每条分支路径长度至少为 d。

设 k 为最大的整数，使得 G 包含$K^k_{r_k(t)}$ 的一个细分 F，其分支顶点为 $v^*_1,\ldots,v^*_{r_k(t)}$，并且存在互不相同的元素 $a_1,\ldots,a_k \in \Gamma \setminus A$，满足

(a) F 的分支顶点包含在 T_1中，非分支顶点不属于 T_1，且每条分支路径的长度至少为 d;

(b) $V(F) \subseteq T_1 \cup \left(\bigcup_{i\in[c_k(t)]} V(C_i)\right) \cup \left(\bigcup_{i\in[4c_k(t)]} L_i\right)$; (c) 对于每个 $U = \{a,b\} \in \binom{[r_k(t}{2})$和 $j \in [k]$，F中存在唯一一条分支路径 P^j_U，其端点为 v^*_a和 v^*_b，其中 $\gamma(P^j_U) = a_j$; (d) $\langle \{a_1,\ldots,a_k\} \rangle \cap A = \emptyset$。

由于 $|\Gamma \setminus A| \leq \omega$，我们有 $k \leq \omega$。

现在，我们在 F 的每一对分支顶点之间再构造一条路径，其 γ 值不属于 $\langle \{a_1,\ldots,a_k\} \rangle$。

设 $\phi^*\colon \binom{[r_k(t)]}{2} \to \left[\binom{r_k(t)}{2}\right]$ 是一个双射。由推论 4.3 (2) 可知，对于每个 $U=\{a,b\} \in \binom{[r_k(\lceil t/2 \rceil)]}{2}$，存在一条 (v_a^*, v_b^*)-路径 P_U^*，其 γ 值属于 $\Gamma \setminus \Lambda$，且长度至少为 d，使得

$$V(P_U^*) \subseteq \{v_a^*, v_b^*\} \cup C_{c_k(t)+\phi^*(U)} \cup \left(\bigcup_{i\in[4]} L_{4c_k(t)+4\phi^*(U)-4+i} \right).$$

注意，$\{P_U^*$ 中的所有路径：$U \in \binom{[r_k(\lceil t/2 \rceil)]}{2}\}$ 两两内部点不相交。令 $J^* := \bigcup_{U\in\binom{[r_k(t)]}{2}} P_U^*$。那么，$J^*$ 是 $K_{r_k(t)}$ 的一个细分。根据构造，$V(J^*)\cap V(F) = \{v_1^*, \dots, v_{r_k(t)}^*\}$。由于 $|\Gamma \setminus A| \le \omega$ 和 $r_k(t) = R(t, R(r_{k+1}(t); \omega))$，根据拉姆齐定理，$J^*$ 包含一个子图 J_1^*，使得

(1) J_1^* 要么是
- 一个 K_t 的细分，其分支路径在 A 中取 γ 值；要么
- 一个 $K_{r_{k+1}(t)}$ 的细分，其分支路径取 γ 值 g，其中 $g \in \Gamma \setminus A$，并且

(2) J_1^* 的每条分支路径都是 J^* 的分支路径。

由于 G 不包含 K_t 的一个 (A, d)-细分，因此 J_1^* 是 $K_{r_{k+1}(t)}$ 的一个细分，其分支路径的 γ-值均为 g，其中 $g \in \Gamma \setminus A$。由于 $g \in \Gamma \setminus \Lambda$，我们有 $g \notin \langle\{a_1, \dots, a_k\}\rangle$。若 $\langle\{a_1, \dots, a_k, g\}\rangle \cap A = \emptyset$，则通过考察 $a_{k+1} = g$，$F \cup J_1^*$ 是 $K^{k+1}_{r_{k+1}(t)}$ 的一个细分，满足条件 (a)、(b)、(c)、(d)，这与 k 的极大性矛盾。因此，我们可以假设 $\langle\{a_1, \dots, a_k, g\}\rangle \cap A \neq \emptyset$。令 $a_{k+1} = g$。注意，对每个 $j \in [k+1]$，$\mathrm{ord}_\Gamma(a_j) \le \omega$；否则，$\langle a_j\rangle$ 必与 A 相交。

令 $F^* := F \cup J_1^*$。现在，我们通过证明 F^* 包含一个 A，d-细分 K_t 来完成证明。注意，F^* 是 $K^{k+1}_{r_{k+1}(t)}$ 的细分。令 $\{z_1, \dots, z_{r_{k+1}(t)}\}$ 为 F^* 的分支顶点集合。根据构造，对于每个 $U=\{a,b\} \in \binom{[r_{k+1}(\lceil t/2 \rceil)]}{2}$ 和 $j \in [k+1]$，F^* 中存在唯一一条分支路径 Q_U^j，其端点为 z_a 和 z_b，其中 $\gamma(Q_U^j) = a_j$。

令 $s \in \langle\{a_1, \dots, a_{k+1}\}\rangle \cap A$。注意，$s \neq 0$，因为 $\langle a_1\rangle \cap A \neq \emptyset$ 和 a_1 的阶至多为 ω。因此，存在整数 $p_1, \dots, p_{k+1}$，其中对于每个 $j \in [k+1]$，$p_j \le \omega$，且它们中至少有一个非零，使得

$$s = \sum_{j=1}^{k+1} p_j a_j.$$

令 $\lambda := \sum_{j=1}^{k+1} p_j$。注意，$\lambda \le (\omega+1)\omega$。

令 $\theta\colon \binom{[t]}{2} \to \left[\binom{t}{2}\right]$ 为一个双射。对于每个满足 $a<b$ 的 $U=\{a,b\} \in \binom{[t]}{2}$，令 R_U 为 F^* 中一条从 z_a 到 z_b 的路径，使得
- $V(R_U) \cap \{z_i\colon i \in [r_{k+1}(t)]\} = \{z_a, z_b\} \cup \{z_i\colon t+(\theta(U)-1)(\lambda-1)+1 \le i \le t+\theta(U)(\lambda-1)\}$，
- 对于每个 $j \in [k+1]$，R_U 恰好包含 p_j 条 γ 值为 a_j 的 F^* 分支路径。

由于 $r_{k+1}(t) \ge r_{\omega+1}(t) = t + \binom{t}{2}(\omega^2+\omega-1) \ge t + \binom{t}{2}(\lambda-1)$，我们可以为所有 $U \in \binom{[t]}{2}$ 选择这样一条路径 R_U。对于每个 $U \in \binom{[t]}{2}$，$\gamma(R_U) = \sum_{j=1}^{k+1} p_j a_j = s \in A$.。此外，根据构造，对于 $\binom{[t]}{2}$ 中不同的 U_1 和 U_2，R_{U_1} 和 R_{U_2} 内部点不交。因此，$\bigcup_{U\in\binom{[t]}{2}} R_U$ 是 K_t 的一个 (A,d)-细分，产生矛盾。□

推论 *6.2*。设 f_ω 是定理 *1.1* 中定义的函数。设 Γ 是一个阿贝尔群，$A \subseteq \Gamma$ 是一个非空集合，且 $\Gamma \setminus A$ 是 Γ 的非平凡子群。设 (G,γ) 是一个 Γ-标记图。若 $\mathbf{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma) \ge f_1(t,d)$，则 G 包含 K_t 的一个 (A,d)-细分。

证明。设 f_w 为定理 1.1 的证明中定义的函数。令 $f(t,d) = f_1(t,d)$ 对所有 $(t,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$。令 $\Omega = \Gamma \setminus A$，并令 γ^* 为 $\Gamma/$ 的诱导 (Ω)-标号 G。对于每个诱导

子图 H 的 G，(H,γ) 在 A 中有一个取值为 γ 的圈，当且仅当 (H,γ^*) 有一个取非零γ^*值的圈。这意味着

$$\mathrm{arb}_{(\Gamma,A)}(G,\gamma)=\mathrm{arb}_{(\Gamma/\Omega,(\Gamma/\Omega)\setminus\{0+\Omega\})}(G,\gamma^*).$$

假设 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(G,\gamma)\geq f_1(t,d)$。那么 $\mathrm{arb}^{(\Gamma/\Omega,(\Gamma/\Omega)\setminus\{0+\Omega\})}(G,\gamma^*)\geq f_1(t,d)$。由定理 1.1，$G$ 包含一个 $((\Gamma/\Omega)\setminus\{0+\Omega\},d)$- 细分 H，它属于 K_t。因此， H 是 K_t 的一个 (A,d)- 细分。□

现在，我们证明：如果 Γ 中 2 阶元素的个数有界，那么每个具有较大 t 的 K_t 的 $(A,1)$-细分都包含一个 (A,k)-圈。

定理 6.3。对于正整数 p 和 ω，存在一个函数 $f_{(\omega,p)}:\ \mathbb{N}\to\mathbb{R}$，满足以下条件。设 Γ 是一个阿贝尔群，且 $|\{g:\text{阶}_\Gamma(g)\leq 2\}|\leq p$。设 $A\subseteq\Gamma$ 是一个非空集合，且 $|\Gamma\setminus A|\leq\omega$。令 (G,γ) 为一个 Γ- 标记图。若 $t\geq f_{(\omega,p)}(k)$，则 G 中的每个 K_t 的 $(A,1)$- 细分都包含一个 (A,k)- 圈。

证明。令

$$\begin{aligned}\mu&:=\max\{(\omega+2)^2,2\omega+6\},\\ \beta&:=R(\mu;p),\\ r&:=R(\beta;\omega^3),\\ f_{(\omega,p)}(k)&:=(r+k)(\omega+2).\end{aligned}$$

令 F为包含在 G中的 K_t的一个$(A,\ 1)$-细分，其中 $t\geq f_{(\omega,p)}(k)$。令 $\{u_1,\dots,u_{(r+k)(\omega+2)}\}$为 F 的一组$(r+k)(\omega+2)$分支顶点。则 F包含 $\omega+2$ 个顶点不相交的 K_r的$(A,\ 1)$-细分，记为 $F_1,\ \dots,\ F_{\omega+2}$，它们的分支顶点包含在 $\{u_i$ 中：$\ i\in[r(\omega+2)]\}$。

我们声称，对于每个 $H\in\{F_1,\dots,F_{\omega+2}\}$，都有$\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(H,\ \gamma)\geq 2$，也就是说， H在 A中包含一个 γ-值的圈。反设$\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(H,\ \gamma)=1$，则导出矛盾。

令 $\{v_1,\dots,v_r\}$为 H的分支顶点集合。对于每个 $\{a,b\}\in\binom{[r]}{2}$，令 $P_{\{a,b\}}$为 H中连接 v_a与 v_b 的分支路径。则对于每个满足 $\{x,y\}\cap\{a,b\}=\emptyset$的 $\{x,y\}\in\binom{[r]}{2}$，有

$$\begin{aligned}2\gamma(P_{\{a,b\}})=&\gamma\left(P_{\{a,b\}}\cup P_{\{b,x\}}\cup P_{\{x,a\}}\right)+\gamma\left(P_{\{a,b\}}\cup P_{\{b,y\}}\cup P_{\{y,a\}}\right)\\&-\gamma\left(P_{\{y,a\}}\cup P_{\{a,x\}}\cup P_{\{x,b\}}\cup P_{\{b,y\}}\right).\end{aligned}$$

Let

$$\mathcal{S}:=\left\{s_1+s_2-s_3:s_i\in\Gamma\setminus A\text{ for each }i\in[3]\right\}.$$

于是 $2\gamma(P_U)\in\mathcal{S}$对每个 $U\in\binom{[r]}{2}$都成立。由于 $|\Gamma\setminus A|\leq\omega$，我们有 $|\mathcal{S}|\leq\omega$ [3].

由于 $r:=R(\beta;\omega^3)$，根据拉姆齐定理， H 包含一个子图 H_1，它是 K_β 的细分，其分支顶点为 $w_1,\dots,w_\beta$，并满足

- 的每条分支路径都是 H_1 的一条分支路径，并且
- $2\gamma(Q_{U_1})=2\gamma(Q_{U_2})$，对于 $\binom{[\beta]}{2}$中不同的 U_1 和 U_2。

其中，对每个 $\{a,b\}\in\binom{[\beta]}{2}$， $Q_{\{a,b\}}$ 都是 H_1 中连接 w_a 与 w_b 的分支路径。

令 $B:=\{g:\mathrm{ord}_\Gamma(g)\leq 2\}$。令 $s\in\{\gamma(P_U):\ U\in\binom{[\beta]}{2}\}$，并且对每个 $U\in\binom{[\beta]}{2}$，令 $g_U=\gamma(Q_U)-s$。注意到 $g_U\in B$，因为 $2g_U=2\gamma(Q_u)-2s=0$。由于 $\beta:=R(\mu;\ p)$，根据拉姆齐定理， H_1 包含一个子图 H_2，它是 K_μ 的细分，其分支顶点为 $z_1,\dots,z_\mu$，并满足存在一个 $g\in B$ 使得

- H_2 的每条分支路径都是 H_1 的分支路径，且其 γ值为 $s+g\in A$.

对于每个 $\{a,b\}\in\binom{[\mu]}{2}$，令 $Q^*_{\{a,b\}}$ 为 H_2 中连接 z_a 与 z_b的分支路径。

令 $q\in\{3,4,\dots,\omega+4\}$。令 $U=\{a,b\}\in\binom{[\mu]}{2}$。由于 $\mu\geq(\omega+2)^2$，，存在 $\omega+1$ 条两两内部点不交的 $(z_a,\ z_b)$-路径，记为 $R_1,\ \dots\dots,\ R_{\omega+1}$，其中每条路径恰好包含 q

H_2 的分支顶点。对于每个 $i \in [\omega+1]$，令 $C_i := Q_U^* \cup R_i$。由于 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(H,\ \gamma) = 1$，我们有 $\gamma(C_i) \in \Gamma \setminus A$，对每个 $i \in [\omega+1]$ 均成立。由于 $|\Gamma \setminus A| \le \omega$，存在 C_i 和 C_j，使得 $\gamma(C_i) = \gamma(C_j) \in \Gamma \setminus A$，其中某些互不相同的 $i,\ j \in [\omega+1]$ 满足这一条件，这意味着

$$\gamma(R_i) = \gamma(R_j).$$

注意到，$R_i \cup R_j$ 在 H_2 中构成一个圈，其中恰好包含 $2(q-1)$ 个分支顶点。因此

$$\gamma(R_i \cup R_j) = \gamma(R_i) + \gamma(R_j) = 2\gamma(R_j) = 2(q-1)(s+g) \in \Gamma \setminus A.$$

因此，我们总结得出 $\{2(q-1)(s+g)\colon\ 3 \le q \le \omega+4\} \subseteq \Gamma \setminus A$。最后，我们通过区分 Γ 中 $s+g$ 的阶来完成证明。

假设 $\mathrm{ord}_\Gamma(s+g) \ge 2(\omega+3)$。那么 $|\{2(k-1)(s+g)\colon\ 3 \le k \le \omega+4\}| = \omega+1 > \omega = |\Gamma \setminus A|$，这就产生了矛盾。因此，假设 $\mathrm{ord}_\Gamma(s+g) \le 2\omega+5$。

由于 $\mu \ge 2\omega+6$，H_2 包含一个圈 C，其中恰好包含 $(\mathrm{ord}_\Gamma(s+g)+1)$ 个分支顶点。我们有 $\gamma(C) = (\mathrm{ord}_\Gamma(s+g)+1)(s+g) = s+g \in A$，这与 $\mathrm{arb}^{(\Gamma,A)}(H,\ \gamma) = 1$ 的事实相矛盾。

令 D_1、……、$D_{\omega+2}$ 分别为 A 中包含于 F_1、……、$F_{\omega+2}$ 的 γ-值圈。对每个 $i \in [\omega+2]$，令 a_i 和 b_i 为 D_i 中两个不同的顶点。记 X_i 和 X_i' 为 C_i 中从 a_i 到 b_i 的两条内部顶点不相交路径。

令 $\ell = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$。对于每个 $i \in [\omega+1]$，

- 令 Y_i 为 F 的一条路径，其端点为 a_i 和 a_{i+1}，且恰好包含 F 的 $\ell+1$ 个分支顶点，
- 令 Z_i 为 F 的一条路径，其端点为 b_i 和 b_{i+1}，且恰好包含 F 的 $\ell+1$ 个分支顶点，
- Y_i 和 Z_i 顶点不交，且 $Y_i \cup Z_i - \{a_i, a_{i+1}, b_i, b_{i+1}\}$ 中 F 的分支顶点均包含于 $\{u_j\colon\ r(\omega+2) + (i-1)k+1 \le j \le r(\omega+2) + ik\}$。

注意，$\{Y_i\colon\ i \in [\omega+1]\} \cup \{Z_i\colon\ i \in [\omega+1]\}$ 中的路径两两内部点不相交。对于每个 $i \in [\omega+1]$，令

$$H_i = X_1 \cup X_{i+1} \cup \bigcup_{1 \le j \le i} (Y_j \cup Z_j).$$

注意，每个 H_i 的长度至少为 k，因为它包含 $\{Y_i\colon\ i \in [\omega+1]\} \cup \{Z_i\colon\ i \in [\omega+1]\}$中的至少两条路径。若存在某个 $i \in [\omega+1]$ 使得 $\gamma(H_i) \in A$，则结论成立。因此，我们可以假设对每个 $i \in [\omega+1]$，都有 $\gamma(H_i) \in \Gamma \setminus A$。

由于 $|\Gamma \setminus A| \le \omega$，根据鸽巢原理，存在互不相同的整数 $a, b \in [\omega+1]$，使得 $\gamma(H_a) = \gamma(H_b) \in \Gamma \setminus A$。不失一般性，假设 $a < b$。于是，我们有

$$\gamma(X_{a+1}) = \gamma\left(X_{b+1} \cup \bigcup_{a+1 \le j \le b} (Y_j \cup Z_j)\right).$$

设 $C = X_{a+1}' \cup X_{b+1} \cup \bigcup_{a+1 \le j \le b}(Y_j \cup Z_j)$。由于 $X_{a+1} \cup X_{a+1}' = D_{a+1}$，我们有该

$$\gamma(C) = \gamma(X_{a+1}') + \gamma\left(X_{b+1} \cup \bigcup_{a+1 \le j \le b} (Y_j \cup Z_j)\right) = \gamma(X_{a+1}') + \gamma(X_{a+1}) = \gamma(D_{a+1}) \in A.$$

此外，由于 $b > a$，C 的长度至少为 k。因此，C 就是所需的圈。 □

References

[1] P. Aboulker、N. Cohen、F. Havet、W. Lochet、P.S. Moura 和 S. Thomassé. 出度较大或二色数较大的有向图中的细分。*Electronic Journal of Combinatorics* 26 3 3 19, 2019 1，():–。

[2] G. Chartrand、H. V. Kronk 和 C. E. Wall。图的点林数。：*Israel J. Math.* 6 169 175, 1968 1–。

[3] W. Mader。图的同态性质与平均边密度。：–。*Math. Ann.* 174 265 268, 1967 1

[4] 33 3 265 270, 1982 1 V.
[5] *Proc. London Math. Soc. (2)* 30 4 264 286, 1929
Neumann-Lara。有向图的二色数。 *J. Combin. Theory Ser. B*, ( ): –。F. P. Ramsey。论形式逻辑的一个问题。, ( ): –。
[6] R. Steiner。在色数

较大的有向图中满足同余约束的细分。arXiv:220806358, 2022 年 1 月。.[7] C. Thomassen。图分解及其在细分和模

k *J. Graph* 路径系统

Theory 7 2 261 271, 1983 1
中的应用。, ( ): –。

(O-Joung Kwon) Department of Mathematics, Hanyang University, Seoul, South Korea and DiscreteMathematics Group, Institute for Basic Science (IBS), Daejeon, South Korea
(Xiaopan Lian) Center for Combinatorics and LPMC, Nankai University, Tianjin, China*Email address*: ojoungkwon@hanyang.ac.kr*Email address*: xiaopanlian@mail.nankai.edu.cn