arXiv:2305.01490v1 [math.OC] 2 May 2023

具有吸收状态的随机过程的最优控制问题

YAACOV KOPELIOVICH

Abstract. 本文提出并求解一个针对具有吸收状态的制度转换过程的最优控制问题。该问题的解通过一个偏微分方程组获得。本文将该方法应用于求解对数效用情形下、资产存在违约概率的默顿投资组合问题，并得到其显式解。

1. 引言

贝尔曼原理已经确立近 60 年。对于连续控制问题，它导出 HJB 方程，该方程中的价值函数是最优控制问题的候选解。布朗运动的随机对应形式广为人知，至少从启发式角度看，它只是伊藤引理的简单应用。本文考虑这样一个问题：随机过程是在两个状态之间转换的制度转换过程，其中第二个状态为吸收状态。此类状态在金融和经济领域中十分常见，例如：

- 破产——破产状态是终局性的吸收状态
- 债券转换性——债券转换为股票时。
- 经济状态——在投资组合优化中，对于足够短的时间范围，可以将经济衰退近似为吸收状态

作为一项工业应用，我们可以考虑这样的线性二次控制问题：在该情形下，工厂存在一定概率会升级，从而启动一种新的成本结构和生产制度。新状态将在一段时间内成为吸收状态。

此前已有研究探讨了机制转换下的最优控制问题。例如，在 [7] 中，作者研究了机制转换模型下的默顿投资组合问题，该模型以多只股票的波动率制度为特征。他们建立了关于默顿问题近似最优解的理论。然而，他们论文中的设定比本文考虑的设定限制更少，因此其理论比本文所采用设定下建立的理论更复杂。作者之一 [8] 还研究了一个类似于金融领域马科维茨框架的多状态问题，并针对该问题得到了资产配置问题的解析解。（后一篇论文中的设定略为简单，因为作者旨在最小化多阶段马科维茨问题中的风险。）

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 60H30；次要分类 60J74。
Key words and phrases. HJB 方程，吸收制度过程。

[1], 曾研究过一个包含默顿问题的模型，其中涉及带有破产期权的公司债券、股票和现金；然而，作者并未写出 HJB 方程，只考虑了最终解。

本文考虑的机制转换模型不如 [7] 一般。它的简化特性使得处理过程直接明了，类似于扩散过程通常的 HJB 方程（不涉及机制转换）。我们在论文的第一节中阐述这一方法。

根据贝尔曼原理，我们将问题分解为以下子问题：
(1) 处于吸收状态后的最优问题；(2) 跳跃至吸收状态前的最优问题。

首先，我们求解吸收状态下价值函数的最优控制问题。然后，我们应用伊藤引理，写出吸收状态发生前 J^{pre} 价值函数对应的 HJB 方程。由此得到的偏微分方程组类似于无跳跃的常规扩散过程所对应的贝尔曼方程。我们指出，尽管这种方法直接明了，但我们尚未给出形式化论证，证明我们的方法能够求解具有机制变化的最优问题。在第二节中，我们应用第一节提出的框架，为具有 log 效用函数且存在破产违约率 $h.$ 的情形，求得默顿投资组合问题的解析解。尽管此前已有研究探讨破产问题，但我们提出的解尚未见于文献。

最后一节总结了我们的研究结果，并指出了未来可能的推广方向。

2. HJB 方程——回顾

我们考虑以下过程：

$$\min_u \mathbb{E}\left\{\int_0^T C(t, X_t, u_t)\, dt + D(X_T)\right\}" \tag{2.1}$$

对于随机过程 X_t（$t\in[0,T]$）进行优化，而 u_t（$t\in[0,T]$）是我们需要求得的最优向量。假设我们考虑通常的随机过程（无跳跃），HJB 方程如下：

$$\min_u \{\mathcal{A}V(x,t) + C(t,x,u)\} = 0 \tag{2.2}$$

且 $\mathcal{A}$ 是过程 X_t 的随机微分算子。现在考虑上述针对这类过程的问题：

$$X_t = 1_{t\le\tau}(X_1)_t + 1_{t\ge\tau}(X_2)_t + hdt1_{d\tau}\left[(X_1)_\tau + (X_2)_\tau - (X_1)_\tau\right] \tag{2.3}$$

换言之：$X_(t)$ 满足以下条件：

- 初始状态由随机过程给出 X_1
- 如果出现，终止状态由随机过程给出 X_2
- 在时间 τ，从 X_1 转移到 X_2 的概率由 hdt 给出，条件是此前尚未发生转移。

注 2.1. 换言之，我们可以考虑由随机过程 X_i 和马尔可夫过程构成的两个状态之间的状态切换吸收过程

其转移矩阵的形式为 [1]：

$$\begin{bmatrix} 1-hdt & hdt \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

我们考虑这一随机过程下的一个最优控制问题。我们将在下一节看到，这一问题具有明确的经济动机。将价值函数 $V(x,t)$ 分为两部分：

- $V^{pre}(x,t)$——跳跃发生前的函数
- $V^{after}(x,t)$——跳跃发生后的函数

为了解决这个问题，我们需要求出 $V^{pre}(x,t)$ 和 $V^{after}(x,t)$。首先考虑 $V^{after}(x,t)$：在这种情况下，跳跃已经发生，因此我们面对的是随机过程 X_2 的常规优化问题，但不存在跳跃。在这种情况下，我们可以应用通常的伊藤引理，得到需要求解的以下微分方程：

$$\min_u \left\{ \mathcal{A}_2 V^{after}(x,t) + C(t,x,u) \right\} = 0 \tag{2.4}$$

其中 $\mathcal{A}_2$ 是随机过程 X_2. 的扩散算子。现在我们考虑与 dV^{pre}. 对应的方程。我们需要将状态转换事件纳入伊藤引理。在截至时间 t 状态尚未转换这一条件下，我们考虑两种结果：

- 在区间 $[t, t+dt]$ 内未发生状态转换，概率为 $1-hdt$
- 在区间 $[t, t+dt]$ 内发生了状态转换，概率为 hdt

对这两种结果取期望，我们得到以下 Itø 引理的修正版：

$$E_t(dV^{pre}) = (1-hdt)\mathcal{A}_1 V^{pre}(x,t) + hdt \left[V^{after}(x_t^{after}, t) - V^{pre}(x_t, t \right] \tag{2.5}$$

x_t 是跳跃发生前过程的值，而 x_t^{after} 是跳跃发生后过程的值。利用 $hdt\mathcal{A}_1 = O(dt^2)$ 这一事实，我们得到关于 V^{pre} 的以下随机微分方程

$$\min_u \left\{ \mathcal{A}_1 V(x,t) + h \left[V^{after}(x_t^{after}, t) - V^{pre}(x_t, t) \right] + C(t,x,u) \right\} = 0 \tag{2.6}$$

我们将前面的讨论总结为以下定理：

定理 2.2。设

$$X_t = 1_{t \le \tau}(X_1)_t + 1_{t \ge \tau}(X_2)_t + hdt 1_{d\tau} \left[(X_1)_\tau + (X_2)_\tau - (X_1)_\tau \right] \tag{2.7}$$

是一个具有吸收状态的扩散过程 X_2，其概率为 $h.$。令 $V(x,t)$ 为优化以下目标的价值函数：

$$\min_u \mathbb{E} \left\{ \int_0^T C(t, X_t, u_t)\, dt + D(X_T) \right\} \tag{2.8}$$

[1]感谢 George Yin 指出了这一事实

那么，解 $V(x,t)$ 可以拆分为两个独立的函数 $V^{after}(x,t)$ 和 $V^{pre}(x,t)$，使得每个函数都满足以下偏微分方程组：

$$\min_u \left\{\mathcal{A}_2 V^{after}(x,t) + C(t,x,u)\right\} = 0 \tag{2.9}$$

and

$$\min_u \left\{\mathcal{A}_1 V(x,t) + h\left[V^{after}(x_t^{after},t) - V^{pre}(x_t,t)\right] + C(t,x,u)\right\} = 0 \tag{2.10}$$

其中， A_2、 A_1 是过程 X_1、 X_2 的扩散算子。下一节中，我们将以一种新方法应用这些公式，求解带有破产情形的投资组合默顿问题。

3. 示例——存在破产情形的股票

作为上一节概要的示例，我们考虑在时间范围 $[0,T]$.内进行最优股票配置，使破产概率为 h。关于这一方向的其他研究，参见 [4] 和 [1]；他们的研究似乎与我们的方法最为接近。

若 r 为无风险利率，则股票动态如下：

$$S_t = \tilde{S}_t 1_{t<\tau} \tag{3.1}$$

and

$$\frac{d\tilde{S}}{\tilde{S}} = (\mu dt + \sigma dB)$$

在截至时间 τ 未发生破产事件这一条件下，股票在区间 $[\tau, \tau+dt]$ CONDITIONAL 内破产的概率为 hdt。现在我们希望使用上述方法，求出对股票的最优配置，其中 $S_t.$。我们给出以下引理：

引理 3.1。 π_1 最优股票权重配置为：

$$\pi_1 = \frac{\mu - r - h}{\sigma^2} \tag{3.2}$$

证明。根据上述方法，将价值函数定义为两部分。J^{after} 以及 J^{pre} 破产后仅持有现金，其无风险利率为 r. 假设财富效用为：

$$U(W) = \log W.$$

如果在到期日前发生破产 T 我们只能投资于现金，因此，如果在时间 T 发生破产事件，我们的投资价值为：

$$W \exp(r(t-T)$$

因此：

$$J^{after}(W,t) = r(t-T) + \log W \tag{3.3}$$

在时间 t，在此前尚未破产的条件下，我们有在区间 $[t,t+dt]$ 内破产的概率为h。我们有：

$$dJ^{pre} = J_W^{pre} dW + J_{WW}^{pre}(dW)^2 + {J^{pre}}_t dt + hdt\left[J^{after}(W \times \exp(-\pi_1),t) - J^{pre}(W,t)\right] \tag{3.4}$$

违约前的财富方程动态为:

$$dW = W\left(\pi_1 \mu dt + \pi_1 \sigma dB + (1-\pi_1) r dt\right) \tag{3.5a}$$

$$dW^2 = W^2 \pi_1^2 \sigma^2 dt \tag{3.5b}$$

代入 dJ^{pre} ，得到:

$$\begin{aligned} E_t(dJ^{pre}) = {J^{pre}}_W (W \times (\pi_1 \mu dt + (1-\pi_1) r dt) + \\ \frac{1}{2} J^{pre}_{WW} W^2 \pi_1^2 \sigma^2 dt + {J^{pre}}_t dt \\ + h dt \left[J^{after}(W \times \exp(-\pi_1), t) - J^{pre}(W,t) \right] \end{aligned} \tag{3.6}$$

对于 J^{pre}，假设其形式如下： $J^{pre}(W,t) = f(t) + log(W)$。那么， π_1 达到最优的条件为:

$$\frac{\partial}{\partial \pi_1} E_t\left(dJ^{pre}\right) = (\mu - r)\, dt - \pi_1 \sigma^2 dt - h dt = 0 \tag{3.7}$$

求解 π_1 ，即可得到引理中的公式。 □

假设 $h = 0$ ，我们得到默顿的原始解:

$$\pi_1 = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \tag{3.8}$$

3.1. $J^{pre}(W,t)$表达式。本节证明以下关于$J^{pre}(W,t)$的表达式

定理 3.2。我们有:

$$J^{pre}(t,W) = \frac{-g + \exp(h(t-T)(g-2r) + r(2 + h(t-T)}{h} + \log W \tag{3.9}$$

证明。假设 $J^{pre}(W,t) = f(t) + \log(W)$ 并代回: $\pi_1 = \frac{\mu - r - h}{\sigma^2}$ into

$$\begin{aligned} E_t(dJ^{pre}) = {J^{pre}}_W (W\left(\pi_1 \mu dt + (1-\pi_1) r dt\right) + \\ \frac{1}{2} J^{pre}_{WW} W^2 \pi_1^2 \sigma^2 dt + {J^{pre}}_t dt \\ + h dt \left[J^{after}(W \times \exp(-\pi_1), t) - J^{pre}(W,t) \right] \end{aligned} \tag{3.10}$$

我们得到关于 $f(t)$ 的以下微分方程:

$$\frac{(\mu - r - h)^2 (2 - \sigma^2)}{2\sigma^2} + hr(t-T) + r + f'(t) - h f(t) = 0 \tag{3.11}$$

要对该方程积分，将其改写为:

$$f'(t) - h f(t) = -\frac{(\mu - r - h)^2 (2 - \sigma^2)}{2\sigma^2} - hr(t-T) - r \tag{3.12}$$

上一张幻灯片中的常微分方程将具有以下形式:

$$f'(t) - h f(t) + hr(t-T) = g - r \tag{3.13}$$

初始条件为 $f(T) = 0$，而 $f(t)$ 的解为:

$$f(t) = \frac{-g + \exp(h(t-T)(g-2r) + r(2 + h(t-T)}{h} \tag{3.14}$$

将 $f(t)$ 的解代回 $J^{pre}(W,t)$ 的表达式中，我们得到结果 □

4. 结论

我们概述了一种处理具有吸收过程的动态随机问题的方法。我们的核心思路是递归地求解该问题，应用贝尔曼原理，并针对每个过程得到一个由两个哈密尔顿–雅可比–贝尔曼方程组成的方程组。据我们所知，这一思路尚未在文献中明确提出；它为对数效用假设下股票与现金配置的默顿问题带来了一个简单的解析解。最后，我们就计划在后续论文中继续研究的方法提出几点看法：

(1) 尽管我们将问题限定为两状态问题，但这种方法可以推广到更一般的跳跃情形。(2) 对于任意跳跃过程，我们可以用两状态过程来近似最优问题。例如，如果 X_1 可以转移至 X_2，而 X_2 可以转移回 X_1，则可以忽略第二次转移，并通过求解忽略从 X_2 转移至 X_1的随机控制问题来近似最优问题。) 最后需要指出的是，我们的求解方法尚未完全形式化，因此有必要为该方法建立恰当的数学框架。

致谢。感谢 Oleksey Mostovoyi 对这项工作表现出的兴趣。感谢 George Yin 富有成效的讨论和意见，这些交流显著加深了我们对该主题的理解。

参考文献

1. Bielecki, T.R 和 Jang, I.：《含违约证券的投资组合优化》，*Asia Pacific Financial Markets* **13** 2006 113，第（）卷，第 – 127 页 2. Brennan, M., Schawrtz, E. 和 Lagnado, R.：《战略资产配置》，*Journal of Economic Dynamics and Control* **21**, 8 1997 1377 第 卷第 号（），第 – 1403 页 3. Capponi, A., Fugueroa, J., Lopez, E., Nisen J.：《含违约证券和市场机制转换的动态投资组合优化》，*Mathematical Finance* 第 24 卷第 2 期（2014 249 4 207），第 – 页。4. Karatzas, I.; Lehoczky, J. P.; Sethi, S. P.; Shreve, S. E.：《一般消费／投资问题的显式解》。*Mathematics of Operations Research* 第 11 卷第 2 期，第 261-294 页5 1952 *Journal of Finance* **7**, 1 1952 77 91 。6 Markowitz, H.（）：《投资组合选择》。第 卷第 号（），第 — 页。Merton, R.C.：《连续时间模型中的最优消费与投资组合规则》 *Journal of Economic Theory* **3**, 4 1971 373 413 第 卷第 号（），第 – 页。7 Zhang, Q. 和 Yin, G.：《混合股票投资模型中的近似最优资产配置》。*Journal of Optimization Theory and Applications* **121**, 2 , 2004 419 445：第 卷第 号（），第 — 页。Zhou, X.Y. 和 Yin, G.：《机制转换下的马科维茨均值—方差投资组合选择：连续时间模型》*Siam J. Control Optim.* 第 41 卷第 4 期，第 1466–1482 页8

Yaacov Kopeliovich: Finance Department, University of Connecticut, Storrs, CT06269, USA*Email address*: yaacov.kopeliovich@uconn.edu