arXiv:2305.01532v2 [math.CA] 3 Jan 2024

实线上的周期构型极大极化

MARKUS FAULHUBER 和 STEFAN STEINERBERGER

Abstract. 我们证明，在实数轴上所有由点构成的 1-周期构型 Γ 中，这些量 $\mathbb{R}$

$$\min_{x\in\mathbb{R}} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\pi\alpha(x-\gamma)^2} \quad \text{and} \quad \max_{x\in\mathbb{R}} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\pi\alpha(x-\gamma)^2}$$

当且仅当这些点等距分布时， n 每个周期内的点数足够大（取决于 α）时，分别达到最大值和最小值。这解决了当 n足够大时， $\mathbb{R}$ 上带有高斯权重的周期构型的极化问题。第一个结果通过傅里叶级数证明。第二个结果源自 Cohn 和 Kumar 关于普适最优性的研究，并且对所有 n都成立（与 α无关）。

1. Introduction and main result

我们研究以下问题：给定 $\alpha > 0$，在实数轴上所有具有给定密度的点周期构型 Γ 中，哪一种构型使函数

$$p_\alpha(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\pi\alpha(x-\gamma)^2} \tag{1.1}$$

尽可能接近常数？除去尺度、周期性和对称性的影响，这等价于将 n 个点放置在 $\mathbb{T} \cong \mathbb{S}^1$ 上，使得

$$f_\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2} e^{2\pi i k(x-x_j)} \tag{1.2}$$

尽可能接近常数。这两个问题的等价性源于泊松求和公式所导致的 (1.1) 与 (1.2) 之间的对偶关系，详见第 3 节。我们指出，(1.2) 可以用雅可比 theta 函数 $\theta(x;\alpha)$ 表示（详见第 3 节）；

$$\theta_\alpha(x) = \theta(x;\alpha) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2} e^{2\pi i k x}.$$

这个问题自然会出现在多种情境中，见 §2。这类问题通常与最优球堆积/覆盖有关。由于一维球堆积是平凡的，人们会预期等距点是最优的。事实上，Cohn 和 Kumar [19] 证明了直线上的等距点具有普适最优性。他们的结果可以应用于我们的情形。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 52C25, 74G65, 82B21.*Key words and phrases.* 等距点，高斯函数，周期构型，极化。M.F. 获奥地利科学基金（FWF）资助，项目编号 P33217。S.S. 获美国国家科学基金会（NSF，DMS-2123224）和阿尔弗雷德·P·斯隆基金会资助。

命题 1.1（Cohn 和 Kumar [19]的应用）。在所有形如以下形式的周期配置 $\Gamma \subset \mathbb{R}$ 中

$$\Gamma = \frac{n}{\delta}\left(\bigcup_{k=1}^{n}(\mathbb{Z}+x_k)\right), \qquad \{x_1,\dots,x_n\} \subset [0,1),\, x_k \neq x_\ell,\, k \neq \ell,$$

对于固定密度 $\delta > 0$ 和任意固定参数 $\alpha > 0$，该量

$$\max_{x\in\mathbb{R}} p_\alpha(x) = \max_{x\in\mathbb{R}} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\pi\alpha(x-\gamma)^2} \qquad \textit{is minimized}$$

当且仅当这些点等距排列时。此外，在环面 $\mathbb{T} \cong \mathbb{S}^1$ 上所有由 n 个点组成的集合中，对于任意固定参数 $\alpha > 0$，该量

$$\max_{x\in\mathbb{T}} f_\alpha(x) = \max_{x\in\mathbb{T}} \sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha(x-x_j) \qquad \textit{is minimized}$$

当且仅当这些点等距排列时。

这个结果并不令人意外，正是人们所预期的。然而，据我们所知，目前尚无 Cohn 和 Kumar 定理的“简易”证明。因此，由于我们对命题 1.1 的证明用到了 Cohn 和 Kumar 的结果，目前我们还没有“初等”的证明。关于这一结果的深入讨论，请参见 §2.1；证明见 §4。

命题 1.1 讨论的是如何使最大值最小化。本文的主要结果与之对偶，即使最小值最大化；我们证明，当点的数量足够大时这一结论成立，其中“足够大”仅取决于高斯函数的宽度 α。证明见 §5。

定理（主要结果）。对于仅取决于 α 的 $n \geq N(\alpha)$，在所有密度为 n 的 1-周期构型 $\Gamma \subset \mathbb{R}$ 中，即

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^{n}(\mathbb{Z}+x_k), \qquad \{x_1,\dots,x_n\} \subset [0,1),\, x_k \neq x_\ell,\, k \neq \ell,$$

该量

$$\min_{x\in\mathbb{R}} p_\alpha(x) = \min_{x\in\mathbb{R}} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\pi\alpha(x-\gamma)^2},\ \alpha > 0, \qquad \textit{is maximized}$$

当且仅当这些点等距排列时成立。此外，对于充分大的（仅取决于 α 的） $n \geq N(\alpha)$

$$\min_{x\in\mathbb{T}} f_\alpha(x) = \min_{x\in\mathbb{T}} \sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha(x-x_j) \qquad \textit{is maximized}$$

当且仅当这些点等距排列时成立。

与命题 1.1 一样，这两个陈述通过泊松求和公式互为对偶。我们指出，关于 p_α 的结果中的参数 α 对应于关于 f_α 的陈述中的 $1/\alpha$（见 §3）。请注意，这些结果在整体平移 z 下保持不变，因为集合 $\{x_1,\dots,x_n\}$ 和 $\{x_1+z,\dots,x_n+z\}$ 都给出相同的能量和极化（见 §2）。此外，等距排列总是按周期理解的。本文的论证在结构上与 Cohn 和 Kumar 的普适最优性框架 [19] 完全不同，证明采用了截然不同的工具。建立这些结果时的主要难点是：

(a) 最小值的位置以复杂的方式依赖于 x_j；(b) 对于等距点，最小值与均值之差相对于 n呈超指数级小，这要求我们在极小的尺度上进行分析。

主要结果的证明完全基于傅里叶分析，因此具有一定的稳健性，也适用于比高斯函数更广泛的一类函数；一般来说，若函数具有如下形式

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(|k|)e^{2\pi ikx},$$

且 $\widehat{g}(|k|)$ 衰减得足够快（例如快于指数衰减），那么大部分（但不是全部）论证都可以原封不动地沿用。为使论述简洁，本文余下部分只讨论高斯情形，这或许是最自然的情形。证明足够明确，因此可以得到关于 $N(\alpha)$ 的界；然而，由于通常会认为该结果对所有 $n \geq 1$都成立，与 α 的取值无关，我们将不追踪这种依赖关系。条件$n \geq N(\alpha)$在论证的许多不同步骤中都是必要的，而且看来，要对所有 $n \geq 1$ 给出无条件论证，还需要一些新思路。当然， $n = 1$ 的情形是平凡的；在§6中，我们给出了当 $n = 2$ 时对所有 $\alpha > 0$ 都成立的证明。看来，即使是 $n = 3$ 的情形，也会带来一些非平凡的困难。

2. Related results

2.1. 能量最小化。近年来，能量最小化问题受到了广泛关注。Cohn, Kumar, Miller, Radchenko, and Viazovska [21] 的一项开创性成果表明，E_8-格和Leech格在各自的维度中是普适最优的，这意味着它们在周期构型 Γ 中以及对于一大类（径向）势函数 g下，唯一地使能量$E_g(\Gamma)$达到最小。 $\mathbb{R}^d$ 中的周期构型是有限个格 Λ平移副本的并。我们回顾一下，格是$\mathbb{R}^d$ 的离散余紧子群，其密度为 $1/\mathrm{vol}(\mathbb{R}^d/\Lambda)$；关于格的入门介绍，请参阅 Conway 和 Sloane[22] 的教材。周期构型的能量

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^{n} (\Lambda + x_k), \quad \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^d/\Lambda,\ x_k \neq x_j,\ k \neq j,$$

由下式给出

$$E_g(\Gamma) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{x_j - x_k\}} g(|\lambda + x_j - x_k|). \tag{2.1}$$

因此，这描述的是点在势函数 g 作用下的两两相互作用，但不包括点与自身的相互作用（因为势函数在原点处可能是奇异的）。关于能量极小化问题的详情，请参阅 [19, 21]；关于格、堆积问题和覆盖问题的入门介绍，请参阅 Conway 和 Sloane 的教科书 [22] ，以及 Schuermann 和 Vallentin 的文章 [40]。在 [19] 中，Cohn 和 Kumar 证明，在实数轴 $\mathbb{R}$ 上（且在所有尺度下），缩放整数格具有普适最优性。他们通过构造一个“魔法函数”（运用了经典采样定理的一个版本）得到了这一结果；该函数证明了这个问题的线性规划界（在同一篇著作中得到）对于缩放整数格确实是紧的。另一种证明也见于 [19]，它采用了球面设计。数值结果表明，六角格也达到了二维能量极小化问题的线性规划

界。然而，其普适最优性的证明仍然缺失。这些结果与最优球堆积以及 Cohn 和 Elkies 得到的球堆积问题线性规划界 [18]有关。在开创性工作中，Viazovska [46] 解决了 8 维球堆积问题，而 Cohn, Kumar, Miller, Radchenko, and Viazovska [20]解决了 24 维情形。能量极小化问题也在球面上得到研究 $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$；当 $d = 2$ 时，这相当于在圆周上分布点的问题 $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{T}$。对于一般的 $d \geq 2$，在球面上分布点时，常会联系到球面 t设计。关于综述，可参阅 Brauchart 和 Grabner [17] ；关于经典的 Riesz 能量极小化问题，可参阅 Hardin 和 Saff [27] 。关于球面上能量极小化点分布的较新结果，由 Beltr´an 和 Etayo [5]以及 Bilyk, Glazyrin, Matzke, Park, and Vlasiuk [10]给出。关于球面 t设计，可参阅 Bondarenko, Radchenko, and Viazovska [12] 的突破性成果，以及第二作者 [42] 关于上界的研究。

2.2. 极化问题。极化问题要求布置光源，使最暗点的照度达到最大。此类问题通常在紧流形（如球面）上讨论。例如，可参见 Borodachov, Boyvalenkov, Hardin, Reznikov, Saff, and Stoyanova [13, 14, 15, 16]发表于不同期刊的文章。关于更多数值研究和算法，可参见 Rolfes、Sch¨uler 和 Zimmermann [38]的研究。Saff 提出了在 $\mathbb{R}^d$ 上关于 Riesz 势和格的极化问题（参见美国数学研究所为研讨会“离散几何与自守形式”编纂的文集中的问题 1.06 [49]）。我们注意到，许多具有重要物理意义的势函数（例如 Riesz 势）都可以表示为某个非负测度的拉普拉斯变换 μ。更准确地说，根据 Bernstein–Widder 定理，任何完全单调函数 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，即 $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0, \forall k \geq 1$，都是某个非负博雷尔测度的拉普拉斯变换 [6, 48] （另见 Schilling, Song, and Vondracek 的教材 [39, 第 1]章）。关于 $\mathbb{S}^1$ 上的极化，针对衰减足够快且为凸的势函数，已有一些结果见 [15, 第 14 章 3]。我们指出，高斯势不属于完全单调函数这一类，因为它不是凸函数。不过，将距离改为距离平方后，可得到关于距离平方的完全单调函数，即 $r \mapsto g(r^2)$，其中 g是完全单调的（比较 [21]）：

$$g(r) = \int_0^\infty e^{-\alpha r}\, d\mu(\alpha).$$

正如 [21, 第 1 节2], 中所述，与其取距离的完全单调函数，不如取距离平方的完全单调函数似乎更自然；但使用距离平方可以使用高斯函数。事实上，可以验证，距离的任意完全单调函数也是距离平方的完全单调函数。关于这一事实及更多细节，请参阅 [21, 第 1 节2] 。作为一个例子，我们列出 Riesz势，也称为反幂律，它们可表示为（再次比较例如 [21]）

$$\frac{1}{r^s} = \int_0^\infty e^{-\alpha r^2} \frac{\alpha^{s/2-1}}{\Gamma(s/2)}\, d\alpha.$$

如果我们的结果对所有 $\alpha > 0$ 都成立（当 n 固定时），那么立即也能得到关于 Riesz势以及距离平方的完全单调函数这一整类函数的相应结果（在衰减足够快的情况下）：

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\left(\int_0^\infty e^{-\alpha\gamma^2}\,d\mu(\alpha)\right)=\int_0^\infty\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}e^{-\alpha\gamma^2}\right)\,d\mu(\alpha).$$

2.3. $\mathbb{R}^2$中的格。尽管 Cohn、Kumar、Miller、Radchenko 和 Viazkovska 的开创性工作 [21] 以及压倒性的数值证据，六角格（也称为 A_2 根格，有时也称为三角格）的普适最优性至今仍是一个悬而未决的问题。目前最好的结果归功于 Montgomery [33]，其表明六角格在所有尺度下的格中都是最优的。最近，作者与 B´etermin [8]合作的工作解决了二维格上的极化问题。作者在 [23]中证明了六角格对于格极化和某些势函数具有局部最优性。在 [7], 中，B´etermin 与第一作者证明了六角格使马德隆型晶格能量达到最大（格点带有交替符号）。这一结果介于 Montgomery 的结果 [33] 与作者和 B´etermin [8] 的合作结果之间，因为它既不明确涉及球堆积，也不明确涉及覆盖。关于 Lennard–Jones势的相关结果（见 B´etermin 和 Zhang [9]）表明，对于不同的密度，不同的几何排列可能是最优的；该势函数 $r \mapsto r^{-12} - 2r^{-6}$ 既非非负函数，也不具有单调性或凸性。这种现象通常被称为相变。Petrache 和 Serfaty [37]讨论了六角格的猜想普适最优性（以及 E_8 和 Leech格已被证明的最优性）所带来的一些具有物理意义的推论。Lewin 和 Blanc [30]给出了一般性综述。

2.4. 热方程采样。作为推论，我们的结果解决了关于 $\mathbb{S}^1$ 的以下问题。Pausinger 和第二作者最初在 [35] 上讨论了这个问题。假设热量 $f \in L^1(\mathbb{S}^1)$ 的分布未知，而我们想要估算总热量 $\int_{\mathbb{S}^1} f(x)dx$。如果函数 f 仅属于 L^1，那么就不存在有效的采样策略。然而，若现在假设已经过了一段时间 $t > 0$，则以 f 为初始条件的热方程解 $e^{t\Delta}f$ 满足

$$\int_{\mathbb{S}^1} f(x)dx = \int_{\mathbb{S}^1} \left[e^{t\Delta}f\right](x)dx$$

并且也是一个正则性更好的函数，因此应当可以对其进行采样。

推论 2.4.1. 对于任意 $t > 0$，以及所有充分大的 $n \geq N(t)$（其大小仅取决于 t），最坏情况下的采样误差

$$\sup_{f\in L^1(\mathbb{S}^1)} \frac{1}{\|f\|_{L^1}} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left[e^{t\Delta}f\right](x_k) - \int_{\mathbb{S}^1} f(x)dx\right|$$

当且仅当采样点 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 等距排列时达到最小。

证明。将热方程的解视为傅里叶乘子，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left[e^{t\Delta}f\right](x_k) = \left\langle e^{t\Delta}f, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_{x_k}\right\rangle = \left\langle f, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{t\Delta}\delta_{x_k}\right\rangle.$$

以狄拉克 δ 函数为初始条件的热方程解是 Jacobi θ 函数

$$\left[e^{t\Delta}\delta_{x_k}\right](x) = \theta_t(x - x_k)$$

因此

$$\begin{aligned}\left\langle f, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{t\Delta}\delta_{x_k}\right\rangle = \left\langle f, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_t(x-x_k)\right\rangle &= \left\langle f, 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\theta_t(x-x_k)-1)\right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} f\ dx + \left\langle f, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\theta_t(x-x_k)-1)\right\rangle.\end{aligned}$$

利用 $L^1 - L^\infty$ 对偶性，我们得到

$$\sup_{f\in L^1(\mathbb{S}^1)}\left|\left\langle f, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\theta_t(x-x_k)-1)\right\rangle\right| = \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\theta_t(x-x_k)-1)\right\|_{L^\infty}.$$

我们的结果表明，当且仅当这些点等距排列时，最大值达到最小值，而最小值达到最大值。这就证明了该结论。□

备注。一位审稿人指出，我们可以删去条件 $n \geq N(t)$，因为命题 1.1 足以证明上述推论对任意 t 以及所有 n成立。论证方法与上文大致相同，但随后按以下方式继续。我们需要证明

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\theta_t(x-x_k) - n\right\|_{L^\infty} \geq \left\|\sum_{k=1}^{n}\theta_t\left(x-\frac{k}{n}\right) - n\right\|_{L^\infty} \tag{2.2}$$

利用一个平凡估计，再结合命题 1.1，我们得到

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\theta_t(x-x_k) - n\right\|_{L^\infty} \geq \max_x\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_t(x-x_k) - n\right) \geq \max_x\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_t\left(x-\frac{k}{n}\right) - n\right)$$

为了证明 (2.2)，现在只需证明

$$\begin{aligned}&\max_x\sum_{k=1}^{n}\theta_t\left(x-\frac{k}{n}\right) - n \geq n - \min_x\sum_{k=1}^{n}\theta_t\left(x-\frac{k}{n}\right) \\ \iff\quad &\max_x\sum_{k=1}^{n}\theta_t\left(x-\frac{k}{n}\right) + \min_x\sum_{k=1}^{n}\theta_t\left(x-\frac{k}{n}\right) \geq 2n.\end{aligned}$$

θ 函数有一个显著的性质（参见 [22, 第 4 章，公式 (22)]）：

$$\max_x\sum_{k=1}^{n}\theta_t\left(x-\frac{k}{n}\right) + \min_x\sum_{k=1}^{n}\theta_t\left(x-\frac{k}{n}\right) = \max_x\sum_{k=1}^{2n}\theta_t\left(x-\frac{k}{2n}\right) \geq 2n$$

这一论证的详细内容见第 3 节和第 4 节。关键性质是，在等距排列的情况下，最小值恰好在点与点之间的中点处取得，而最大值则在各点处取得。

2.5. 平移不变系统。 $\mathbb{R}$ 上由生成元 $g \in L^2(\mathbb{R})$ 生成的平移不变系统 $V^2(g)$ 是由如下形式的函数构成的空间

$$V^2(g) = \{f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, g(x-k) \mid (c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z})\}.$$

一个例子是经典的带限函数 Paley–Wiener 空间 $PW(\mathbb{R})$, $\widehat{\ }$即 supp(f) $\subset [-1/2, 1/2]$; 它由 sinc 函数(x) $=$sin$(\pi x)/(\pi x)$生成。对于集合 $\Gamma \subset \mathbb{R}$, 当且仅当存在正常数 $0 < A \le B < \infty$（它们依赖于 g 和 Γ）, 使得

$$A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le \sum_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|^2 \le B\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in V^2(g).$$

关于 V^2 中（非均匀）采样的研究动机，请参阅 Aldroubi 和 Gr¨ochenig 的文章 [2]。刻画给定生成元 g 对应的采样集是一个非常困难的问题。一个必要条件是该集合的（下 Beurling）密度至少为 1。密度为 1 的情形称为临界采样。对于包括高斯函数 $x \mapsto e^{-\alpha x^2}$在内的一大类函数, $\alpha > 0$该问题已由 Gr¨ochenig、Romero 和 St¨ockler 解决 [26]。Baranov、Belov 和 Gr¨ochenig [4]研究了高斯生成元下的临界采样情形。我们的结果表明，对于空间 $V^2(\phi_\alpha)$, 其中 ϕ_α 为高斯函数，在等间距采样下，界 B是最小的，而 A 是最大的。最后，我们提及一个相对较新的领域——动态采样，该领域由 Aldroubi、Cabrelli、Molter 和 Tang 引入 [1]。它将采样问题与动力系统结合起来。具体而言，我们发现了热方程与采样问题之间的联系，Aldroubi、Gr¨ochenig、Huang、Jaming、Krishtal 和 Romero 对此进行了描述 [3]。Ulanovskii 和 Zlotnikov [45] 描述了 $PW(\mathbb{R})$ 的采样集，使得可以根据 $f*\varphi_t$的样本重建 f，其中 φ_t 是动力过程的卷积核。我们的结果与这一领域之间可能存在怎样的联系，值得进一步探讨。

3. Notation and remarks

3.1. 基本记号。为明确归一化，我们指出，对于实数轴上的适当函数 f，我们采用以下版本的傅里叶变换:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i\omega x}\, dx, \qquad \text{so} \qquad \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

因此，泊松求和公式表示为（例如参见 Gr¨ochenig [25, 第 1 章4]）

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k+x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\ell)\, e^{2\pi i\ell x}.$$

高斯函数的傅里叶变换是另一个经过不同缩放的高斯函数（例如参见 Folland [24, 附录 A]）：

if $\phi_\alpha(x) = e^{-\pi\alpha x^2},\ \alpha > 0,$ then $\widehat{\phi_\alpha}(\omega) = (1/\sqrt{\alpha})\, e^{-(\pi/\alpha)\omega^2} = (1/\sqrt{\alpha})\, \phi_{1/\alpha}(\omega).$

将 ϕ_α 的周期化称为周期高斯函数: $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi_\alpha(x+k)$。周期为 δ 的周期配置 $\Gamma \subset \mathbb{R}$ 是以下形式的点集:

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^{n} (\Lambda + x_k), \quad \text{where} \quad \Lambda = \delta\mathbb{Z},\ \delta > 0, \quad x_k \ne x_j,\ k \ne j, \quad x_k \in [0, \delta).$$

构型的密度 ρ 是每个周期内点的数量 n $\rho = n/\delta.$

3.2. 实数轴上的极化。现在我们关注以下极化问题：哪种固定密度为 ρ 的周期配置能够使.....最大化

$$\min_x \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{\gamma\in\Gamma} \phi_{1/\alpha}(x-\gamma)\ ?$$

我们简要指出，固定每个周期内的点数后，由紧致性可知极小化点总是存在。我们将上述量称为 Γ 的极化，并寻求找到最大的极化。一般而言，最小值取决于 Γ 及其密度 ρ，也取决于 α。然而，对于等分布点，最小值总是在相邻点之间的中点处取得（正如我们将在主要结果的证明中所证明的那样）。极化还可以更明确地写成以下形式之一：

$$\min_x \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{\gamma\in\Gamma} \phi_{1/\alpha}(x-\gamma) = \min_x \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\frac{\delta^2}{\alpha}\left(k+\frac{x_j-x}{\delta}\right)^2} \tag{3.1}$$

$$= \min_x \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\frac{\alpha}{\delta^2}k^2} e^{2\pi i k\frac{(x_j-x)}{\delta}}, \tag{3.2}$$

其中第二个等式由泊松求和公式得出。注意，在这个显式公式中 $\{x_1,\dots,x_n\}\subset[0,\delta)$。通过将一个构型$\Gamma$ 与 $(x_1,\dots,x_n)\in(\delta\mathbb{T})^n$ 对应起来，我们看到，由于紧致性，必定存在一个极大化配置。显然，因子 $1/\sqrt{\alpha}$ 和因子 $1/\delta$ 都与极小化过程或极大化配置的确定无关。接下来我们将证明，对于 (3.1) 以及任意固定的 n、$\alpha>0$ 和 $\delta>0$，总存在一个等价问题，其 n、$\delta=1$ 相同，而 α 不同。对于 $\Gamma=\bigcup_{j=1}^{n}(\delta\mathbb{Z}+x_j)$,$x\in[0,\delta)$，$x_j\in[0,\delta)$，我们简写为

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha(\delta k+x_j-x)^2} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\widetilde{\alpha}(k+\widetilde{x}_j-\widetilde{x})^2},$$

其中 $\widetilde{x}=x/\delta\in[0,1)$，$\widetilde{x}_j=x_j/\delta\in[0,1)$ 和 $\widetilde{\alpha}=\alpha\delta^2$。因此，我们可以假设点 $\{x_1,\dots,x_n\}$ 分布在 $[0,1)$ 中，且 Γ 是 1-周期的（密度为 n）。利用泊松求和公式可知，求解 (3.2) 的最优配置等价于最大化

$$\min_x \sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2} e^{2\pi i k(x_j-x)} = \min_x \sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha(x_j-x).$$

这正是（将自变量翻转后）我们主要结果中考虑的 (1.2) 里的量 $f_\alpha(x)$。注意，由泊松求和公式

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, p_{1/\alpha}(x).$$

3.3. Theta函数。该问题可以表述为关于实值 Theta 函数有限叠加的变分问题。对于参数 $\tau\in\mathbb{H}$（复上半平面）和自变量 $z\in\mathbb{C}$，经典 Theta 函数为

$$\vartheta(z;\tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{\pi i\tau k^2} e^{2\pi i k z}.$$

该函数关于 τ 是全纯的，关于 z 是整函数。当 $\tau = i\alpha$、 $\alpha > 0$ 和 $z = x \in \mathbb{R}$ 时，该函数为实值函数，我们采用以下记法：

$$\theta(x;\alpha) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2} e^{2\pi i k x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2} \cos(2\pi k x) = 1 + 2\sum_{k\geq 1} e^{-\pi\alpha k^2} \cos(2\pi k x).$$

注意，函数 $\theta(x;\alpha)$ 是平坦环面 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的热核。因此，它的均值为 1，这一点通过简单计算即可验证；

$$\int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2} e^{2\pi i k x}\, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2} \int_0^1 e^{2\pi i k x}\, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2} \delta_{k,0} = 1,$$

其中 $\delta_{k,\,0}$ 是克罗内克δ函数。函数 $\vartheta(z;\,\tau)$，因而 $\theta(x;\,\alpha)$，可以表示为一个无穷乘积，称为雅可比三重乘积；它是仿射根系麦克唐纳恒等式的一个特例 [31]:

$$\begin{aligned}\vartheta(z;\tau) &= \prod_{k\geq 1} \left(1 - e^{2k\pi i\tau}\right)\left(1 + e^{(2k-1)\pi i\tau} e^{2\pi i z}\right)\left(1 + e^{(2k-1)\pi i\tau} e^{-2\pi i z}\right) \\ &= \prod_{k\geq 1} \left(1 - e^{2k\pi i\tau}\right)\left(1 + 2\cos(2\pi z) e^{(2k-1)\pi i\tau} + e^{2(2k-1)\pi i\tau}\right).\end{aligned}$$

关于椭圆函数的更多细节，可参阅 Mumford [34], 、Stein 和 Shakarchi [41], 或 Whittaker 和 Watson [47] 的教材。

4. Proof of Proposition 1.1

命题 1.1 可由 Cohn 和 Kumar [19] 的研究成果以及泊松求和公式较为容易地推出。论证的核心包含三个要素：

(1) 首先，普适最优性表明，对于任意固定的 $\alpha > 0$，相互作用能

$$\frac{1}{n}\sum_{k,j=1}^{n} \theta_\alpha(x_j - x_k) \qquad \text{is minimized for equispaced points.}$$

(2) 第二个要素是一个平凡的估计，它是通过将数值的平均值（算术平均值）替换为其最大值而得到的。

$$\max_x \sum_{k=1}^{n} \theta_\alpha(x - x_k) \geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \theta_\alpha(x_j - x_k). \tag{4.1}$$

(3) 第三个要素是，当这些点等距排列时，(2) 中的估计是锐的（同时，根据普适最优性，等距排列使紧接在上方的 (2) 中的下界达到最小值）。其中有一个奇妙之处：对于等距排列的点， $\sum_{k=1}^{n} \theta_\alpha(x - x_k)$ 的最大值恰好在这些点 x_j 本身处取得。

我们指出，对于最小化问题，式 (1) 的对应结论并不成立。同样，对于式 (3)，最小值的位置以高度非线性的方式取决于点的位置。因此，要理解最小值和所考虑的极化问题，需要采用不同的方法。

证明。(1) 注意，势函数 $\Phi = 1/\sqrt{\alpha}\ \phi_{1/\alpha}$ 对应的能量为

$$E_\Phi(\Gamma) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \phi_{1/\alpha}(\ell + x_j - x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha(x_j - x_k), \tag{4.2}$$

其中第二个等式来自泊松求和公式。势函数作用于周期配置 Γ上。不过，考虑的不仅是它们的总和，还包括所有两两相互作用及其总和。条件 $\lambda \in \Lambda \backslash \{x_k - x_j\}$（见式 (2.1)）排除了自相互作用，因为势函数 g 允许在 0 处奇异（这在物理上也有意义）。对于高斯函数，我们可以允许自相互作用（这会增加一个由归一化决定、但与 Γ无关的固定加法常数），因此无需将其排除。若 $\Gamma_0 = \bigcup_{j=1}^{n} (\mathbb{Z} + (j-1)/n) = (1/n)\mathbb{Z}$，则能量可写为（应用泊松求和公式后）

$$E_\Phi(\Gamma_0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha\left(\ell + \frac{j-k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha\left(\ell + \frac{j}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha\left(\ell + \frac{j}{n}\right),$$

其中，第二个和第三个等式源于 θ_α 的周期性。Cohn 和 Kumar [19] 关于（缩放后的）整数的普适最优性指出，对于所有 $\alpha > 0$,

$$E_\Phi(\Gamma_0) \le E_\Phi(\Gamma) \quad \text{with equality if and only if} \quad \Gamma = \Gamma_0 + z,\ z \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

请注意， [19] 中的结果以及我们的结果同样适用于任意缩放。
(2) 是一个显而易见的观察，无需进一步说明。
(3) 对于 Γ_0， p_α （或同样地， f_α）的最大值在等距点 $\{0, 1/n, \ldots, (n-1)/n\}$ 处取得（比较命题 5.1.1）。这可由简单应用泊松求和公式和三角不等式得出。这使得我们可以使用各种额外工具，尤其是可以无损地应用三角不等式。我们给出整数 $\mathbb{Z}$ 的证明，但该证明很容易调整为适用于缩放整数 $\delta\mathbb{Z}$ （将 k 替换为 k/δ，并相应调整泊松求和公式）。我们进行如下简单计算:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, p_{1/\alpha}(x) = f_\alpha(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2} e^{2\pi i k x} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2}\left|e^{2\pi i k x}\right| \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2} = f_\alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, p_{1/\alpha}(0), \qquad \forall \alpha > 0.\end{aligned} \tag{4.4}$$

因此，最大值在 0 处取得，并且由于周期性，在 $\mathbb{Z}$ （或 $\delta\mathbb{Z}$）中的所有点处都取得。

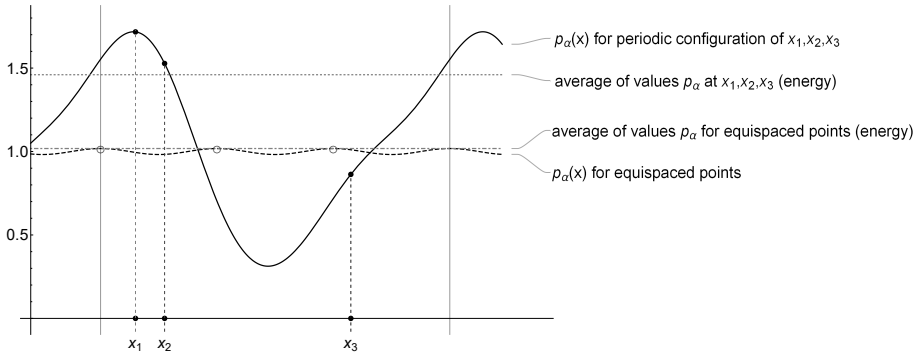


图 1。Cohn 和 Kumar [19]结果的示意图。在周期性、非等距配置中，于各点 $\{x_1, \ldots, x_n\}$（本例中为 $n = 3$）处计算 $p_\alpha(x)$ 的平均值，所得结果总是大于等距点的情形。由于我们将等距情形下的最大值求和 n 次，因此可知，只有等距配置使 $p_\alpha(x)$ 的最大值达到极小值。

注意， E_Φ（Γ）构成了在 Γ 上取得的所有值的平均值（见图 1）。现在回想一下，(4.4) 告诉我们，对于等距配置 Γ_0 ，最大值恰好在 Γ_0 上取得。由 (4.1)、(4.2) 和 (4.3) 可立即推出

$$\max_x f_\alpha(x) = \max_x \sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha\left(x + x_j\right) \quad \text{ is minimal if and only if } \Gamma \text{ is equispaced.}$$

由此可将命题1.1简单地推论自 [19] 中的结果。 □

5. Proof of the Main Result

我们先对论证作一个整体概述。论证相当模块化，各小节也反映了其整体结构。我们还要强调，由于傅里叶系数衰减很快，在点数的多项式估计方面，论证不必过于精细。因此，后续的一些证明采用了最简单的形式，而非最优形式。主要论证分为两部分：第一部分证明，最优构型必定与等距分布极其接近（在 n 中呈指数级接近）。第一部分的结构如下。

(1) §5.1 运用了一些关于θ函数的基本事实。我们证明，若这些点等距排列，则最小值恰好在等距点之间的中点处取得。由此我们可以推出

$$\min_x \sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha\left(x - \frac{j}{n}\right) = n - 2ne^{-\pi\alpha n^2} + \mathcal{O}(ne^{-4\pi\alpha n^2})$$

这已经揭示了其中的一些难点：平均值与最小值之差可能在 n 中小到超指数级。

(2) §5.2 介绍一个平凡的 L^1-估计（本质上是运用鸽巢原理）以及一个非平凡的估计：McGehee–Pigno–Smith 不等式 [32], ，该不等式也由 Konyagin [29] 独立发现。一位匿名审稿人指出，我们可以避免使用 McGehee–Pigno–Smith 不等式；我们也在此给出这一更初等的论证。

(3) §5.3 结合这些要素，证明若 $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset [0, 1)$ 是一个最优配置（即使最小值达到最大），那么该测度 $\mu = \sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j}$ 的前 $n-1$ 个傅里叶系数必须很小，具体而言

$$\max_{1 \le |k| \le n-1} \left| \sum_{j=1}^{n} e^{-2\pi i k x_j} \right| \le 2000 \cdot n^2 \cdot e^{-\pi\alpha(2n-1)}.$$

(4) 我们注意到，对于等距排列的点，前 $n-1$ 个傅里叶系数均为零。§5.4 证明了一个基本估计，并用到了经典的 Fej´ér 核：如果 μ 的前 $n-1$ 个傅里叶系数接近 0，那么这些 n点在定量意义上接近 n 个等距点。由于 (3) 中的估计极小，且关于 n呈指数级小，因此任何最优配置都必须与等距排列相差至多指数级小。

证明的第二部分表明，唯一在 n 中与等距分布指数级接近且具有最大极化的构型就是等距分布：这一部分可以理解为对

微扰区间的详细分析。其核心思路是采用试探形式 $x_j = j/n+\varepsilon_j$，并结合显式的傅里叶级数表示

$$\sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha\left(x-\frac{j}{n}+\varepsilon_j\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-\pi\alpha k^2}\left(\sum_{j=1}^{n}e^{2\pi ik\varepsilon_j}e^{-2\pi ik\frac{j}{n}}\right)e^{2\pi ikx}.$$

由于该问题在平移下不变，我们可以（也必须）假设$\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n=0$，以消除问题在平移下的不变性。论证结构如下。

(5) 在 §5.5 中，我们证明，当 k 是 n 的倍数时，对应的频率恰好是点等距排列时产生贡献的那些项：在这些频率中，只有 $k\in\{-n,0,n\}$ 具有显著贡献，其余贡献都很小。等距排列的点产生 n 个局部极小值，我们的目标是证明，除非对于所有 $1\le j\le n$ 都有 $\varepsilon_j=0$ （这意味着这些点再次呈等距排列），否则这些极小值中至少有一个会进一步减小。

(6) 我们考虑三角多项式 $g_1(x)$，它是限制在前 $(n-1)/2$ 个频率上的函数。通过一个经过修改的 Poincar´e 不等式，我们将在 §5.6 中证明，任何这样的三角多项式在至少一个形如 $(k+1/2)/n$ 的点处取一个小的负值，其中 $0\le k\le n-1$。这一负贡献将使至少一个极小值变得小得多。剩下要确保的是，其他频率带来的贡献无法抵消这一负贡献。

(7) 还有两个部分需要分析： $g_2(x)$，其求和范围限制为频率 $n/2\le|k|\le n-1$，以及 $h(x)$，对应所有其余频率。我们将在 §5.7 中证明 $\|g_2\|_{L^\infty},\|h\|_{L^\infty}\ll\|g_1\|_{L^2}$。事实上，这些项的量级小了许多阶。

(8) 证明最后一步的关键，是傅里叶系数中隐藏着一个令人意外的离散傅里叶变换（见 §5.8）：由于扰动 $\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n=0$ 的和为零，当 k 不是 n 的倍数时，我们可以近似计算傅里叶系数：

$$\sum_{j=1}^{n}e^{2\pi ik\varepsilon_j}e^{-2\pi ik\frac{j}{n}}=2\pi ik\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j e^{-2\pi ik\frac{j}{n}}+\mathcal{O}\left(k^2\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2\right),$$

这里的求和实际上只是对 $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ 做离散傅里叶变换。这使我们能够推导出某种对称性（因为 ε_j 是实数），并将利用这一点证明 $\|g_2\|_{L^\infty}\ll\|g_1\|_{L^2}$。它还保证并非所有傅里叶系数都很小（借助普朗歇尔恒等式）。

(9) 假设这些扰动 ε_j以指数速度趋近于 0，则 §5.9 中证明的最后一个不等式为：最小值

$$Z=\min_{0\le k\le n-1}\sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha\left(\frac{k+1/2}{n}-\frac{j}{n}+\varepsilon_j\right)$$

满足

$$Z\le\left[\min_{0\le x\le1}\sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha\left(x-\frac{j}{n}\right)\right]-Ce^{-\pi\alpha\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2\right)^{1/2}$$

这进而迫使所有扰动都为零。

Part 1 of the proof

5.1. 等分布点的极小化点。我们首先证明，对于等距点，最小值恰好在相邻两点的正中间取得。颇为引人注目的是，这个非常直观的结论似乎也没有特别简单的证明，这也表明了该问题的难度。

命题 5.1.1。对于所有 $0 \le \ell \le n-1$，有

$$\min_{x\in\mathbb{T}} \sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha\left(x - \frac{j-1}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha\left(\frac{\ell+1/2}{n} - \frac{j-1}{n}\right).$$

证明。设 $\{x_1,\dots,x_n\} \subset [0,1)$ 是等距点，$x_j = (j-1)/n$。于是

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha\left(x - x_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2} e^{2\pi i k(x-x_j)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2}\left(\sum_{j=1}^{n} e^{-2\pi i k x_j}\right) e^{2\pi i k x}.$$

由于这些点等距排列，我们有

$$\sum_{j=1}^{n} e^{-2\pi i k x_j} = \begin{cases} n & \text{whenever } n\big|k \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha\left(x - \frac{j-1}{n}\right) = n\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2 n^2} e^{2\pi i k n x} = n\cdot\theta(nx; n^2\alpha). \tag{5.1}$$

我们使用 θ 函数的雅可比三重乘积表示

$$\theta(x;\alpha) = \prod_{k\ge 1}\left(1-e^{-2k\pi\alpha}\right)\left(1 + 2\cos(2\pi x)e^{-(2k-1)\pi\alpha} + e^{-2(2k-1)\pi\alpha}\right). \tag{5.2}$$

现在很容易求出最小值：在 θ 的乘积公式中，当且仅当 $x \in \mathbb{Z} + 1/2$ 时每个因子都取得最小值，因为起决定作用的是余弦项，而它恰好在此处取得最小值。以下不等式可直接推出：

$$n\cdot\theta\left(\frac{1}{2}; n^2\alpha\right) \le n\cdot\theta(nx; n^2\alpha), \quad \forall \alpha > 0,$$

当且仅当 $x \in \frac{1}{n}\left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)$ 时等号成立。结论由 (5.1) 得出。 □

由于这一事实使我们能够进行自然的比较（见图 2），因此会经常用到它。下一步是计算最小值的实际大小。再次利用单位根之和为 0 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha\left(x - \frac{j}{n}\right) &= n\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2 n^2} e^{2\pi i k n x} \\ &= n + 2ne^{-\pi\alpha n^2}\cos(2\pi n x) + \mathcal{O}(ne^{-4\pi\alpha n^2}).\end{aligned}$$

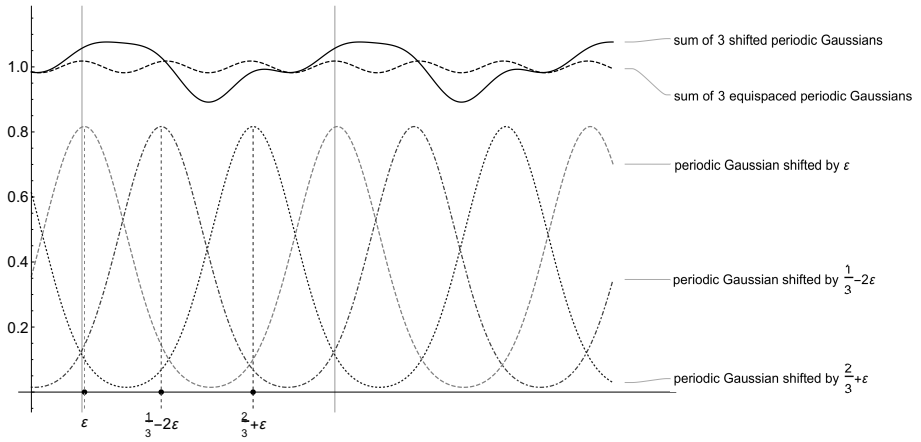


图 2. 对于等距排列的周期高斯函数之和，最小值出现在相邻平移之间的中点处。对于由一般周期构型的平移组成的和，其最小值则较难把握。绘图时，我们将该和归一化，使其围绕 1 振荡，即在一个周期上的积分为 1。

由于我们从命题5.1.1中得知，最小值恰好在相邻两个点的中间取得，因此可以得到显式表示

$$\begin{aligned}\min_x \sum_{j=1}^n \theta_\alpha\left(x-\frac{j-1}{n}\right) &= \sum_{j=1}^n \theta_\alpha\left(\frac{1}{2n}-\frac{j-1}{n}\right)\\ &= n\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha\ell^2 n^2} e^{2\pi i\ell n\frac{1}{2n}} = n+2n\sum_{\ell=1}^{\infty}(-1)^\ell e^{-\pi\alpha\ell^2n^2}\\ &= n-2ne^{-\pi\alpha n^2}+\mathcal{O}(ne^{-4\pi\alpha n^2}).\end{aligned}$$

5.2. L^1-估计。我们接下来讨论一个基本的 L^1-估计，以及一个不那么基本的 L^1-估计。以下初等鸽巢原理论证说明了为何 L^1 是衡量与均值偏差的自然空间。

引理 5.2.1. 设 $g:\ [0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个均值为 0 的周期连续函数。那么

$$\min_{0\le x\le 1} g(x) \le -\frac{\|g\|_{L^1}}{2}.$$

证明。由于 g 的均值为 0，我们有

$$\int_0^1 \max(0,g(x))dx = -\int_0^1 \min(0,g(x))dx$$

因此

$$\int_0^1 \min(0,g(x))dx = -\frac{\|g\|_{L^1}}{2}.$$

接下来的论证由此得出

$$-\frac{\|g\|_{L^1}}{2} = \int_0^1 \min(0,g(x))dx \ge \min_{0\le x\le 1} g(x).$$

□

我们还使用了 McGehee、Pigno 和 Smith[32] 以及 Konyagin [29]各自独立发现的一个不等式。该不等式源于他们对 Littlewood 猜想的证明。

定理（McGehee、Pigno、Smith [32]）。对于任意整数集合 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$，我们有

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n a_j e^{2\pi i \lambda_j t} \right| dt \geq \frac{1}{200} \sum_{j=1}^n \frac{|a_j|}{j}.$$

我们注意到，Konyagin [29] 并未明确给出该常数。McGehee、Pigno 和 Smith 在区间 $[0, 2\pi]$ 上进行研究，并证明该不等式以常数 $c = 1/30$ 成立，由此可知，当研究区间 $[0, 1]$时，$1/(60\pi) \geq 1/200$ 是一个可接受的常数。Stegeman [44] 证明，在 $[0, 2\pi]$ 上可以取 $c = 4/\pi^3$，这意味着经过缩放至 $[0, 1]$后，常数 $1/50$ 是可接受的。无论如何，该常数的精确值对于后续论证并不重要。我们将利用 McGehee–Pigno–Smith 不等式，推导 Jacobi θ函数之和偏离其均值的 L^1-范数的一个下界。我们注意到，如果这个下界很大，那么 L^1-范数也会很大，因此，该函数所能达到的最小值必然远低于其平均值。由于我们希望避免这种情况，这就会间接迫使最初几个傅里叶系数足够小。一位匿名审稿人指出，对于我们的论证目的，可以通过以下方式避免使用 McGehee–Pigno–Smith 不等式：对于任意满足 $1 \leq k \leq n$ 的.....

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n a_j e^{2\pi i \lambda_j t} \right| dt &= \int_0^1 \left| e^{-2\pi i \lambda_k t} \sum_{j=1}^n a_j e^{2\pi i \lambda_j t} \right| dt = \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n a_j e^{2\pi i (\lambda_j - \lambda_k) t} \right| dt \\ &\geq \left| \int_0^1 \sum_{j=1}^n a_j e^{2\pi i (\lambda_j - \lambda_k) t} dt \right| = |a_k|\end{aligned}$$

因此也

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n a_j e^{2\pi i \lambda_j t} \right| dt \geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |a_j|.$$

这个估计确实足以应对论证的其余部分。这部分是由于傅里叶级数中的乘子衰减得极其迅速（即呈高斯函数式衰减）。在尝试用傅里叶变换衰减得更慢的核建立类似结果时，使用 McGehee–Pigno–Smith 不等式而非更初等的不等式可能会更有优势。使用 McGehee–Pigno–Smith 不等式或更初等的不等式可得到以下结果。

引理 5.2.2. 对所有 $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset [0, 1)$，我们有

$$\left\| \sum_{j=1}^n \theta_\alpha (x - x_j) - n \right\|_{L^1} \geq \frac{1}{400n} \sum_{\substack{k \neq 0 \\ |k| \leq n}} e^{-\pi \alpha k^2} \left| \sum_{j=1}^n e^{-2\pi i k x_j} \right| - \mathcal{O}(n e^{-\pi \alpha (n+1)^2}).$$

证明。我们关注的对象

$$\sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha\left(x-x_j\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-\pi\alpha k^2}\left(\sum_{j=1}^{n}e^{-2\pi ikx_j}\right)e^{2\pi ikx}$$

由于它不是三角多项式，因此不完全符合所需的形式。然而，简单应用三角不等式可得

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha\left(x-x_j\right)-\sum_{|k|\le n}e^{-\pi\alpha k^2}\left(\sum_{j=1}^{n}e^{-2\pi ikx_j}\right)e^{2\pi ikx}\right\|_{L^\infty}\lesssim ne^{-\pi\alpha(n+1)^2}.$$

我们将 McGehee–Pigno–Smith 不等式应用于三角多项式

$$\left\|\sum_{|k|\le n}e^{-\pi\alpha k^2}\left(\sum_{j=1}^{n}e^{-2\pi ikx_j}\right)e^{2\pi ikx}-n\right\|_{L^1}\ge\frac{1}{400n}\sum_{\substack{k\neq0\\|k|\le n}}e^{-\pi\alpha k^2}\left|\sum_{j=1}^{n}e^{-2\pi ikx_j}\right|.$$

结合截断误差，可得下界

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha\left(x-x_j\right)-n\right\|_{L^1}\ge\frac{1}{400n}\sum_{\substack{k\neq0\\|k|\le n}}e^{-\pi\alpha k^2}\left|\sum_{j=1}^{n}e^{-2\pi ikx_j}\right|-\mathcal{O}(ne^{-\pi\alpha(n+1)^2}).$$

□

5.3. 前 $n-1$ 个傅里叶系数很小。本节旨在证明，任意极小化配置的前 $n-1$ 个傅里叶系数在 n 中呈指数级小。

引理 5.3.1. 设 $\{x_1,\dots,x_n\}\subset[0,1)$ 是一个使最小值达到最大的点配置。那么

$$\max_{1\le|k|\le n-1}\left|\sum_{j=1}^{n}e^{-2\pi ikx_j}\right|\le2000n^2\cdot e^{-\pi\alpha(2n-1)}.$$

证明。结合引理 5.2.1 和引理 5.2.2，我们推得，对于任意集合$\{x_1,\dots,x_n\}\subset[0,1]$，函数

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-\pi\alpha k^2}\left(\sum_{j=1}^{n}e^{-2\pi ikx_j}\right)e^{2\pi ikx}$$

满足不等式

$$\min_{0\le x\le1}f(x)-n\le-\frac{1}{800n}\sum_{\substack{k\neq0\\|k|\le n}}e^{-\pi\alpha k^2}\left|\sum_{j=1}^{n}e^{-2\pi ikx_j}\right|+\mathcal{O}(ne^{-\pi\alpha(n+1)^2}).$$

我们知道，等距点满足

$$\min_{0\le x\le1}\sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha(x-x_j)=n-2ne^{-\pi\alpha n^2}+\mathcal{O}(ne^{-4\pi\alpha n^2}).$$

因此，如果我们现在假设 $\{x_1,\dots,x_n\}\subset[0,1)$ 是一个使最小值达到最大的构型，那么我们有

$$\min_{0\le x\le 1}\sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha(x-x_j)\ge n-2ne^{-\pi\alpha n^2}+\mathcal{O}(ne^{-4\pi\alpha n^2}).$$

由此可得

$$\frac{1}{800n}\sum_{\substack{k\neq 0\\ |k|\le n}}e^{-\pi\alpha k^2}\left|\sum_{j=1}^{n}e^{-2\pi ikx_j}\right|\le 2ne^{-\pi\alpha n^2}+\mathcal{O}(ne^{-\pi\alpha(n+1)^2}).$$

这意味着，当 $1\le|k|\le n$ 和 n 足够大时（其大小仅取决于 α）

$$\left|\sum_{j=1}^{n}e^{-2\pi ikx_j}\right|\le 2000n^2\cdot e^{-\pi\alpha(n^2-k^2)}.$$

这使我们可以得出结论：由 $x_1,\dots,x_n$ 中的 n 个狄拉克测度之和所给出的测度的前 $n-1$ 个傅里叶系数呈指数级小。

$$\max_{1\le|k|\le n-1}\left|\sum_{j=1}^{n}e^{-2\pi ikx_j}\right|\le 2000n^2\cdot e^{-\pi\alpha(2n-1)}. \tag{5.3}$$

□

备注。我们注意到，这个证明实际上表明了更多内容，因为论证的最后一步只有在 $k=n-1$ 时才取等。我们注意到这个更强的不等式

$$\left|\sum_{j=1}^{n}e^{-2\pi ikx_j}\right|\le 2000n^2\cdot e^{-\pi\alpha(n^2-k^2)}$$

但在其余论证中并不严格需要这一点。

5.4. 间隔是规则的。如果我们有 n 个等距点，那么前 $n-1$ 个傅里叶系数为零。我们证明这一结论的稳定性版本：如果前 $n-1$ 个傅里叶系数很小，那么这些点几乎等距排列。

引理 5.4.1. 假设 $\{x_1,\dots,x_n\}\subset[0,1)$ 具有如下性质：

$$\max_{1\le|k|\le n-1}\left|\sum_{j=1}^{n}e^{-2\pi ikx_j}\right|\le\varepsilon.$$

然后，对于足够小的 $\varepsilon>0$（例如 $\varepsilon\le 1/(1000n^4)$），存在一个置换$\pi:S_n\to S_n$以及一个整体平移 $z\in[0,1]$，使得

$$\left|x_{\pi(j)}-\frac{j}{n}-z\right|\le\varepsilon.$$

证明。我们使用 Fej´er 核

$$F_n(x)=\sum_{|k|\le n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{2\pi ikx}=\frac{1}{n}\left(\frac{\sin(\pi nx)}{\sin(\pi x)}\right)^2\ge 0.$$

注意，$F_n(0) = n$。因此

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} F_n(x_i - x_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{|k|\le n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{2\pi i k(x_i - x_j)} \\ &= \sum_{|k|\le n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \sum_{i,j=1}^{n} e^{2\pi i k(x_i - x_j)} \\ &= \sum_{|k|\le n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \left|\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i k x_j}\right|^2 .\end{aligned}$$

因此，应用前 $n-1$ 个非零傅里叶系数较小这一假设，可得

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} F_n(x_i - x_j) = n^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\ne j}}^{n} F_n(x_i - x_j) &= \sum_{|k|\le n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \left|\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i k x_j}\right|^2 \\ &= n^2 + \sum_{\substack{|k|\le n \\ k\ne 0}} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \left|\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i k x_j}\right|^2 \le n^2 + 2n\varepsilon^2.\end{aligned}$$

由上述计算还可得，对于任意指标 $i \ne j$，

$$F_n(x_i - x_j) \le \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\ne j}}^{n} F_n(x_i - x_j) \le 2n\varepsilon^2.$$

单凭这个不等式并没有太大的威力：我们用一个包含 $\sim n^2$ 个相似项的和来估计某一项。不过，我们有一个优势：只会在 ε 已经关于 n 指数级小的情况下应用该引理，因此允许出现多项式量级的损失。F_n 在 $[0,1)$ 上的根恰好是形如 k/n 的点，其中 $1 \le k \le n-1$。由于

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(\pi n x)}{\sin(\pi x)}\right)^2$$

我们有

$$\frac{d^2}{dx^2} F_n(x) = \frac{2\pi^2 \csc^2(\pi x)}{n} X$$

其中

$$X = \left(n^2 \cos^2(\pi n x) - \sin^2(\pi n x)\left(n^2 - 3\csc^2(\pi x) + 2\right) - 2n\cot(\pi x)\sin(2\pi n x)\right).$$

在形如 $x = k/n$ 的点处，这个表达式可简化为

$$\left.\frac{d^2}{dx^2} F_n(x)\right|_{x=\frac{k}{n}} = 2\pi^2 n \csc^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) \ge 2\pi^2 n.$$

因此，当 y 充分接近 0 时，我们有

$$F_n\left(\frac{k}{n} + y\right) \ge 2ny^2.$$

类似的论证可用于给出三阶导数的上界。带余项的泰勒公式表明，当 y 位于一个

关于 0 的区域内时，不等式成立；该区域随 n 按多项式速度缩小，由此我们推得，当 ε 足够小时，不等式成立。前一个不等式

$$F_n(x_i - x_j) \le \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} F_n(x_i - x_j) \le 2n\varepsilon^2$$

这意味着 $x_i - x_j$ 必须具有 $x_i - x_j = k/n + \delta$ 的形式，其中 $\delta \le \varepsilon$是某个参数。此外，由于 $F_n(0) = n$，我们还可以推导出 $|x_i - x_j| > 1/2n$（前提是 ε 足够小），这进而迫使全局扰动的存在。□

Part 2 of the proof

5.5. 主要贡献。我们快速回顾证明第一部分中已经得到的结论。我们知道，任意最优配置 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 都必须接近等距点的情形。更准确地说，它必须具有如下形式

$$x_i = \frac{i}{n} + z + \varepsilon_i \qquad \text{where} \qquad |\varepsilon_i| \le 2000n^2 \cdot e^{-\pi\alpha(2n-1)}$$

在 n 中呈指数级小，而 $z \in \mathbb{R}$ 是任意平移量。根据平移对称性，我们可以假设 $z = 0$ 和 $\sum_j \varepsilon_j = 0$，并且在后续所有论证中都如此处理。我们可以将对 θ–函数的求和改写为傅里叶级数

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha\left(x - \frac{j}{n} + \varepsilon_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2} e^{2\pi i k(x - \frac{j}{n} + \varepsilon_j)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2} \left(\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i k(\varepsilon_j - \frac{j}{n})}\right) e^{2\pi i k x} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2} \left(\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i k\varepsilon_j} e^{-2\pi i k\frac{j}{n}}\right) e^{2\pi i k x}.
\end{aligned}$$

我们指出，正如上文所述，当所有 $\varepsilon_j = 0$时，那么

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha\left(x - \frac{j}{n}\right) = n + 2ne^{-\pi\alpha n^2}\cos(2\pi n x) + \mathcal{O}(ne^{-4\pi\alpha n^2}).$$

在这种情况下，极小值非常接近均值 n。接下来需要证明，小的扰动会降低极小值。利用带余项的泰勒公式，我们注意到频率 $k = n$ 的贡献为

$$\begin{aligned}
e^{-\pi\alpha n^2}\left(\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i n\varepsilon_j}\right) e^{2\pi i n x} &= e^{-\pi\alpha n^2}\left(n + 2\pi i n\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j + \mathcal{O}\left(n^2\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2\right)\right) e^{2\pi i n x} \\
&= e^{-\pi\alpha n^2} n e^{2\pi i n x} + \mathcal{O}\left(n^2 e^{-\pi\alpha n^2}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2\right)
\end{aligned}$$

而 $k = -n$ 也产生相同的贡献。因此，这三项

$$B = \sum_{k\in\{-n,0,n\}} e^{-\pi\alpha k^2}\left(\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i k\varepsilon_j} e^{-2\pi i k\frac{j}{n}}\right) e^{2\pi i k x}$$

贡献的量与未扰动情形$\varepsilon_j = 0$ and相同，误差项很小

$$B = n + 2ne^{-\pi\alpha n^2}\cos(2\pi nx) + \mathcal{O}\left(n^2 e^{-\pi\alpha n^2}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2\right).$$

回顾一下，在未扰动情形中，极小值在 $(k+1/2)/n$,$0 \le k \le n-1$ 处取得。我们将证明，微小扰动必然会使其中一个极小值变小，并通过反证法论证：如果对这些点施加微小扰动后，最小值有所增加，那么特别地，在所有形如 $(k+1/2)/n$, $0 \le k \le n-1$ 的点处，扰动幅度都必须为正（因为在未扰动情形中，极小值正是在这些点处取得）。接下来的论证将致力于证明这不可能发生。

5.6. 三角引理。本节将证明一个自成一体的引理，它表明，次数至多为 $(n-1)/2$ 的三角多项式，在 $0 \le k \le n-1$ 对应的点 $(k+1/2)/n$ 中至少有一点处取负值。得到的界可能远非最优，但足以满足我们的需要。事实上，高斯权重的快速衰减意味着，对于后续论证而言，任何多项式界都已足够。

引理 5.6.1。若 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 是如下形式的三角多项式

$$f(x) = \sum_{1 \le |j| \le \frac{n-1}{2}} a_j e^{2\pi i j x} \quad then \quad \min_{0 \le k \le n-1} f\left(\frac{k+1/2}{n}\right) \le -\frac{\|f\|_{L^2([0,1])}}{3n^2}.$$

注意，对频率 $|j| \le (n-1)/2$ 的限制是紧的。设 n 为偶数，并考虑三角多项式

$$f(x) = e^{2\pi i \frac{n}{2} x} + e^{-2\pi i \frac{n}{2} x} = 2\cos(\pi n x)$$

它满足

$$f\left(\frac{k+1/2}{n}\right) = 2\cos(\pi(k+1/2)) = 0.$$

在陈述引理 5.6.1 的证明之前，我们先建立两个主要要素之一：一种修正的庞加莱不等式，适用于在边界上并未完全取零的函数。不用说，建立这一不等式所用的工具和论证都是完全标准的；我们并不认为该不等式在任何意义上具有新颖性。在迹不等式以及索伯列夫空间嵌入结果的一般背景下，已有许多类似的不等式。

命题 5.6.2（修正的庞加莱不等式）。设 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 在 (a,b) 上连续且可微，并满足 $|f(a)| \le M$和 $|f(b)| \le M$。那么

$$\int_a^b f(x)^2 dx \le M^2(b-a) + 2M\sqrt{b-a}\left(\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'(x)^2 dx\right)^{1/2} + \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'(x)^2 dx$$

证明。以下内容在更一般的 Sobolev 空间 H^1（而非较小的空间 C^1）中也有意义，但这与本文无关。首先注意，将 $f(x)$ 替换为 $|f(x)|$不会改变$\|f\|_{L^2}$，且使$\|f'\|_{L^2}$保持不变。因此

只需证明非负 $f(x)$ 情形下的不等式。下面介绍一些基本事实：首先是标准的 Poincar´e 不等式，这意味着若 $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ 满足$g(c)=g(d)=0$，则

$$\int_c^d g(x)^2dx\le\frac{(d-c)^2}{\pi^2}\int_c^d g'(x)^2dx.$$

这个一维不等式有时称为 Wirtinger不等式（例如，见 Blaschke 于1916年出版的著作《圆与球》 [11]）。不过，我们注意到它似乎曾被多次发现：例如，Hurwitz [28] 早在他于1901年证明等周不等式时就已使用了它。关于 Poincar´e 不等式的更多内容，可参见 Payne 和 Weinberger[36] 或第二作者的研究成果 [43] 。于是，这个不等式推出了彩票计划

$$\int_a^b(f(x)-M)^2\mathbf{1}_{f(x)\ge M}\,dx\le\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'(x)^2\mathbf{1}_{f(x)\ge M}\,dx$$

我们可以将其展开平方并写成əапцш

$$\int_a^b f(x)^2\mathbf{1}_{f(x)\ge M}\,dx+M^2\,|\,\{f\ge M\}\,|\le 2M\int_a^b f(x)\mathbf{1}_{f(x)\ge M}\,dx + \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'(x)^2\mathbf{1}_{f(x)\ge M}\,dx$$

右端的第一个积分可以利用柯西–施瓦茨不等式进行估计。

$$\int_a^b f(x)\mathbf{1}_{f(x)\ge M}\,dx\le|\,\{f\ge M\}\,|^{1/2}\left(\int_a^b f(x)^2\mathbf{1}_{f(x)\ge M}\,dx\right)^{1/2}$$

从而得到该估计，简记 $Z=\left(\int_a^b f(x)^2\mathbf{1}_{f(x)\ge M}\,dx\right)^{1/2}$，

$$Z^2-2M\,|\,\{f\ge M\}\,|^{1/2}Z+M^2\,|\,\{f\ge M\}\,|\le\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'(x)^2\mathbf{1}_{f(x)\ge M}\,dx.$$

左侧可以因式分解为

$$(Z-M\,|\,\{f\ge M\}\,|^{1/2})^2\le\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'(x)^2\mathbf{1}_{f(x)\ge M}\,dx$$

因此得出。

$$Z\le M\,|\,\{f\ge M\}\,|^{1/2}+\left(\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'(x)^2\mathbf{1}_{f(x)\ge M}\,dx\right)^{1/2}$$

我们还可以得到显然的估计

$$\int_a^b f(x)^2\mathbf{1}_{f(x)\le M}\,dx\le\,|\,\{f(x)\le M\}\,|\,M^2.$$

将最后一个估计与倒数第二个估计的平方相加，并利用$|\,\{f\ge M\}\,|\le b-a$，我们得到

$$\int_a^b f(x)^2dx\le M^2(b-a)+2M(b-a)^{1/2}\left(\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'(x)^2\mathbf{1}_{f(x)\ge M}\,dx\right)^{1/2} + \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'(x)^2\mathbf{1}_{f(x)\ge M}\,dx.$$

□

引理 5.6.1 的证明。由于 ≤ 0，最小值必然是

$$\begin{aligned}\min_{0\leq k\leq n-1} f\left(\frac{k+1/2}{n}\right) &\leq \frac{1}{n}\sum_{0\leq k\leq n-1} f\left(\frac{k+1/2}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{1\leq|j|\leq n-1} a_j e^{2\pi ij(k+1/2)/n}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{1\leq|j|\leq n-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_j e^{2\pi i\frac{j}{2n}} e^{2\pi ijk/n}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{1\leq|j|\leq n-1} a_j e^{2\pi i\frac{j}{2n}}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi ijk/n} = 0.\end{aligned}$$

现在假设最小值为负，但非常接近 0

$$X = \min_{0\leq k\leq n-1} f\left(\frac{k+1/2}{n}\right) \leq 0.$$

由和为 0 的单位根可知，与上文一样,

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{0\leq k\leq n-1} f\left(\frac{k+1/2}{n}\right) \geq (n-1)X + \max_{0\leq k\leq n-1} f\left(\frac{k+1/2}{n}\right)\\ &\geq nX + \max_{0\leq k\leq n-1} f\left(\frac{k+1/2}{n}\right).\end{aligned}$$

由此我们推得

$$\max_{0\leq k\leq n-1} f\left(\frac{k+1/2}{n}\right) \leq (-X)n.$$

将此结果与修正后的 Poincar´e 不等式结合起来，并利用 $M = n|X|$，我们推得

$$\begin{aligned}\int_{\frac{k+1/2}{n}}^{\frac{k+3/2}{n}} f(x)^2dx \leq nX^2 + 2|X|\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{n^2\pi^2}\int_{\frac{k+1/2}{n}}^{\frac{k+3/2}{n}} f'(x)^2dx}\\ + \frac{1}{n^2\pi^2}\int_{\frac{k+1/2}{n}}^{\frac{k+3/2}{n}} f'(x)^2dx.\end{aligned}$$

对所有区间求和（按周期方式理解），得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)^2\,dx \leq n^2X^2 + \frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^1 f'(x)^2\,dx\\ + 2|X|\sqrt{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{1}{n^2\pi^2}\int_{\frac{k+1/2}{n}}^{\frac{k+3/2}{n}} f'(x)^2\,dx}\end{aligned}$$

至于剩余的和，我们使用柯西–施瓦茨不等式进行估计

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2\pi^2}\int_{\frac{k+1/2}{n}}^{\frac{k+3/2}{n}} f'(x)^2\,dx} \le \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2\pi^2}\int_{\frac{k+1/2}{n}}^{\frac{k+3/2}{n}} f'(x)^2\,dx} = \sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^1 f'(x)^2\,dx}$$

综上，这意味着

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx \le n^2X^2 + \frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^1 f'(x)^2\,dx + 2|X|n\sqrt{\frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^1 f'(x)^2\,dx}.$$

由于 f 是次数至多为 $(n-1)/2$ 的三角多项式，我们有

$$\int_0^1 f(x)^2 dx = \sum_{1\le|j|\le\frac{n-1}{2}} |a_j|^2$$

以及

$$\int_0^1 f'(x)^2 dx = \sum_{1\le|j|\le\frac{n-1}{2}} (2\pi j)^2|a_j|^2 \le (n-1)^2\pi^2 \sum_{1\le|j|\le\frac{n-1}{2}} |a_j|^2 = (n-1)^2\pi^2\int_0^1 f(x)^2\,dx.$$

代入该式可得

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \le \frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^1 f'(x)^2\,dx + X^2n^2 + 2|X|\sqrt{\frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^1 f'(x)^2\,dx} \le \left(1-\frac{1}{n}\right)^2\int_0^1 f(x)^2\,dx + X^2n^2 + 2|X|n\left(1-\frac{1}{n}\right)\sqrt{\int_0^1 f(x)^2\,dx}.$$

对于任意参数 $\gamma > 0$，不等式

$$\gamma^2 \le \left(1-\frac{1}{n}\right)^2\gamma^2 + X^2n^2 + 2|X|n\left(1-\frac{1}{n}\right)\gamma$$

利用 $(1-1/n)^2 \le 1-1/n$ 和 $(1-1/n) \le 1$ 可将其化简为

$$X^2n^2 + 2|X|n\gamma - \frac{\gamma^2}{n} \ge 0$$

通过求解二次方程，可以看出这意味着

$$|X| \ge \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n^2}\gamma \ge \frac{\gamma}{3n^2}$$

这就是所需的结果。 □

注 Much of the difficulty comes from the fact that we only evaluate the trigonometric polynomial in equispaced points. If one was just interested in the minimum being small in some place, there is a very elementary argument which we conclude for the sake of context.

引理 5.6.3. 设 $f(x) = \sum_{1\le|j|\le n-1} a_j e^{2\pi ijx}$ 是一个实值三角多项式，则

$$\min_{0\le x\le 1} f(x) \le -\frac{\|f\|_{L^2}}{3\sqrt{n}}.$$

证明。我们还有一个显然的估计

$$\int_0^1 f(x)^2 \le \|f\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1} \quad \text{and thus} \quad \|f\|_{L^1} \ge \frac{\|f\|_{L^2}^2}{\|f\|_{L^\infty}}.$$

根据引理 5.2.1，我们可推出

$$\min_{0\le x\le 1} f(x) \le -\frac{1}{2}\|f\|_{L^1} \le -\frac{1}{2}\frac{\|f\|_{L^2}^2}{\|f\|_{L^\infty}}.$$

由 Plancherel 定理可知

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{1\le j\le n-1} |a_j|^2$$

并且，由三角不等式和柯西–施瓦茨不等式可知

$$\|f\|_{L^\infty} \le \sum_{1\le j\le n-1} |a_j| \le \sqrt{2n}\left(\sum_{1\le j\le n-1} |a_j|^2\right)^{1/2} = \sqrt{2n}\|f\|_{L^2}.$$

由此及 $2\sqrt{2} \le 3$ 可得结论。 □

5.7. 剩余论证概要。本节概述如何完成论证。我们首先回顾

$$\sum_{j=1}^n \theta_\alpha\left(x - \frac{j}{n} + \varepsilon_j\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2}\left(\sum_{j=1}^n e^{2\pi ik\varepsilon_j} e^{-2\pi ik\frac{j}{n}}\right) e^{2\pi ikx}.$$

主要贡献来自这三项 $k \in \{-n, 0, n\}$

$$B = \sum_{k\in\{-n,0,n\}} e^{-\pi\alpha k^2}\left(\sum_{j=1}^n e^{2\pi ik\varepsilon_j} e^{-2\pi ik\frac{j}{n}}\right) e^{2\pi ikx}$$

它们的贡献为

$$B = n + 2ne^{-\pi\alpha n^2}\cos(2\pi nx) + \mathcal{O}\left(n^2 e^{-\pi\alpha n^2}\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2\right).$$

我们选择对更多项求和（尽管这些项都相当小），即 $k \in n\mathbb{Z}$，以便与等分布点达到的极小值进行比较。为此，我们设

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{k\in n\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2}\left(\sum_{j=1}^n e^{2\pi ik\varepsilon_j} e^{-2\pi ik\frac{j}{n}}\right) e^{2\pi ikx} \\ &= \sum_{k\in n\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2}\left(\sum_{j=1}^n e^{2\pi ik\varepsilon_j}\right) e^{2\pi ikx}, \end{aligned}$$

这里的简化源于以下事实：当 k 是 n 的倍数时，这些指数表达式全都等于 1。特别是，所有傅里叶系数都相当接近 n。更准确地说，再次利用所有位移 ε_j 之和等于 0 这一点，可得

$$\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi ik\varepsilon_j} = n + \sum_{j=1}^{n} \left(e^{2\pi ik\varepsilon_j} - 1\right) = n + \sum_{j=1}^{n} \left(e^{2\pi ik\varepsilon_j} - 1 - 2\pi ik\varepsilon_j\right).$$

对于所有的 $x \in \mathbb{R}$，我们有 $|e^{ix} - 1 - ix| \le x^2$，因此

$$\left| -n + \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi ik\varepsilon_j} \right| \le 4\pi^2 k^2 \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2.$$

将其与

$$\sum_{\substack{k \in n\mathbb{Z} \\ |k| > n}} k^2 e^{-\pi\alpha k^2} \lesssim n^2 e^{-\pi\alpha n^2}$$

我们推得

$$A(x) = \sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha\left(x - \frac{j}{n}\right) + \mathcal{O}\left(n^2 e^{-\pi\alpha n^2} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2\right).$$

我们的目标是证明，由 $\varepsilon_j \neq 0$ 引起的扰动必定会使至少一个极小值处的函数值降低。为此，我们将函数分解为

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha\left(x - \frac{j}{n} + \varepsilon_j\right) = A(x) + g_1(x) + g_2(x) + h(x),$$

其中， A 对 n的所有倍数求和， g_1 对前 $(n-1)/2$ 个频率求和， g_2对介于 $(n-1)/2$ 与 $n-1$ 之间的频率求和，而 h 对其余频率求和，即大于 n 且 n 不能整除 k的频率。因此

$$g_1(x) = \sum_{1 \le |k| \le \frac{n-1}{2}} e^{-\pi\alpha k^2} \left(\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi ik\varepsilon_j} e^{-2\pi ik\frac{j}{n}}\right) e^{2\pi ikx}$$

而 g_2 对其余较小的频率求和

$$g_2(x) = \sum_{\frac{n-1}{2} < |k| \le n-1} e^{-\pi\alpha k^2} \left(\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi ik\varepsilon_j} e^{-2\pi ik\frac{j}{n}}\right) e^{2\pi ikx},$$

并对其余项求和

$$h(x) = \sum_{\substack{|k| \ge n+1 \\ n \nmid k}} e^{-\pi\alpha k^2} \left(\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi ik\varepsilon_j} e^{-2\pi ik\frac{j}{n}}\right) e^{2\pi ikx}.$$

其余论证过程如下

(1) 我们将在下一节证明，$\|g_1\|_{L^2}$ 并不太小（就$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2$而言）。在此过程中，自然会用到离散傅里叶变换。

(2) 然后由引理 5.6.1 可得

$$\min_{0\le k\le n-1} g_1\left(\frac{k+1/2}{n}\right) \le -\frac{\|g_1\|_{L^2}}{3n^2}$$

相当负。

(3) 我们证明 $\|g_2\|_{L^\infty} \ll \|g_1\|_{L^2}$（这再次由离散傅里叶变换的性质得出），并且 h 也同样成立。(4) 因此，这三个项之和在至少一个形如 $(k+1/2)/n$ 的点处相当负，由此便可得出结论。

5.8. 离散傅里叶变换。我们再次回顾

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_\alpha\left(x-\frac{j}{n}+\varepsilon_j\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\alpha k^2}\left(\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i k\varepsilon_j} e^{-2\pi i k\frac{j}{n}}\right) e^{2\pi i k x}.$$

我们还注意到，ε_j 相当小：(5.3) 结合引理 5.4.1 的证明可得

$$\max_{1\le j\le n} |\varepsilon_j| = \mathcal{O}\left(n^2\cdot e^{-2\pi\alpha n}\right),$$

其中隐含常数取决于 α。事实证明，由于这些量关于 n 指数级小，基本的泰勒展开

$$e^{2\pi i k\varepsilon_j} = 1 + 2\pi i k\varepsilon_j + \mathcal{O}(k^2\varepsilon_j^2)$$

具有很高的精度，因此我们推得，只要 k 不是 n 的倍数，就有

$$\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i k\varepsilon_j} e^{-2\pi i k\frac{j}{n}} = 2\pi i k\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j e^{-2\pi i k\frac{j}{n}} + \mathcal{O}\left(k^2\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2\right).$$

我们注意到，经过各种形式的缩放后，这不过是 $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ 的离散傅里叶变换。由于 ε_j 均为实数值，因此具有如下对称性

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j e^{-2\pi i k\frac{(n-j)}{n}}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j e^{-2\pi i k\frac{j}{n}}\right|$$

离散傅里叶变换保持 ℓ^2-范数不变，因此

$$n\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2 = \sum_{k=1}^{n-1}\left|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j e^{-2\pi i k\frac{j}{n}}\right|^2$$

这里省略 $k=0$ 项，因为 $\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n=0$。这意味着

$$\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j e^{-2\pi i k\frac{j}{n}}\right|^2 \le \max_{1\le k\le n-1}\left|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j e^{-2\pi i k\frac{j}{n}}\right|^2.$$

这立即表明，至少有一个傅里叶系数较大

$$\max_{1\le k\le n-1}\left|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j e^{-2\pi i k\frac{j}{n}}\right| \ge \left(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2\right)^{1/2} \gg \mathcal{O}\left(n^2\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2\right)$$

并且，尤其是，它比误差项大许多个数量级（请记住，误差项关于 n 指数级小）。

5.9. 最终估计。利用普朗歇尔恒等式，这也意味着 g_1 在 L^2 中很大，因为

$$\begin{aligned}\|g_1(x)\|_{L^2} &= \left\| \sum_{1\le|k|\le\frac{n-1}{2}} e^{-\pi\alpha k^2} \left(\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi ik\varepsilon_j} e^{-2\pi ik\frac{j}{n}} \right) e^{2\pi ikx} \right\|_{L^2} \\ &= \left(\sum_{1\le|k|\le\frac{n-1}{2}} e^{-2\pi\alpha k^2} \left| \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi ik\varepsilon_j} e^{-2\pi ik\frac{j}{n}} \right|^2 \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

最坏的情况是，大部分傅里叶能量集中在高频处，因此我们可以移除最小的权重并得出结论。

$$\|g_1(x)\|_{L^2} \ge e^{-\pi\alpha\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \left(\sum_{1\le|k|\le\frac{n-1}{2}} \left| \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi ik\varepsilon_j} e^{-2\pi ik\frac{j}{n}} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

此时，我们可以利用泰勒展开，并论证得出：

$$\|g_1(x)\|_{L^2} \ge e^{-\pi\alpha\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \left(\sum_{1\le|k|\le\frac{n-1}{2}} \left| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j e^{-2\pi ik\frac{j}{n}} + \mathcal{O}\left(k^2 \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2 \right) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

现在，上一节中的论证派上了用场：我们并不知道任何单个傅里叶系数的具体信息，但知道至少有一个傅里叶系数很大

$$\max_{1\le k\le n-1} \left| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j e^{-2\pi ik\frac{j}{n}} \right| \ge \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2 \right)^{1/2} \gg \mathcal{O}\left(n^2 \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2 \right)$$

因此，当 n 足够大时，

$$\|g_1(x)\|_{L^2} \ge \frac{e^{-\pi\alpha\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2 \right)^{1/2}.$$

由于傅里叶系数几乎完全相同，因此很容易证明，g_2 比 g_1 小许多个数量级。由于离散傅里叶变换具有对称性

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j e^{-2\pi ik\frac{(n-j)}{n}} \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j e^{-2\pi ik\frac{j}{n}} \right|,$$

同样的 Plancherel 论证表明，对于 n 足够大时，

$$\|g_2\|_{L^2} \le 20n^{3/2} e^{-\pi\alpha(n/2)^2} \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2 \right)^{1/2}.$$

这比 $g_1(x)$ 小得多，呈指数级差异，因为

$$e^{-\pi\alpha(n/2)^2} \qquad \text{is exponentially smaller than} \qquad e^{-\pi\alpha\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}.$$

接下来我们需要逐点估计。不过，衰减足够快，因此我们可以直接使用三角不等式。再次利用单位根之和的消去性质，以及对于 $k \leq n$ 有 $k^2\varepsilon_j^2 \ll |k\varepsilon_j|$ 这一事实，对于足够大的 n，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi ik\varepsilon_j} e^{-2\pi ik\frac{j}{n}}\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n}(1+2\pi ik\varepsilon_j+\mathcal{O}(k^2\varepsilon_j^2))e^{-2\pi ik\frac{j}{n}}\right| \\ &= (1+o(1))\left|2\pi ik\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j e^{-2\pi ik\frac{j}{n}}\right| \leq 10k\left|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j e^{-2\pi ik\frac{j}{n}}\right|.\end{aligned}$$

由 $k > (n-1)/2$，从而有 $k \geq n/2$，我们得出，当 n 足够大时，

$$\begin{aligned}\|g_2\|_{L^\infty} &\leq \sum_{\frac{n-1}{2}<|k|\leq n-1} e^{-\pi\alpha k^2}\left|\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi ik\varepsilon_j}e^{-2\pi ik\frac{j}{n}}\right| \\ &\leq 10\sum_{\frac{n-1}{2}<|k|\leq n-1} e^{-\pi\alpha k^2}\, k\sum_{j=1}^{n}|\varepsilon_j| \\ &\leq 20ne^{-\pi\alpha(n/2)^2}\sum_{j=1}^{n}|\varepsilon_j| \leq 20n^{3/2}e^{-\pi\alpha(n/2)^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2\right)^{1/2} \ll \frac{\|g_1\|_{L^2}}{n^{100}}.\end{aligned}$$

可以对 h 应用类似的论证。我们论证得

$$\begin{aligned}\|h(x)\|_{L^\infty} &= \left\|\sum_{\substack{|k|\geq n+1\\ n\nmid k}} e^{-\pi\alpha k^2}\left(\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi ik\varepsilon_j}e^{-2\pi ik\frac{j}{n}}\right)e^{2\pi ikx}\right\|_{L^\infty} \\ &\leq \sum_{\substack{|k|\geq n+1\\ n\nmid k}} e^{-\pi\alpha k^2}2\pi k\sum_{j=1}^{n}|\varepsilon_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2\right)^{1/2}\sqrt{4\pi^2 n}\sum_{\substack{|k|\geq n+1\\ n\nmid k}} e^{-\pi\alpha k^2}k.\end{aligned}$$

我们再次得出，当 n 足够大时，

$$\|h\|_{L^\infty} \ll \frac{\|g_1\|_{L^2}}{n^{100}}.$$

现在我们可以得出论证结论

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha\left(x-\frac{j}{n}+\varepsilon_j\right) = A(x)+g_1(x)+g_2(x)+h(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha\left(x-\frac{j}{n}\right)+\mathcal{O}\left(ne^{-\pi\alpha n^2}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2\right)+g_1(x)+g_2(x)+h(x).\end{aligned}$$

应用前面的所有结果，当 n 足够大时，我们得到

$$\begin{aligned}\min_x f(x) &\le \min_{0\le k\le n-1}\sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha\left(\frac{k+1/2}{n}-\frac{j}{n}+\varepsilon_j\right)\\ &\le \left[\min_{0\le x\le 1}\sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha\left(x-\frac{j}{n}\right)\right]+\mathcal{O}\left(ne^{-\pi\alpha n^2}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2\right)\\ &\quad -\frac{\|g_1\|_{L^2}}{n^{3/2}}+\|g_2\|_{L^\infty}+\|h\|_{L^\infty}\\ &\le \left[\min_{0\le x\le 1}\sum_{j=1}^{n}\theta_\alpha\left(x-\frac{j}{n}\right)\right]-\frac{1}{2}\frac{\|g_1\|_{L^2}}{n^{3/2}}.\end{aligned}$$

回想一下

$$\|g_1(x)\|_{L^2}\ge\frac{e^{-\pi\alpha\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2\right)^{1/2}$$

我们推得， $f(x)$ 的最小值当且仅当.....时达到最大

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_n=0.$$

由于等分布点使最小值恰好在它们之间取得，因此上一步计算中等号成立，从而得出我们的主要结果。

6. Small n and shifting one point

如 §1 所述，当 n 较小时，需要采用新的思路。我们没有尝试寻找例如 $n=3$、4、5 的情形的解，并且认为这是一个难题。不过，至少 $n=2$ 的情形，即 $\Gamma=\mathbb{Z}\cup(\mathbb{Z}+c)$，相当简单： $x=1/2$ 给出 $\theta_\alpha(x)$ 的极小化点，这一事实表明，我们应将第二个点恰好放在两个整数的中点。由命题 5.1.1 可知，此时我们在 $1/4$ 和 $3/4$ 处取得极小值（它们位于 0 、 $1/2$ 和 1 处的极大值之间）。以这些点为参照，不难证明等距分布是最优的。事实上，这一思路导出了以下推广。

引理 6.1. 设 $\alpha>0$ 固定， $x_1\in[0,1)$ 任意，且 $x_k=(k-1)/n$，对于$k=2,\dots n$。那么 p_α 具有最大极化，当且仅当 $x_1=0$。等价地，$\min_x f_\alpha(x)$ 为最大，当且仅当 $x_1=0$，也就是说，这些点等距排列。

证明。由乘积公式 (5.2) 可见， $\theta_\alpha(x)$ 关于 x 对称，并且是在 $(0,1/2)$ 上的递减函数（另见 [33]）。因此，我们有

$$\theta_\alpha(y)<\theta_\alpha(x_0)=\theta_\alpha(1-x_0),\qquad y\in(x_0,1-x_0),\ x_0\in[0,1/2).$$

回顾命题 5.1.1，

$$\min_x\sum_{k=1}^{n}\theta_\alpha\left(x-\frac{k-1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\theta_\alpha\left(\frac{\ell+1/2}{n}-\frac{k-1}{n}\right),\quad \ell=0,\dots,n-1.$$

现在，我们选取 $\ell = 0$ 并比较（考虑周期性）在 $1/(2n)$ 处的值：

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_\alpha \left(\frac{1}{2n} - \frac{k-1}{n} \right) = \theta_\alpha \left(\frac{1}{2n} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \theta_\alpha \left(\frac{1}{2n} - \frac{k}{n} \right)$$
$$> \theta_\alpha \left(\frac{1}{2n} + y \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \theta_\alpha \left(\frac{1}{2n} - \frac{k}{n} \right), \quad y \in \left(0, 1 - \frac{1}{n} \right).$$

通过对称性，将 $y \in (-1 + 1/n, 0)$ 向右平移并选取 $\ell = n - 1$ 时，不等式成立。□

致谢。我们由衷感谢两位非常细致的审稿人提出的大量宝贵建议。

References

[1] A. Aldroubi、C. Cabrelli、U. Molter 和 S. Tang。《动态采样》。 *Applied and Computational Harmonic Analysis* 42 378 401, 2017 , : – 。[2] A. Aldroubi 和 K. Gr¨ochenig。《平移不变空间中的非均匀采样与重构》。 *SIAM Review*, 43(4):585–620, 2001年。[3] A. Aldroubi、K. Gr¨ochenig、L. Huang、P. Jaming、I. Krishtal 和 J. L. Romero。《带限函数流的采样》。 *The Journal of Geometric Analysis*, 31:9241–9275, 2021年。[4] A. Baranov、Y. Belov 和 K. Gr¨ochenig。《高斯平移不变空间的完备插值序列》。 *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 61:191–201, 2022年。[5] C. Beltr´an 和 U. Etayo。《菱形系综：一组具有较小对数能量的球面点的构造方法》。 *Journal of Complexity*, 59:101471, 2020年。[6] S. N. Bernstein。《关于绝对单调函数》。 *Acta Mathematica*, 52:1–66, 1928年。[7] L. B´etermin 和 M. Faulhuber。《极大Theta函数——六角格在马德隆型晶格能量中的普适最优性》。 *Journal d'Analyse Mathématique*, 149 1 307 341, 2023年 ( ): - 。[8] L. B´etermin、M. Faulhuber 和 S. Steinerberger。《高斯晶格和的一个变分原理》。 *arXiv preprint*, 2110.06008, 2021年。[9] L. B´etermin 和 P. Zhang。《在 $\mathbb{R}^2$ 中布拉维晶格的粒子平均能量最小化：Lennard–Jones势和 Thomas–Fermi理论情形》。 *Communications in Contemporary Mathematics*, 17:1450049, 2015年。[10] D. Bilyk、A. Glazyrin、R. Matzke、J. Park 和 O. Vlasiuk。《球面上 p-框架能量的最优测度》。 *Revista Matemática Iberoamericana*, 38:1129–1160, 2022年。[11] W. Blaschke。《 *Kreis und Kugel*》。 Veit，莱比锡，1916年。[12] A. Bondarenko、D. Radchenko 和 M. S. Viazovska。《球面设计的最优渐近上界》。 *Annals of Mathematics (2)*, 178:443-452, 2013年。[13] S. V. Borodachov。《高维球面上关于单纯形的极化问题》。 *Discrete & Computational Geometry* 67 525 542, 2022 , : – 。[14] S. V. Borodachov、D. P. Hardin、A. Reznikov 和 E. Saff。《Riesz势的最优离散测度》。 *Transactions of the American Mathematical Society*, 370:6973–6993, 2018年。[15] S. V. Borodachov、D. P. Hardin 和 E. B. Saff。《 *Discrete Energy on Rectifiable Sets*》。属于 Springer 数学专著丛书。Springer，2019年。[16] P. G. Boyvalenkov、P. D. Dragnev、D. P. Hardin、E. B. Saff 和 M. M. Stoyanova。《关于球面码和球面设计的极化 *Journal of Mathematical Analysis and Applications*》, 524 1( ):127065, 2023年。[17] J. S. Brauchart 和 P. J. Grabner。《在球面上分布大量点：最小能量与设计》。 *Journal of Complexity*, 31:293–326, 2015年。[18] H. Cohn 和 N. Elkies。《球堆积的新上界 I》。 *Annals of Mathematics (2)*, 157 689 714 2003 : – ; 。[19] H. Cohn 和 A. Kumar。《球面上点分布的普适最优性》。 *Journal of the American Mathematical Society* 20 99 148, 2007 , : – 。[20] H. Cohn、A. Kumar、S. D. Miller、D. Radchenko 和 M. S. Viazovska。《24维空间中的球堆积问题》。 *Annals of Mathematics (2)*, 187:1035–1068, 2017年。

[21] H. Cohn、A. Kumar、S. D. Miller、D. Radchenko 和 M. S. Viazovska。E_8 *Annals of Mathematics (2)* 196 983 1082, 和 2022

Leech 格的普适最优性及插值公式。[22] J. H. Conway 和 N. J. A. Sloane。 *Sphere Packings, Lattices and Groups*, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 3 1998 第 290 卷。

施普林格出版社，纽约，[23] 版，*Journal of Statistical Physics* 177 285 298, 2019 M.

Faulhuber 和 S. Steinerberger。六角格的一个极值性质。[24] G. B. Folland。 *Harmonic analysis in phase space*。《数学年刊研究丛书》第 122 号。普林斯顿大学出版社，1989 年。[25] K. Gr¨ochenig。 *Foundations of Time-Frequency Analysis*。应用与数值调和分析丛书。Birkh¨auser，波士顿，马萨诸塞州，2001 年。[26] K. Gr¨ochenig、J. L. Romero、J. St¨ockler。平移不变空间、Gabor 框架和全正函数的抽样定理。 *Inventiones mathematicae*，211：1119–1148，2018 年。[27] D. P. Hardin 和 E. B. Saff。可求长 d维流形上的最小黎斯能量点配置。 *Advances in Mathematics*，193：174–204，2005 年。[28] A. Hurwitz。关于等周问题。*Comptes Rendes des Séances de l'Academie des Sciences* 132 401 403, 1901 , ：–[29]

S. V. Konyagin。关于 Littlewood 问题。 *Mathematics of USSR-Izvestiya* 18 2 205 225, , （）：–。1982
[30] M. Lewin 和 X. Blanc。结晶猜想：综述。*EMS Surveys in Mathematical Sciences* 2 2 255 , （）：–306，2015 年。[31] I. G. Macdonald。仿射根系与 Dedekind 的 η函数。 *Inventiones mathematicae*，15 91：–143，1971 年。[32] O. McGehee、L. Pigno 和 B. Smith。Hardy 不等式与指数和的 L^1 范数。 *Annals of Mathematics (2)*，113：613–618，1981 年。[33] H. L. Montgomery。最小 Theta 函数。 *Glasgow Mathematical Journal*，30：75–85，1988 年。[34] D. Mumford。 *Tata Lectures on Theta I*。1983 年版的重印本，Birkh¨auser，2007 年。[35] F. Pausinger 和 S. Steinerberger。用数论为房间供暖。*Mathematics Magazine* 92 99 ：–106，

2019 年。[36] L. E. Payne 和 H. F. Weinberger。凸域上的最优 Poincar´e 不等式。 *Archive for Rational Mechanics and Analysis*，5：286-292，1960 年。[37] M. Petrache 和 S. Serfaty。作为 Cohn-Kumar 猜想推论的库仑相互作用与黎斯相互作用的结晶。 *Proceedings of the American Mathematical Society*，148：3047–3057，2020 年。[38] J. Rolfes、R. Sch¨uler 和 M. C. Zimmermann。通过混合整数规划求紧集上极化问题的界。 *arXiv preprint*，2303.10101，2023 年。[39] R. L. Schilling、R. Song 和 Z. Vondracek。 *Bernstein Functions: Theory and Applications*，德格鲁伊特出版社，柏林，2010 年。[40] A. Schuermann 和 F. Vallentin。堆积与覆盖格的局部理论中的方法。载于 *Proceedings COE Workshop on Sphere Packings*，日本，第 122–136 页，2004 年。[41] E. M. Stein 和 R. Shakarchi。 *Complex Analysis*。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2003 年。[42] S. Steinerberger。求积公式与广义球面设计的谱限制。*International Mathematics Research Notices*，16：12265–12280，2021 年。[43] S. Steinerberger。尖锐的 L^1 Poincare 不等式对应于最优的超曲面切割。 *Archiv der Mathematik* 105 179 188, 2015 , ： – J. D. Stegeman。关于 Littlewood 问题中的常数。[44] *Mathematische Annalen* 261：51–54，1982 年。[45] A. Ulanovskii 和 I. Zlotnikov。从时空采样重构带限函数。 *Journal of Functional Analysis*，280：108962，2021 年。[46] M. S. Viazovska。8 维中的球堆积问题。 *Annals of Mathematics (2)*，187 991 1015，2017 年：–。[47] E. T. Whittaker 和 G. N. Watson。 *A Course of Modern Analysis*。剑桥大学出版社，重印版，1969 年。[48] D. V. Widder。 *The Laplace Transform*。普林斯顿大学出版社，1941 年。[49] AimPL：离散几何与自守形式，网址：`http://aimpl.org/discreteaf`。

NuHAG, Faculty of Mathematics, University of Vienna, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Vienna, Austria*Email address*: markus.faulhuber@univie.ac.at

Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, WA 98195-4350, USA
Email address: steinerb@uw.edu