具有相互依存估值和外部性的分配问题*

Tatiana Daddario Richard P.McLean Andrew Postlewaite†罗格斯大学 罗格斯大学 宾夕法尼亚大学

2023年3月15日

arXiv:2305.01477v1 [econ.TH] 2 May 2023

摘要

本文采用机制设计的方法，研究信息不对称的买方参与的最优分配问题。此外，将买方分配给卖方所产生的剩余，可能会受到其他分配产生的外部性的不利影响。该问题因多种因素而变得复杂。买方了解自己的估值和外部性成本，却不了解其他买方的相关信息。买方还会收到与状态相关的私人信号，因此，实施问题呈现出相互依存估值。这使得直接套用VCG机制行不通。为解决这一相互依赖问题，我们构建了一种两阶段机制。第一阶段，我们利用企业关于状态的信号之间的相关性，促使其真实报告观测信号。在买方于第一阶段诚实报告的前提下，我们随后在第二阶段采用类似VCG的机制，促使其诚实报告估值函数和外部性函数。

*感谢 Rakesh Vohra 提供的宝贵讨论。

†Postlewaite 谨此感谢美国国家科学基金会资助项目 SES-1851449 的支持。

1 引言

假设某政府主管机构负责向一组指定的电信企业分配频谱区段。其任务中的一个核心问题是外部性：分配给某家企业的带宽可能会干扰其他企业对频谱的使用，从而给这些企业带来负外部性。企业对不同频谱部分的估值还取决于其他因素，例如企业的需求和运营成本。更复杂的是，在经济交易发生时，这些估值和外部性成本可能取决于尚未观测到的因素。例如，整个行业可能面临监管方面的不确定性，例如近期的 网络中立之争。[1] 频谱的任何部分的价值，都很大程度上取决于一项旨在强制实行网络中立的法案是否通过。因此，企业对频谱区段的估值以及其外部性成本，都取决于经济决策必须作出时无法观测到的状态变量。[2]

本文采用机制设计的方法来研究上述分配问题。模型包含“买方”和“卖方”（或“物品”），目标是将买方分配给物品，以最大化总预期剩余。获得一段频谱分配的电信企业所享有的剩余，等于该频谱对该企业的预期价值，减去因将其他频谱分配给其他企业而产生的预期干扰成本。主管机构可以拍卖这些频谱，但第一价格或第二价格拍卖等标准拍卖机制存在一些困难。首先，这并非标准的私人价值拍卖问题。由于存在外部性，某企业对某段频谱的估值取决于其他企业获得了哪些频谱。

这一问题受到若干因素的影响而更加复杂。我们假设买方知道自身估值和所承担的外部性成本如何取决于不可观测的状态，但不了解其他买方的相关信息；我们也不假设买方对其他买方的估值和外部性成本有所信念。买方还会收到与状态相关的私人信号（例如，由于他们就网络中立问题进行游说而获得的信号）。[3] 因此，由于企业掌握了有关世界状态的信息性信号，这一问题属于相互依存价值问题。这使得直接套用VCG机制行不通。

为克服相互依赖问题，我们构建了一种两阶段机制。在第一阶段，我们利用企业关于状态的信号之间的相关性。具体而言，通过向每家企业支付正向转移支付，且支付金额取决于其所报告信号与其他企业所报告信号之间的关系，从而真实地 elicitation 企业的信号。给定所报告的第一阶段信号组合后，机制会计算相应的状态空间后验分布，并将其公开。在第二阶段，企业观察公布的后验分布，然后向机制报告其估值和外部性成本，这些报告不一定真实。收到报告后，机制即可确定剩余最大化分配。我们证明，如果买方在第一阶段如实报告其观测到的信号，那么第二阶段问题就是一个私人价值问题，因此我们能够在第二阶段使用VCG转移支付，以获取企业的私人预期带宽估值和外部性成本。我们证明，存在一组第一阶段奖励和第二阶段VCG转移支付，使企业在均衡中于第一阶段如实报告信号，并在第二阶段如实报告预期估值和外部性成本。鉴于本文采用的弱信息假设，我们提出一种行为策略组合及各信息集上的信念；它们未必构成完美贝叶斯均衡，但确实满足均衡路径上的某种占优策略性质。

第二阶段采用的 VCG机制颇具吸引力，因为转移支付均为非负，即任何支付都由企业流向主管机构。人们能够设计出总支付为负的 VCG机制，这并不令人意外。不过，重要的是，VCG机制的结果具有个体理性。同样，能够构造出产生个体理性结果的 VCG机制并不令人意外，但通常无法同时满足个体理性和剩余非正。

主管机构为获取有关世界状态的信息而向企业支付的第一期奖励，至少部分抵消了第二阶段的VCG剩余。如果这些支付的总和大于

[1]网络中立是指互联网服务提供商（互联网服务提供商）必须以相同速度、在相同条件下提供对所有网站、内容和应用程序的访问，不得屏蔽任何内容，也不得偏袒任何内容。[2]同样，在航空公司飞机登机口时段的分配问题中，将某一特定城市出发的某种飞机分配到另一城市的某个特定登机口，其成本和收益可能取决于整个航空交通系统中的其他飞机与登机口配对，也可能取决于天气等不可观测因素。[3]参见 Klemperer （2004年），第5.5章，了解有关频谱价值的共同不确定性及其来源的证据。

第二阶段的VCG剩余，主管机构就会出现总赤字。我们证明，若存在赤字，随着买方和物品数量趋于无穷，赤字将趋于零。

2 相关研究

我们的研究与信息不对称下的匹配问题相关。 Fernandez等人 (2022) 指出，即使只是将对其他代理人偏好的少量不确定性引入序数匹配问题，也可能削弱在完全信息框架下取得的结果。 Liu等人 (2014) 深入阐述了基数匹配问题中的不完全信息稳定性概念，并提出了迭代信念形成过程，供代理人在作出分配阻断决策时使用。与这项研究相辅相成的是，Roth (1989) 指出，完全信息框架下与占优策略行为相关的一些结果，可以原样推广至不完全信息框架。具体而言，在婚姻问题中，每个男性在M最优稳定匹配机制中都拥有真实报告自身价值的占优策略。这一原则在完全信息和不完全信息框架下均成立。 Demange和Gale (1985) 和 Leonard (1983) 对基数匹配问题形式化描述的信息不对称交易环境得出了类似结论。他们表明，买方最优稳定结果可以通过VCG转移支付来实现。

本文还与相互依存信息下异质商品拍卖的相关研究有关。在信号相互独立、估值相互依存的环境中，Perry和Reny (2002)研究了多单位单边拍卖，并将其视为一组双人单单位第二价格拍卖。在一系列关于估值函数的假设下（包括单交叉性质），Perry和Reny构造了一种两轮机制：代理人在第一轮披露其私人信号，并基于汇总信息估计其估值；在第二轮，他们参与相应的第二价格拍卖。我们的机制不需要Perry和Reny的结果所采用的假设。Ausubel(2006)研究了一种针对异质商品的动态单边拍卖，其中单一卖方希望将有限数量的商品分配给多个潜在买方。他提出了一种调整过程，用于计算代理人的分配和支付。在这一机制中，调整由对手的汇总报告驱动，从而使真实报告成为占优策略。最终的交易价格收敛于竞争性瓦尔拉斯价格。与Ausubel的框架侧重于模型在时间趋于无穷时的轨迹性质不同，我们通过复制经济考察该系统的行为。

我们的模型包含分配外部性。具体而言，在给定一项分配后，每位代理人都会受到其他匹配所带来的外部性影响。因此，每位代理人关心的不仅是与谁配对，也关心其他代理人之间的匹配。我们对外部性的定义与Jehiel等人（1996）的定义相关。他们考察的是分配外部性，这种外部性会在所有合同交易结束后影响代理人之间的互动。每位参与者的私人信息包括其物品估值以及其施加给他人的外部性程度。这一表述带来了激励相容性问题，可通过对代理人作出适当威胁来解决。由此形成的机制包含一个参与阶段，并增设了一个分配函数，用于处理代理人拒绝参与该机制的情形。我们通过假设每位代理人都知道自己受到的其他代理人所带来的外部性有多大，来避免与外部性相关的报告问题。此外，我们假设，如果某位代理人未获分配物品，其他匹配不会对其造成损害[4]。

在信息不完全且相互依存的环境中，我们通过一种自愿且激励相容的机制，实现高效且渐近预算平衡的分配。我们的解决方案基于 McLean 和 Postlewaite 提出的两阶段方法 McLean 和 Postlewaite (2017年), McLean 和 Postlewaite (2004年)。与前述研究不同，本文研究的环境中，可行结果集并非固定不变，而是会随参与者集合的变化而改变 [5]。本文的显著特点是，模型对机制设计者和参与者所需的信息更少。具体而言，我们不假设代理人了解其他代理人的收益函数或外部性。为处理这种情况，我们在动态环境中提出了一种新的均衡解概念。

[4]这项研究与互联网广告广告位分配或疫苗分配中出现的类似分配问题略有关联。我们的模型截然不同，而且由于存在相互依存估值而变得更加复杂。[5]相关讨论参见Narahari (2014)

3 预备知识

3.1 状态、信号与收益

若 K 是有限集，则令 $|K|$ 表示 K 的基数，并令 $\Delta(K)$ 表示 K.上的概率测度集。令 $\Delta^*(K)$ 表示 $\Delta(K)$ 中具有满支撑的子集。全文中，$||\cdot||_2$ 表示 2-范数，$||\cdot||$ 表示 1-范数。定义这些范数的实向量空间可由上下文确定。我们关注的是一个双边市场，其中 n 名“买方”将与 n 名“卖方”或“物品”进行配对。令 $N=\{1,..,n\}$。买方和卖方将由一种机制配对，随后进行交易。交易可能涉及物品的转移，例如向买方转让部分频谱，或由卖方向买方提供服务。

设 $\Theta=\{\theta_1,..,\theta_m\}$ 表示一个有限的自然状态集合。在所有交易完成之前，买方、卖方和机制都不知道 θ 的取值。

买方收到与状态相关的信号，这些信号属于私人信息。每位买方 i 从有限集 $B_i.$ 中收到一个信号。设 $B=B_1\times\cdots\times B_n$，并令 $b=(b_1,..,b_n)\in B$ 表示 $B.$中的一般信号组合。
当买方 i 与卖方 j 匹配时产生的剩余，取决于状态 $\theta\in\Theta$、买方对物品的估值、将物品分配给该买方的成本，以及会对买卖双方匹配所产生的剩余造成不利影响的外部性。

买方关心市场另一侧与其进行交易的卖方。因此，在状态 θ 下，买方 i 与卖方 j 匹配时的估值为非负数 $u_{ij}(\theta)$。将卖方 j 的物品分配给买方 i（或向买方 i 提供卖方 j 的服务）的非负成本也取决于状态 θ，记为 $v_{ij}(\theta)$.。

在我们的模型中，我们允许存在会降低匹配所产生剩余的外部性。为将其纳入实施问题，令 $c_{ij}^{pq}(\theta)$ 表示当买方 $p\neq i$ 与卖方 $q\neq j$ 匹配且状态为 $\theta.$ 时，若买方 i 与卖方 j 匹配，则施加于买方 i 的外部性成本。假设该数值 $c_{ij}^{pq}(\theta)$ 非负。我们假设，对于所有 $(i、\ j)、\ (p、\ q)$ 和 $\theta、\ 0\leqslant u_{ij}(\theta)、\ v_{ij}(\theta)、\ c_{ij}^{pq}(\theta)\leqslant M$，存在某个 $M>0.$
定义 $c_{ij}(\theta)\in R^{(n-1)(n-1)}$，其中 $c_{ij}(\theta)=(c_{ij}^{pq}(\theta))_{p\neq i、\ q\neq j}\cdot$。我们将记 $c_i(\theta)=(c_{i1}(\theta)、..、\ c_{in}(\theta))、\ c(\theta)=(c_1(\theta)、..、\ c_n(\theta))$ 以及 $c(\pi)=(c_1(\pi)、..、\ c_n(\pi))$，其中 $c_{ij}^{pq}(\pi)=\sum_{\theta\in\Theta}c_{ij}^{pq}(\theta)\pi(\theta).$。我们将记 $u_i(\theta)=(u_{i1}(\theta)、..、\ u_{in}(\theta))、\ u(\theta)=(u_1(\theta)、..、\ u_n(\theta))$ 以及 $u_{-i}(\theta)=(u_k(\theta))_{k\in N\setminus i}\cdot$。类似地，我们记 $v_i(\theta)=(v_{i1}(\theta)、..、\ v_{in}(\theta))、\ v(\theta)=(v_1(\theta)、..、\ v_n(\theta))$以及 $v_{-i}(\theta)=(v_k(\theta))_{k\in N\setminus i}.$

如果 $\pi\in\Delta(\Theta)$，定义 $u_i(\pi)=(u_{i1}(\pi)、..、\ u_{in}(\pi))\in\mathbb{R}^n$ 为 $u_i(\pi)=\sum_{\theta\in\Theta}u_i(\theta)\pi(\theta)$，并令 $u(\pi)=(u_1(\pi)、..、\ u_n(\pi))$。类似地，定义 $v_i(\pi)=(v_{i1}(\pi)、..、\ v_{in}(\pi))\in\mathbb{R}^n$ 为 $v_i(\pi)=\sum_\theta v_i(\theta)\pi(\theta)$，并令 $v(\pi)=(v_1(\pi)、..、\ v_n(\pi)).$

3.2 随机结构

接下来，令 $\Delta^*(\Theta\times B)$ 表示满足 $P(\theta、\ b)>0$ 的 $P\in\Delta(\Theta\times B)$ 集合，其中每个 $(\theta、\ b)\in\Theta\times B.$。对于 $P\in\Delta^*(\Theta\times B)$ 和 $b\in B$，由 P 在给定 $b\in B$ 时诱导的关于 Θ 的条件分布记为 $P_\Theta(\cdot|b).$。为简化记号，我们通常将 $P_\Theta(\cdot|b).$写作 $\rho(b)$

对于每个 i 和 $b_i\in B_i$，给定 $b_i\in B$ 时由 P 在 B_{-i} 上诱导的条件分布记为 $P_{-i}(\cdot|b_i).$。也就是说，

$$P_{-i}(b_{-i}|b_i)=\sum_{\theta\in\Theta}P(\theta,b_{-i}|b_i).$$

最后，我们假设，如果 $b_i\neq b_i'$，则 $P_{-i}(\cdot|b_i)\neq P_{-i}(\cdot|b_i')$。

3.3 信息假设

如上所述，买方的观测信号属于私人信息。此外，买方的估值函数及其外部性函数也属于私人信息。也就是说，估值—外部性函数 $(u_i(\theta),c_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$仅为买方 i所知。另一方面，成本函数 $(v_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$ 以及先验分布 $P\in\Delta^*(\Theta\times B)$ 为所有买方和机制所知。此外，所有买方以及机制都知道买方估值、买方外部性和卖方成本的界 M。

3.4 实施问题

具有相互依存价值的分配问题是一个集合 $(u_1, .., u_n, c_1, .., c_n, v_1, .., v_n, P) = (u, c, v, P)$，其中$P \in \Delta^*(\Theta \times B)$. 令 Z 表示买方与卖方所有可行匹配的集合。也就是说， Z 是所有满足 $z_{ij} \in \{0, 1\}$ 且.....的 $n \times n$数组 z 构成的集合。

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} \leqslant 1 \text{ for all } j \text{ and } \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \leqslant 1 \text{ for all } i.$$

外部性的存在使得在信息不对称的情况下高效地将买方与卖方进行匹配这一任务变得复杂，因为匹配 $(i$ 中的买方 i 只会因最优分配中实际发生的那些不同 $(p$ 、 $q)$ 匹配而产生外部性成本。

分配函数是一个映射 $F:\ B \to Z$，它针对每一组申报类型在 Z 中指定一个结果。若对于每个 $b \in B$， $F(b)$ 都能求解二次分配问题，则称该分配函数是结果有效的。

$$\max_{z \in Z} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{\theta \in \Theta} \left[u_{ij}(\theta) - v_{ij}(\theta) - \sum_{p \neq i} \sum_{q \neq j} c_{ij}^{pq}(\theta) z_{pq} \right] P_\Theta(\theta|b) \right] z_{ij}.$$

给定一个匹配问题，本文的目标是通过个体理性、激励相容的机制来实施一个结果有效的分配函数。此外，我们希望设计这样一种机制，使其尽可能少地要求买方和机制设计者提供信息。为此，我们提出一种两阶段机制，其结构借鉴了 McLean 和 Postlewaite (2017) 的机制。为简化下文的阐述，我们再引入一个记号。对于每个 i，令 $w_i = (w_{i1},\ .....,\ w_{in}) \in \mathbb{R}^n$ （解释为估值向量） $d_i = (d_{i1},\ .....,\ d_{in})$ 其中每个 $d_{ij} \in \mathbb{R}_+^{(n-1)(n-1)}$ （解释为外部性向量），以及$\kappa_i = (\kappa_{i1},\ .....,\ \kappa_{in}) \in \mathbb{R}^n$（解释为卖方成本向量）。对于每个 i、 $j \in N$和 $z \in Z$，定义 买方 $i's$ 在给定分配 $z \in Z$ 下的收益为

$$g_i(z; w_i, d_i, \kappa_i) = \sum_{j=1}^{n} \left[w_{ij} - \sum_{p \neq i} \sum_{q \neq j} d_{ij}^{pq} z_{pq} - \kappa_{ij} \right] z_{ij}.$$

注意,

$$|g_i(z; w_i, d_i, \kappa_i)| \leqslant (2 + n)M.$$

在此记法中，如果对于每个 $b \in B$, $F(b)$ ，分配函数都能求解二次分配问题，则该分配函数是结果有效的

$$\max_{z \in Z} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\theta \in \Theta} g_i(z; u_i(\theta), c_i(\theta), v_i(\theta)) P_\Theta(\theta|b) \right]$$

4 两阶段实施博弈

4.1 预备知识

我们先考虑一个更简单的实施问题，它将为接下来更复杂的两阶段模型的第二阶段提供基本框架。该机制旨在匹配买方与卖方，使其实际估值所产生的总剩余最大化。我们假设，所有买方和机制都知道卖方成本分布 $\kappa = (\kappa_1, .., \kappa_n)$ ，但只有买方 i 知道 w_i 和 d_i 。在这个简单问题中，每位买方都向机制报告自己的估值—外部性向量，但报告不一定真实。如果 $\kappa = (\kappa_1, .., \kappa_n)$ 是固定的卖方成本分布，且 $(w, d) = (w_1, .., w_n, d_1, .., d_n)$ 是买方报告的分布，那么机制随后通过求解使总剩余最大化的二次分配问题，计算买方的收益和经典 VCG 转移支付。我们证明，这些转移支付使该机制具有占优策略激励相容性和个体理性，且不会产生预算赤字。暂不考虑最优解对 κ 的依赖，对每个 (w, d) 定义结果

$$\hat{\varphi}(w, d) \in \arg \max_{z \in Z} \sum_i g_i(z; w_i, d_i, \kappa_i).$$

结果　　最优解中买方 i 的收益以“净收益”衡量，则为

$$g_i(\hat{\varphi}(w,d);w_i,d_i,\kappa_i)=\sum_{j=1}^{n}\left[w_{ij}-\sum_{p\neq i}\sum_{q\neq j}d_{ij}^{pq}\hat{\varphi}_{pq}(w,d)-\kappa_{ij}\right]\hat{\varphi}_{ij}(w,d)$$

而与 i 不同的买方的总收益为

$$\sum_{k:k\neq i}g_k(\hat{\varphi}(w,d);w_k,d_k,\kappa_k)=\sum_{k:k\neq i}\sum_{j=1}^{n}\left[w_{kj}-\sum_{p\neq k}\sum_{q\neq j}d_{kj}^{pq}\hat{\varphi}_{pq}(w,d)-\kappa_{kj}\right]\hat{\varphi}_{kj}(w,d).$$

接下来，令所有 $j\}$ 均满足 $Z_{-i}=\{z\in Z|z_{ij}=0$，并注意到 $Z_{-i}\subseteq Z$。转移支付定义如下:

$$x_i(w,d)=\sum_{k:k\neq i}g_k(\hat{\varphi}(w,d);w_k,d_k,\kappa_k)-\max_{z\in Z_{-i}}\left[\sum_{k:k\neq i}g_k(z;w_k,d_k,\kappa_k)\right].$$

由于这些转移支付构成了标准的格罗夫斯机制，因此立即可得占优策略激励相容性。也就是说，对于任意买方 i 、任意估值—外部性向量 $(w_i$、$d_i)$ 和 $(w_i'$、$d_i')$，以及其他买方的任意估值—外部性向量组合 $(w_{-i}$、$d_{-i})$，我们有

$$g_i(\hat{\varphi}(w_{-i},d_{-i},w_i,d_i);w_i,d_i,\kappa_i)+x_i(w_{-i},d_{-i},w_i,d_i)\geqslant g_i(\hat{\varphi}(w_{-i},d_{-i},w_i',d_i');w_i,d_i,\kappa_i)+x_i(w_{-i},d_{-i},w_i',d_i').$$

为验证个体理性，假设

$$z^*\in\arg\max_{z\in Z_{-i}}\left[\sum_{k:k\neq i}g_k(z;w_k,d_k,\kappa_k)\right].$$

由于 $z^*\in Z$ 和 $g_i(z^*;\ w_i$、d_i、$\kappa_i)=0$，因此可得

$$\begin{aligned}g_i(\hat{\varphi}(w,d);w_i,d_i,\kappa_i)+x_i(w,d) &= \sum_{k=1}^{n}g_k(\hat{\varphi}(w,d);w_k,d_k,\kappa_k)-\left[\sum_{k:k\neq i}g_k(z^*;w_k,d_k,\kappa_k)\right]\\ &= \sum_{k=1}^{n}g_k(\hat{\varphi}(w,d);w_k,d_k,\kappa_k)-\left[\sum_{k=1}^{n}g_k(z^*;w_k,d_k,\kappa_k)\right]\\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

为验证转移支付 $x_i(w$、$d)$ 非正，令 $z_{kj}'=\hat{}\varphi_{kj}(w,\ d)$ 对所有 j 和所有 $k\neq i$，并令 $z_{ij}'=0$ 对所有 j。则 $z'\in Z_{-i}.$。由于

$$\sum_{q\neq j}d_{kj}^{iq}\varphi_{iq}(w,d)\geqslant 0$$

我们得出结论:

$$\begin{aligned}&\sum_{k:k\neq i}g_k(\hat{\varphi}(w,d);w_k,d_k,\kappa_k)\\ =\ &\sum_{k\neq i}\sum_{j}\left[w_{kj}-\kappa_{kj}-\sum_{p\neq k,i}\sum_{q\neq j}d_{kj}^{pq}\hat{\varphi}_{pq}(w,d)-\sum_{q\neq j}d_{kj}^{iq}\hat{\varphi}_{iq}(w,d)\right]\hat{\varphi}_{kj}(w,d)\\ \leqslant\ &\sum_{k\neq i}\sum_{j}\left[w_{kj}-\kappa_{kj}-\sum_{p\neq k}\sum_{q\neq j}d_{kj}^{pq}z_{pq}'\right]z_{kj}'\\ \leqslant\ &\max_{z\in Z_{-i}}\left[\sum_{k:k\neq i}g_k(z;w_k,d_k,\kappa_k)\right]\end{aligned}$$

且转移支付均为非正数。

4.2 两阶段博弈

我们希望将具有相互依存估值的实施问题表述为一个两阶段问题：在第一阶段，代理人诚实地报告其信号，从而解决“相互依赖”问题，使第二阶段问题成为一个简单的私人价值实施问题，如上文第 2.1 节所述，可立即应用 VCG机制。现在，我们定义一个扩展式博弈，以形式化这一构想背后的两阶段博弈。设 $\xi = (\xi_i)_{i\in N}$ 为一个由 n 个函数 ξ_i : $B \to \mathbb{R}_+$ 组成的元组，其中每个函数都将每个 $b \in B$ 映射为一个非负数 $\xi_i(b)$ ，该数被解释为买方 i 的“奖励”。这些奖励旨在促使买方在第一阶段诚实地报告其信号。现在我们描述两阶段博弈 $\Gamma(u, c, v, P, \xi)$. 的扩展式。

第一阶段：买方 i 获知其信号 b_i ，并令 $b \in B$ 表示由此得到的观测信号配置。随后，买方 i 向机制报告 r_i （不一定如实）。若 $r = (r_1, .., r_n)$ 是第一阶段的报告配置，则买方 i 收到非负支付 $\xi_i(r)$，博弈进入第二阶段。

第二阶段：若 r 是第一阶段报告的信号组合，机制将条件分布$P_\Theta(\cdot|r) = \rho(r)$ 公开发布，但不公布报告配置 $r.$ 。观察到 $\rho(r)$后，每位买方 i 向机制报告一个估值—外部性向量$(w_i(\theta), d_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$ 。根据报告配置 $(w(\theta), d(\theta))_{\theta\in\Theta} = (w_i(\theta), d_i(\theta))_{\theta\in\Theta,\ i\in N}$以及已发布的$\rho(r)$，机制随后为每位买方 k.计算 $(w_k(\rho(r)), d_k(\rho(r)), v_k(\rho(r))) = \sum_\theta (w_k(\theta), d_k(\theta), v_k(\theta))P(\theta|r)$ 。接下来，机制计算社会结果

$$\hat{\varphi}(w(\rho(r)), d(\rho(r))) \in \arg \max_{z\in Z} \sum_{k=1}^{n} g_k(z; w_k(\rho(r)), d_k(\rho(r)), v_k(\rho(r)))$$

以及针对每位买方 i 的VCG转移支付 $x_i(w(\rho(r)), d(\rho(r)))$ ，其中

$$x_i(w(\rho(r)), d(\rho(r))) = \sum_{k:k\neq i} g_k(\hat{\varphi}(w(\rho(r)), d(\rho(r))); w_k(\rho(r)), d_k(\rho(r)), v_k(\rho(r)))$$

$$- \max_{z\in Z_{-i}} \left[\sum_{k:k\neq i} g_k(z; w_k(\rho(r)), d_k(\rho(r)), v_k(\rho(r))) \right].$$

若 $\hat{}\varphi_{ij}(w(\rho(r)), d(\rho(r))) = 1$，则买方 i获得转移支付 $x_i(w(\rho(r)); \ d(\rho(r)))$, i向卖方 j支付金额 $v_{ij}(\rho(r))$，并且将 j的物品交给买方 i（或向其提供 j的服务）。

由于 $\rho(b) = P_\Theta(\cdot|b)$ 是给定已实现的信号组合 b时关于状态的条件分布，因此在第二阶段结束时（但状态 θ 尚未知晓之前），买方 i 获得的期望收益为

$$g_i(\hat{\varphi}(w(\rho(r)), d(\rho(r))); u_i(\rho(b)), c_i(\rho(b)), v_i(\rho(r))) + x_i(w(\rho(r)), d(\rho(r)) + \xi_i(r).$$

我们希望设计奖励 ξ_i 以实现两个目标。在第一阶段，我们希望促使代理人如实报告，使得当已实现的信号组合为 b 时，所报告的第一阶段组合恰好为 b 。随后，在第二阶段观察到公布的后验分布 $P_\Theta(\cdot|b) = \rho(b)$ 后，我们希望每位买方 i 都报告真实的估值—外部性向量$(u_i(\theta), c_i(\theta)_{\theta\in\Theta}.$ 。若在某个均衡中实现了这两个目标，则社会结果为

$$\hat{\varphi}(u(\rho(b)), c(\rho(b))) \in \arg\max_{z\in Z} \sum_i g_i(z; u_i(\rho(b)), c_i(\rho(b)), v_i(\rho(b))).$$

特别是,

$$\hat{\varphi}(u(\rho(b)), c(\rho(b))) \in \arg \max_{z\in Z} \sum_i \left[\sum_{\theta\in\Theta} g_i(z; u_i(\theta), c_i(\theta), v_i(\theta))P_\Theta(\theta|b) \right]$$

因此， $b \mapsto \hat{}\varphi(u(\rho(b)), c(\rho(b)))$ 是一个结果有效配置。

买方 i 在第二阶段结束时（但在状态 θ 尚未知晓之前）获得的非负期望收益为

$$g_i(\hat{\varphi}(u(\rho(b)), c(\rho(b))); u_i(\rho(b)), c_i(\rho(b)), v_i(\rho(b))) + x_i(u(\rho(b)), c(\rho(b))) + \xi_i(b)$$

支付给机制的净款项为

$$\sum_i x_i(u(\rho(b)), c(\rho(b))) + \sum_i \xi_i(b).$$

虽然 VCG 转移支付之和非正，但由于第一阶段奖励非负，这笔净支付可能为正。因此，有必要找出第一期奖励之和较小的情形；下文第5节将针对 n 较大的情况探讨这一问题。

4.3 两阶段博弈中的策略与均衡

对于每个买方 i 和每个 $b_i \in B_i$，令

$$D(b_i) := \{P_\Theta(\cdot|b_{-i}, b_i) : b_{-i} \in B_{-i}\}$$

并定义一个划分 $\Pi_i(b_i) = D(b_i)/\sim$，其中 $P_\Theta(\cdot|b'_{-i}、\ b_i) \sim P_\Theta(\cdot|b''_{-i}、\ b_i)$ 当且仅当 $P_\Theta(\cdot|b'_{-i}、\ b_i) = P_\Theta(\cdot|b''_{-i}、\ b_i)$。根据扩展式的具体设定，买方 i 的第二阶段信息集由三元组$(r_i、\ \pi、\ b_i)$ 索引，其中 $b_i \in B_i$ 是买方 i 在第一阶段私人观察到的信号，$r_i \in B_i$ 是买方 i在第一阶段报告的信号，而 $\pi \in \Pi_i(r_i)\}$ 是公布的后验分布。因此，该博弈中买方 i 的行为策略是一个二元组 $(\alpha_i、\ \beta_i)$，其中 $b_i \in B_i \mapsto \alpha_i(b_i) \in B_i$ 根据 i观察到的信号b_i. 指定第一阶段报告。在每个第二阶段信息集，β_i 为每个 θ 和 j 指定一个估值 $w_{ij}(\theta)$ 和一个外部性向量$d_{ij}(\theta) \in \mathbb{R}^{(n-1)(n-1)}$. 。更形式化地说，$\beta_i$ 是一个函数

$$(r_i, \pi, b_i) \in B_i \times \Pi_i(r_i) \times B_i \mapsto \beta_i(r_i, \pi, b_i) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n(n-1)(n-1)})^m$$

该策略将第二阶段报告 $([\beta_i(r_i,\pi,b_i)](\theta))_{\theta\in\Theta}$ 指定为 i的私人信号 $b_i \in B_i$, i的第一阶段报告r_i 以及公布的分布 $\pi \in \Pi_i(r_i)$.的函数

我们关注两阶段实施博弈的一个均衡评估，该博弈由策略组合 $(\alpha_i,\beta_i)_{i\in N}$ 以及针对每位买方 in 的第二阶段信念系统构成；在此博弈中，买方在每个阶段都会如实报告其私人信息。

定义1：若对所有 $b_i \in B_i$均有 $\alpha_i(b_i) = b_i$，且

$$\beta_i(b_i, \pi, b_i) = (u_i(\theta), c_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$$

对所有 $b_i \in B_i$ 及所有 $\pi \in \Pi_i(b_i)$.

若策略组合 $(\alpha_i,\beta_i)_{i\in N}$在 $\Gamma(u,c,v,P,\xi)$ 中满足 (α_i,β_i) 对每位买方 i均为真实策略，则称其为真实策略组合。在真实策略中，每位买方 i 都会在第一阶段如实报告观察到的信号。随后，在第二阶段，买方 i 会在任何第二阶段信息集中，如实报告其真实的估值—外部性函数；该信息集对应的报告信号与 i 在第一阶段观察到的信号一致。

形式上，买方 i 的信念系统是在 $\Delta(\Theta \times B_{-i})$ 中的一组概率测度，以 $(r_i、\ \pi、\ b_i)$ 为索引，且满足 $\pi \in \Pi_i(r_i)$，其中 $\mu_i(\cdot|r_i、\ \pi、\ b_i) \in \Delta(\Theta \times B_{-i})$ 的含义如下：当参与者 i 观测到信号 b_i，在第一阶段报告 r_i，并在第二阶段观测到公布的分布 $\pi \in \Pi_i(r_i)$ 时，买方 i 将概率质量 $\mu_i(\theta、\ b_{-i}|r_i、\ \pi、\ b_i)$ 分配给这样一个事件：其他买方观测到了信号 b_{-i}，且自然状态为 θ. 。如常，评估是一组 $\{(\alpha_i、\ \beta_i)_{i\in N}、\ (\mu_i)_{i\in N}\}$，由每位买方 i 的行为策略和信念系统构成。

定义 2：如果评估 $\{(\alpha_i^*、\ \beta_i^*)_{i\in N}、\ (\mu_i^*)_{i\in N}\}$ 是在 $\Gamma(u、\ c、\ v、\ P、\ \xi)$ 下的序贯占优策略评估，则须满足：$\{(\alpha_i^*、\ \beta_i^*)_{i\in N}、\ (\mu_i^*)_{i\in N}\}$ 是一个纳什均衡评估，且满足 (i) 策略组合 $((\alpha_i^*、\ \beta_i^*)_{i\in N}$ 是真实的；(ii) 对其他参与者的任意行为策略组合 $(\alpha_j、\ \beta_j)_{j\in N\setminus i}$，$(\alpha_i^*、\ \beta_i^*)$ 在每个第一阶段信息集 $b_i \in B_i$ 上对 i 都是序贯理性的；(iii) 对每个 $b_i \in B_i$ 和每个 $\pi \in \Pi_i(b_i)$，以及其他参与者的任意第二阶段策略组合 $(\beta_j)_{j\in N\setminus i}$，给定 $(\alpha_j^*、\ \beta_j)_{j\in N\setminus i}$，$(\alpha_i^*、\ \beta_i^*)$ 在每个第二阶段信息集上都是序贯理性的。

非正式地说，如果对每个 i，(α_i^*,β_i^*) 都是在“均衡路径上”的占优策略，那么 $\{(\alpha_i^*,\beta_i^*)_{i\in N},(\mu_i^*)_{i\in N}\}$ 就是一个序贯占优策略评估。条件 (ii) 指出，在每个第一阶段信息集上，(α_i^*,β_i^*) 针对任意 $(\alpha_j,\beta_j)_{j\in N\setminus i}$ 都是最佳回应；条件 (iii) 指出，在所有参与者于第一阶段采用 $(\alpha_j^*)_{j\in N}$，且信念根据贝叶斯法则推导得出的情况下，(α_i^*,β_i^*) 针对任意 $(\alpha_j^*,\beta_j)_{j\in N\setminus i}$ 都是最佳回应。

4.4 主要结果

定理1：设 (u,c,v,P) 是一个具有相互依存估值的分配问题。对每个 i，定义参与者 i 的行为策略 (α_i^*,β_i^*)，其中对每个 $b_i \in B_i$，$\alpha_i^*(b_i)=b_i$；并且对每个 $((r_i,\pi,b_i)$，$\beta_i^*(r_i,\pi,b_i)=(u_i(\theta),c_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$，使得 $r_i \in B_i, \pi \in \Pi_i(r_i)$ 且 $b_i \in B_i$.。那么，存在一个奖励机制 $\xi=(\xi_i)_{i\in N}$ 以及针对每个 i 的第二阶段信念 $(\mu_i^*)_{i\in N}$，使得在两阶段博弈 $\Gamma(u,c,v,P,\xi)$.中，$(\alpha_i^*,\beta_i^*,\mu_i^*)_{i\in N}$ 是一个序贯占优策略评估。

为证明这一结果，我们分几个步骤进行，现概述如下。令 $(\alpha_i^*、\ \beta_i^*)_{i\in N}$ 按照定理1的陈述定义。显然，$(\alpha_i^*、\ \beta_i^*)_{i\in N}$ 是诚实策略组合。

步骤1：均衡评估要求为买方 i 在买方 i的每个第二阶段信息集上指定第二阶段信念。此外，给定 $(\alpha_i^*、\ \beta_i^*)_{i\in N}$，这些信念应当"在可能的情况下与贝叶斯法则一致"。假设买方 i 收到信号 b_i，其他参与者收到信号组合 $b_{-i}\in B_{-i}$，且买方 i 在第一阶段报告r_i。那么，对于每个 $k\neq i$，$\alpha_k^*(b_k)=b_k$。因此，收到信号 b_i、在第一阶段提交报告 r_i，并在第二阶段观察到 $\pi\in\Pi(r_i)$ 的买方 i 将赋予正概率

$$\sum_{\hat{b}_{-i}:\rho(\hat{b}_{-i},r_i)=\pi} P_{-i}(\hat{b}_{-i}|b_i)$$

至该事件

$$\{\hat{b}_{-i}\in B_{-i}:\rho(\hat{b}_{-i},r_i)=\pi\}.$$

因此，关于 (θ,b_{-i}) 且与 (α^*,β^*) 一致的 i的更新后信念为

$$\begin{aligned}\mu_i^*(\theta,b_{-i}|r_i,\pi,b_i) &= \frac{P_\Theta(\theta|b_{-i},b_i)P_{-i}(b_{-i}|b_i)}{\sum_{\hat{b}_{-i}:\rho(\hat{b}_{-i},r_i)=\pi}P_{-i}(\hat{b}_{-i}|b_i)} \text{ if } \rho(b_{-i},r_i)=\pi\\ &= 0 \text{ otherwise.}\end{aligned}$$

步骤 2：为验证序贯占优策略评估定义的第 (iii) 部分，我们必须证明，如果所有买方在第一阶段都如实报告，那么对于对手的任意一组第二阶段策略 $(\beta_j)_{j\neq i}$，β_i^* 都是最佳回应。对于每个 $b_{-i}\in B_{-i}$ 和每个 $k\neq i$，令

$$\sum_\theta[\beta_k(b_k,\pi,b_k)](\theta)\pi(\theta)=\gamma_k(\pi,b_k)$$

and

$$(\gamma_j(\pi,b_j))_{j\neq i}=\gamma_{-i}(\pi,b_{-i}).$$

为验证第 (iii) 部分，我们证明对于每个 $b_i\in B_i$ 和 $\pi\in\Pi(b_i)$ 以及每个 $(w_i(\theta),d_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$，都有

$$\begin{aligned}&\sum_{b_{-i}\in B_{-i}}\sum_{\theta\in\Theta}[g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi,b_{-i}),u_i(\pi),c_i(\pi));u_i(\theta),c_i(\theta),v_i(\pi)]+\hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi,b_{-i}),u_i(\pi),c_i(\pi)))\mu_i(\theta,b_{-i}|b_i,\pi,b_i)\\ \geqslant &\sum_{b_{-i}\in B_{-i}}\sum_{\theta\in\Theta}[g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi,b_{-i}),w_i(\pi),d_i(\pi));u_i(\theta),c_i(\theta),v_i(\pi)]+\hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi,b_{-i}),w_i(\pi),d_i(\pi)))\mu_i(\theta,b_{-i}|b_i,\pi,b_i).\end{aligned}$$

步骤 3：为验证序贯占优策略评估定义的第 (iii) 部分，我们必须证明，对于其他参与者的任意行为策略组合 $(\alpha_k,\beta_k)_{k\neq i}$，在买方 i 的第一阶段信息集上，$((\alpha^*,\beta^*),\mu^*)$ 是序贯理性的。具体而言，我们必须证明：当不同于 i 的卖方采用任意行为策略组合 $((\alpha_k,\beta_k)_{k\neq i}.$ 时，买方 i 在第一阶段说谎，并根据第一阶段的谎报在第二阶段作出最优报告的协调偏离并无利可图。在这一步中，第一阶段奖励起着关键作用。为此，选取 $b=(b_{-i},b_i),r_i\in B_i$，并令 $\pi=\rho(b)$ 和 $\pi'=\rho(b_{-i},r).$。对于每个 $j\neq i$，令

$$\sum_{\theta\in\Theta}[\beta_j(\alpha_j(b_j),\pi,b_j)](\theta)\pi(\theta)=\gamma_j(\pi,b_j)$$

and

$$\sum_{\theta\in\Theta}[\beta_j(\alpha_j(b_j),\pi',b_j)](\theta)\pi'(\theta)=\gamma_j(\pi',b_j).$$

令 $(\gamma_j(\pi,b_j))_{j\neq i}=\gamma_{-i}(\pi,b_{-i})$ 和 $(\gamma_j(\pi',b_j))_{j\neq i}=\gamma_{-i}(\pi',b_{-i})$.。我们先证明，对所有 $(w_i(\theta),d_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$，都有

$$\begin{aligned}
& g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi,b_{-i}),u_i(\pi),c_i(\pi));u_i(\pi),c_i(\pi),v_i(\pi))+\hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi,b_{-i}),u_i(\pi),c_i(\pi))\\
& -\max_{(w_i(\theta),d_i(\theta))_{\theta\in\Theta}}[g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi',b_{-i}),w_i(\pi'),d_i(\pi'));u_i(\pi),c_i(\pi),v_i(\pi'))+\hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi',b_{-i}),w_i(\pi'),d_i(\pi'))]\\
\geqslant\ & -(2+n)(2n+1)M||\pi-\pi'||\\
=\ & -(2+n)(2n+1)M||\rho(b)-\rho(b_{-i},r_i)||.
\end{aligned}$$

因此，若满足以下条件，第一阶段的偏离将无利可图：

$$-(2+n)(2n+1)M\sum_{b_{-i}}||\rho(b)-\rho(b_{-i},r_i)||P_{-i}(b_{-i}|b_i)+\sum_{b_{-i}}[\xi_i(b)-\xi_i(b_{-i},r_i)]P_{-i}(b_{-i}|b_i)>0.$$

为完成证明，我们构造一个由球面评分规则定义的奖励机制 $(\xi_i)_{i\in N}$：对于每个 b 和 i,

$$\xi_i(b)=\delta\frac{P_{-i}(b_{-i}|b_i)}{||P_{-i}(\cdot|b_i)||_2}.$$

由于

$$\sum_{b_{-i}\in B_{-i}}[\xi_i(b)-\xi_i(b_{-i},r_i)]P_{-i}(b_{-i}|b_i))>0$$

我们可以选择 δ，从而确保所有代理人都如实报告其第一阶段信号。

4.5 评述

与此前的论文 McLean 和 Postlewaite（2017）不同，我们并未声称定理1中定义的序贯占优策略评估（α^*、β^*、μ^*）是一个完美贝叶斯均衡评估。注意，对于 $r_i\neq b_i$，均衡路径不会经过由 $(r_i$、π、$b_i)$ 标记的信息集，其中 $\pi\in\Pi_i(r_i)$.。在这些信息集中确定与贝叶斯法则相容的信念并不困难，我们已在上文计算出 $\mu_i^*(\theta$、$b_{-i}|r_i$、π、$b_i)$。在这些信息集中定义第二阶段策略也不困难，我们将 $\beta_i^*(r_i$、π、$b_i)=(u_i(\theta)$、$c_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$ 定义如上。困难在于，当 i 想要在这些未到达的信息集之一计算其最佳回应时。如果 i 知道 $(u_j(\theta)$、$c_j(\theta))_{j\neq i}$（如 McLean and Postlewaite（2017）中那样），那么在收到信号 b_i、报告 r_i 并随后观察到发布的 $\pi\in\Pi_i(r_i)$ 后，买方 i 可以先计算 $(u_j(\pi)$、$c_j(\pi)_{j\neq i}$，再根据该信息集上的信念计算最佳回应。也就是说，i 随后可以计算使下式最大化的 $(w_i(\theta)$、$d_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$

$$\sum_{b_{-i}\in B_{-i}}\sum_{\theta\in\Theta}[g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi,b_{-i}),w_i(\pi),d_i(\pi));u_i(\theta),c_i(\theta),v_i(\pi)]+\hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi,b_{-i}),w_i(\pi),d_i(\pi)))\mu_i(\theta,b_{-i}|r_i,\pi,b_i)$$

对于 $\pi\in\Pi_i(r_i)$.请注意，即使 i能够计算出 $(u_j(\pi),c_j(\pi)_{j\neq i}$，也未必有 $(u_i(\theta),c_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$ 是买方i的最佳回应。

在本文中，我们假设 i 并不知道其他参与者的收益外部性概况，也不假设 i 对这些概况有任何信念。然而，在均衡路径上，买方 i 无需知道 $(u_j(\theta)$、$c_j(\theta))_{j\neq i}$.的真实值。只要所有买方都如实报告其第一阶段信号，买方 i就可以确定，无论 i的对手采用何种第二阶段策略，他都应在第二阶段如实报告 $(u_i(\theta)$、$c_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$。

5 大 n 的问题

确保买方在第一阶段诚实报告的奖励可能相当大，因此，识别一个单个第一阶段奖励，甚至这些奖励之和都很小的模型，是有用的。为此，我们定义一个具有相互依存估值的特殊分配问题序列 $(u^n、\ v^n、\ c^n、\ P^n)$。假设存在一个有限集X，使得对于所有 $i.$ 均有 $B_i = X$。因此，我们写作 $B = X^n$，其中 X^n 是 n 个 X的笛卡尔积。对于每个 n 以及每个 $i \in N = \{1、...、\ n\}$，令 $u_{ij}^n(\theta)、\ c^{n,ij^{p\ q}}(\theta)$,和 $v_{ij}^n(\theta)$ 分别表示当 i 在状态 $\theta.$ 下与 j 匹配时的估值、外部性和卖方成本。此外，假设对于所有 n 以及所有 $i、\ j \in N、\ u_{ij}^n(\theta) \leqslant M、\ c^{n,ij^{p\ q}}(\theta), \leqslant M$，且对于某个 $M > 0$.有 $v_{ij}^n(\theta) \leqslant M$。

定义3：三元组序列 (u^n, c^n, v^n, P^n) 是一个具有相互依存估值的分配问题条件独立序列，当且仅当序列 $P^n \in \Delta^*_{\Theta \times X^n}$ 满足：

(i) 存在 $\lambda \in \Delta^*(\Theta)$，并且对每个 $\theta \in \Theta$，都存在一个 $Q(\cdot|\theta) \in \Delta^*(X)$，使得对每个 $b \in X^n$,

$$P^n(\theta, b) = \left[\prod_{i=1}^{n} Q(b_i|\theta)\right] \lambda(\theta).$$

(ii) 令 $\hat{}P$ 表示 P^n 在 $B_i \times B_j (= X \times X)$ 上针对 $i \neq j.$ 的共同边际分布。对 X 中满足 $\hat{}\hat{}b_i \neq b_i'$ 的每一对 (i, j) 和 b_i, b_i'，都存在 $b_j \in X$，使得 $P(b_j|b_i) \neq P(b_j|b_i').$

定理2：设 (u^n, c^n, v^n, P^n) 是一个条件独立匹配问题序列。存在一个 $\hat{}n$，使得对所有 $n > \hat{}n$，都存在一个奖励机制 $\xi^n = (\xi_i^n)_{i \in N}$，使得两阶段博弈 $\Gamma(u^n, v^n, c^n, P^n, \xi^n)$ 存在序贯占优策略评估。此外，对每个 k，我们都可以选择 ξ^n，使得对每个 $b \in X^n.$，$\sum_{i=1}^n \xi_i^n(b) \sim O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

6 定理1的证明

6.1 预备引理

引理 A：设 M $w_{ij}(\theta)\ v_{ij}(\theta)\ d_{ij}^{pq}(\theta)$ $0 \leqslant w_{ij}(\theta)\ v_{ij}(\theta)\ d_{ij}^{pq}(\theta) \leqslant M$ $i\ j\ p\ q\ \theta$ $\pi \in \Delta(\Theta)$ $w_i(\pi)\ v_i(\pi)\ d_i(\pi)$ 1 1 为一个正数，并设，，是一组满足，，对所有，，，，都成立的数。对每个，按第 节中的定义设，，。对每个 $\pi \in \Delta(\Theta)$，令

$$F(\pi) = \max_{z \in Z} \sum_{i=1}^{n} g_i(z; w_i(\pi), d_i(\pi), v_i(\pi)).$$

那么对每个 $\pi, \pi' \in \Delta(\Theta)$,

$$|F(\pi) - F(\pi')| \leqslant 2nM||\pi - \pi'||.$$

证明：对每个 $z \in Z$，令

$$G_\pi(z) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\theta \in \Theta} g_i(z; w_i(\theta), d_i(\theta), v_i(\theta))\pi(\theta)\right]$$

并令

$$\xi(\pi) \in \arg\max_{z \in Z} G_\pi(z).$$

Then

$$\begin{aligned}
F(\pi) - F(\pi') &= G_\pi(\xi(\pi)) - G_{\pi'}(\xi(\pi')) \\
&= G_\pi(\xi(\pi)) - G_{\pi'}(\xi(\pi')) + G_{\pi'}(\xi(\pi)) - G_{\pi'}(\xi(\pi)) \\
&\leqslant G_\pi(\xi(\pi)) - G_{\pi'}(\xi(\pi)) \\
&= \sum_{\theta \in \Theta} \left[\sum_{i=1}^{n} g_i(\xi(\pi); w_i(\theta), d_i(\theta), v_i(\theta))\right] [\pi(\theta) - \pi'(\theta)] \\
&\leqslant (2 + n)nM||\pi - \pi'||.
\end{aligned}$$

通过互换 π 和 π'.的角色即可得出该结果

引理 B：设 M $w_{ij}(\theta)\ v_{ij}(\theta)\ d_{ij}^{pq}(\theta)$ $0 \leqslant$为一个正数，并 $w_{ij}(\theta)\ v_{ij}(\theta)\ d_{ij}^{pq}(\theta) \leqslant M$ $i\ j\ p\ q\ \theta$ $\pi \in \Delta(\Theta)$ $w_i(\pi)\ v_i(\pi)\ d_i(\pi)$ 1 1
设，，是一组满足，，对所有，，，，的数。对于每个，按照第 . 节中的定义定义，，。定义

$$\xi(\pi) \in \arg\max_{z \in Z} \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i(z; w_i(\pi), d_i(\pi), v_i(\pi)) \right\}$$

以及每个买方的 VCG转移支付 $\eta_i(\pi)$ ， 即

$$\eta_i(\pi) = \sum_{\substack{k \\ :k \neq i}} g_k(\xi(\pi); w_k(\pi), d_k(\pi), v_k(\pi)) - \max_{z \in Z_{-i}} \sum_{\substack{k \\ :k \neq i}} g_k(z; w_k(\pi), d_k(\pi), v_k(\pi)).$$

那么对于所有 π、 $\pi' \in \Delta(\Theta)$,

$$|g_i(\xi(\pi'); w_i(\pi'), d_i(\pi'), v_i(\pi')) + \eta_i(\pi') - [g_i(\xi(\pi); w_i(\pi), d_i(\pi), v_i(\pi)) + \eta_i(\pi)]| \leqslant (2+n)2nM||\pi - \pi'||.$$

证明：应用引理 A，可得

$$\begin{aligned}
& g_i(\xi(\pi'); w_i(\pi'), d_i(\pi'), v_i(\pi')) + \eta_i(\pi') - [g_i(\xi(\pi); w_i(\pi), d_i(\pi), v_i(\pi)) + \eta_i(\pi)] \\
= \ & \max_{z \in Z} \left[\sum_{i=1}^{n} g_i(z; w_i(\pi'), d_i(\pi'), v_i(\pi')) \right] - \max_{z \in Z} \left[\sum_{i=1}^{n} g_i(z; w_i(\pi), d_i(\pi), v_i(\pi)) \right] \\
& + \max_{z \in Z_{-i}} \left[\sum_{\substack{k \\ :k \neq i}} g_k(z; w_k(\pi), d_k(\pi), v_k(\pi)) \right] - \max_{z \in Z_{-i}} \left[\sum_{\substack{k \\ :k \neq i}} g_k(z; w_k(\pi'), d_k(\pi'), v_k(\pi')) \right] \\
\leqslant \ & (2+n)nM||\pi - \pi'|| + (2+n)nM||\pi - \pi'||.
\end{aligned}$$

6.2 定理1的证明

设每个 i 对应一个 $\alpha_i^*(b_i) = b_i$ 和一个 b_i， 并回顾一下，β_i^*对买方 i 的定义如下： $\beta_i(r_i、\ \pi、\ b_i) = (u_i(\pi)、\ c_i(\pi))$， 对于每个满足 $r_i \in B_i.\pi \in \Pi_i(r_i)$的 $(r_i、\ \pi、\ b_i)$， 以及 $b_i \in B_i$.
按照第 2.4 节的定义，为代理人 i 在每个信息集 (r_i, π, b_i) 处定义信念 $\mu_i^*(\cdot|r_i, \pi, b_i) \in \Delta(\Theta \times B_{-i})$， 使得沿着均衡路径，我们有

$$\begin{aligned}
\mu_i(\theta, b_{-i}|b_i, \pi, b_i) &= \frac{P_\Theta(\theta|b_{-i}, b_i) P_{-i}(b_{-i}|b_i)}{\sum_{\hat{b}_{-i}: \rho(\hat{b}_{-i}, b_i) = \pi} P_{-i}(\hat{b}_{-i}|b_i)} \text{ if } \rho(b_{-i}, b_i) = \pi \\
&= 0 \text{ otherwise.}
\end{aligned}$$

接下来， 令 ξ_i 为由球面评分规则定义的第一阶段奖励：对于每个 b 和 i， 令

$$\xi_i(b_{-i}, b_i) = \delta \frac{P_{-i}(b_{-i}|b_i)}{||P_{-i}(\cdot|b_i)||_2}.$$

我们将证明， 可以选择 δ ， 使得 $((\alpha^*, \beta^*), \mu^*)$ 构成博弈$\Gamma(u, c, v, P, \xi)$.中的序贯占优策略评估

第 1 部分：策略组合 (α^*, β^*) 是真实的。为证明序贯占优策略评估定义的第（ii）部分成立，假设 $(\beta_j)_{j \neq i}$ 是 i 的对手的一组第二阶段策略。我们先简化记号：对每个 $b_{-i} \in B_{-i}$ 和每个 $k \neq i$， 记作

$$\sum_{\theta} [\beta_k(b_k, \pi, b_k)](\theta)\pi(\theta) = \gamma_k(\pi, b_k)$$

and

$$(\gamma_j(\pi, b_j))_{j\neq i} = \gamma_{-i}(\pi, b_{-i}).$$

我们假设所有买方在第一阶段都采取真实策略，并且必须证明对于每个 $b_i \in B_i$ 和 $\pi \in \Pi(b_i)$ 以及每个 $(w_i(\theta), d_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$，都有

$$\begin{aligned}
&\sum_{b_{-i}\in B_{-i}} \sum_{\theta\in\Theta} [g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), u_i(\pi), c_i(\pi)); u_i(\theta), c_i(\theta), v_i(\pi)) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), u_i(\pi), c_i(\pi)))]\mu_i(\theta, b_{-i}|b_i, \pi, b_i) \\
\geqslant &\sum_{b_{-i}\in B_{-i}} \sum_{\theta\in\Theta} [g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), w_i(\pi), d_i(\pi)); u_i(\theta), c_i(\theta), v_i(\pi)) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), w_i(\pi), d_i(\pi))]\mu_i(\theta, b_{-i}|b_i, \pi, b_i).
\end{aligned}$$

注意到，机制的占优策略性质意味着，对于每个 π 和 b_{-i}，

$$\begin{aligned}
&g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), w_i(\pi), d_i(\pi)); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\pi)) + x_i(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), w_i(\pi), d_i(\pi)) \\
\leqslant\ &g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), u_i(\pi), c_i(\pi)); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\pi)) + x_i(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), u_i(\pi), c_i(\pi)).
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\sum_{b_{-i}\in B_{-i}} \sum_{\theta\in\Theta} \left[g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), w_i(\pi), d_i(\pi)); u_i(\theta), c_i(\theta), v_i(\pi)) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), w_i(\pi), d_i(\pi)) \right] \mu_i(\theta, b_{-i}|b_i, \pi, b_i) \\
= &\sum_{\substack{b_{-i}\in B_{-i} \\ :\rho(b_{-i}, b_i)=\pi}} \sum_{\theta\in\Theta} \left[g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), w_i(\pi), d_i(\pi)); u_i(\theta), c_i(\theta), v_i(\pi)) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), w_i(\pi), d_i(\pi)) \right] \frac{P_\Theta(\theta|b_{-i}, b_i) P_{-i}(b_{-i}|b_i)}{\sum_{\hat{b}_{-i}:\rho(\hat{b}_{-i}, b_i)=\pi} P_{-i}(\hat{b}_{-i} b_i)} \\
= &\sum_{\substack{b_{-i}\in B_{-i} \\ :\rho(b_{-i}, b_i)=\pi}} \left[\sum_{\theta\in\Theta} g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), w_i(\pi), d_i(\pi)); u_i(\theta), c_i(\theta), v_i(\pi)) P_\Theta(\theta|b_{-i}, b_i) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), w_i(\pi), d_i(\pi)) \right] \frac{P_{-i}(b_{-i}|b_i)}{\sum_{\hat{b}_{-i}:\rho(\hat{b}_{-i}, b_i)=\pi} P_{-i}(\hat{b}_{-i} b_i)} \\
= &\sum_{\substack{b_{-i}\in B_{-i} \\ :\rho(b_{-i}, b_i)=\pi}} \left[g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), w_i(\pi), d_i(\pi)); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\pi)) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), w_i(\pi), d_i(\pi)) \right] \frac{P_{-i}(b_{-i}|b_i)}{\sum_{\hat{b}_{-i}:\rho(\hat{b}_{-i}, b_i)=\pi} P_{-i}(\hat{b}_{-i} b_i)} \\
\leqslant &\sum_{\substack{b_{-i}\in B_{-i} \\ :\rho(b_{-i}, b_i)=\pi}} \left[g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), u_i(\pi), c_i(\pi)); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\pi)) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), u_i(\pi), c_i(\pi)) \right] \frac{P_{-i}(b_{-i}|b_i)}{\sum_{\hat{b}_{-i}:\rho(\hat{b}_{-i}, b_i)=\pi} P_{-i}(\hat{b}_{-i} b_i)} \\
= &\sum_{b_{-i}\in B_{-i}} \sum_{\theta\in\Theta} [g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), u_i(\pi), c_i(\pi); u_i(\theta), c_i(\theta), v_i(\pi)) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), u_i(\pi), c_i(\pi))]\mu_i(\theta, b_{-i}|b_i, \pi, b_i)
\end{aligned}$$

其中倒数第二个不等式由 VCG机制的占优策略性质推出。

第2部分：为完成证明，我们必须证明，可以选择第一阶段奖励 ξ_i，使得在其他参与者的任意行为策略组合 $(\alpha_{-i}、\ \beta_{-i})$ 下，买方 i 跨阶段进行协调偏离都无利可图。为此，选择 $b = (b_{-i}、\ b_i)、\ r_i \in B_i$，并令 $\pi = \rho(b)$ 和 $\pi' = \rho(b_{-i}、\ r_i)$.。对于每个 $j \neq i$ 和 θ，令

$$\sum_{\theta\in\Theta} [\beta_j(\alpha_j(b_j), \pi, b_j)](\theta)\pi(\theta) = \gamma_j(\pi, b_j)$$

and

$$\sum_{\theta\in\Theta} [\beta_j(\alpha_j(b_j), \pi', b_j)](\theta)\pi'(\theta) = \gamma_j(\pi', b_j).$$

令 $(\gamma_j(\pi、\ b_j))_{j\neq i} = \gamma_{-i}(\pi、\ b_{-i})$ a nd $(\gamma_j(\pi', b_j))_{j\neq i} = \gamma_{-i}(\pi', b_{-i})$. 我们声称，对于所有 $(w_i(\theta), d_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$，都有 e

$$\begin{aligned}
&g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), u_i(\pi), c_i(\pi)); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\pi)) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), u_i(\pi), c_i(\pi)) \\
&-[g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi')); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\pi')) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi'))] \\
\geqslant\ &-(2+n)(2n+1)M||\pi - \pi'||.
\end{aligned}$$

首先，注意到

$$\begin{aligned}
& |g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi')); u_i(\pi'), c_i(\pi'), v_i(\pi')) - [g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi')); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\pi))]| \\
= & |\sum_{\theta} g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi')); u_i(\theta), c_i(\theta), v_i(\theta))[\pi'(\theta) - \pi(\theta)]| \\
\leqslant & (2+n)M||\pi' - \pi||
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
& |g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi')); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\pi)) - [g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi')); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\pi'))]| \\
= & |\sum_{\theta} g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi')); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\theta))[\pi(\theta) - \pi'(\theta)]| \\
\leqslant & (2+n)M||\pi' - \pi||.
\end{aligned}$$

由于VCG机制的占优策略性质意味着

$$\begin{aligned}
& g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), u_i(\pi'), c_i(\pi')); u_i(\pi'), c_i(\pi'), v_i(\pi')) + \hat{x}_i(w'_j(\pi), d'_j(\pi))_{j\neq i}, u_i(\pi'), c_i(\pi')) \\
\geqslant & g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi'); u_i(\pi'), c_i(\pi'), v_i(\pi') + \hat{x}_i((w'_j(\pi), d'_j(\pi))_{j\neq i}, w_i(\pi'), d_i(\pi'))
\end{aligned}$$

因此，根据引理A和引理B可得

$$\begin{aligned}
& g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), u_i(\pi), c_i(\pi)); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\pi)) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), u_i(\pi), c_i(\pi)) \\
& -[g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi')); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\pi')) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi'))] \\
= & g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), u_i(\pi), c_i(\pi)); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\pi)) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi, b_{-i}), u_i(\pi), c_i(\pi)) \\
& -[g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), u_i(\pi'), c_i(\pi')); u_i(\pi'), c_i(\pi'), v_i(\pi')) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), u_i(\pi'), c_i(\pi'))] \\
& +g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), u_i(\pi'), c_i(\pi')); u_i(\pi'), c_i(\pi'), v_i(\pi')) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), u_i(\pi'), c_i(\pi')) \\
& -[g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi')); u_i(\pi'), c_i(\pi'), v_i(\pi')) + \hat{x}_i(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi'))] \\
& +g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi')); u_i(\pi'), c_i(\pi'), v_i(\pi')) \\
& -g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi')); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\pi)) \\
& +g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi')); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\pi)) \\
& -g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\pi', b_{-i}), w_i(\pi'), d_i(\pi')); u_i(\pi), c_i(\pi), v_i(\pi')) \\
\geqslant & -[(2+n)2nM||\pi - \pi'|| + (2+n)M||\pi' - \pi|| + (2+n)M||\pi' - \pi||] \\
= & -(2+n)(2n+1)M||\pi - \pi'||.
\end{aligned}$$

第3部分：为完成证明，我们必须证明可以选择第一阶段奖励 ξ_i，使得对于所有 $r_i \in B_i$ 以及所有 $(w_i(\theta)、d_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$，都有

$$\begin{aligned}
& \sum_{b_{-i}\in B_{-i}} [g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\rho(b), b_{-i}), u_i(\rho(b)), c_i(\rho(b)); u_i(\rho(b)), c_i(\rho(b)), v_i(\rho(b))) + \\
& +\hat{x}_i(\gamma_{-i}(\rho(b), b_{-i}), u_i(\rho(b)), c_i(\rho(b))) + \xi_i(b)]P(b_{-i}|b_i) \geqslant \\
\geqslant & \sum_{b_{-i}\in B_{-i}} [g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\rho(b_{-i}, r_i), b_{-i}), w_i(\rho(b_{-i}, r_i)), d_i(\rho(b_{-i}, r_i)); u_i(\rho(b)), c_i(\rho(b)), v_i(\rho(b_{-i}, r_i))) + \\
& +\hat{x}_i(\gamma_{-i}(\rho(b_{-i}, r_i), b_{-i}), w_i(\rho(b_{-i}, r_i)), d_i(\rho(b_{-i}, r_i))) + \xi_i(b_{-i}, r_i)]P(b_{-i}|b_i)
\end{aligned}$$

如果 $\delta > 0$ 并且

$$\xi_i(b_{-i}, b_i) = \delta \frac{P_{-i}(b_{-i}|b_i)}{||P_{-i}(\cdot|b_i)||_2}$$

then

$$\sum_{(b_{-i}, s)} [\xi_i(b_{-i}, b_i) - \xi_i(b_{-i}, r_i)]P_{-i}(b_{-i}|b_i)) > 0$$

每当 $b_i \neq r_i$ （回想 t 当 $P(\cdot|b_i) \neq P(\cdot|r_i)$ 时 $b_i \neq r_i$). 因此，我们可以选择 $\delta > 0$ 使得

$$\begin{aligned}
&\sum_{b_{-i}\in B_{-i}}\Big[g_i(\hat{\varphi}(\beta_j(\alpha_j(b_j),\rho(b),b_j)_{j\neq i},u_i(\rho(b)),c_i(\rho(b)));u_i(\rho(b)),c_i(\rho(b)),v_i(\rho(b)))+\\
&+\hat{x}_i(\beta_j(\alpha_j(b_j),\rho(b),b_j)_{j\neq i},u_i(\rho(b)),c_i(\rho(b)))+\xi_i(b)\Big]P(b_{-i}|b_i)-\\
&-\Big[\sum_{b_{-i}\in B_{-i}}[g_i(\hat{\varphi}(\beta_j(\alpha_j(b_j),\rho(b_{-i},r_i),b_j)_{j\neq i},w_i,d_i);u_i(\rho(b)),c_i(\rho(b)),v_i(\rho(b_{-i},r_i)))+\\
&+\hat{x}_i(\beta_j(\alpha_j(b_j),\rho(b_{-i},r_i),b_j)_{j\neq i},w_i,d_i)+\xi_i(b_{-i},r_i)]P(b_{-i}|b_i)\Big]\geqslant\\
\geqslant\ & -(2+n)(2n+1)M\sum_{b_{-i}}||\rho(b)-\rho(b_{-i},r_i)||P_{-i}(b_{-i}|b_i)+\sum_{b_{-i}}[\xi_i(b)-\xi_i(b_{-i},r_i)]P_{-i}(b_{-i}|b_i)\\
>\ & 0.
\end{aligned}$$

至此，定理1的证明完成。

7 定理2的证明

7.1 预备知识

定理2的证明与McLean 和 Postlewaite （2015年）中定理3的证明非常相似，因此我们省略大部分细节。与该证明一样，我们将把 $P^n \in \Delta^*_{\Theta\times X^n}$ 视为一个取值于 $(\Theta \times X^n)$的随机˜ ˜变量，并记作 $(\theta,\ b)$，即，

$$\text{Prob}\{(\tilde{\theta},\tilde{b})=(\theta,b)\}=P^n(\theta,b)$$

对于每个 $(\theta、\ b)\in\Theta\times X^n.$，对于每个 n 以及每个 i 和 j，定义

$$\nu_i^n=\max_{b_i\in X}\max_{r_i\in X}\min\{\varepsilon\geqslant 0|||\text{Prob}\{P^n_\Theta(\cdot|\tilde{b}_{-i},b_i)-P^n_\Theta(\cdot|\tilde{b}_{-i},r_i)||>\varepsilon|\tilde{b}_i=b_i\}\leqslant\varepsilon\}$$

由 McLean 和 Postlewaite (2015年 中引理 B 的证明，我们得出，对于每个 $\nu_i^n \sim O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ 正整数 k。

接下来，假设 $b=(b_{-i、}\ b_i)\in X^n$ 和 $r_i\in X.$。定义 $\rho^n(b)=P^n_\Theta(\cdot|b)$ 和 $\rho^n(b_{-i、}\ r_i)=P^n_\Theta(\cdot|b_{-i、}\ r_i).$。令 M 为定理2陈述中定义的界。由定理1证明中的步骤 2 可知，

$$\begin{aligned}
&g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\rho^n(b),b_{-i}),u_i^n(\rho^n(b)),c_i^n(\rho^n(b)));u_i^n(\rho^n(b)),c_i^n(\rho^n(b)),v_i^n(\rho^n(b)))+\hat{x}_i(\gamma_{-i}(\rho^n(b),b_{-i}),u_i^n(\rho^n(b)),c_i^n(\rho^n(b)))\\
&-[g_i(\hat{\varphi}(\gamma_{-i}(\rho^n(b_{-i},r_i),b_{-i}),w_i(\rho^n(b_{-i},r_i)),d_i(\rho^n(b_{-i},r_i)));u_i^n(\rho^n(b)),c_i^n(\rho^n(b)),v_i^n(\rho^n(b_{-i},r_i)))+\\
&+\hat{x}_i(\gamma_{-i}(\rho^n(b_{-i},r_i),b_{-i}),w_i(\rho^n(b_{-i},r_i)),d_i(\rho^n(b_{-i},r_i)))]\geqslant-(2+n)(2n+1)M||\rho^n(b)-\rho^n(b_{-i},r_i)||.
\end{aligned}$$

要证明定理2，只需证明，对于每个 k，我们都能找到第一阶段奖励 ξ_i，使得

$$n^k\sum_{i=1}^n\xi_i(b)\underset{n\to\infty}{\to}0$$

and

$$-(2+n)(2n+1)M\sum_{b_{-i}\in X^{n-1}}||\rho^n(b)-\rho^n(b_{-i},r_i)||P^n_{-i}(b_{-i}|b_i)+\sum_{b_{-i}\in X^{n-1}}[\xi_i(b)-\xi_i(b_{-i},r_i)]P^n_{-i}(b_{-i}|b_i)>0$$

对所有充分大的 n。

选择 $k>1$，并对每个 $b=(b_1,..,b_n)\in X^n$，定义

$$\begin{aligned}\xi_i(b_{-i},b_i)&=\frac{1}{n^{k+2}}\frac{\hat{P}(b_{i+1}|b_i)}{||\hat{P}(\cdot|b_i)||_2}\text{ if } i=1,..,n-1\\&=\frac{1}{n^{k+2}}\frac{\hat{P}(b_1|b_i)}{||\hat{P}(\cdot|b_i)||_2}\text{ if } i=n\end{aligned}$$

ˆ其中 P 的定义与定理2中的相同。因此，

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}\xi_i(b_{-i},b_i)\leqslant\frac{1}{n^{k+1}}$$

对所有 i、b_{-i} 和 b_i 均成立。

令 $|X|$ 表示 X，并令 $K=\frac{|X|^{-\frac{5}{2}}}{4(|X|-1)}$. 应用McLean 和 Postlewaite (2004年中的引理 A.3，我们得出

$$\begin{aligned}&\sum_{b_{-i}}\left(\xi_i(b)-\xi_i(b_{-i},r_i)\right)P^n_{-i}(b_{-i}|b_i)\\=&\sum_{b_{-i}}\frac{1}{n^{k+2}}\left[\frac{\hat{P}(b_{i+1}|b_i)}{||\hat{P}^n(\cdot|b_i)||_2}-\frac{\hat{P}(b_{i+1}|r_i)}{||\hat{P}^n(\cdot|r_i)||_2}\right]P^n_{-i}(b_{-i},|b_i)\\=&\sum_{x\in X}\frac{1}{n^{k+2}}\left[\frac{\hat{P}(x|b_i)}{||\hat{P}(\cdot|b_i)||_2}-\frac{\hat{P}(x|r_i)}{||\hat{P}(\cdot|r_i)||_2}\right]\hat{P}^n(x|b_i)\\>&\frac{1}{n^{k+2}}K(||\hat{P}(\cdot|b_i)-\hat{P}(\cdot|r_i)||)^2.\end{aligned}$$

为完成论证，定义

$$A_i(r_i,b_i)=\{b_{-i}\in B_{-i}|\ ||P^n_\Theta(\cdot|b_{-i},b_i)-P^n_\Theta(\cdot|b_{-i},r_i)||>\hat{\nu}^n_i\}$$

and

$$C_i(r_i,b_i)=\{b_{-i}\in B_{-i}|\ ||P^n_\Theta(\cdot|b_{-i},b_i)-P^n_\Theta(\cdot|b_{-i},r_i)||\leqslant\hat{\nu}^n_i\}.$$

由于

$$\text{Prob}\{\tilde{b}_{-i}\in A_i(r_i,b_i)|\tilde{b}_i=b_i\}\leqslant\nu^n$$

我们得出

$$\begin{aligned}&\sum_{b_{-i},\in X^{n-1}}||\rho^n(b)-\rho^n(b_{-i},r_i)||P^n(b_{-i}|b_i)\\=&\sum_{b_{-i}\in A_i(r_i,b_i)}||\rho^n(b)-\rho^n(b_{-i},r_i)||P^n(b_{-i}|b_i)+\sum_{b_{-i}\in C_i(r_i,b_i)}||\rho^n(b)-\rho^n(b_{-i},r)||P^n(b_{-i}|b_i)\\\leqslant&\ 2\nu^n\end{aligned}$$

因此，对于所有充分大的 n，我们有

$$\begin{aligned}&-(2+n)(2n+1)M\sum_{b_{-i}}||\rho^n(b)-\rho^n(b_{-i},r_i)||P^n_{-i}(b_{-i}|b_i)+\sum_{b_{-i}}[\xi_i(b)-\xi_i(b_{-i},r_i)]P^n_{-i}(b_{-i}|b_i)\\\geqslant&\ -(2+n)(2n+1)M2\nu^n+\frac{1}{n^{k+2}}K(||\hat{P}(\cdot|b_i)-\hat{P}(\cdot|r_i)||)^2\\=&\frac{1}{n^{k+2}}\left[K(||\hat{P}(\cdot|b_i)-\hat{P}(\cdot|r_i)||)^2-n^{k+2}(2+n)(2n+1)M2\nu^n\right]\\>&\ 0.\end{aligned}$$

8 讨论

1. 我们假设买方 i 的估值 u_i 和外部性成本 c_i 仅为未观测状态 θ. 的函数。虽然这会使符号表示更加复杂，但我们也可以允许这些函数同时依赖信号 b_i.

2. 在我们的模型中，买方会收到与状态 θ 相关的私人信号。此外，每位买方的估值（$(u_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$ 和外部性（$(c_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$ 也属于该买方的私人信息，而成本（$(v_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$ 则为所有代理人和机制所知。因此，在我们的模型中，卖方不是策略性参与者。我们可以允许每位卖方 j 也收到与状态相关的私人信号。这样一来，机制便需要获取买方和卖方私人观察到的信号，以计算有效配置。如果我们保留如下假设：最优分配中每一对配对所产生的剩余都归买方所有（本文即采用此假设），并假设所有代理人和机制都知道卖方的成本（但不知道其信号），那么我们就能为买方和卖方设计第一阶段奖励，促使他们在第一阶段诚实报告。

3. 我们的两阶段表述能够消除私人信号导致的相互依赖，从而将第二阶段问题简化为一个更简单的实施问题，并可通过经典的私人价值VCG转移支付来获取买方的估值和外部性。该模型有两个自然的扩展，但它们会带来挑战。

例如，我们可以允许最优分配中每一对配对所产生的剩余归买方所有（正如本文所做的那样），但假设卖方的估值和买方的估值都是私人信息。此时，机制必须诱导买方报告其估值，并诱导卖方报告其成本。在这种情况下，第一阶段信号公布后的第二阶段将不再是私人价值下的实施问题，因为买方 i 的收益取决于与其配对的卖方的估值，而该估值是卖方的私人信息。因此，经典的私人价值VCG转移支付通常无法激励诚实报告。

4. 本文对参与者和机制对于博弈数据所知内容作了较弱的假设。所有代理人和机制都知道概率测度 $P\in\Delta^*(\Theta\times B)$、卖方的成本 $(v_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$、以及估值、外部性和成本的界 M 。然而，买方 i的估值和外部性参数($u_i(\theta)$、 $c_i(\theta))_{\theta\in\Theta}$ 只有 i 知道。正如我们所强调的，我们不采用贝叶斯视角，也不为 i 设定关于其他买方估值和外部性的信念。这些假设既有缺点，也有优点。可以说，我们的模型最适用于 n 较大的情形，原因有二。第一，在买方人数较多时，估值和外部性为共同知识这一假设似乎最不可信。第二，根据定理2，在条件独立框架下，对于每一个 k ，我们都可以找到一列第一期奖励 $(\xi_i^n)_{i=1}^n$ ，使得$n^k\sum_{i=1}^n\xi_i^n(b)\to 0$ 当 $n\to\infty$. 时成立。因此，在较弱的信息假设下，我们得到一种序贯占优策略评估，其第一期总支付渐近可忽略。无论参与者人数是否众多，这种较弱的信息假设都伴随着代价。在均衡路径未经过的第二阶段信息集上，我们无法确定定理1提出的均衡评估是否序贯理性。如果估值和外部性是共同知识，且信号是信息不对称的唯一来源（如McLean 和 Postlewaite (2017) 中所述），那么在这种情况下，我们可以提出一个在每个信息集上都序贯理性的真实均衡，从而得到一个完美贝叶斯均衡。

参考文献

Lawrence M Ausubel. 异质商品的高效动态拍卖。《美国经济评论》，96（3）：602–629，2006年。

Gabrielle Demange 和 David Gale。《双边匹配市场的策略结构》。《Econometrica: Journal of the Econometric Society》，第 873–888 页，1985年。

Marcelo Ariel Fernandez、Kirill Rudov 和 Leeat Yariv。《不完全信息下的集中式匹配》。《American Economic Review: Insights》，4(1):18–33，2022年。Philippe Jehiel、Benny Moldovanu 和 Ennio Stacchetti。《如何（不）出售核武器》。《The American Economic Review》，第 814–829 页，1996年。Paul Klemperer。《拍卖：理论与实践》。普林斯顿大学出版社，2004年。Herman B Leonard。《为将个人分配到职位而 elicitation 真实偏好》。《Journal of Political Economy》，91(3):461–479，1983年。Qingmin Liu、George J Mailath、Andrew Postlewaite 和 Larry Samuelson。《不完全信息下的稳定匹配》。《Econometrica》，82(2):541–587，2014年。Richard McLean 和 Andrew Postlewaite。《信息规模与高效拍卖》。《The Review of Economic Studies》，71(3):809–827，2004年。Richard P McLean 和 Andrew Postlewaite。《相互依存估值下的实施》。《Theoretical Economics》，10(3):923–952，2015年。Richard P McLean 和 Andrew Postlewaite。《针对相互依存价值问题的动态非直接实施机制》。《Games and Economic Behavior》，101:34–48，2017年。Yadati Narahari。《博弈论与机制设计》，第 4 卷。World Scientific，2014年。Motty Perry 和 Philip J Reny。《一种高效拍卖》。《Econometrica》，70(3):1199–1212，2002年。Alvin E Roth。《关于他人偏好的信息不完全时的双边匹配》。《Games and Economic Behavior》，1(2):191–209，1989年。