arXiv:2305.01504v2 [math.AP] 9 May 2023

Schrödinger 与 Kawahara 方程耦合系统的整体适定性

WANGSEOK SHIN

Abstract. 我们研究实直线上的 Schr¨odinger 方程与 Kawahara 方程耦合系统的局部适定性和整体适定性。索博列夫空间 $L^2 \times H^{-2}$是能够获得最低正则性局部解的空间。能量空间为 $H^1 \times H^2$。我们采用 Colliander-Holmer-Tzirakis 方法 [7] 证明在 $L^2 \times L^2$ 能量不有限的情况下的整体适定性。我们的方法推广了 Colliander-Holmer-Tzirakis 方法，因为用于解耦该系统的算子是非线性的。

1. Introduction

本文考虑实直线 $\mathbb{R}$ 上 Schr¨odinger-Kawahara 耦合系统的柯西问题,

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha uv + \beta|u|^2 u, \\ \partial_t v + \gamma\partial_x^3 v - \delta\partial_x^5 v + v\partial_x v = \varepsilon\partial_x|u|^2, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $u = u(x,t) \in \mathbb{C}$,$v = v(x,t) \in \mathbb{R}$，并且 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ 均为实常数。系统（1）是以下更一般系统的一个特例

$$\begin{cases} i\partial_t S + ic_1\partial_x S + \partial_x^2 S = c_2 SL + c_3|u|^2 u, \\ \partial_t L + c_4\partial_x L + P(\partial_x)L + c_5 L\partial_x L = c_6|S|^2, \end{cases} \tag{2}$$

其中 c_1、c_2、c_3、c_4、c_5、c_6 均为实常数，且 P 是一个常系数多项式。在物理背景下，系统（2）描述了与长短波相互作用有关的各种现象；这里 $S = S(x, t) \in \mathbb{C}$ 和 $L = L(x, t) \in \mathbb{R}$ 分别表示短波和长波。更多细节请参见 [4, 17], 及其中的参考文献。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35Q53，35Q55。

当 $\delta = 0$时，系统（1）化为更著名的薛定谔¨-科特韦格-德弗里斯（SKdV）系统。已有多项研究对 SKdV 系统的局部和整体适定性进行了深入考察，例如 [3, 4, 9, 13, 18, 20]。文献 [13], 建立了端点局部理论，作者利用经过低频修正的 Besov 型傅里叶限制空间，证明了（u_0， v_0）$\in L^2 \times H^{-\frac{3}{4}}$的局部适定性。近期，文献 $\alpha\varepsilon > 0$， $\delta = 0$在（1）中）u_0，v_0）$\in H^{\frac{1}{2}+} \times H^{\frac{1}{2}+}$的正耦合相互作用情形下，利用 [20]-方法，证明了 SKdV 系统的整体适定性。最后我们指出，文献 I研究了耦合四阶薛定谔方程与五阶 KdV 方程的系统。 [1]。

本文旨在证明系统（1）在 $\delta \neq 0$情形下的局部和整体适定性结果。局部适定性是指解在局部时间内存在、唯一，并且连续依赖于初始数据。若系统（1）局部适定，且其局部解可以延拓至任意大的时间，则称该系统整体适定。主要结果如下。

定理 1.1. 系统（*1*）对于（u_0， v_0）$\in H^s$（$\mathbb{R}$）$\times H^k$（$\mathbb{R}$）局部适定，适用于任意满足下列条件的（s， k）： $s \geq 0$， $k \geq -2$，且 $s - 4 \leq k < \min(8s + 1,\ s + 2)$，前提是 $\delta \neq 0$。

定理 1.2. 系统（*1*）对于（u_0， v_0）$\in L^2$（$\mathbb{R}$）$\times L^2$（$\mathbb{R}$）整体适定，条件是$\delta \neq 0$。

为证明定理 1.1，我们结合了 [13, 15, 20]中给出的论证。这里给出的低正则性局部适定性结果是尖锐的，因为三次非线性薛定谔¨方程和 Kawahara 方程的解映射分别在 H^{0-} 和 H^{-2-} 上不具有一致连续性，参见 [15, 16]。

定理 1.2 的证明基于 [7]中给出的论证。在 [7] 中，作者为抽象演化系统提供了一种全局化方案

$$\begin{cases} Ku = F(u, v), \\ Lv = G(u), \\ u(x, 0) \in L^2, \quad v(x, 0) \in H^s, \end{cases}$$

其中 K、L 是演化型线性微分算子， F、G 是非线性项。这里假设与 K、L 对应的线性半群是酉的，且 u 守恒

该 L^2范数。本文将这一方案推广，以证明系统（1）的整体适定性，其中 L 是非线性卡瓦哈拉演化方程 $Lv = \partial_t v + \gamma\partial_x^3 v - \delta\partial_x^5 v + v\partial_x v$。本文首次将这一技术应用于算子 L 为非线性的情形。

该系统（1）至少有三个守恒量:

$$\mathcal{M}(t) := \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx, \tag{3}$$

$$\mathcal{Q}(t) := \int_{\mathbb{R}} \alpha v^2 + 2\varepsilon \operatorname{Im}(u\partial_x \overline{u}) dx, \tag{4}$$

and

$$\mathcal{E}(t) := \int_{\mathbb{R}} \alpha\varepsilon|u|^2 v - \frac{\alpha}{6}v^3 + \frac{\beta\varepsilon}{2}|u|^4 + \frac{\alpha\gamma}{2}|\partial_x v|^2 - \frac{\alpha\delta}{2}|\partial_x^2 v|^2 + \varepsilon|\partial_x u|^2 dx. \tag{5}$$

在整体化论证中，我们没有利用（4）和（5）。我们只使用（3）以及 L^2-范数守恒性；该守恒性已在引理 5.3 中证明。由此，我们可以证明系统（1）在 $L^2 \times L^2$ 中具有整体适定性，且对任意耦合系数 α、β、γ、δ、ε均成立，不论其正负，只要满足 $\delta \neq 0$。

最后需要指出，我们的整体化论证不能直接应用于 $\delta = 0$ 情形。该情形的主要困难在于以下估计不成立

$$\|\partial_x(v_1 v_2)\|_{Y^{0,-c,\infty}} \lesssim \|v_1\|_{Y^{0,b,1}} \|v_2\|_{Y^{0,b,1}}, \quad 0 < b, c < \frac{1}{2}, \quad 2b + c = 1$$

当 $\delta = 0$ 时；这一估计对于我们的论证至关重要（函数空间的定义见第 2 节）。因此，我们将这一情形留待今后研究。

本文结构如下。第 2 节定义一些函数空间，并确定本文中将使用的记号。第 3 节回顾一些基本估计，并给出若干技术性不等式的证明。第 4 节证明系统（1）的局部适定性。最后，第 5 节建立整体理论。

2. Notations & Function spaces

将一维傅里叶变换定义为

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

$\widehat{}$如果 $f(x,t)$ 是定义在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上的函数，我们将其时空傅里叶变换 $f(\xi,\tau)$ 定义为

$$\widehat{f}(\xi,\tau)=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-i(x\xi+t\tau)}u(x,t)dxdt.$$

傅里叶逆变换为

$$g^{\vee}(x):=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}g(\xi)d\xi,$$
$$g^{\vee}(x,t):=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{i(x\xi+t\tau)}g(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

设 $\langle\xi\rangle:=\sqrt{1+|\xi|^2}$。根据范数定义索博列夫空间 $H^s(\mathbb{R})$

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R})}=\left(\int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

设 $p(\xi)=\gamma\xi^3+\delta\xi^5$。设 $S(t)=e^{it\partial_x^2}$，且 $W(t)=e^{itp(\partial_x/i)}$。我们根据范数定义傅里叶限制范数空间 $X^{s,b}$ 和 $Y^{s,b}$

$$\|u\|_{X^{s,b}}=\left\|\langle\xi\rangle^s\langle\tau+\xi^2\rangle^b\widehat{u}(\xi,\tau)\right\|_{L^2_{\xi,\tau}},$$
$$\|u\|_{Y^{s,b}}=\left\|\langle\xi\rangle^s\langle\tau-p(\xi)\rangle^b\widehat{u}(\xi,\tau)\right\|_{L^2_{\xi,\tau}}.$$

设 $\varphi_0:\ \mathbb{R}\to[0,1]$ 表示一个偶光滑函数，使得 $\varphi_0(\xi)=1$ 当 $|\xi|\le\frac{5}{4}$ 且$\varphi_0(\xi)=0$ 当 $|\xi|>\frac{3}{2}$。对于 $j\in\mathbb{N}$，令 $\varphi_j(\xi)=\varphi_0(\xi/2^j)-\varphi_0(\xi/2^{j-1})$。我们将用到以下傅里叶限制范数空间的 Besov 型修正，这些修正由 [8] 引入，并应用于我们的研究背景中，见 [2, 12]:

$$\|u\|_{X^{s,b,1}}=\sum_{j=0}^{\infty}2^{bj}\|\langle\xi\rangle^s\varphi_j(\tau+\xi^2)\widehat{u}(\xi,\tau)\|_{L^2_{\xi,\tau}},$$
$$\|u\|_{Y^{s,b,1}}=\sum_{j=0}^{\infty}2^{bj}\|\langle\xi\rangle^s\varphi_j(\tau-p(\xi))\widehat{u}(\xi,\tau)\|_{L^2_{\xi,\tau}},$$

and

$$\|u\|_{X^{s,b,\infty}}=\sup_{j\ge0}2^{bj}\|\langle\xi\rangle^s\varphi_j(\tau+\xi^2)\widehat{u}(\xi,\tau)\|_{L^2_{\xi,\tau}},$$
$$\|u\|_{Y^{s,b,\infty}}=\sup_{j\ge0}2^{bj}\|\langle\xi\rangle^s\varphi_j(\tau-p(\xi))\widehat{u}(\xi,\tau)\|_{L^2_{\xi,\tau}}.$$

令 ψ 为一个光滑函数，使得 $\psi=1$ 在 $[-1,1]$ 上成立，且在 $[-2,2]$之外 $\psi=0$。我们记 $\psi_T(t):=\psi(t/T)$。对于 $N\ge0$，P^Nf将表示高频投影（$\chi_{|\xi|\ge N}\widehat{f}(\xi)$)$^{\vee}$。

最后，本文将 H¨older 不等式简称为

$$\left|\int f_1 \cdots f_n d\xi d\tau\right| \leq \|f_1\|_{L^{p_1}_{\xi,\tau}} \cdots \|f_1\|_{L^{p_1}_{\xi,\tau}}, \quad \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$$

由 $L^{p_1} \ldots L^{p_n}$-H¨older 不等式。

3. Preliminary estimates

以下关于薛定谔演化的估计是众所周知的。

引理 3.1. [19,引理 2.1] 我们有

$$\|S(t)g\|_{L^q_t L^r_x} \lesssim \|g\|_{L^2}, \quad \frac{2}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}, \quad 2 \leq q, r \leq \infty \qquad \textit{(Strichartz estimate)},$$

$$\|S(t)g\|_{L^4_x L^\infty_t} \lesssim \|g\|_{H^{\frac{1}{4}}} \qquad \textit{(Maximal function estimate)}.$$

对于卡瓦哈拉演化方程，我们有以下估计。

引理 3.2. [14, 引理 2.3] 设 $p(\xi) = \gamma\xi^3 + \delta\xi^5$ 并假设 $\delta \neq 0$。那么存在一个仅依赖于 δ、ε 的 $N > 0$，使得

$$\left\|P^N W(t)g\right\|_{L^6_{t,x}} \lesssim \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \qquad \textit{(Strichartz estimate)},$$

$$\left\|P^N W(t)g\right\|_{L^\infty_x L^2_t} \lesssim \|g\|_{H^{-2}} \qquad \textit{(Kato smoothing estimate)},$$

$$\left\|P^N W(t)g\right\|_{L^4_x L^\infty_t} \lesssim \|g\|_{H^{\frac{1}{4}}} \qquad \textit{(Maximal function estimate)}.$$

下面的引理使我们能够将上述估计转移到傅里叶限制范数空间中。

引理 3.3. [12, 命题 1.2] 设 $Z \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ 是一个由时空函数构成的 Banach空间，使得

$$\|g(t)u(x,t)\|_Z \leq \|g\|_{L^\infty} \|u\|_Z$$

对任意的 $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ 和 $u \in Y$ 都成立。假设该估计

$$\left\|P^N S(t)g\right\|_Z \lesssim \|g\|_{H^s}$$

对某个 $N \geq 0$ 和任意 $g \in H^s$ 均成立。那么我们有

$$\left\|P^N u\right\|_Z \lesssim \|u\|_{X^{s,\frac{1}{2},1}}$$

对于任意 $u \in X^{s,\frac{1}{2},1}$。若分别将 $S(t)$ 和 $X^{s,\frac{1}{2},1}$ 替换为 $W(t)$ 和 $Y^{s,\frac{1}{2},1}$，则也有类似结论。

在 [12] 引理 3.3 仅对 $N = 0$进行了证明，不过同样的证明很容易推广到一般情形。还要注意，该引理直接推出嵌入关系 $X^{s,\frac{1}{2},1} \hookrightarrow C_t H^s_x$以及 $Y^{s,\frac{1}{2},1} \hookrightarrow C_t H^s_x$。由引理 3.1、3.2和 3.3，我们得到以下估计：

引理 3.4。我们有

$$\|f\|_{L^q_t L^r_x} \lesssim \|f\|_{X^{0,\frac{1}{2},1}}, \quad \frac{2}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}, \quad 2 \leq q, r \leq \infty, \tag{6}$$

$$\|f\|_{L^4_x L^\infty_t} \lesssim \|f\|_{X^{\frac{1}{4},\frac{1}{2},1}}. \tag{7}$$

此外，对于 $N > 0$ 引理 *3.2* 中给出的条件，我们有

$$\left\|P^N f\right\|_{L^6_{t,x}} \lesssim \|f\|_{Y^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}}, \tag{8}$$

$$\left\|P^N f\right\|_{L^\infty_x L^2_t} \lesssim \|f\|_{Y^{-2,\frac{1}{2},1}}, \tag{9}$$

$$\left\|P^N f\right\|_{L^4_x L^\infty_t} \lesssim \|f\|_{Y^{\frac{1}{4},\frac{1}{2},1}}. \tag{10}$$

接下来，我们给出一些通过对上述估计进行复插值而得到的有用估计。关于此类插值的论证，参见 [12]。注意，由于 $\ell^1(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$，因此我们有

$$\|f\|_{L^2_{x,t}} \lesssim \|f\|_{X^{0,0,1}} \quad \text{and} \quad \|f\|_{L^2_{x,t}} \lesssim \|f\|_{Y^{0,0,1}}. \tag{11}$$

对 (6) 中的 $(q, r) = (6, 6)$ 与 (11) 之间进行插值，可得

$$\|f\|_{L^3_{t,x}} \lesssim \|f\|_{X^{0,\frac{1}{4},1}}, \tag{12}$$

$$\|f\|_{L^4_{t,x}} \lesssim \|f\|_{X^{0,\frac{3}{8},1}}. \tag{13}$$

同样，对 (8) 与 (11) 进行插值可得

$$\left\|P^N f\right\|_{L^3_{t,x}} \lesssim \|f\|_{Y^{-\frac{1}{4},\frac{1}{4},1}}, \tag{14}$$

$$\left\|P^N f\right\|_{L^4_{t,x}} \lesssim \|f\|_{Y^{-\frac{3}{8},\frac{3}{8},1}}. \tag{15}$$

对式（6）中的（q，r）进行插值，取 =（12，3）并结合式（11），可得

$$\|f\|_{L_t^{\frac{24}{5}} L_x^4} \lesssim \|f\|_{X^{0,\frac{1}{3},1}}. \tag{16}$$

对式（6）中的（q，r）进行插值，取 =（4，∞）并结合式（11），可得

$$\|f\|_{L_t^{\frac{8}{3}} L_x^4} \lesssim \|f\|_{X^{0,\frac{1}{4},1}}. \tag{17}$$

以下引理的证明与[20, 引理 2.2]的证明非常相似。

引理 3.5。我们有

$$\left| \iint_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} |5\delta\xi^4 + 3\gamma\xi^2 + 2\xi_1|^{\frac{1}{2}} \widehat{f}(\xi,\tau)\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)\widehat{h}(-\xi_2,-\tau_2) \right| \lesssim \|f\|_{Y^{0,\frac{1}{2},1}} \|g\|_{X^{0,\frac{1}{2},1}} \|h\|_{X^{0,0,1}}. \tag{18}$$

证明。设

$$I(f,g,h) = \iint_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} |5\delta\xi^4 + 3\gamma\xi^2 + 2\xi_1|^{\frac{1}{2}} \widehat{f}(\xi,\tau)\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)\widehat{h}(-\xi_2,-\tau_2).$$

设 $\widehat{f_j} = \varphi_j(\tau - p(\xi))\,\widehat{f}(\xi,\tau)$ 和 $\widehat{g_k} = \varphi_k(\tau + \xi^2)\widehat{g}(\xi,\tau)$。令 $\tau = \lambda + p(\xi)$、$\tau_1 = \lambda_1 - \xi_1^2$ 和 $\tau_2 = \lambda_2 + \xi_2^2$，则有

$$I(f_j,g_k,h) = \iint_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} |5\delta\xi^4 + 3\gamma\xi^2 + 2\xi_1|^{\frac{1}{2}} \widehat{f_j}(\xi,\lambda+p(\xi))\widehat{g_k}(\xi_1,\lambda_1-\xi_1^2) \times \widehat{h}(\xi_1-\xi,\lambda_1-\lambda-\xi_1^2-p(\xi))\,d\xi d\xi_1 d\lambda d\lambda_1.$$

我们作变量代换 $(\eta,\omega) = T(\xi,\xi_1)$，其中 $\eta = \xi - \xi_1$, $\omega = \lambda - \lambda_1 + p(\xi) + \xi_1^2$。令 J 表示该变量代换的雅可比行列式。于是

$$|J| = |5\delta\xi^4 + 3\gamma\xi^2 + 2\xi_1|.$$

令 $H(\eta,\omega,\lambda,\lambda_1) = (\widehat{f_j}\widehat{g_k}) \circ T^{-1}(\eta,\omega,\lambda,\lambda_1)$。于是

$$\begin{aligned}|I(f_j,g_k,h)| &\le \int \frac{|H(\eta,\omega,\lambda,\lambda_1)|}{|J|^{\frac12}}|\widehat{h}(-\eta,-\omega)|d\eta d\omega d\lambda d\lambda_1\\ &\le \int\left(\int \frac{|H(\eta,\omega,\lambda,\lambda_1)|^2}{|J|}d\eta d\omega\right)^{\frac12} d\lambda d\lambda_1 \|h\|_{L^2}\\ &= \int \|\varphi_j(\lambda)\widehat{f}(\xi,\lambda+p(\xi))\|_{L^2_\xi}d\lambda \int \|\varphi_k(\lambda_1)\widehat{g}(\xi_1,\lambda_1-\xi_1)\|_{L^2_{\xi_1}}d\lambda_1\|h\|_{L^2}.\end{aligned}$$

由柯西-施瓦茨不等式

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \|\varphi_j(\lambda)\widehat{f}(\xi,\lambda+p(\xi))\|_{L^2_\xi}d\lambda &= \int_{|\lambda|\sim 2^j} \|\varphi_j(\lambda)\widehat{f}(\xi,\lambda+p(\xi))\|_{L^2_\xi}d\lambda\\ &\lesssim 2^{\frac{j}{2}}\|\varphi_j(\tau-p(\xi))\widehat{f}(\xi,\tau)\|_{L^2_{\xi,\tau}},\end{aligned}$$

类似地

$$\int \|\varphi_k(\lambda_1)\widehat{g}(\xi_1,\lambda_1-\xi_1)\|_{L^2_{\xi_1}}d\lambda_1 \lesssim 2^{\frac{k}{2}}\|\varphi_j(\tau+\xi^2)\widehat{f}(\xi,\tau)\|_{L^2_{\xi,\tau}},$$

我们有

$$|I(f,g,h)| \le \sum_{j,k\ge 0}|I(f_j,g_k,h)| \lesssim \|f\|_{Y^{0,\frac12,1}}\|g\|_{X^{0,\frac12,1}}\|h\|_{L^2}.$$

□

引理 3.6. 我们有

$$\left|\iint_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} |5\delta\xi^4+3\gamma\xi^2+2\xi_1|^{\frac14}\widehat{f}(\xi,\tau)\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)\widehat{h}(-\xi_2,-\tau_2)\right| \lesssim \|f\|_{Y^{0,\frac14,1}}\|g\|_{X^{0,\frac38,1}}\|h\|_{X^{0,\frac14,1}}.$$

证明。根据式（6）对于（q、r）=（6，6）、（12）以及 $L^2L^3L^6$-H¨older 不等式，我们有

$$\left|\iint_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \widehat{f}(\xi,\tau)\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)\widehat{h}(-\xi_2,-\tau_2)\right| \lesssim \|f\|_{Y^{0,0,1}}\|g\|_{X^{0,\frac14,1}}\|h\|_{X^{0,\frac12,1}}. \tag{19}$$

对（18）和（19）进行插值，可得

$$\begin{aligned}&\left|\iint_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} |5\delta\xi^4+3\gamma\xi^2+2\xi_1|^{\frac{\theta}{2}}\widehat{f}(\xi,\tau)\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)\widehat{h}(-\xi_2,-\tau_2)\right| \\ &\qquad\lesssim \|f\|_{Y^{0,\frac{\theta}{2},1}}\|g\|_{X^{0,\frac{1-\theta}{4}+\frac{\theta}{2},1}}\|h\|_{X^{0,\frac{1-\theta}{2},1}}, \quad 0<\theta<1,\end{aligned} \tag{20}$$

见 [11]。取 $\theta=\frac12$，即可得到所需的界。 □

引理 3.7。 设 $N>0$ 如引理3.2中所述。我们有

$$\iint_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \chi_{\{|\xi|\geq N\}}|\widehat{f}(\xi,\tau)||\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)||\widehat{h}(-\xi_2,-\tau_2)| \lesssim \|f\|_{Y^{-\frac{7}{16},\frac{1}{4},1}}\|g\|_{X^{\frac{1}{16},\frac{1}{8},1}}\|h\|_{X^{0,\frac{3}{8},1}}.$$

证明。将（7）与（11）插值，得

$$\|f\|_{L_x^{\frac{16}{7}}L_t^{\frac{8}{3}}} \lesssim \|f\|_{X^{\frac{1}{16},\frac{1}{8},1}}. \tag{21}$$

将（9）与（11）插值，得

$$\left\|P^N f\right\|_{L_x^{\frac{5}{2}}L_t^2} \lesssim \|f\|_{Y^{-\frac{2}{5},\frac{1}{10},1}}. \tag{22}$$

将（8）与（22）插值，可得

$$\left\|P^N f\right\|_{L_x^{\frac{16}{5}}L_t^{\frac{8}{3}}} \lesssim \|f\|_{X^{-\frac{7}{16},\frac{1}{4},1}}. \tag{23}$$

利用（13）、（21）和（23），由 Hölder 不等式即可得到所需估计。 □

最后，我们记录一个下文常用的微积分引理。

引理 3.8. [10,引理 3.3] 设

$$\phi_\alpha(a) := \begin{cases} 1 & \alpha>1 \\ \log(1+\langle a\rangle) & \alpha=1 \\ \langle a\rangle^{1-\alpha} & \alpha<1. \end{cases}$$

对于满足 $\alpha+\beta>1$ 的 $\alpha\geq\beta\geq 0$，有

$$\int \frac{dx}{\langle x-a_1\rangle^\alpha\langle x-a_2\rangle^\beta} \lesssim \langle a_1-a_2\rangle^{-\beta}\phi_\alpha(a_1-a_2),$$

4. Local theory

4.1. 线性与双线性估计。本节我们遵循 [15] 中的分析。设$p_\lambda(\xi)=\gamma\lambda^2\xi^3+\delta\xi^5$。我们用 $S_\lambda(t)=e^{it\lambda^3\partial_x^2}$ 和 $W_\lambda(t)=e^{itp_\lambda(\partial_x/i)}$表示。令

$$\|u\|_{X_\lambda^{s,b}} := \left\|\langle\xi\rangle^s\langle\tau+\lambda^3\xi^2\rangle^b\widehat{u}(\xi,\tau)\right\|_{L^2_{\xi,\tau}}.$$

For

$$P_1 := \{(\xi,\tau)\in\mathbb{R}^2 : |\tau-p_\lambda(\xi)|\leq\frac{31}{32}\delta|\xi|^5+\frac{7}{8}\lambda^2\gamma|\xi|^3\},$$

$$P_2 := \mathbb{R}^2 \setminus P_1,$$

let

$$w_{k,\lambda,\theta}(\xi,\tau) := \langle \xi \rangle^k \langle \tau - p_\lambda(\xi) \rangle^{\frac{1}{2}+2\theta} \chi_{P_1}(\xi,\tau) + \langle \xi \rangle^{k+1+15\theta} \langle \tau - p_\lambda(\xi) \rangle^{\frac{3}{10}-\theta} \chi_{P_2}(\xi,\tau).$$

我们通过以下范数定义空间$Y^k_{\lambda,\,\theta}$

$$\|u\|_{Y^k_{\lambda,\theta}} := \|w_{k,\lambda,\theta}(\xi,\tau)\widehat{u}(\xi,\tau)\|_{L^2_{\xi,\tau}} + \|u\|_{L^\infty_t H^k_x}.$$

注意，由于 $w_{k,\,\lambda,\,\theta}(\xi,\tau) \lesssim \langle \xi \rangle^k \langle \tau - p_\lambda(\xi) \rangle^{\frac{1}{2}+2\theta}$ 以及 $Y^k_{\lambda,\,\theta} \hookrightarrow C_t H^k_x$，我们有

$$\|u\|_{Y^k_{\lambda,\theta}} \lesssim \|u\|_{Y^{k,\frac{1}{2}+2\theta}_\lambda}. \tag{24}$$

Let

$$\|u\|_{Z^k_{\lambda,\theta}} := \big\|\langle \tau - p_\lambda(\xi) \rangle^{-1} w_{s,\lambda,\theta}(\xi,\tau)\widehat{u}(\xi,\tau)\big\|_{L^2_{\xi,\tau}} + \big\|\langle \tau - p_\lambda(\xi) \rangle^{-1} \langle \xi \rangle^s \widehat{u}\|_{L^2_\xi L^1_\tau}.$$

引理 4.1. [15, 命题 2.5] 对于 $0 < \lambda \leq 1$，我们有

$$\|\psi(t) S_\lambda(t) g\|_{X^{s,b}_\lambda} \lesssim \|g\|_{H^s},$$
$$\|\psi(t) W_\lambda(t) g\|_{Y^k_{\lambda,\theta}} \lesssim \|g\|_{H^s}.$$

隐含常数不依赖于 λ。

引理 4.2. [15, 命题 2.6] 对于 $0 < \lambda \leq 1$，我们有

$$\left\| \psi(t) \int_0^t W_\lambda(t-t') F(t') dt' \right\|_{Y^k_{\lambda,\theta}} \lesssim \|F\|_{Z^k_{\lambda,\theta}}.$$

隐含常数不依赖于 λ。

引理 4.3. 存在 $0 < \theta < 1$ 和 $\kappa > 0$，使得以下结论成立。

(i) 对于 $0 \leq s \leq k+4$，有 $\|uv\|_{X^{s,-\frac{1}{2}+2\theta}} \lesssim \|u\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\theta}} \|v\|_{Y^{k,\frac{1}{2}+\theta}}$. (ii) 对于 $0 \leq s < k + \frac{3}{2}$和 $k \geq -2$，有 $\|uv\|_{X^{s,\,-\frac{1}{2}+2\theta}_\lambda} \lesssim \lambda^{-\kappa} \|u\|_{X^{s,\,\frac{1}{2}+\theta}_\lambda} \|v\|_{Y^k_\lambda,\theta}$. (iii) 对于 $s \geq 0$，有 $\|u_1 \overline{u_2} u_3\|_{X^{s,\,-\frac{1}{2}+2\theta}_\lambda} \lesssim \lambda^{-\kappa} \|u_1\|_{X^{s,\,\frac{1}{2}+\theta}_\lambda} \|u_2\|_{X^{s,\,\frac{1}{2}+\theta}_\lambda} \|u_3\|_{X^{s,\,\frac{1}{2}+\theta}_\lambda}$. (iv) 对于 $k > -\frac{3}{2}$，有 $\|\partial_x(v_1 v_2)\|_{Y^{k,-\frac{1}{2}+\theta}} \lesssim \|v_1\|_{Y^{k,\frac{1}{2}+\theta}} \|v_2\|_{Y^{k,\frac{1}{2}+\theta}}$. (v) 对于 $k \geq -2$，有 $\|\partial_x(v_1 v_2)\|_{Z^k_{\lambda,\,\theta}} \lesssim \|v_1\|_{Y^k_\lambda,\theta} \|v_2\|_{Y^k_\lambda,\theta}$. (vi) 对于 $k < \min(8s+1, s+2)$，有 $\|\partial_x(u_1 \overline{u_2})\|_{Y^{k,\,-\frac{1}{2}+2\theta}_\lambda} \lesssim \lambda^{-\kappa} \|u_1\|_{X^{s,\,\frac{1}{2}+\theta}_\lambda} \|u_2\|_{X^{s,\,\frac{1}{2}+\theta}_\lambda}$.

这些隐含常数不依赖于 λ。

我们这里只证明（ii）。利用引理 3.5，（i）和（vi）可以用与[20, 引理 3.3、引理 3.4]类似得多的方法证明。（iii）的证明见 [5]。估计式（iv）和（v）分别在 [6] 和 [15] 中证明。关于数值追踪对 [13] 的依赖性，参见 λ。

（ii）的证明。只需对以下量作出界估计

$$\iint_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{\langle\xi\rangle^s|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle\tau+\lambda^3\xi^2\rangle^{\frac12+2\theta}} \frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\tau_1+\lambda^3\xi_1^2\rangle^{\frac12+\theta}} \frac{\chi_{P_1}(\xi_2,\tau_2)|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle\xi_2\rangle^k\langle\tau_2-p_\lambda(\xi_2)\rangle^{\frac12+\theta}} \tag{25}$$

and

$$\iint_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{\langle\xi\rangle^s|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle\tau+\lambda^3\xi^2\rangle^{\frac12+2\theta}} \frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\tau_1+\lambda^3\xi_1^2\rangle^{\frac12+\theta}} \frac{\chi_{P_2}(\xi_2,\tau_2)|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle\xi_2\rangle^k\langle\tau_2-p_\lambda(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{10}-\theta}} \tag{26}$$

由 $\lambda^{-\frac32}\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}\|h\|_{L^2}$。由于（i）蕴含（25）的界，我们只需考虑（26）。注意到

$$\begin{aligned}\frac{\chi_{P_2}(\xi_2,\tau_2)\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^k\langle\tau_2-p_\lambda(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{10}-\theta}} &\lesssim \frac{\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^k\langle\frac{31}{32}\delta|\xi_2|^5+\frac78\lambda^2\gamma|\xi_2|^3\rangle^{\frac{3}{10}-\theta}}\\ &\lesssim \begin{cases}\langle\xi\rangle^s\langle\xi_1\rangle^{-s}\langle\xi_2\rangle^{-k-\frac32+5\theta} & \text{if}\quad |\xi_2|\gg|\gamma|^{\frac12}|\delta|^{-\frac12}\lambda,\\ \langle\xi\rangle^s\langle\xi_1\rangle^{-s}\langle\xi_2\rangle^{-k} & \text{if}\quad |\xi_2|\lesssim|\gamma|^{\frac12}|\delta|^{-\frac12}\lambda.\end{cases}\end{aligned}$$

回顾一下，我们假设 $0\le s<k+\frac32$。对于满足 $5\theta<k-s+\frac32$ 的 $|\xi_2|\gg|\gamma|^{\frac12}|\delta|^{-\frac12}\lambda$ 和 $\theta>0$，有

$$\frac{\chi_{P_2}(\xi_2,\tau_2)\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^k\langle\tau_2-p_\lambda(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{10}-\theta}}\lesssim 1. \tag{27}$$

对于 $|\xi_2|\lesssim|\gamma|^{\frac12}|\delta|^{-\frac12}\lambda$，有

$$\frac{\chi_{P_2}(\xi_2,\tau_2)\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^k\langle\tau_2-p_\lambda(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{10}-\theta}}\lesssim\langle\xi_2\rangle^{s-k}\lesssim 1. \tag{28}$$

由（13）以及简单的变量代换可得

$$\left\|\left[\frac{\widehat{f}(\xi,\tau)}{\langle\tau+\lambda^3\xi^2\rangle^{\frac38+}}\right]^\vee\right\|_{L^4_{x,t}}\lesssim\lambda^{-\frac38}\|f\|_{L^2_{x,t}}. \tag{29}$$

Using (27), (28), (29) 以及 $L^4L^4L^2$-H¨older 不等式，我们得到所需的界。□

4.2. 局部适定性。

定理 1.1 的证明。我们只考虑 $0 \le s < k + \frac{3}{2}$, $k \ge -2$, 以及 $k < \min(8s+1, s+2)$ 的情形。更高正则性的情形无需使用伸缩论证即可处理。我们遵循 [13] 中给出的论证。对于 $0 < \lambda < 1$, 我们令 $(u_{0,\lambda}(x) v_{0,\lambda}(x)) := (\lambda^4 u_0(\lambda x) \ \lambda^4 v_0(\lambda x))$, 并令 $(u_\lambda(x,t) \ v_\lambda(x,t)) := (\lambda^4 u(\lambda x, \lambda^5 t) \ \lambda^4 v(\lambda x, \lambda^5 t))$。那么 (u_λ, v_λ) 满足

$$
\begin{cases}
i\partial_t u_\lambda + \lambda^3 \partial_x^2 u_\lambda = \alpha\lambda u_\lambda v_\lambda + \beta\lambda^{-3}|u_\lambda|^2 u_\lambda, \\
\partial_t v_\lambda + \gamma\lambda^2 \partial_x^3 v_\lambda - \delta\partial_x^5 v_\lambda + v_\lambda \partial_x v_\lambda = \varepsilon \partial_x |u_\lambda|^2, \\
u_\lambda(x,0) = u_{0,\lambda}(x), \quad v_\lambda(x,0) = v_{0,\lambda}(x).
\end{cases} \tag{30}
$$

Let

$$
\begin{cases}
\Gamma_1(u,v) := \psi_T S_\lambda(t) u_{0,\lambda} - i\psi_T \int_0^t S_\lambda(t-t')(\alpha\lambda uv + \beta\lambda^{-3}|u|^2 u) dt', \\
\Gamma_2(u,v) := \psi_T W_\lambda(t) v_{0,\lambda} + \psi_T \int_0^t W_\lambda(t-t')(-v\partial_x v + \varepsilon \partial_x |u|^2) dt'.
\end{cases} \tag{31}
$$

考虑球

$$
B := \{(u,v) \in X_\lambda^{s,\frac{1}{2}+\theta} \times Y_{\lambda,\theta}^k : \|u\|_{X_\lambda^{s,\frac{1}{2}+\theta}} \le M \quad \text{and} \quad \|v\|_{Y_{\lambda,\theta}^k} \le \epsilon_0\}
$$

其中 ϵ_0 和 M 将在之后选取。对于 $(u,v) \in B$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\|\Gamma_1(u,v)\|_{X_\lambda^{s,\frac{1}{2}+\theta}} &\le C_1 \|u_{0,\lambda}\|_{H^s} + C_2 T^\theta \left(\lambda \|uv\|_{X_\lambda^{s,-\frac{1}{2}+2\theta}} + \lambda^{-3} \||u|^2 u\|_{X_\lambda^{s,-\frac{1}{2}+2\theta}} \right) \\
&\le C_1 \|u_{0,\lambda}\|_{H^s} + C_3 T^\theta \left(\lambda^{1-\kappa} \|u\|_{X_\lambda^{s,\frac{1}{2}+\theta}} \|v\|_{Y_{\lambda,\theta}^k} + \lambda^{-3-\kappa} \|u\|^3_{X_\lambda^{s,\frac{1}{2}+\theta}} \right) \\
&\le C_1 \|u_{0,\lambda}\|_{H^s} + C_3 T^\theta \left(\lambda^{1-\kappa} M\epsilon_0 + \lambda^{-3-\kappa} M^3 \right),
\end{aligned}
$$

并根据（24），

$$
\begin{aligned}
\|\Gamma_2(u,v)\|_{Y_{\lambda,\theta}^k} &\le C_1 \|v_{0,\lambda}\|_{H^k} \\
&\quad + \left\| \psi_T \int_0^t W_\lambda(t-t') v\partial_x v dt' \right\|_{Y_{\lambda,\theta}^k} + \left\| \psi_T \int_0^t W_\lambda(t-t') \partial_x |u|^2 dt' \right\|_{Y_\lambda^{k,\frac{1}{2}+2\theta}} \\
&\le C_1 \|v_{0,\lambda}\|_{H^k} + C_2 \|v\partial_x v\|_{Z_{\lambda,\theta}^k} + C_2 T^\theta \|\partial_x |u|^2\|_{Y_\lambda^{k,-\frac{1}{2}+\theta}} \\
&\le C_1 \|v_{0,\lambda}\|_{H^k} + C_3 \|v\|^2_{Y_{\lambda,\theta}^k} + C_3 T^\theta \lambda^{-\kappa} \|u\|^2_{X_\lambda^{s,\frac{1}{2}+\theta}} \\
&\le C_1 \|v_{0,\lambda}\|_{H^k} + C_3 \epsilon_0^2 + C_3 T^\theta \lambda^{-\kappa} M^2.
\end{aligned}
$$

我们可以类似地估计差值 $\|\Gamma_1(u,v)-\Gamma_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{X^{s,\ \frac{1}{2}+\theta}_{\lambda}}+\|\Gamma_2(u,v)-\Gamma_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_{Y^{k,\ \theta}_{\lambda}}$。令 $M=2C_1\|u_{0,\ 1}\|_{H^s}$。那么对于所有 $0<\lambda<1$，我们有 $C_1\|u_{0,\ \lambda}\|_{H^s}\le M/2$。取 $\epsilon_0>0$ 使得 $4C_3\epsilon_0<1$。注意到

$$\|v_{0,\lambda}\|_{H^k}\le\lambda^{\frac{3}{2}}\|v_0\|_{H^k}$$

对于 $k\ge -2$。取充分小的 λ 使得 $C_1\|v_{0,\ \lambda}\|_{H^k}<\epsilon_0/2$。则对于充分小的 T，可以看出映射 $(\Gamma_1,\ \Gamma_2)$ 在 B 中是压缩映射。撤销尺度变换后，我们得到系统 (1) 的一个局部解。关于解的唯一性以及解映射的利普希茨连续性，参见 [15]。□

5. Global theory

5.1. 线性与双线性估计。

引理 5.1. [12, 命题 2.1] 假设 $0<T\le 1$。若 $0\le b,c\le\frac{1}{2}$ 和 $b+c\le 1$，则

(i) $\|\psi_T S(t)u_0\|_{X^{0,\ b,\ 1}}\lesssim T^{\frac{1}{2}-b}\|u_0\|_{L^2}$。 (ii) $\|\psi_T W(t)v_0\|_{Y^{0,\ b,\ 1}}\lesssim T^{\frac{1}{2}-b}\|v_0\|_{L^2}$。 (iii) $\|\psi_T\int_0^t S(t-t')Fdt'\|_{X^{0,\ b,\ 1}}\lesssim T^{1-b-c}\|F\|_{X^{0,\ -c,\ \infty}}$。 (iv) $\|\psi_T\int_0^t W(t-t')Fdt'\|_{Y^{0,\ b,\ 1}}\lesssim T^{1-b-c}\|F\|_{Y^{0,\ -c,\ \infty}}$。

引理 5.2. 我们有

(i) $\|uv\|_{X^{0,-\frac{1}{4},\infty}}\lesssim\|u\|_{X^{0,\frac{3}{8},1}}\|v\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}}$.
(ii) $\|u_1\overline{u_2}u_3\|_{X^{0,-\frac{1}{4},\infty}}\lesssim\|u_1\|_{X^{0,\frac{3}{8},1}}\|u_2\|_{X^{0,\frac{3}{8},1}}\|u_3\|_{X^{0,\frac{3}{8},1}}$.
(iii) $\|\partial_x(v_1v_2)\|_{Y^{0,-\frac{1}{4},\infty}}\lesssim\|v_1\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}}\|v_2\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}}$.
(iv) $\|\partial_x(u_1\overline{u_2})\|_{Y^{0,-\frac{1}{4},\infty}}\lesssim\|u_1\|_{X^{0,\frac{3}{8},1}}\|u_2\|_{X^{0,\frac{3}{8},1}}$.

（i）的证明。由对偶性，只需对以下量进行估计

$$\iint_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}}\frac{|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle\tau+\xi^2\rangle^{\frac{1}{4}}}\frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle\tau_1+\xi_1^2\rangle^{\frac{3}{8}}}\frac{|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle\tau_2-p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{8}}}\tag{32}$$

由 $\|f\|_{X^{0,0,1}}\|g\|_{X^{0,0,1}}\|h\|_{Y^{0,0,1}}$。

情形 1: $|\xi_2|\lesssim 1$。应用柯西-施瓦茨不等式，可将（32）估计为

$$\int_{\mathbb{R}^4}\frac{|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle\tau+\xi^2\rangle^{\frac{1}{4}}}\frac{|\widehat{g}(\xi-\xi_2,\tau-\tau_2)|}{\langle(\tau-\tau_2)+(\xi-\xi_2)^2\rangle^{\frac{3}{8}}}\frac{|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle\tau_2-p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{8}}}d\xi d\xi_2 d\tau d\tau_2$$

$$\begin{aligned}
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^4} |\widehat{g}(\xi-\xi_2,\tau-\tau_2)|^2 |\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|^2 d\xi d\xi_2 d\tau d\tau_2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \times \left(\int_{\mathbb{R}^4} \frac{|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2}{\langle \tau+\xi^2\rangle^{\frac{1}{2}} \langle (\tau-\tau_2)+(\xi-\xi_2)^2\rangle^{\frac{3}{4}} \langle \tau_2 - p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{4}}} d\xi d\xi_2 d\tau d\tau_2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \|g\|_{L^2}\|h\|_{L^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2}{\langle \tau-\xi^2\rangle^{\frac{1}{2}} \langle \tau-(\xi-\xi_2)^2-p(\xi_2)\rangle^{\frac{1}{2}}} d\xi d\xi_2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \|g\|_{L^2}\|h\|_{L^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2}{\langle \xi_2(\delta\xi_2^4+\gamma\xi_2^2-\xi_2+2\xi)\rangle^{\frac{1}{2}}} d\xi d\xi_2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\sup_{\xi} \int \frac{d\xi d\xi_2 d\tau}{\langle \xi_2(\delta\xi_2^4+\gamma\xi_2^2-\xi_2+2\xi)\rangle^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}\|h\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

我们在 3.8 中使用了引理 τ_2 积分来得到第二个不等式，并且

$$\begin{aligned}
&\langle \tau-\xi^2\rangle^{\frac{1}{2}} \langle \tau-(\xi-\xi_2)^2-p(\xi_2)\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \ge \langle \tau-\xi^2\rangle^{\frac{1}{2}} \langle \tau-(\xi-\xi_2)^2-p(\xi_2)\rangle^{\frac{1}{2}} \gtrsim \langle (\tau-\xi^2)-(\tau-\xi_1^2-p(\xi-\xi_1))\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad = \langle \xi_2(\delta\xi_2^4+\gamma\xi_2^2-\xi_2+2\xi)\rangle^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

在第三个不等式中。因此，只需证明该量

$$\sup_{\xi} \int_{|\xi_2|\lesssim 1} \frac{d\xi_2}{\langle \xi_2(\delta\xi_2^4+\gamma\xi_2^2-\xi_2+2\xi)\rangle^{\frac{1}{2}}} \tag{33}$$

由于 $\langle \xi_2(\delta\xi_2^4+\gamma\xi_2^2-\xi_2+2\xi)\rangle \gtrsim |\xi_2|\langle \delta\xi_2^4+\gamma\xi_2^2-\xi_2+2\xi\rangle$，我们有

$$(33) \lesssim \sup_{\xi} \int_{|\xi_2|\lesssim 1} \frac{d\xi_2}{|\xi_2|^{\frac{1}{2}} \langle \delta\xi_2^4+\gamma\xi_2^2-\xi_2+2\xi\rangle^{\frac{1}{2}}} < \infty.$$

情形 2： $|\xi_2| \gg 1$。

在这种情况下，由于12）和（14），所需的估计立即成立，因为

$$\begin{aligned}
(32) &\lesssim \left\| \left[\frac{|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle \tau+\xi^2\rangle^{\frac{1}{4}}}\right]^{\vee} \right\|_{L^3_{t,x}} \left\| \left[\frac{\widehat{g}(\xi,\tau)}{\langle \tau+\xi^2\rangle^{\frac{3}{8}}}\right]^{\vee} \right\|_{L^3_{t,x}} \left\| \left[\frac{\chi_{\{|\xi|\ge N\}}\widehat{h}(\xi,\tau)}{\langle \tau-p(\xi)\rangle^{\frac{3}{8}}}\right]^{\vee} \right\|_{L^3_{t,x}} \\
&\lesssim \|f\|_{X^{0,0,1}} \|g\|_{X^{0,0,1}} \|h\|_{Y^{0,0,1}}.
\end{aligned}$$

□

（ii）的证明。由对偶性，只需估计该量

$$\iint_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3\\ \tau=\tau_1+\tau_2+\tau_2}} \frac{|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle\tau+\xi^2\rangle^{\frac{1}{4}}}\frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle\tau_1+\xi_1^2\rangle^{\frac{3}{8}}}\frac{|\widehat{h}(-\xi_2,-\tau_2)|}{\langle\tau_2-\xi_2^2\rangle^{\frac{3}{8}}}\frac{|\widehat{k}(\xi_3,\tau_3)|}{\langle\tau_3+\xi_3^2\rangle^{\frac{3}{8}}} \tag{34}$$

由$\|f\|_{X^{0,0,1}}\|g\|_{X^{0,0,1}}\|h\|_{X^{0,0,1}}\|k\|_{X^{0,0,1}}$。这可直接由（16）、（17）以及 H¨older 不等式得出。 □

（iii）的证明。由对偶性，只需对下列量进行估计

$$\iint_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{|\xi||\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle\tau-p(\xi)\rangle^{\frac{1}{4}}}\frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle\tau_1-p(\xi_1)\rangle^{\frac{3}{8}}}\frac{|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle\tau_2-p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{8}}} \tag{35}$$

由$\|f\|_{Y^{0,0,1}}\|g\|_{Y^{0,0,1}}\|h\|_{Y^{0,0,1}}$。根据柯西-施瓦茨不等式，只需证明下列量

$$\sup_{\xi_1}\int \frac{\langle\xi\rangle^2 d\xi}{\langle 5\delta\xi\xi_1(\xi-\xi_1)(\xi^2-\xi\xi_1+\xi_1^2)+3\gamma\xi\xi_1(\xi-\xi_1)\rangle^{\frac{1}{2}}} \tag{36}$$

是有限的。或者，只需证明

$$\sup_{\xi}\int \frac{\langle\xi\rangle^2 d\xi_1}{\langle 5\delta\xi\xi_1(\xi-\xi_1)(\xi^2-\xi\xi_1+\xi_1^2)+3\gamma\xi\xi_1(\xi-\xi_1)\rangle^{\frac{1}{2}}} \tag{37}$$

是有限的。

若 $|\xi|\lesssim 1$ 且 $|\xi_1|\lesssim 1$，则无需证明。

情形 1：$|\xi|\lesssim 1$ 且 $|\xi_1|\gg 1$。

$$(37)\lesssim \sup_{\xi_1}\int_{|\xi|\lesssim 1}\frac{d\xi}{|\xi|^{\frac{1}{2}}\langle\xi_1\rangle^2}<\infty.$$

情形 2：$|\xi_1|\lesssim 1$ 且 $|\xi|\gg 1$。

$$(36)\lesssim \sup_{\xi}\int \frac{\langle\xi\rangle^2 d\xi_1}{|\xi_1|^{\frac{1}{2}}\langle\xi\rangle^2}<\infty.$$

情形 3：$|\xi-\xi_1|\lesssim 1$、$|\xi|\gg 1$ 且 $|\xi_1|\gg 1$。

$$(36)\lesssim \sup_{\xi}\int \frac{\langle\xi\rangle^2 d\xi_1}{|\xi-\xi_1|^{\frac{1}{2}}\langle\xi\rangle^2}<\infty.$$

在本证明的其余部分，我们始终假设 $|\xi-\xi_1|\gg 1$、$|\xi_1|\gg 1$ 和 $|\xi-\xi_1|\gg 1$。令 $M:=\max(|\tau-p(\xi)|,|\tau_1-p(\xi_1)|,|\tau_2-p(\xi_2)|)$。则 $M\gtrsim|5\delta\xi\xi_1(\xi-\xi_1)(\xi^2-\xi\xi_1+\xi_1^2)+$

$3\gamma\xi\xi_1(\xi-\xi_1)|$。令

$$P(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2) := \frac{\langle\xi\rangle|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle\tau-p(\xi)\rangle^{\frac{1}{4}}}\frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle\tau_1-p(\xi_1)\rangle^{\frac{3}{8}}}\frac{|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle\tau_2-p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{8}}}.$$

情形 4: $|\xi|\gg|\xi_1|$。

在这种情形下，我们有 $M\gtrsim|\xi|^4|\xi_1|$ 和 $|\xi|\approx|\xi_2|$。

(i) $M=|\tau-p(\xi)|$。我们有

$$P(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2)\lesssim|\widehat{f}(\xi,\tau)|\frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle\tau_1-p(\xi_1)\rangle^{\frac{3}{8}}}\frac{|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle\tau_2-p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{8}}}.$$

利用（15），我们可以应用 $L^2L^4L^4$-Hölder 不等式。

(ii) $M=|\tau_1-p(\xi_1)|$。我们有，

$$\begin{aligned}P(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2)&\lesssim\frac{\langle\xi\rangle^{\frac{1}{2}}|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle\tau-p(\xi)\rangle^{\frac{1}{4}}}\frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle\tau_1-p(\xi_1)\rangle^{\frac{1}{4}}}\frac{|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle\tau_2-p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{8}}}\\&\approx\frac{\langle\xi\rangle^{\frac{1}{4}}|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle\tau-p(\xi)\rangle^{\frac{1}{4}}}\frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle\tau_1-p(\xi_1)\rangle^{\frac{1}{4}}}\frac{\langle\xi_2\rangle^{\frac{1}{4}}|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle\tau_2-p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{8}}}.\end{aligned}$$

利用（14），我们可以应用 $L^3L^3L^3$-Hölder 不等式。

(iii) $M=|\tau_2-p(\xi_2)|$。与 (ii) 类似。

情形 5: $|\xi_1|\gg|\xi|$。

在这种情形下，我们有 $M\gtrsim|\xi||\xi_1|^4$。另请注意，$|\xi_1|\approx|\xi_2|$。

(i) $M=|\tau-p(\xi)|$。我们有

$$\begin{aligned}P(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2)&\lesssim\langle\xi\rangle^{\frac{3}{4}}|\widehat{f}(\xi,\tau)|\frac{\langle\xi_1\rangle^{-1}|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle\tau_1-p(\xi_1)\rangle^{\frac{3}{8}}}\frac{|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle\tau_2-p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{8}}}\\&\lesssim|\widehat{f}(\xi,\tau)|\frac{\langle\xi_1\rangle^{-\frac{1}{4}}|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle\tau_1-p(\xi_1)\rangle^{\frac{3}{8}}}\frac{|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle\tau_2-p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{8}}}\\&\lesssim|\widehat{f}(\xi,\tau)|\frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle\tau_1-p(\xi_1)\rangle^{\frac{3}{8}}}\frac{|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle\tau_2-p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{8}}}.\end{aligned}$$

利用（15），我们可以应用 $L^2L^4L^4$-Hölder 不等式。

(ii) $M=|\tau_1-p(\xi_1)|$。我们有

$$\begin{aligned}P(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2)&\lesssim\frac{\langle\xi\rangle^{\frac{7}{8}}|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle\tau-p(\xi)\rangle^{\frac{1}{4}}}\frac{\langle\xi_1\rangle^{-\frac{1}{2}}|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle\tau_1-p(\xi_1)\rangle^{\frac{1}{4}}}\frac{|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle\tau_2-p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{8}}}\\&\lesssim\frac{\langle\xi\rangle^{\frac{1}{4}}|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle\tau-p(\xi)\rangle^{\frac{1}{4}}}\frac{\langle\xi_1\rangle^{\frac{1}{8}}|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle\tau_1-p(\xi_1)\rangle^{\frac{1}{4}}}\frac{|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle\tau_2-p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{8}}}.\end{aligned}$$

利用 (14)，我们可以应用 $L^3L^3L^3$-Hölder 不等式。

(iii) $M = |\tau_2 - p(\xi_2)|$. Similar to (ii).

情形 6: $|\xi_1| \approx |\xi|$。

在这种情形下，我们有 $M \gtrsim |\xi|^4$。

(i) $M = |\tau - p(\xi)|$。我们有

$$P(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2) \lesssim |\widehat{f}(\xi,\tau)| \frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle \tau_1 - p(\xi_1)\rangle^{\frac{3}{8}}} \frac{|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle \tau_2 - p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{8}}}$$

利用（15），我们可以应用 $L^2L^4L^4$-Hölder 不等式。

(ii) $M = |\tau_1 - p(\xi_1)|$。我们有

$$\begin{aligned} P(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2) &\approx \frac{\langle \xi\rangle^{\frac{1}{2}}|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle \tau - p(\xi)\rangle^{\frac{1}{4}}} \frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle \tau_1 - p(\xi_1)\rangle^{\frac{1}{4}}} \frac{|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle \tau_2 - p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{8}}} \\ &\approx \frac{\langle \xi\rangle^{\frac{1}{4}}|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle \tau - p(\xi)\rangle^{\frac{1}{4}}} \frac{\langle \xi\rangle^{\frac{1}{4}}|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle \tau_1 - p(\xi_1)\rangle^{\frac{1}{4}}} \frac{|\widehat{h}(\xi_2,\tau_2)|}{\langle \tau_2 - p(\xi_2)\rangle^{\frac{3}{8}}}. \end{aligned}$$

利用（14），我们可以应用 $L^3L^3L^3$-Hölder 不等式。

(iii) $M = |\tau_2 - p(\xi_2)|$。与 (ii) 类似。 □

(iv) 的证明。根据对偶性，只需对以下量进行界定

$$\iint_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2\\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{|\xi||\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle \tau - p(\xi)\rangle^{\frac{1}{4}}} \frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle \tau_1 + \xi_1^2\rangle^{\frac{3}{8}}} \frac{|\widehat{h}(-\xi_2,-\tau_2)|}{\langle \tau_2 - \xi_2^2\rangle^{\frac{3}{8}}} \tag{38}$$

作者 $\|f\|_{Y^{0,0,1}} \|g\|_{X^{0,0,1}} \|h\|_{X^{0,0,1}}$。

情形 1: $|\xi| \lesssim 1$。

根据柯西-施瓦茨不等式，只需证明以下量

$$\sup_{\xi_1} \int_{|\xi|\lesssim 1} \frac{\langle \xi\rangle^2 d\xi}{\langle \xi(\delta\xi^4 + \gamma\xi^2 + \xi - 2\xi_1)\rangle^{\frac{1}{2}}} \tag{39}$$

是有限的。由于 $|\xi| \lesssim 1$，我们有 $\langle \xi(\delta\xi^4 + \gamma\xi^2 + \xi - 2\xi_1)\rangle \gtrsim \langle \xi\xi_1\rangle \gtrsim |\xi|\langle \xi_1\rangle$。因此，

$$(39) \lesssim \sup_{\xi_1} \frac{1}{\langle \xi_1\rangle^{\frac{1}{2}}} \int_{|\xi|\lesssim 1} \frac{1}{|\xi|^{\frac{1}{2}}} d\xi < \infty.$$

在本证明的其余部分，我们始终假设 $|\xi| \gg 1$。令 $M = \max(|\tau - p(\xi)|, |\tau_1 + \xi_1^2|, |\tau_2 - \xi_2^2|)$。则 $M \gtrsim |\xi(\delta\xi^4 + \gamma\xi^2 + \xi - 2\xi_1)|$。令

$$P(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2) := \frac{\langle \xi\rangle|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle \tau - p(\xi)\rangle^{\frac{1}{4}}} \frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle \tau_1 + \xi_1^2\rangle^{\frac{3}{8}}} \frac{|\widehat{h}(-\xi_2,-\tau_2)|}{\langle \tau_2 - \xi_2^2\rangle^{\frac{3}{8}}}.$$

情形 2: $|\xi_1| \geq 2|\delta||\xi|^4$。

在这种情况下，我们有 $M \gtrsim |\xi||\xi_1|$。

(i) $M = |\tau - p(\xi)|$。由于 $M \gtrsim |\xi||\xi_1| \gtrsim |\xi|^5$，我们有

$$P(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2) \lesssim |\widehat{f}(\xi,\tau)| \frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle \tau_1 + \xi_1^2\rangle^{\frac{3}{8}}} \frac{|\widehat{h}(-\xi_2,-\tau_2)|}{\langle \tau_2 - \xi_2^2\rangle^{\frac{3}{8}}}.$$

利用 (13)，我们可以应用 $L^2L^4L^4$-H¨older 不等式。

(ii) $M = |\tau_1 + \xi_1^2|$。我们有

$$\begin{aligned} P(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2) &\lesssim \frac{\langle \xi\rangle^{\frac{3}{4}}|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle \tau - p(\xi)\rangle^{\frac{1}{4}}} \frac{\langle \xi_1\rangle^{-\frac{1}{4}}|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle \tau_1 + \xi_1^2\rangle^{\frac{1}{8}}} \frac{|\widehat{h}(-\xi_2,-\tau_2)|}{\langle \tau_2 - \xi_2^2\rangle^{\frac{3}{8}}} \\ &\lesssim \frac{\langle \xi_1\rangle^{\frac{3}{16}}|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle \tau - p(\xi)\rangle^{\frac{1}{4}}} \frac{\langle \xi_1\rangle^{-\frac{1}{4}}|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle \tau_1 + \xi_1^2\rangle^{\frac{1}{8}}} \frac{|\widehat{h}(-\xi_2,-\tau_2)|}{\langle \tau_2 - \xi_2^2\rangle^{\frac{3}{8}}} \\ &\lesssim \frac{|\widehat{f}(\xi,\tau)|}{\langle \tau - p(\xi)\rangle^{\frac{1}{4}}} \frac{|\widehat{g}(\xi_1,\tau_1)|}{\langle \xi_1\rangle^{\frac{1}{16}}\langle \tau_1 + \xi_1^2\rangle^{\frac{1}{8}}} \frac{|\widehat{h}(-\xi_2,-\tau_2)|}{\langle \tau_2 - \xi_2^2\rangle^{\frac{3}{8}}}. \end{aligned}$$

接下来，我们可以应用引理 3.7。

(iii) $M = |\tau_2 - \xi_2^2|$。与 (ii) 类似。

情形 3: $|\xi_1| \leq 2|\delta||\xi|^4$。

在这种情况下，我们有 $\langle \xi\rangle \lesssim |5\delta\xi^4 + 3\gamma\xi^2 + 2\xi_1|^{\frac{1}{4}}$。因此，我们可以应用引理 3.6。

□

5.2. 整体适定性。 在证明定理1.2之前，我们需要以下引理，它是局部适定性结果 [6, 15] 以及 Kawahara 方程的标准 L^2-守恒律的推论。

引理 5.3. 对任意 $z_0 \in L^2(\mathbb{R})$，方程

$$\begin{cases} \partial_t z + \gamma\partial_x^3 z - \delta\partial_x^5 z + z\partial_x z = 0, \\ z(x,0) = z_0(x). \end{cases} \tag{40}$$

是整体适定的。此外，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，我们有 $\|z(t)\|_{L^2} = \|z_0\|_{L^2}$。

定理 *1.2*的证明。假设 $(u,\ v)$ 是方程 (1) 的解，且 z 是方程 (40) 的解，其中 $z_0 = v_0$。令 $w = v - z$，可见 $(u,\ v,\ w,\ z)$ 满足系统

$$
\begin{cases}
i\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha uv + \beta|u|^2 u, \\
\partial_t v + \gamma\partial_x^3 v - \delta\partial_x^5 v + v\partial_x v = \varepsilon\partial_x|u|^2, \\
\partial_t w + \gamma\partial_x^3 w - \delta\partial_x^5 w + \frac{1}{2}\partial_x((v+z)w) = \varepsilon\partial_x|u|^2, \\
\partial_t z + \gamma\partial_x^3 z - \delta\partial_x^5 z + z\partial_x z = 0, \\
u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = z(x,0) = v_0(x), \quad w(x,0) = 0.
\end{cases} \tag{41}
$$

对于 $0 < T \le 1$，令

$$
\begin{cases}
\Gamma_1(u,v,w,z) = \psi_T S(t)u_0 - i\psi_T \int_0^t S(t-t')(\alpha uv + \beta|u|^2 u)dt', \\
\Gamma_2(u,v,w,z) = \psi_T W(t)v_0 + \psi_T \int_0^t W(t-t')(-v\partial_x v + \varepsilon\partial_x|u|^2)dt', \\
\Gamma_3(u,v,w,z) = \psi_T \int_0^t W(t-t')\left(-\frac{1}{2}\partial_x((v+z)w) + \varepsilon\partial_x|u|^2\right)dt', \\
\Gamma_4(u,v,w,z) = \psi_T W(t)v_0 + \psi_T \int_0^t W(t-t')(-z\partial_x z)dt'.
\end{cases} \tag{42}
$$

由引理5.1 和5.2 可得

$$
\begin{aligned}
&\|\Gamma_1(u,v,w,z)\|_{X^{0,\frac{3}{8},1}} \le CT^{\frac{1}{8}}\|u_0\|_{L^2} + CT^{\frac{3}{8}}\|u\|_{X^{0,\frac{3}{8},1}}\|v\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}} + CT^{\frac{3}{8}}\|u\|^3_{X^{0,\frac{3}{8},1}} \\
&\|\Gamma_2(u,v,w,z)\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}} \le CT^{\frac{1}{8}}\|v_0\|_{L^2} + CT^{\frac{3}{8}}\|u\|^2_{X^{0,\frac{3}{8},1}} + CT^{\frac{3}{8}}\|v\|^2_{Y^{0,\frac{3}{8},1}}, \\
&\|\Gamma_3(u,v,w,z)\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}} \le CT^{\frac{3}{8}}\|v\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}}\|w\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}} \\
&\qquad\qquad + CT^{\frac{3}{8}}\|z\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}}\|w\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}} + CT^{\frac{3}{8}}\|u\|^2_{X^{0,\frac{3}{8},1}}, \\
&\|\Gamma_4(u,v,w,z)\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}} \le CT^{\frac{1}{8}}\|v_0\|_{L^2} + CT^{\frac{3}{8}}\|z\|^2_{Y^{0,\frac{3}{8},1}}.
\end{aligned}
$$

Let

$$
\begin{aligned}
&B := \{u \in X^{0,\frac{3}{8},1} : \|u\|_{X^{0,\frac{3}{8},1}} \le 2CT^{\frac{1}{8}}\|u_0\|_{L^2}\} \times \{v \in Y^{0,\frac{3}{8},1} : \|v\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}} \le 2CT^{\frac{1}{8}}\|v_0\|_{L^2}\} \\
&\times \{w \in Y^{0,\frac{3}{8},1} : \|w\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}} \le 8C^3T^{\frac{5}{8}}\|u_0\|^2_{L^2}\} \times \{z \in Y^{0,\frac{3}{8},1} : \|z\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}} \le 2CT^{\frac{1}{8}}\|v_0\|_{L^2}\}.
\end{aligned}
$$

由于 $\|u\|_{L^2}$ 守恒，我们可以假设 $\|u_0\|_{L^2} \le \|v_0\|_{L^2}$ 和 $C^3T^{\frac{5}{8}}\|u_0\|^3_{L^2} \le 1$。取$0 < T \le 1$ 使得 $8C^2T^{\frac{1}{2}}\|v_0\|_{L^2} \sim 1$。于是，通过压缩映射论证，存在一个

不动点 $(u,\ v,\ w,\ z)$ 的 42) 在 B。利用引理 5.1 和引理 5.2，可得

$$\begin{aligned}\|w\|_{C_t L^2_x([0,T]\times\mathbb{R})} &\lesssim \left\|\psi_T \int_0^t W(t-t')\left(-\frac{1}{2}\partial_x((v+z)w)+\varepsilon\partial_x|u|^2\right)dt'\right\|_{Y^{0,\frac{1}{2},1}}\\ &\lesssim T^{\frac{1}{4}}\left\|-\frac{1}{2}\partial_x((v+z)w)+\varepsilon\partial_x|u|^2\right\|_{Y^{0,-\frac{1}{4},\infty}}\\ &\lesssim T^{\frac{1}{4}}\|v\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}}\|w\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}}+T^{\frac{1}{4}}\|z\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}}\|w\|_{Y^{0,\frac{3}{8},1}}+T^{\frac{1}{4}}\|u\|^2_{X^{0,\frac{3}{8},1}}\\ &\lesssim T^{\frac{1}{2}}\|u_0\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

调用 $w=v-z$，然后使用引理 5.3，得到

$$\|v(T)\|_{L^2}\le\|z(T)\|_{L^2}+\|w(T)\|_{L^2}\le\|v_0\|_{L^2}+CT^{\frac{1}{2}}\|u_0\|^2_{L^2}.$$

接下来，我们将系统（41）的初始数据更新为 $u_0=u(T),\ v_0=v(T),\ z_0=v(T)$ 和$w_0=0$，然后重复上述估计。在 m 个时间区间内，我们可以重复此过程，直到数量 $\|v\|_{L^2}$ 翻倍，其中

$$m\sim\frac{\|v_0\|_{L^2}}{T^{\frac{1}{2}}\|u_0\|^2_{L^2}}.$$

由于 $mT\sim\|u_0\|^{-2}_{L^2}$，解可以全局延拓。 □

Acknowledgement

作者谨向其导师 NikolaosTzirakis 教授致谢，感谢他提出的许多有益建议和意见。

References

[1]P. ´Alvarez-Caudevilla, E. Colorado, R. Fabelo, *A higher order system of some coupled nonlinear Schrödinger and Korteweg-de Vries equations*, 《数学物理杂志》58 (2017年)，第11期，111503，13页。
[2] I. Bejenaru, S. Herr, J. Holmer, D. Tataru, *On the 2D Zakharov system with L^2-Schrödinger data*, 《非线性》22 (2009年)，第5期，1063–1089。[3] D. Bekiranov, T. Ogawa, G. Ponce,
Weak solvability and well-posedness of a coupled Schrödinger-Korteweg de Vries equation for capillary-gravity wave interactions, 《美国数学会会刊》125(1997年)，第10期，2907–2919。[4] D. Bekiranov, T. Ogawa, G. Ponce,
Interaction equations for short and long dispersive waves, 《泛函分析杂志》158 (1998年)，第2期，357–388。[5] J. Bourgain,
Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations, 《几何与泛函分析》3 (1993年)，第2期，107–156。

[6] W. Chen, J. Li, C. Miao, J. Wu, *Low regularity solutions of two fifth-order KdV type equations*, 《数学分析杂志》107 (2009年)，221–238。[7] J. Colliander, J. Holmer, N. Tzirakis,
Low regularity global well-posedness for the Zakharov and Klein-Gordon-Schrödinger systems, 《美国数学会汇刊》360 (2008)，第9期，4619–4638。[8] J. Colliander, C. Kenig, G. Staffilani,
Local well-posedness for dispersion-generalized Benjamin-Onoequations, 《微分积分方程》16 (2003)，第12期，1441–1472。[9] A. J. Corcho, F. Linares,
Well-posedness for the Schroödinger–Korteweg–deVries system, 《美国数学会汇刊》359 (2007)，4089–4106。[10] B. Erdo˘gan, N. Tzirakis, *Smoothing and global attractors for the Zakharov system on the torus*, 《分析与偏微分方程》6 (2013)，第3期，723–750。[11] L. Grafakos, M. Masti lo,
Analytic families of multilinear operators, 《非线性分析》107 (2014)，47–62。[12] A. Gr¨unrock, H. Pecher, *Global solutions for the Dirac-Klein-Gordon system in two space dimensions*, 《部分微分方程通讯》35 (2010)，第1期，89–112。[13] Z. Guo, Y. Wang,
On the well-posedness of the Schrödinger-Korteweg-de Vries system, 《微分方程杂志》249 (2010)，第10期，2500–2520。[14] Z. Huo, *The Cauchy problem for the fifth order shallow water equation*, 《数学应用学报（英文版）》21 (2005)，第3期，441–454。[15] T. Kato, *Local well-posedness for Kawahara equation*, 《微分方程进展》16 (2011)，第3-4期，257–287。[16] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega,
On the ill-posedness of some canonical dispersive equations, 《杜克数学杂志》106 (2001)，第3期，617–633。[17] V. Makhankov, *Dynamics of classical solitons (in nonintegrable systems)*, 《物理报告》35 (1978)，第1期，1–128。[18] H. Pecher,
The Cauchy problem for a Schrödinger-Korteweg-de Vries system with rough data, 《微分积分方程》18 (2005)，第10期，1147–1174。[19] H.Takaoka,
Well-posedness for the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with the derivativenonlinearity, 《微分方程进展》4 (1999)，第4期，561–580。[20] Y. Wu,
The Cauchy problem of the Schrödinger–Korteweg–de Vries system, 《微分积分方程》23 (2010)，569–600。

Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, IL 61801, U.S.A.
Email address: wshin14@illinois.edu