arXiv:2305.01531v1 [math.CO] 2 May 2023

禁含特定阶-大小对的超图中的大团或大独立集

Maria Axenovich* Domagoj Bradač† Lior Gishboliner‡ Dhruv Mubayi§ Lea Weber¶

摘要

著名的 Erdős-Hajnal 猜想指出，对于任意图 F，存在 $\epsilon > 0$，使得每个 n 阶图 G 只要不含 F 的诱导副本，就有一个大小至少为 n^ϵ 的齐性集。我们研究 Erdős-Hajnal 问题在超图上的一种变体：禁止由阶与大小描述的一族超图。对于图，我们指出，若对任意正数 m 和 $0 \le f \le \binom{m}{2}$，都禁止含有 m 个顶点和 f 条边的诱导子图，则可得到较大的齐性集。对于三元系，在首个非平凡情形 $m = 4$ 中，对每个 $S \subseteq \{0,1,2,3,4\}$，我们给出了齐性集最小大小的界；这里考虑的是任意四个顶点所张成的边数不属于 S 的三元系。在大多数情况下，这些界本质上是紧的。我们还确定了对所有 S，增长率是多项式还是多对数级。仍有一些未解决问题。

1 引言

对于一个整数 $r \ge 2$，r-图或 r-均匀超图是一个二元组 $H = (V, E)$，其中 $V = V(H)$ 是顶点集，$E = E(H) \subseteq \binom{V}{r}$ 是边集。2-图就是普通图。齐性集是一个顶点集合，它要么是团，要么是独立集（独立集）。对于一个 r-图 H，令 $h(H)$ 表示最大齐性集的大小。给定 r-图 F, H，若 H 不含 F，则称其为F-自由的，即 H 不含与 F 同构的诱导子图。若存在常数 $\epsilon = \epsilon_F > 0$，使得每个含 n 个顶点的 F-自由 r-图 H 都满足 $h(H) \ge n^\epsilon$，则称 r-图 F具有 Erdős-Hajnal 性质，或简称 EH 性质。Erdős 和 Hajnal [13] 提出一个猜想，认为任意 2-图都具有 EH 性质。该猜想仍未解决，例见 Chudnovsky [8], 的综述，以及 [1, 5, 17], 等人的工作。若 F 是一个固定图，且 G 是一个 F-自由的

*德国卡尔斯鲁厄理工学院，卡尔斯鲁厄，德国，maria.aksenovich@kit.edu。研究部分由德国研究联合会资助，项目编号 FKZ AX 93/2-1。

†苏黎世联邦理工学院数学系，苏黎世，瑞士，domagoj.bradac@math.ethz.ch。研究由瑞士国家科学基金会项目 200021 196965 资助。

‡苏黎世联邦理工学院数学系，苏黎世，瑞士，lior.gishboliner@math.ethz.ch。研究由瑞士国家科学基金会项目 200021 196965 资助。

§伊利诺伊大学芝加哥分校，芝加哥，美国，mubayi@uic.edu。研究部分由美国国家科学基金会项目 DMS-1763317、1952767、2153576、洪堡研究奖和西蒙斯奖学金资助。

¶德国卡尔斯鲁厄理工学院，卡尔斯鲁厄，德国，lea.weber@kit.edu。

n-顶点图，Erd˝os 和 Hajnal 证明了 $h(G) \geq 2^{c\sqrt{\log n}}$。最近，Buci´c、阮、斯科特和西摩 [7]将这一结果改进为 $h(G) \geq 2^{c\sqrt{\log n \log\log n}}$。

Erd˝os-Hajnal 猜想对 r元超图不成立，$r \geq 3$，甚至当 F是一个大小为 $r+1$ 的团时也是如此。事实上，关于非对角超图拉姆齐数的著名结果表明，存在 n 个顶点的 r 图，其中没有包含 $r+1$ 个顶点的团，也没有包含 $f_r(n)$ 个顶点的反团，其中 f_r 是一个迭代对数函数（最佳已知结果见 [25] ）。此外，以下结果（ [19] 中的断言 1.3）准确地告诉我们，哪些 r 图 $r \geq 3$ 具有 EH 性质。这里，D_2 是唯一一个恰有 2 条边的 4 顶点三元超图。

定理 1（Gishboliner 和 Tomon [19]）。设 $r \geq 3$。若 F 是一个至少有 $r+1$ 个顶点的 r 图，且 $F \neq D_2$，则存在一个无 F 的 r 图 H，它有 n 个顶点，并且 $h(H) = (\log n)^{O(1)}$。

考虑由多个 r图组成的族的 EH性质，而非单个 r图的 EH性质，是很自然的。本文研究由给定的阶与大小集合所确定的图族。多年来，人们已广泛研究了其中若干特殊情形（例如，见 [12]）。对于 $0 \leq f \leq \binom{m}{r}$，我们将具有 m 个顶点和 f 条边的 r图 F 称为 (m, f)-图，并将数对 (m, f) 称为 F 的阶 - 大小对。若 H 不含任何 (m, f)- 图的诱导副本，则称其为 (m, f)- 自由的。若 $Q = \{(m_1, f_1) \ldots, (m_t, f_t)\}$，则称 H 为 Q-自由的，如果对于所有 $i = 1, \ldots, t$，H 都是 (m_i, f_i)-自由的。

定义 1. 给定 $r \geq 2$ 和 $Q = \{(m, f_1) \ldots, (m, f_t)\}$，令 $h(n, Q) = h_r(n, Q)$ 为 $h(H)$ 在所有 n 顶点的 Q-自由 r图 H 上的最小值。若存在 $\epsilon = \epsilon_Q > 0$ 使得 $h(n, Q) > n^{\epsilon}$，则称 Q 具有 EH性质。

例如，$h_3(n, \{(4, 0), (4, 2)\}) = k$表示，任何一个具有 n 个顶点、且任意 4 个顶点所诱导出的边数为 1、3 或 4 的三元超图，都存在一个大小为 k 的齐性集；并且存在一个如上所述的 r 图 H，满足$h(H) = k$。如果上下文足以明确其含义，我们可以在记号 $h_r(n, Q)$ 中省略下标 r。当 $Q = \{(m, f)\}$ 时，我们使用更简单的记号 $h(n, m, f)$，而不使用 $h(n, \{(m, f)\})$。下面给出两个简单的观察:

$$h_r(n, Q) \leq h_r(n, Q') \qquad \text{if} \qquad Q \subseteq Q', \tag{1}$$

$$h_r(n, Q) = h_r(n, \overline{Q}) \qquad \text{where} \qquad \overline{Q} = \left\{ \left(m, \binom{m}{r} - f \right) : (m, f) \in Q \right\}. \tag{2}$$

我们的第一个结果涉及 2-图，我们证明，禁用单个阶-大小对就足以保证存在较大的齐性集。

命题1. 对于任意整数 m, f，满足 $m \geq 2$ 和 $0 \leq f \leq \binom{m}{2}$，存在 $c > 0$，使得 $h_2(n, m, f) > c\, n^{1/(m-1)}$。

要给出 $h_2(n, m, f)$ 的良好上界似乎是一个颇具挑战性的问题。例如，确定$h_2(n, m, \binom{m}{2})$ 等价于确定非对角拉姆齐数。

我们剩余的结果涉及超图情形 $r = 3$ 和 $m = 4$。我们将考虑由有序对 $(4, i)$ 构成的集合Q，其中 $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$。我们无需考虑同时包含 (4, 0) 和 (4, 4) 的集合 Q，因为 Ramsey 定理保证，当 n 足够大时，我们无法同时避开这两者。利用补（ 2 ），我们得到以下这些集合:

- $\{(4,0)\}$, $\{(4,1)\}$, $\{(4,2)\}$;
- $\{(4,0),(4,1)\}$, $\{(4,0),(4,2)\}$, $\{(4,0),(4,3)\}$, $\{(4,1),(4,2)\}$, $\{(4,1),(4,3)\}$; and
- $\{(4,0),(4,1),(4,2)\}$, $\{(4,0),(4,1),(4,3)\}$, $\{(4,0),(4,2),(4,3)\}$, $\{(4,1),(4,2),(4,3)\}$.

对于 Q 的每一种取值，我们都研究 $h(n,Q)$。

利用拉姆齐理论中的结果，我们可以快速得到第一种情形的界（再次注意，$h(n,4,f) = h(n,4,4-f)$）。回顾一下，拉姆齐数 $R_k(s,t)$ 是满足以下性质的最小 n：对完全 n顶点 k图进行任意红/蓝边染色，都会产生单色红色s团或单色蓝色 t团。已知 [9]， $2^{ct\log t} \le R_3(4,t) \le 2^{c't^2}$ 对数t。由此可得正的常数 c 和 c'，使得

$$c'\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{1/2} < h_3(n,4,0) < c\frac{\log n}{\log\log n}. \tag{3}$$

Fox 和 He 的一项较新的结果 [16] 构造了具有 n个顶点的三元超图，其中任意四个顶点所张成的边至多有两条，且独立数至多为 $c\log n/\log\log n$。结合 (1)，可得一个正的常数 c，使得

$$h_3(n,4,1) \le h_3(n,\{(4,0),(4,1)\}) < c\frac{\log n}{\log\log n}. \tag{4}$$

对于剩余情形，我们使用 Fox and He 的近期结果以及 Gishboliner 和 Tomon 的近期结果，得到相应的界。

命题 2. 存在正常数 c_1, c_2，使得

$$h_3(n,4,1) > c_1\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{1/2} \tag{5}$$

and

$$n^{c_1} < h_3(n,4,2) < c_2 n^{1/3}\log^{4/3} n. \tag{6}$$

目前尚不清楚上述关于 $h(n,4,1)$ 的两个界是否代表正确的数量级，但下界显然似乎与实际情况相差甚远。

问题 1。改进 $h_3(n,4,1)$ 的下界中的指数 $1/2$。

接下来的结果讨论 $|Q|=2$ 的情形。在这里，所有情形下我们都得到了本质上紧确的界。首先，对于 $Q=\{(4,0),(4,1)\}$，已知

$$c\frac{\log n}{\log\log n} < h_3(n,\{(4,0),(4,1)\}) < c'\frac{\log n}{\log\log n}$$

对某些常数 $c, c' > 0$ 成立。下界由 Erd˝os 和 Hajnal [12] 的一个早期结果（应用 (2) 后）得出。这是 Erd˝os 和 Hajnal [12] 关于与我们所研究的 $(n, Q)h$ 情形相对应的广义超图拉姆齐数增长率的另一个猜想的首个实例，其中 $Q = \{(m, f), (m, f+1) \ldots, (m, \binom{m}{r})\}$。Mubayi 和 Razborov [24] 关于这一问题的最新结果确定了对于每个 $m > r \geq 4$，使得 $h_r(n, Q) < c\log^a n$ 对某些 a 和 $Q = \{(m, f) \ldots, (m, \binom{m}{r})\}$ 成立的最小 f。当 $r = 3$ 时，Conlon、Fox 和 Sudakov [9] 确定了 m 为 3 的幂且 m 递增时的最小 f，以及其他一些取值。

以下定理为其余每个满足 $|Q| = 2$ 的 Q 给出了关于 $h_3(n, Q)$ 的本质上紧确界。

定理 2. 存在正常数 c_1、c_2，使得：

(a) $c_1\sqrt{n} \leq h_3(n, \{(4, 0), (4, 2)\}) \leq c_2\sqrt{n \log n}$.(b) $c_1 n^{1/3} \log^{1/3} n \leq h_3(n, \{(4, 1), (4, 2)\}) \leq c_2 n^{1/3} \log^{4/3} n$
(c) $c_1 n \leq h_3(n, \{(4, 0), (4, 3)\})$ (d) $c_1 \log n \leq h_3(n, \{(4, 1), (4, 3)\}) \leq c_2 \log n$.

缩小定理 2 前两项中上界和下界之间的（多对数级）差距将很有意义。另请参见第 4 节末尾的注释。

关于 $h_3(n, \{(4, 0), (4, 3)\})$，通过将顶点集划分为三个大小几乎相等的团 A_1、A_2、A_3，并添加恰好包含 A_i 中一个顶点和 A_{i+1} 中两个顶点的所有三元组，其中 $i = 1$ 取 2 、 3，且下标模 3 计算，可得简单的上界 $n/3 + 1$。

值得指出的是，{(4,1),(4,3)}-free 3-graphs 也称为二图，并且由于它们与等角直线集合之间的联系，在代数组合学中得到了深入研究，参见例如 [22, 第 11] 章。每个二图 H 都可以由某个图 G 通过如下方式得到：当且仅当 $\{x, y, z\}$ 在 G 中诱导出奇数条边时，才将 $x, y, z \in V(G)$ 视为 H 的一条边。我们将在定理 2(d) 的证明中利用这一联系。

最后，我们考虑 $|Q| = 3$ 的情形。若 $Q = \{(4, 0)、(4, 1)、(4, 2)\}$，则无 $\overline{Q}$ 的三元超图是一个部分斯坦纳系统（STS）。众所周知，[14, 26, 6] 一个有 n 个顶点的部分斯坦纳系统，其最小独立数的数量级为 $\sqrt{n} \log n$。因此，$h_3(n, Q)$ 的数量级为 $\sqrt{n} \log n$。若 $Q = \{(4, 1)、(4,2)、(4, 3)\}$，且 $n \geq 4$，则简单可证，任何至少有四个顶点的无 Q 的 4-图都是团或独立集，因此对于 $n \geq 4$，$h_3(n, Q) = n$。下面将讨论剩下的两种情形。

定理 3。设 $n \geq 4$。则 $h_3(n, \{(4, 0)、(4, 2)、(4, 3)\}) = n - 1$ 并且

$$h_3(n, \{(4,0), (4,1), (4,3)\}) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{if } n \equiv 0 \pmod 6 \\ \lceil \frac{n+1}{2} \rceil & \text{if } n \not\equiv 0 \pmod 6. \end{cases}$$

论文结构：本文其余部分安排如下。第 2 节证明命题1。第 3 节证明命题 2 和定理 2(c)。在第 4、5、6 节中，我们

分别证明定理 2 的 (a)、(b) 和 (d) 部分。最后，定理 3 在第7节中证明。最后一节包含一些总结性评论。

记号：在全文中，对于超图 H，令 $\omega(H)$ 和 $\alpha(H)$ 分别表示 H 中最大团和最大独立集的大小。回顾一下，$h(H) = \max\{\omega(H)\ \alpha(H)\}$。对于三元超图 H 及其一个顶点 v，我们将 v 的链接图定义为图 $L(v)$，其顶点集为 $V(H) \setminus \{v\}$，边集为 $\{e \subseteq V(H) \setminus \{v\}:\ e \cup \{v\} \in E(H)\}$。此外，对于 $S \subseteq V(H) \setminus \{v\}$，我们用 $L_S(v)$ 表示 $L(v)$ 中由 S 诱导的子图。由 s 个顶点构成的团记为 K_s。表示三元超图中的边时，我们通常省略括号和逗号；例如，不写作 $\{x, y, z\}$，而简写为 xyz。星是由一个集合 S 和一个顶点 $v \notin S$ 构成的超图，其边集为 $\{vxy:\ x, y \in S, x \neq y\}$。我们将这颗星记为 (v, S)。按惯例，若存在常数 $C > 0$，使得对所有 n，都有 $f(n) = O(g(n))$ $f(n) \leq Cg(n)$，则记作 $f(n) = O(g(n))$；而 $f(n) = \Omega(g(n))$ 表示 $g(n) = O(f(n))$。

2 图：命题1的证明

命题1的证明。我们将对 m 使用归纳法，基例为 $m = 2$。在这种情况下，$f \in \{0, 1\}$。注意，$h(n, 2, 0) = h(n, 2, 1) = n = n^1 = n^{1/(m-1)}$，因为禁用图要么是非边，要么是边。考虑一个定义在 n 个顶点上的 (m, f)-自由图 G，$m \geq 3$，并假设该命题对更小的 m值成立。我们还可以假设 G 不是完全图、空图、圈或圈的补图，因为这些情形下结论显然成立。考虑 Δ 和 $\overline{\Delta}$，它们分别是 G 的最大度和 G的补图 $\overline{G}$ 的最大度。根据布鲁克斯定理，G 和 $\overline{G}$ 的色数分别至多为 Δ 和 $\overline{\Delta}$。因此，$\alpha(G) \geq n/\Delta$ 且 $\omega(G) \geq n/\overline{\Delta}$。所以，我们可以假设 $\Delta \geq n^{(m-2)/(m-1)}$ 且 $\overline{\Delta} \geq n^{(m-2)/(m-1)}$，否则结论显然成立。因此，存在一个顶点至少与 $n^{(m-2)/(m-1)}$ 条边关联，且存在一个顶点至少与 $n^{(m-2)/(m-1)}$ 条非边关联。

首先假设 $f \leq m - 1$。考虑一个顶点 v，它至少有 $n^{(m-2)/(m-1)}$ 条与之关联的非边，即存在一个顶点集合 X，其中每个顶点都不与 v、$|X| \geq n^{(m-2)/(m-1)}$ 相邻。由于 G 是 (m, f)-free，$G[X]$ 是 $(m - 1, f)$-free。因此，根据归纳法 $h(G) \geq h(G[X]) \geq |X|^{1/(m-2)} \geq n^{1/(m-1)}$.
现在假设 $f \geq m$。考虑一个至少有 $n^{(m-2)/(m-1)}$ 条边与之关联的顶点 v，即存在一个顶点集合 X，其中每个顶点都与 v、$|X| \geq n^{(m-2)/(m-1)}$ 相邻。由于 G 是无 (m, f) 的，因此 $G[X]$ 是无 $(m - 1, f - (m - 1))$ 的。因此，根据归纳法，$h(G) \geq h(G[X]) \geq |X|^{1/(m-2)} \geq n^{1/(m-1)}$. □

3 两个简短证明

3.1 命题 2 的证明

为证明 $h(n, 4, 1)$的下界，我们将考虑补图情形以及任意n-顶点的$(4, 3)$-无自由三元超图 H。我们需要Fox and He的以下定理 [16]。

定理 4（Fox and He [16], 定理 1.4）。对于所有 $t, s \geq 3$，任何顶点数多于 $(2t)^{st}$ 的三元超图，要么包含一个顶点数为 t 的独立集，要么包含一个星 (v, S)，且满足 $|S| = s$。

我们将以尽可能大的 $t = s$ 应用定理 4，使得 $(2t)^{st} < n$。此时$t = s \geq c(\log n/\log\log n)^{1/2}$。如果 H 有一个大小为 t 的独立集，那么 $h(H) \geq t$，结论即得。否则， H 包含一个星 (v, S)，且满足 $|S| = s$。注意， S 在 H 中诱导出一个团；否则， v和 S 中三个不构成边的顶点会给出一个 (4, 3)-子图。因此， $h(H) \geq s-1$。在每种情况下， $h(H) \geq c(\log n/\log\log n)^{1/2}$。

现在，我们考虑 $Q = \{(4, 2)\}$ 的情形。 $h(n,4, 2)$ 的下界由 Gishboliner 和 Tomon [19] 的一个结果给出。上界由定理 2 的条目 2 得出，因为 $h(n,4, 2) \leq h(n, \{(4, 1), (4, 2)\})$。这就完成了命题 2 的证明。

3.2 定理 2(c) 的证明

设 H 是一个 $\{(4, 0), (4, 3)\}$-自由超图。我们可以假设 $e(H) = \Omega(n^3)$，否则 H 不是 (4, 0)-自由的。（事实上，如果 $e(H) = o(n^3)$，那么一个随机的 4 个顶点集合包含一条边的概率为 $o(1)$，因此 H 含有一个 (4, 0)-子图。）取 $v \in V(H)$，使得 $e(L(v)) = \Omega(n^2)$。注意，$L(v)$ 是诱导 C_4-自由的。事实上，如果 C 在 $L(v)$ 中是一个诱导 C_4，那么对于每个 $A \subseteq V(C)$， $|A| = 3$ 都有 $A \notin E(H)$，否则 $A \cup \{v\}$ 恰好生成 3 条边。这意味着 $V(C)$ 生成 0 条边，矛盾。根据 Gy´arf´as、Hubenko 和 Solymosi [21]，的一个结果，一个有 n 个顶点、含有 $\Omega(n^2)$ 条边且不含诱导 C_4 的图，包含一个大小为 $\Omega(n)$ 的团。因此， $L(v)$ 含有一个大小为 $\Omega(n)$ 的团 X。对于每个 $A \subseteq X, |A| = 3$，都有 $A \in E(H)$，否则 $A \cup \{v\}$ 恰好生成 3 条边。因此，X 是 H 中的一个团，这意味着 $\omega(H) = \Omega(n)$。这就证明了定理 2(c)。

4 (4, 0),(4, 2)：定理 2(a) 的证明

考虑 $Q = \{(4, 2), (4, 4)\}$ （这等价于 $\{(4, 0), (4, 2)\}$ 通过补）。为了给 $h_3(n, \{(4, 2), (4, 4)\})$ 一个下界，我们证明以下关于 $\{(4, 2), (4, 4)\}$-自由 3-一致超图的刻画。紧分量是一个极大的（关于包含关系）边集 C，满足对于任意不同的 $e_1, e_2 \in C$，存在一条从 e_1 到 e_2的紧步道，即一列边 $e_1 = f_1, \ldots, f_k = e_2$，其中 $|f_i \cap f_{i+1}| = 2$。我们称紧分量为星，如果它是一个星的边集。

定理 5. A　　三元超图 H是 $\{(4,2),(4, 4)\}$-自由的，当且仅当每个紧分量都是一个星。

证明。首先，假设 H 的每个紧分量都是星。如果 H 包含 4 个顶点，且它们恰好张成 2 条或 4 条边，那么这些顶点上的边属于同一个紧分量，但星不包含恰好张成 2 条或 4 条边的 4 个顶点，矛盾。因此， H 是 $\{(4, 2), (4,4)\}$-自由的。

现在证明另一个方向。设 H 是一个不含 $\{(4, 2)$、$(4, 4)\}$的三元超图。注意，对于 H中的每个星 (v, S)，集合 S都是独立的，否则 H就不满足 (4, 4)-无关。

断言1. 令 (v, S) 为带有 $|S| \geq 3$ 的星。 H 中不存在形如 uxy、满足 $u \notin \{v\} \cup S$ 和 x、$y \in S$ 的边。

证明. 反设成立。顶点 $\{v,u,x,y\}$ 必须恰好张成 3 条边，因为 $vxy, uxy \in E(H)$，但 $\{v,u,x,y\}$ 不可能张成 2 条或 4 条边。不失一般性，设 $vux \in E(H)$，$vuy \notin E(H)$。令 $z \in S \setminus \{x,y\}$。先设 $vuz \in E(H)$。则 $uyz \in E(H)$，否则 $\{v,u,y,z\}$ 会张成 2 条边。这意味着 $uxz \in E(H)$，否则 $\{u,x,y,z\}$ 会张成 2 条边。现在 $\{v,u,x,z\}$ 张成 4 条边，矛盾。类似地，设 $vuz \notin E(H)$。则 $uyz \notin E(H)$，否则 $\{v,u,y,z\}$ 会张成 2 条边。这意味着 $uxz \notin E(H)$，否则$\{u,x,y,z\}$ 会张成 2 条边。现在，$\{v,u,x,z\}$ 张成 2 条边，矛盾。 □

现在我们完成该定理的证明。设 C 是 H 的一个紧分量，并证明 C 是一个星。若 $|C| = 1$（即 C 只包含一条边），则结论显然成立，因此假设 C 至少包含 2 条边。取 e、$f \in C$，使得 $|e \cap f| = 2$。记 $e = uvx$、$f = uvy$。那么三元组 vxy、uxy 中恰有一个是边，不妨设为 $vxy \in E$（H）。因此，C 包含星（v，$\{u,x,y\}$）的各条边。设 S 是 V（H）的一个极大子集 $\setminus \{v\}$，满足 C 包含星（v，S）的各条边，因此 $|S| \geq 3$。我们断言，C 不包含其他边。反设不然。回想一下，S 不诱导任何边。因此，必有一条边 $e \in C$，它包含一个位于 $\{v\} \cup S$ 之外的顶点 w，以及位于 $\{v\} \cup S$ 中的两个顶点 s、t。根据断言1，不可能有 s、$t \in S$。因此假设 $s = v$、$t \in S$。任取一个 $z \in S \setminus \{t\}$。我们有 $vzt \in E$（H）。此外，$vwt \in E$（H）（因为 $s = v$）。根据断言1，$wzt \notin E$（H），这意味着 $vwz \in E$（H），否则 $\{v,w,t,z\}$ 恰好张成两条边。由于这对每个 $z \in S$ 都成立，我们得到（v，$S \cup \{w\}$）是包含在 C 中的一个星，这与 S 的极大性矛盾。

□

在下文中，对于一个为星的紧分量 C，我们用 V（C）表示相应图的顶点集，并用 e（C）$= |C|$ 表示 C 中边的数量。

引理 1. 设 C_1, C_2 是一个不含 {(4, 2)、(4, 4)} 的三元超图中的两个不同的紧分量。那么 $|V(C_1) \cap V(C_2)| \leq 1$。

证明。反设存在互不相同的 $x, y \in V(C_1) \cap V(C_2)$。注意，在一个星中，任意一对顶点都包含在该星的某条边中。令 e_i 为 C_i 的一条边，其中包含 $x, y, i = 1, 2$。于是，通过使用连接 e_1, e_2，C_1 的每条边与 C_2 的每条边之间都存在一条紧步道。因此，C_1, C_2 属于同一个紧分量，矛盾。 □

接下来，我们证明一个关于不含 {(4,2),(4,4)} 的三元超图中边数的紧确界。极值情形是当 H 为星时。

命题 3. 对于一个 {(4, 2), (4, 4)}-free n-顶点三元超图 H，有 $e(H) \leq \binom{n-1}{2}$。

证明。令 $C_1, \ldots, C_m$ 为 H 的紧连通分量。每条边都唯一地包含在一个 C_i 中，并且 $e(C_i) = \binom{|V(C_i)|-1}{2}$，因为 C_i 是一个星。因此，$e(H) = \sum_{i=1}^{m} \binom{|V(C_i)|-1}{2}$。此外，$\sum_{i=1}^{m} \binom{|V(C_i)|}{2} \leq \binom{n}{2}$，因为根据引理 1，每对顶点至多包含在一个 $V(C_i)$ 中。令 f 为函数 $f(x) = x - \frac{1}{2}\sqrt{8x+1} + \frac{1}{2}$，使得 $f(\binom{k}{2}) = \binom{k-1}{2}$。设 $x_i = \binom{|V(C_i)|}{2}$，使得 $f(x_i) = \binom{|V(C_i)|-1}{2}$。我们有 $\sum_{i=1}^{m} x_i \leq \binom{n}{2}$。函数 f 在 $[0, \infty)$ 上是凸的，因此当某个 x_i 中恰有一个非零时，$\sum_{i=1}^{m} f(x_i)$ 取得最大值；不妨设这个非零项为 x_1。由于 $x_1 \leq \binom{n}{2}$，我们有 $e(H) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) \leq f(\binom{n}{2}) = \binom{n-1}{2}$。

□

定理 2(a) 的证明。定理 2(a) 中的上界由以下事实推出：每个线性 3-图都是 {(4, 2)、(4, 4)}-自由的（例如，这可由定理 5 得出，因为线性超图的每个紧分量大小均为 1）；再结合众所周知的结果：存在独立数为 $O(\sqrt{n}\log n)$ 的线性 3-图（该界是紧的），见 [14, 26, 6]。

定理 2(a) 中的下界由命题 3 以及以下已知事实推出：每个 n-顶点三元超图 H 都有一个大小为 $cn^{3/2}/\sqrt{e(H)}$ 的独立集。（为此，取一个随机子集$X \subseteq V(H)$，以概率 $p = c\sqrt{n/e(H)}$ 保留每个顶点，并从 X内部的每条边中删除一个顶点。）

□

确定 $h(n, \{(4, 2), (4, 4)\})$ 是否为 $= \Theta(\sqrt{n}\log n)$ 将会是一个有趣的问题。如上所述，已知每个线性三元超图都具有一个大小为 $\Omega(\sqrt{n}\log n)$ 的独立集，而且这一界是紧的。另一种构造一个 {(4, 2), (4, 4)}-自由超图的方法是取一个射影平面，并在每条直线上放置一个星（使得每个星大约有 $\sqrt{n}$ 个顶点）。估计这种超图可能具有的最小独立数将会是一个有趣的问题。

5 (4, 1),(4, 2)：定理 2(b) 的证明

这里我们考虑 $Q = \{(4, 1), (4, 2)\}$。根据补图对偶性，我们可以等价地考虑 $Q = \{(4, 2), (4, 3)\}$。我们先给出定理 2(b) 的下界。这里需要用到 Kostochka、Mubayi 和 Verstra¨ete [23] 关于稀疏超图中独立集的以下结果。

定理 6（Kostochka、Mubayi 和 Verstra¨ete [23]）。设 H 是一个有 n个顶点的三元超图，其中任意一对顶点至多共同属于 d 条边，且 $0 < d < n/(\log n)^{27}$。那么 H 有一个大小至少为 $c\sqrt{(n/d)}\log(n/d)$ 的独立集，其中 c 是一个绝对常数。

定理 2(b) 下界的证明。设 H 是一个有 n个顶点、无 {(4, 2), (4, 3)}的三元超图，其中n 充分大。取 H 中公共邻域 S 大小为最大值 $d > 0$的一对顶点 u, v 。给定顶点 $x, y \in S$，边 xyu和 xyv都属于 H；否则，$\{u, v, x, y\}$会诱导出一个 (4, 2)-图或 (4, 3)-图。接下来，任意三个顶点 $x, y, z \in S$都必须构成 H 的一条边，否则 $\{u, x, y, z\}$ 会诱导出一个 (4, 3)-图。因此，S在 H中诱导出一个大小为 d的团。若 $d > n^{0.4}$，例如，则我们便已完成，因为 $h(H) \geq d$。回想 n 足够大，我们可以假设 $d \leq n^{0.4} < n/(\log n)^{27}$。现在由定理 6 可知，$H$中存在一个大小至少为 $c\sqrt{(n/d)}\log n$ 的独立集，其~~中某个正~~常数为 c。因此，存在一个常数 c'，使得

$$h(H) \geq \max\{d, c\sqrt{(n/d)\log n}\} > c'(n\log n)^{1/3}.$$

将 c' 替换为一个可能更小的常数 c_1，即可得到对所有 $n > 4$ 都成立的结果。 □

在本节余下部分，我们证明定理 2(b)中的上界。首先给出以下两个引理，它们对 {(4, 2), (4, 3)}-自由 3-一致超图作出结构刻画，并将估计 $h_3(n, \{(4, 2), (4, 3)\})$ 的问题重新表述为一个关于（非均匀）线性超图的极值问题。

引理 2. 设 H 是一个无 {(4, 2)、(4, 3)} 的三元超图。那么，H 中的任意两个极大团至多交于一个顶点。

证明. 设 X、Y是极大团，并假设 $|X\cap Y|\geq 2$。固定 u、$v\in X\cap Y$和 $y\in Y\setminus X$。注意 $uvy\in E(H)$。对于每个 $x\in X\setminus\{u,v\}$，有 $uvx\in E(H)$，因此必有uxy、$vxy\in E(H)$，否则 $\{u,v,x,y\}$ 会张成 2 条或 3 条边。接下来，对于每个 x_1，有 $x_2\in X\setminus\{u\}$、$ux_1y(ux_2y\in E)$，因此也必有 $H(x_1x_2y\in E)$。由此可知 H是一个团，这与 $X\cup\{y\}$ 的极大性矛盾。 □

对于一个（不一定是均匀的）超图 $\mathcal{H}$，令 $\alpha_2(\mathcal{H})$ 表示满足以下条件的集合 $I\subseteq V(\mathcal{H})$ 的最大大小：对于每个 $e\in E(\mathcal{H})$，$|I\cap e|\leq 2$。记 $g(\mathcal{H})$ 为 $=\max\left(\max_{e\in E(\mathcal{H})}|e|,\alpha_2(\mathcal{H})\right)$。记 $g(n)$ 为所有具有 n 个顶点的线性（不一定是均匀的）超图中 $g(\mathcal{H})$ 的最小值。

引理 3. $h_3(n,\{(4,2),(4,3)\})=g(n)$.

证明。设 H 是一个有 h 个顶点且不含 n 的 Q-自由三元超图，并满足 $H=h(n,Q)$，其中 $Q=\{(4,2),(4,3)\}$。令 $\mathcal{H}$ 为定义在 $V(H)$ 上的超图，其边是 H 的极大团。由前一个引理，$\mathcal{H}$ 是线性的。此外，$\max_{e\in E(\mathcal{H})}|e|=\omega(H)$，且 $\alpha_2(\mathcal{H})=\alpha(H)$，因此 $h(H)=g(\mathcal{H})$。
反过来，设 $\mathcal{H}$ 是一个具有 $g(\mathcal{H})=g(n)$ 的 n 顶点线性超图。令 H 为将每个 $e\in E(\mathcal{H})$ 变为一个团所得到的三元超图。于是 $h(H)=g(\mathcal{H})$，且容易验证 H 是 {(4,2),(4,3)}-自由的。 □

从现在起，我们的目标是给 $g(n)$ 求上界。正如我们即将证明的，这个问题可以转化为一个关于无 C_4 二部图的问题。我们证明如下结论。

定理 7. 对某个正的常数 C 和每个足够大的 m，存在一个无 C_4 的二部图$G=(X,Y,E)$，满足 $|X|\geq\frac{1}{2}m^{3/4}\log^2 m$ 且 $|Y|=(1+o(1))m$，并且满足以下条件：

1. 对每个 $y\in Y$，$d(y)\leq 2m^{1/4}\log^2 m$
2. 对于每个大小至少为 $Cm^{1/4}\log^2 m$ 的集合 $X'\subseteq X$，存在 $y\in Y$ 满足 $|N(y)\cap X'|\geq$ 3.

定理 2(b) 中上界的证明。根据引理 3，只需证明 $g(n)=O(n^{1/3}\log^{4/3} n)$。令 $G=(X,Y,E)$ 为定理 7 给出的图。设 $n=|X|=\Omega(m^{3/4}\log^2 m)$。令 $\mathcal{H}$ 为超图，其边为集合 $N_G(y)\subseteq X$, $y\in Y$。由于 G 是 C_4-自由的，因此 $\mathcal{H}$ 是线性的。此外，根据定理 7 的条目 1，$\max_{e\in E(\mathcal{H})}|e|=O(m^{1/4}\log^2 m)=O(n^{1/3}\log^{4/3} n)$。最后，根据定理 7 的条目 2，$\alpha_2(\mathcal{H})=O(m^{1/4}\log^2 m)=O(n^{1/3}\log^{4/3} n)$。 □

5.1 定理 7 的证明

设 H 是一个有限射影平面的关联图，该平面有 $n=(1+o(1))m$ 个点和直线；也就是说，H 是一个二部 C_4-自由图，其两侧 X_0、Y 的大小均为 n，且 X_0 中每一对顶点在 $Y.$ 中恰有一个公共邻点。设 X 是从 X_0 中随机选取的子集，其中每个顶点都以概率 $p=n^{-1/4}\log^2 n.$ 独立地被选入。显然，高概率下 $G=H[X,Y].\log^2 m.$。此外，对于每个 $y\in Y$，我们有 $d_H(y)=(1+o(1))\sqrt{n}$，并且很容易利用切尔诺夫界证明，高概率下，对于每个 $y\in Y$，都有 $d(y)\leq 2\sqrt{n}p=2n^{1/4}\log^2 n$。因此，只需证明高概率下，$G$ 满足条目 2。为此，我们使用容器

方法。设 $\mathcal{I}$ 为所有大小为 $Cn^{1/4}\log^2 n$ 且对每个 $y \in Y.$ 都满足 $|N(y) \cap I| \le 2$ 的子集 $I \subseteq X_0$ 所构成的集合。我们要证明，高概率下， X 不包含 $\mathcal{I}.$ 中的任何集合。我们将证明以下命题。

断言 2。存在一个正常数 C_0、一个集合 $\mathcal{S} \subseteq \binom{X_0}{C_0 n^{1/4}\log n}$ 以及一个函数 $f\colon \mathcal{S} \to \binom{X_0}{\le C_0\sqrt{n}}$，使得对于每个 $I \in \mathcal{I}$，存在满足 $S \subseteq I \subseteq f(S)$ 的 $S = S(I) \in \mathcal{S}$。

我们首先完成断言 2 所给出的证明。固定任意 $S \in \mathcal{S}.$。注意， $|X \cap f(S)|$ 服从 $\mathrm{Bin}(|f(S)|, p)$ 分布。我们有 $\mathbb{P}[\mathrm{Bin}(N,p) \ge k] \le \binom{N}{k}p^k \le (\frac{eNp}{k})^k$。因此，对于 $k = Cn^{1/4}\log^2 n \ge \frac{C}{C_0}\cdot p|f(S)|$，我们有（假设 $C \gg C_0$），

$$\Pr\left[|X \cap f(S)| \ge Cn^{1/4}\log^2 n\right] \le \exp\left(-Cn^{1/4}\log^2 n\right). \tag{7}$$

对所有 $S \in \mathcal{S}$ 应用并集界。这样的 $S \in \mathcal{S}$ 至多有 $\binom{n}{C_0 n^{1/4}\log n} \le \exp(2C_0 n^{1/4}\log^2 n)$ 个，因此可知，以高概率， $|X \cap f(S)| < Cn^{1/4}\log^2 n$ 对每个 $S \in \mathcal{S}.$ 都成立。回顾对于每个 $I \in \mathcal{I}$，存在 $S \in \mathcal{S}$ 使得 $I \subseteq f(S(I))$。因此，对于每个 $I \in \mathcal{I}$，我们有 $|I \cap X| < Cn^{1/4}\log^2 n \le |I|$，这意味着 $I \not\subseteq X$，正如所需。

断言 2 的证明。我们给出一个算法，该算法给定 I 后，生成集合 $S(I) \subseteq I$ 和 $f(S) \supseteq I$。该算法维护集合 A^t, S^t。初始时，我们设定 $A^0 = X_0, S^0 = \emptyset$。算法运行 $q = C_0 n^{1/4}\log n$ 步，即 $t = 0, \ldots, q-1$，并且在第 t 步中获得索引 i^t（其定义将在稍后给出）以及新集合 $A^{t+1}, S^{t+1}.$。回顾对于任意 $I \in \mathcal{I}$，我们有 $|I| = Cn^{1/4}\log^2 n > q.$。在整个算法过程中，我们将始终有 $|S^t| = t, S^t \subseteq I \subseteq S^t \cup A^t$ 以及 $S^t \cap A^t = \emptyset.$。现在，假设我们处于第 t 步。我们定义一个图 F^t，其 $V(F^t) = A^t$，并且当且仅当存在 $s \in S^t$ 和 $y \in Y$ 使得 $a, a', s \in N(y)$ 时， $aa' \in E(F^t)$。注意， F^t 只依赖于 A^t, S^t，而不依赖于 $I.$。令 $a_1^t, a_2^t, \ldots, a_{|A_t|}^t$ 为 A_t 的一个排序，使得对于所有 i， a_i^t 是 $F^t[\{a_i^t, a_{i+1}^t, \ldots, a_{|A_t|}^t\}]$ 中度最大的顶点；若存在并列，则按照 $X_0.$ 的某个固定排序打破平局。令 i^t 为满足 $a_i^t \in I.$ 的最小索引 i。我们令 $S^{t+1} = S^t \cup \{a_{i^t}^t\}$，以及 $A^{t+1} = A^t \setminus (\{a_1^t, \ldots, a_{i^t}^t\} \cup N_{F^t}(a_{i^t}))$。注意，由于我们有 $|S^t| < q < |I|$ 和 $I \subseteq S^t \cup A^t$（我们很快将证明这一点）， i^t 的定义是良好的。经过 q 步后，我们令 $S(I) = S_q$ 以及 $f(S_q) = S_q \cup A_q.$。我们将 $\mathcal{S} = \{S(I) \mid I \in \mathcal{I}\}.$ 记为
显然，对于任意 $t \in \{0, \ldots q\}$，我们有 $S^t \subseteq I, S^t \cap A^t = \emptyset$；对于任意$t \in \{0, \ldots, q-1\}.$，我们有 $S^{t+1} \cup A^{t+1} \subseteq S^t \cup A^t$。我们还需验证整个过程中 $I \subseteq S^t \cup A^t$，这显然意味着$I \subseteq f(S(I))$。事实上，假设算法在某一步满足 $I \subseteq S^t \cup A^t$，令 $a_1^t, \ldots, a_{|A_t|}^t$ 为算法中所述的 A^t 的排列，并令 $i = i^t$ 为算法选取的索引，即满足 $a_i^t \in I$和 $a_1^t, \ldots, a_{i-1}^t \notin I$。考虑 a_i^t 在 $F^t.$ 中的一个邻居 v。根据定义，存在 $s \in S^t \subseteq I$和 $y \in Y$，使得 $s, a_i^t, v \in N(y)$。于是，由于 $I \in \mathcal{I}$且 $s, a_i^t \in I$，可得 $v \notin I.$。因此， $I \subseteq A^{t+1} \cup S^{t+1}$。

现在证明， $f(S)$ 确实由 $S.$ 唯一确定。下文中，当算法的输入为 I 时，我们将相关的 S^t、 A^t 记作 $S^t(I)$ $A^t(I)$；类似地，将相关的索引 i^t 记作$i^t(I)$。固定 I、 $I' \in \mathcal{I}$，使得 $S(I) = S(I')$。我们证明，对于所有 $t \in \{0, \ldots, q\}.$，都有 $S^t(I) = S^t(I')$ 且 $A^t(I) = A^t(I')$。显然，当 $t = 0$ 时此结论成立。假设对于某个 t 此结论成立，下面证明它对 $t+1$ 也成立。记 $S^t = S^t(I) = S^t(I')$ $A^t = A^t(I) = A^t(I')$，以及$F^t = F^t(I) = F^t(I')$；最后一个等式成立，是因为 $F^t(J)$ 由 $S^t(J)$ 和$A^t(J)$ 唯一确定。令 a_1^t、.....、 $a_{|A^t|}^t$ 为上述 $A^t = V(F^t)$ 的排序。记 $i = i^t(I)$ 和 $i' = i^t(I')$。

若 $i = i'$，则可得 $S^{t+1}(I) = S^{t+1}(I')$；根据算法的定义，也有$A^{t+1}(I) = A^{t+1}(I')$，正如所需。因此，不妨假设 $i < i'.$。于是，$a_i^t \in S^{t+1}(I) \subseteq S(I)$。另一方面，根据 i' 的定义，我们有 $a_i^t \notin I'$；结合$S(I') \subseteq I'$，可推出 $a_i^t \notin S(I')$。因此， $S(I) \neq S(I')$，这与我们的假设矛盾。

最后，我们需要证明对于每个 $S \in \mathcal{S}$， $|f(S)| \leq C_0\sqrt{n}$。我们将证明以下断言。

断言 3。假设 $t \geq 2n^{1/4}$ 和 $|A^t| \geq 10\sqrt{n}.$，则 $|A^{t+1}| \leq (1 - n^{-1/4})|A^t|$。

根据断言 3，我们来完成证明。任取 $I \in \mathcal{I}$ 和 $S = S(I)$，并反设 $|f(S)| = |S \cup A^q(I)| \geq 11\sqrt{n}.$。由于 $|S| = q \ll \sqrt{n}$，必有$|A^q(I)| \geq 10\sqrt{n}$。于是，由断言 3 可知，对于任意 $t \in [2n^{1/4}, q-1]$，都有 $|A^{t+1}| \leq (1 - n^{-1/4})|A^t|$，这意味着

$$|A^q| \leq n \cdot \left(1 - n^{-1/4}\right)^{q-2n^{1/4}} < n \cdot e^{-n^{-1/4}\cdot(q/2)} \leq n \cdot e^{-\log n} = 1,$$

矛盾。

断言 3 的证明。令 S^t、A^t、F^t、a_1^t、.....、$a_{|A^t|}^t$ 和 i^t 如算法中所给。对于 $1 \leq j \leq |A^t|$，记 $F_j = F^t[\{a_j^t, \ldots, a_{|A^t|}^t\}]$。只需证明对于每个 $j \leq |A^t|/2.$， $\Delta(F_j) \geq |V(F_j)|/n^{1/4}$。事实上，这样一来，若 $i^t \leq |A^t|/2$，则得到 $|A^{t+1}| \leq |A^t| - i^t - \Delta(F_{i^t}) \leq |A^t| - i^t - |V(F_{i_t})|/n^{1/4} = |A^t| - i^t - (|A^t| - i^t + 1)/n^{1/4} \leq (1 - n^{-1/4})|A^t|$；若 $i^t \geq |A^t|/2$，则 $|A^{t+1}| \leq |A^t|/2.$

考虑一个固定的 $1 \leq j \leq |A^t|/2.$记 $A' = \{a_j, \ldots, a_{|A^t|}\} = V(F_j)$。我们需要证明$\Delta(F_j) \geq |A'|/n^{1/4}$。任取 $s \in S^t.$于是，对每个 $y \in N_H(s)$ 以及互不相同的 $a, a' \in A' \cap N_H(y)$，都有 $aa' \in E(F_j)$。注意，集合 $(N_H(y) \setminus \{s\})_{y \in N_H(S^t)}$ 构成 $X_0 \setminus \{s\}$ 的划分，因为 X_0 中的任意两个顶点在 H中恰有一个公共邻点。满足a、$a' \in A'$ 且 $a, a', s \in N_H(y)$ 的数对 $(y, \{a, a'\})$ 的数量为

$$\sum_{y \in N_H(s)} \binom{|A' \cap N_H(y)|}{2} \geq |N_H(s)| \cdot \binom{|A'|/|N_H(s)|}{2} \geq \frac{|A'|^2}{4\sqrt{n}},$$

这里我们对凸函数 $\binom{x}{2}$ 使用了詹森不等式，利用了 $N_H(s) = (1 + o(1))\sqrt{n}$ 这一事实，以及假设 $|A'| \geq |A^t|/2 \geq 5\sqrt{n}$。因此，每个 $s \in S^t$ 至少为 F_j 提供 $\frac{|A'|^2}{4\sqrt{n}}$ 条边。最后，我们证明，对每个 $aa' \in E(F_j)$，存在唯一的 $s \in S^t, y \in Y$ 使得$s, a, a' \in N_H(y)$。事实上，回顾一下， X_0 中的每一对顶点在$Y.$中都有唯一的公共邻点。因此，给定 a, a' 后，顶点 $y \in Y$ 就唯一确定了。但这样一来，顶点 $s \in S^t \cap N_H(y)$ 也唯一确定了。事实上，假设存在两个不同的 $s, s' \in S^t \cap N_H(y)$。不失一般性，存在一个索引 t_0 使得 $\{s\} = S^{t_0} \setminus S^{t_0-1}$ 且 $s' \in S^{t_0-1}.$。于是，根据定义，$sa, \in E(F^{t_0-1})$，因此 $a \notin S^{t_0} \cup A^{t_0} \supseteq S^t$，矛盾。

因此，我们有 $e(F_j) \geq |S^t| \cdot \frac{|A'|^2}{4\sqrt{n}} \geq \frac{|A'|^2}{2n^{1/4}}$，这意味着 $\Delta(F_j) \geq |A'|/n^{1/4}$，如所需。 □

至此，断言 2 的证明完成，定理也随之得证。 □

6 (4, 1),(4, 3)：定理 2(d) 的证明

我们需要以下引理。

引理 4. 存在一个常数 $C > 0$，使得对于每个 n，都存在一个有 n 个顶点的图，其中每个大小为 $C \log n$ 的集合都包含一个三角形和一个大小为 3 的独立集。

证明。取 $G \sim G(n, 1/2)$。任取 $U \subseteq V(G)$，$|U| = k := C \log n$。众所周知，存在一个定义在 U 上的部分斯坦纳系统，其中有 $m = (\frac{1}{6} - o(1))k^2 \geq k^2/7$ 个三元组，$T_1, \ldots, T_m$。在 G 中没有 T_i 是三角形的概率为 $(7/8)^m \leq (7/8)^{k^2/7} = (7/8)^{C^2 \log^2 n}$。对 U 的所有 $\binom{n}{C \log n} \leq e^{C \log^2 n}$ 种选择应用并集界，并假设 C 足够大，我们得到：以高概率，每个大小为 $C \log n$ 的集合都包含一个三角形。用同样的论证可知，w.h.p. 每个这样的集合都包含一个大小为 3 的独立集。 □

定理 2(d) 的证明。对于下界，设 H 是一个有 n 个顶点的、无 {(4, 1)、(4, 3)} 的三元超图。取一个顶点 $v \in H$，并考察它的链接图 $L(v)$。由于 $R_2(t, t) < 4^{t-1}$（见 Erd˝os 和 Szekeres [15]），可知 $L(v)$ 中存在一个大小至少为 $\frac{1}{2} \log n$ 的团或独立集 K。在第一种情况下，K–是 H 中的一个团；否则就会在 H 中找到一个 (4, 3)-子图。在第二种情况下，K 是 H 中的一个独立集；否则就会在 H 中找到一个 (4, 1)-子图。

对于上界，设 G 是引理 4 中的图。令 H 为顶点集 $V(G)$ 上的三元超图，其边集由所有满足以下条件的顶点三元组组成：它们在 G 中诱导出奇数条边，记为 x, y, z。引理 4 保证，每个含有 $C \log n$ 个顶点的集合都同时包含 H 的一条边和一条非边。因此，$h(H) \leq C \log n$。下面证明 H 是无 Q(4, 1)、(4, 3)} 的。任取 $X \subseteq V(G) = V(H)$，$|X| = 4$。对于每个 $A \subseteq X$, $|A| = 3$，当且仅当 $e_G(A)$ 为奇数时，$A \in E(H)$；其中 $e_G(A)$ 表示 A 在 G 中所张成的边数。注意，$G[X]$ 的每条边恰好包含在两个集合 $A \subseteq X$, $|A| = 3$ 中。因此，$\sum_{A \subseteq X, |A|=3} e_G(A) = 2e_G(X)$。右边为偶数，所以满足 $e_G(A)$ 为奇数的 A 有偶数个。由此可知，H 中任意四个顶点都诱导出偶数条边。因此，H 是无 Q 的。

□

7 三元集合禁集：定理 3 的证明

我们将需要以下关于 Q 自由的 3-一致超图在 $Q = \{(4, 1)、(4, 3)、(4, 4)\}$ 情形下的结构刻画。

定理 8（Frankl 和 F¨uredi [18]）。设 H 是一个 {(4, 1)、(4, 3)、(4, 4)}) 自由的三元超图。那么 H 同构于以下三元超图之一：

1. 由顶点集为 $V(H') = [6]$ 且边集为 $E(H') = \{123, 124, 345, 346, 561, 562, 135, 146, 236, 245\}$ 的 6 顶点三元超图 H' 膨胀而成的超图。这里，在膨胀过程中，我们将 H' 的每个顶点替换为一个独立集；当我们从其中三个不同的独立集中各取一个顶点时，这三个顶点构成一条边，当且仅当 H' 中对应的顶点构成一条边。

2. 顶点为正则 n边形各点的三元超图；当且仅当对应的点构成一个三角形，且该三角形的内部包含n边形的中心时，3 个顶点才构成一条边。

定理 3 的证明。

情形 $Q = \{(4,1),(4,3),(4,4)\}$。我们要证明

$$h(n,\{(4,0),(4,1),(4,3)\}) = h(n,Q) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{if } n \equiv 0 \pmod 6 \\ \lceil \frac{n+1}{2} \rceil & \text{if } n \not\equiv 0 \pmod 6. \end{cases}$$

首先，我们证明定理 8 中的第二个三元超图 H 的独立数恰好为$\lceil (n+1)/2 \rceil$。设顶点集为 $[n]$，并按顺时针方向将顶点依次标记为连续整数。下界可通过取 n-边形上连续的 $\lceil (n+1)/2 \rceil$ 个顶点得到，并注意到其中任意三个顶点的内部都不包含中心。对于上界，我们考察包含 1 的独立集中最多能有多少个顶点。当 n 为奇数时，由 $\{1, i, (n-1)/2+i\}$ 构成的三角形包含中心，因此它是一条边。于是，我们可以将 $[n] \setminus \{1\}$ 中的元素配对为 $(2,(n+3)/2)$、$(3,(n+5)/2) \ldots, ((n+1)/2, n)$，并注意到每一对中至多有一个顶点能属于包含 1 的独立集。因此，包含 1 的独立集的最大大小至多为 $(n+1)/2$；又由于 H 具有顶点传递性，H 的独立数至多为 $(n+1)/2$。当 n 为偶数时，我们考虑 $n/2-1$ 对顶点 $(2, n/2+1)$、$(3, n/2+2) \ldots, (n/2, n-1)$，再加入顶点 n，得到上界 $n/2+1 = \lceil (n+1)/2 \rceil$。

接下来我们注意到，定理 8 中的 6 顶点三元超图 H' 的独立数恰为 3（证明所需的简短分类讨论从略）。因此，如果将 H' 的每个顶点膨胀为大小相同的集合，那么当 $n \equiv 0$（模 6）时，我们便得到独立数恰为 $n/2$ 的 n 顶点 3-一致超图。这就完成了上界的证明。

对于下界，设 H 不含 Q。那么根据定理 8，H 同构于定理 8 中描述的两个图之一。若 H 同构于第二个图，则我们已经证明其独立数至少为 $(n+1)/2$；因此，假设 H 同构于 6 顶点、10 边三元超图 H' 的膨胀。H' 中有 10 条非边。设 V_1、……、V_6 为膨胀后的顶点集。由于 H' 中的每个顶点 $i \in [6]$ 恰好包含在 5 条非边中，我们得到

$$5n = 5\sum_{i\in[6]} |V_i| = \sum_{j_1 j_2 j_3 \notin E(H)} |V_{j_1}| + |V_{j_2}| + |V_{j_3}|.$$

根据抽屉原理，存在一条非边 $i_1 i_2 i_3$，使得 $|V_{i_1}|+|V_{i_2}|+|V_{i_3}| \geq n/2$。通过注意到，对于原三元超图中的任意非边 $i_1 i_2 i_3$，集合 $V_{i_1} \cup V_{i_2} \cup V_{i_3}$ 是一个独立集，我们便得到所需的上界。因此存在一个大小至少为 $n/2$ 的独立集；若 $n \not\equiv 0$ (模 6)，则等号不可能处处成立（证明这一点需要进行一段简短的分类讨论，此处略去），于是我们得到一个大小严格大于 $n/2$ 的独立集，符合要求。

情形 $Q = \{(4,0)、(4,2)、(4,3)\}$。现在我们证明，对于 $n \geq 4$，$h(n, \{(4,0)、(4,2)、(4,3)\}) = n-1$。设 H 是一个在 $n-1$ 个顶点上构成团、另有一个孤立顶点的三元超图，则 H 是 Q-自由的，从而得到上界。

对于下界，设 H 是一个有 n 个顶点、$n \geq 4$ 的 Q-自由三元超图。假设 H 不是团。我们将证明 H 是一个团，并且有一个孤立顶点。考虑 H 中的一个极大团 S。由于 $|S| < n$，存在一个顶点 $v \in V(H) \setminus S$。根据 S 的极大性，$L_S(v)$ 不是团。如果 $L_S(v)$ 包含一条边，那么对于某些顶点 x、y、y'、$xy \in E$，我们有 $L_S(v)$

以及 $xy' \notin E$（L_S（v））。但此时 $\{v, x, y, y'\}$ 诱导出一个 (4, 2) 或 (4, 3)-图，矛盾。因此，L_S（v）是一个空图，即 H 中不存在包含 v 以及 S 中两个顶点的边。现在假设还存在另一个顶点 $v' \in V$（H）$\setminus$（$S \cup \{v\}$）。那么根据上述相同的论证，v' 也不包含在任何一条与 S 中两个顶点共同构成的边中。考虑三元组 $vv'x$、$x \in S$。由于 $|S| \geq 3$，根据抽屉原理，存在两个顶点 x、$x' \in S$，使得 $vv'x$、$vv'x' \in E$（H）或 $vv'x$、$vv'x' \notin E$（H）。那么 $\{v, v', x, x'\}$ 分别诱导出 2 条或 0 条边，矛盾。因此，$|S| = n - 1$，且 v 是一个孤立顶点。 □

8 结论

固定整数 $m > r$。称一组 Q 阶数—大小对 $\{(m, f_1) \ldots, (m, f_t)\}$ 为 Erd˝os-Hajnal (EH)，如果存在 $\epsilon = \epsilon_Q$ 使得 $h_r(n, Q) > n^\epsilon$。随着 $|Q|$ 增大，Q-自由 r-图的集合受到更多限制，因此 $h_r(n, Q)$ 会增大（假设 Ramsey 定理并未禁止存在大型 Q-自由 r-图）。当 $h_r(n, Q) = \Omega(n)$ 时的情形，第一作者与 Balogh [3] 在 $r = 2$ 时已对此进行研究。于是一个自然的问题是，求使每个大小为 t 的 Q 都是 EH 的最小 t 是多少。将这个最小值记为 $EH_r(m)$。我们关于 $r = 3$ 的结果表明，对于 $m = 4$，所有大小为 3 的 Q 都是 EH，但存在一些大小为 2 的 Q 不是 EH。因此，$EH_3(4) = 3$。

为了进一步研究 $EH_r(m)$，我们需要引入另一个定义。给定整数 $m \geq r \geq 3$，令 $g_r(m)$ 表示一个具有 m 个顶点的 r-图中的边数，其构造方法如下：首先将 m 个顶点划分为大小尽可能相等的若干部分，然后取所有与每个部分相交的边，接着在每个部分内递归地重复这一构造。例如，$g_3(7) = 13$，因为我们首先从一个部大小分别为 2、2、3 的完全三部三均匀超图开始，然后在大小为 3 的部分内添加一条边。众所周知（例如，参见 [24]），随着 r 的增长，我们有

$$g_r(m) = (1 + o(1))\frac{r!}{r^r - r}\binom{m}{r}.$$

注意，当 r 增大时，$\frac{r!}{r^r - r}$ 趋近于 0。第二位作者和 Razborov [24] 证明，对于所有固定的 $m > r > 3$，都存在 n 个顶点的 r-图，它们是无 Q 的，$Q = \{(m, i) : g_r(m) < i \leq \binom{m}{r}\}$，且 $h(G) = O(\log n)$。换言之，存在一个大小为 $\binom{m}{r} - g_r(m)$ 的 Q，它不是 EH。这证明了 $EH_r(m) \geq \binom{m}{r} - g_r(m) + 1$。

Erd˝os 和 Hajnal [12] 证明了，对于所有 $m > r \geq 3$，集合 $Q = \{(m, i) : g_r(m) \leq i \leq \binom{m}{r}\}$ 都是 EH。换言之，他们证明了：每个 n-顶点 r-图中，如果每个含有 m个顶点的集合所张成的边数少于 $g_r(m)$，则该图都有一个大小至少为 n^ϵ的独立集，其中 ϵ 仅取决于 r 和 m。这是一个大小为 $\binom{m}{r} - g_r(m)$的特殊集合 Q，它是 EH 的；我们推测，任何其他大小为 Q的集合也都是 EH 的。

问题 2。证明或反驳：对于所有 $m > r > 2$,

$$EH_r(m) = \binom{m}{r} - g_r(m) + 1.$$

最后指出，$EH_3(4) = 3 = \binom{4}{3} - g_3(4) + 1$。

致谢：第二和第三位作者感谢本尼·苏达科夫进行了有益的讨论。

参考文献

[1] N. Alon、J. Pach 和 J. Solymosi。带有禁用子图的 Ramsey 型定理，Paul Erd˝os 及其数学，Combinatorica 21 (2001)，第 2 期，155–170 页。[2] N. Alon 和 J. H. Spencer。概率方法。约翰·威立父子出版公司，2016 年。[3] M. Axenovich 和 J. Balogh。诱导 k-子图中规模种类较少的图，SIAM《离散数学杂志》21，第 1 期（2007），264–272 页。[4] R. C. Baker、G. Harman 和 J. Pintz。连续素数之差，II。《伦敦数学会会刊》83（2001）（3）：532–562。[5] N. Bousquet、A. Lagoutte 和 S. Thomass´e。关于路径和反路径的 Erd ˝os-Hajnal 猜想，《组合理论杂志 B 辑》113（2015），261–264 页。[6] M. de Brandes、K. Phelps 和 V. R¨odl。Steiner 三元系的着色，工业与应用数学学会代数离散方法杂志 3.2（1982），241–249 页。[7] M. Buci´c、T. Nguyen、A. Scott 和 P. Seymour。迈向 Erd ˝os-Hajnal 猜想的一步对数对数进展，arXiv 预印本 arXiv:2301.10147（2023）。[8] M. Chudnovsky。Erd ˝os-Hajnal 猜想——一篇综述，《图论杂志》75（2014），178–190 页。[9] D. Conlon、J. Fox 和 B. Sudakov。超图 Ramsey 数，《美国数学会杂志》23（2010），第 1 期，247–266 页。[10] D. de Caen。Moon 和 Moser 关于完全子图的定理的推广，《组合艺术》16（1983），5–10 页。[11] P. Erd˝os，关于图论的一些评论，《美国数学会通报》53（1947），292–294 页。[12] P. Erd˝os 和 A. Hajnal。关于类 Ramsey 定理：问题与结果，《组合学》（组合数学会议论文集，数学研究所，牛津，1972），第 123–140 页，应用数学研究所，Southend-on-Sea，1972。[13] P. Erd˝os 和 A. Hajnal。Ramsey 型定理，《离散应用数学》25（1989），37–52 页。[14] P. Erd˝os、A. Hajnal 和 B. Rothschild。关于图和集合系的色数，《匈牙利数学学报》16（1966），61–99 页。[15] P. Erd˝os、G. Szekeres，几何学中的一个组合问题，数学汇刊，2（1935），463–470 页，[16] J. Fox 和 X. He。具有禁用链接的超图中的独立集，《伦敦数学会会刊》123(4)（2021），384–409 页。[17] J. Fox、J. Pach 和 A. Suk。关于 VC 维数有界的图的 Erd ˝os-Hajnal 猜想，第 33 届国际计算几何研讨会，文章编号 43，共 15 页，LIPIcs. Leibniz 国际信息学会议论文集，77，达格施图尔城堡。Leibniz 信息中心，瓦德恩（2017）。

[18] P. Frankl 和 Z. F¨uredi。《三元超图的一个精确结果》，《离散数学》50卷第2–3期（1984），323–328页。[19] L. Gishboliner 和 I. Tomon。《关于恰有两条边覆盖四个顶点的三元超图》，《伦敦数学会通报》54(6)（2022），2117–2134页。[20] A. Gy´arf´as。《对 Erd˝os 和 Hajnal 的一个问题的思考》，载于《Paul Erd˝os 数学文集 II》。Springer，纽约州纽约市（2013），135–141页。[21] A. Gy´arf´as、A. Hubenko 和 J. Solymosi。《无 C_4图中的大团》，《组合数学》22(2)（2002），269–274页。[22] C. Godsil 和 G. F. Royle。《代数图论》。Springer 科学与商业媒体公司，2001。[23] A. Kostochka、D. Mubayi 和 J. Verstra¨ete。《超图中的独立集》，《随机结构与算法》44（2014），第2期，224–239页。[24] D. Mubayi 和 A. Razborov。《拉姆齐理论中从多项式到指数的转变》，《伦敦数学会会刊》122.1（2021），69–92页。[25] D. Mubayi 和 A. Suk。《超图拉姆齐数的新下界》，《伦敦数学会通报》50（2018），第2期，189–201页。[26] K. Phelps 和 V. R¨odl。《具有最小独立数的 Steiner 三元系》，《组合论丛刊》21（1986），167–172页。