改进球坐标中的库朗-弗里德里希斯-刘条件：用于动力学时空中广义相对论磁流体动力学的双 FFT 滤波方法

Liwei Ji,[1], * *Vassilios Mewes*,[2] *Yosef Zlochower*,[1] *Lorenzo Ennoggi*,[1] *Federico G. Lopez Armengol*,[3, 1] *Manuela Campanelli*,[1] *Federico Cipolletta*,[4] 和 *Zachariah B. Etienne*[5, 6, 7]

[1] *Center for Computational Relativity and Gravitation,and School of Mathematical Sciences, Rochester Institute of Technology,85 Lomb Memorial Drive, Rochester, New York 14623, USA*

[2] *National Center for Computational Sciences, Oak Ridge National Laboratory,P.O. Box 2008, Oak Ridge, Tennessee 37831-6164, USA*[3] *NPCx, 23150 Fashion Drive, Suite 238 Estero, Florida 33928, USA*

[4] *Barcelona Supercomputing Center (BSC)*[5] *Department of Physics, University of Idaho, Moscow, Idaho 83843, USA*[6] *Department of Physics and Astronomy, West Virginia University, Morgantown, West Virginia 26506, USA*[7] *Center for Gravitational Waves and Cosmology, West Virginia University, Chestnut Ridge Research Building, Morgantown, WV 26505, USA*

arXiv:2305.01537v2 [gr-qc] 9 Nov 2023

并合致密天体及其遗迹的数值模拟构成了引力波和多信使天文学的理论基础。模拟通常采用基于笛卡尔坐标的自适应网格细化，但对于近似球形的遗迹和方位流，类球坐标更为适用：在流体角动量演化过程中，类球坐标的数值耗散更低，而且所需的计算单元也更少。然而，使用球坐标数值求解双曲型偏微分方程可能导致严重的库朗–弗里德里希–列维（CFL）稳定性条件时间步长限制，使得数值模拟的计算成本高得难以承受。本文通过引入双重快速傅里叶变换（FFT）滤波器，并将其实现于 Einstein Toolkit 中完全采用消息传递接口（MPI）并行化的 SphericalNR 框架内，解决了耦合时空与广义相对论磁流体动力学演化数值求解中的这一问题。我们将该滤波算法应用于一系列具有挑战性的代码测试，以此展示其有效性与稳健性。结果表明，该算法能够有效通过这些测试，展现出收敛性，同时与未滤波的数值模拟相比，显著增大了时间步长。

PACS 分类号：04.25.dg, 04.30.Db, 04.25.Nx, 04.70.Bw

I. 引言

随着引力波和多信使天文学的兴起 [1–9], 人们越来越需要对并合的致密天体及其遗迹开展高精度、长时间数值模拟，例如首个广义相对论流体动力学（GRHD）双中子星（NS）并合模拟 [10], 、首批双黑洞（BH）并合模拟 [11–13], 首个广义相对论流体动力学黑洞-中子星并合模拟 [14], 、首批广义相对论磁流体动力学（GRMHD）双中子星并合模拟 [15, 16], 以及首个黑洞-中子星并合的GRMHD模拟 [17]。关于该领域的最新进展，请参阅综述文章 [18–26] 及其中的参考文献。传统上，此类模拟采用笛卡尔坐标进行，这使数值算法更简单，代码也非常稳健。然而，这类坐标在计算上也较为浪费，因为它们在角向过度分辨，因此必须进行网格细化，才能避免大型计算域中的单元数量过多，导致计算成本难以承受。

另一种方法是采用适应数值问题相关对称性（近似或精确）的坐标。特别是，致密天体并合形成的近球形遗迹非常适合使用类球坐标，因为与笛卡尔坐标相比，这种坐标在流体角动量演化过程中的数值耗散较低 [27]。另一个应用领域是吸积盘的GRMHD模拟，此类模拟通常采用类球坐标（例如，参见爱因斯坦视界望远镜代码比较项目 [28]）。基于这一考虑，我们最近推出了 SphericalNR [29], ，一种完全 MPI并行化的 Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura（BSSN） [30, 31] 爱因斯坦方程球坐标形式的实现，采用 Einstein Toolkit[32] [33]。随后，该代码扩展加入了 GRMHD [34] ，并采用参考度规形式 [35] ，同时通过 Z4系统的完全协变共形形式fCCZ4 [34, 36–38]实现时空演化中的约束阻尼。

然而，使用球坐标模拟方位流虽有诸多优点，但也需要付出代价：求解双曲型偏微分方程时，球坐标系中靠近极轴和原点的区域会使允许的时间步长受到严重的 Courant-Friedrichs-Lewy稳定性条件（CFL） [39] 限制，因为球坐标系中的极轴和原点附近单元体积（因此时间步长）会变得极小，

* ljsma@rit.edu

以至于难以承受。与时间步长为 $\propto dx_{\min}$的笛卡尔坐标系相比，球坐标系中的时间步长为 $\propto r\sin\theta d\varphi$，这会使高分辨率、长时间的三维数值模拟变得代价高昂，难以承受。解决这一问题的方法有多种，包括多块或多片技术 [40–57], 镶嵌网格 [58, 59], 静态网格加密 [60–62], 网格粗化 [63–66], 局部滤波器 [67–69], 全局快速傅里叶变换滤波器 [63], 以及畸变角网格 [70, 71], 等。每种解决CFL限制的方法都有各自的优点和局限，例如算法复杂度、确保守恒性或需要执行全局操作。

在 SphericalNR 中，我们选择实现一种双快速傅里叶变换滤波器，根据半径和纬度，分别沿 θ 和 φ 方向滤波时空和广义相对论磁流体动力学场（在 φ 中进行滤波）。快速傅里叶变换滤波在概念和算法上都存在困难：通常，演化的广义相对论磁流体动力学场可能会产生不连续性，因此需要采用不同于通过指数衰减库朗–弗里德里希–列维不稳定模态来滤波光滑场的滤波算法。此外，快速傅里叶变换滤波器是一种全局操作：沿 θ 滤波时，操作范围是整个大圆；沿 φ 滤波时，操作范围则是整个坐标环。早期版本的快速傅里叶变换滤波器仅经过 OpenMP 并行化，且只沿 φ 坐标进行滤波，曾用于 [34, 72]。由于无法沿 φ 分解区域，这大大限制了滤波器在高分辨率模拟中的适用性。在本研究中，我们扩展了快速傅里叶变换滤波器，使其能够沿两个角坐标工作，并对其进行了完全 MPI 并行化。我们还开发了一种自动切换机制，使用高斯滤波器而非指数滤波器对广义相对论磁流体动力学场进行滤波，从而避免滤波不连续场时产生伪振荡。

本文组织如下。在第 II 节中，我们介绍用于演化与广义相对论磁流体动力学耦合的 BSSN/fCCZ4 系统，以及如何通过双快速傅里叶变换滤波器滤除不稳定的极向和方位模态，并说明滤波器并行化的细节。在第 III 节中，我们展示将滤波算法应用于单个自旋 Bowen-York 黑洞（黑洞）、偏心球形爆炸、偏心稳定旋转中子星，以及易发生动力学棒模不稳定性的旋转中子星所得的结果。最后，在第 IV 节中，我们讨论这些结果。全文采用爱因斯坦求和约定。除非另有说明，所有结果均以 $G = M_\odot = c = 1$ 为单位。

II. 技术

在此前的论文中，我们的合作团队描述了使用球坐标对真空爱因斯坦方程和广义相对论磁流体动力学进行完全并行化实现的方法 [29, 34]

在 Einstein Toolkit中，我们描述了一系列修改，使我们能够使用该代码，而不受时间步长上有时非常严重的CFL限制。我们的代码基于爱因斯坦方程的fCCZ4形式和广义相对论磁流体动力学的 *Valencia* 公式 [73, 74] ，并使用 Einstein Toolkit 来提供并行化和关键分析工具。Einstein Toolkit 是一套面向相对论天体物理数值模拟的开源代码套件。它采用模块化的Cactus[75] 框架 [76]（由称为“thorns”的通用模块组成），并通过 Carpet[77] 代码 [78]提供自适应嵌套网格细化（AMR）。

在本研究中，我们对 [29, 34], 中描述的标准演化技术作出两项主要修改：引入双重FFT滤波方案，以缓解球坐标带来的严重CFL限制；采用通用鱼眼 [79]径向坐标，以更高效地分配网格点（我们还修改了标准移位条件，这些修改在部分测试中表现更好）。尽管本文确实选用了几种特定的“鱼眼”坐标，例如

$$r = Ax_1 + (1-A)r_0 \operatorname{atan}(x_1/r_0), \tag{1}$$

其中， r 是通常使用的径向坐标， x_1 是“鱼眼”径向坐标（实际数值坐标），常数 A 决定了远离原点时物理网格间距与数值网格间距的比值（按照构造，该比值在原点处为1），而 r_0 是一个用于微调过渡位置的参数。该代码可以适用于任意一一可微函数 $r(x_1)$。特别地，我们使用指数型“鱼眼”坐标 $r(x_1) \propto \exp(x_1)$进行了多次数值模拟，这种坐标常用于吸积盘的广义相对论磁流体动力学模拟中（例如，参见 [28]中使用的一些代码）。

我们在下文给出演化系统的总结，并请读者参阅 [34, 80–82]中的完整细节。该方法的核心是共形相关空间度规

$$\bar{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi}\gamma_{ij}, \tag{2}$$

其中， γ_{ij} 是物理空间度规， ϕ 是共形因子

$$e^{4\phi} = (\gamma/\bar{\gamma})^{1/3}, \tag{3}$$

其中， γ 和 $\bar{\gamma}$ 分别是物理度规和共形相关度量的行列式。为使共形重标度具有唯一性，我们采用 Brown 的“拉格朗日”选择 [83]

$$\partial_t \bar{\gamma} = 0, \tag{4}$$

在整个演化过程中将 $\bar{\gamma}$ 固定为其初始值。同样，共形相关的外曲率定义为

$$\bar{A}_{ij} = e^{-4\phi}\left(K_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}K\right), \tag{5}$$

其中 K_{ij} $K =$ 是物理外挠曲率及其迹。$\gamma^{ij}K_{ij}$

核心思想是将共形相关的度规写成平直背景度量与扰动（扰动不一定很小）之和。

$$\bar{\gamma}_{ij} = \hat{\gamma}_{ij} + \epsilon_{ij}, \tag{6}$$

其中，$\hat{}\gamma_{ij}$ 是鱼眼球坐标系中的参考度量，

$$\hat{\gamma}_{ij} = \begin{pmatrix} \left(\frac{dr(x_1)}{dx_1}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & r(x_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & r(x_1)^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{7}$$

共形联络系数 $\bar{\Lambda}^i$ 被视为独立演化的变量，并满足初始约束

$$\bar{\Lambda}^i - \Delta^i = 0. \tag{8}$$

Here

$$\Delta^i \equiv \bar{\gamma}^{jk}\Delta^i_{jk} \tag{9}$$

且 Δ^i_{jk} 是共形重标度度规与平直参考度量的克里斯托费尔符号之差，

$$\Delta^i_{jk} \equiv \bar{\Gamma}^i_{jk} - \hat{\Gamma}^i_{jk}. \tag{10}$$

因此，在参考度量形式中，共形联络系数 $\bar{\Lambda}^i$ 按照矢量的方式进行变换。连同切片函数 α 和位移矢量 β^i，这组 $3+1$ 变量 $\{\alpha, \beta^i, \gamma_{ij}, K_{ij}\}$ 以球坐标形式表示，并存储在 thorn ADMBase 中，以便与 Einstein Toolkit 中现有的诊断量进行接口对接。

在演化 fCCZ4（以及其他类似于 BSSN 的系统）方程时，我们使用 1 +log 切片条件 [84]

$$\partial_t \alpha = \beta^i \partial_i \alpha - 2\alpha K, \tag{11}$$

以及移位条件 [83, 85]

$$\begin{aligned} \partial_t B^i &= \frac{3}{4}\partial_t \bar{\Lambda}^i - \kappa_B \frac{3}{4}\beta^j \hat{D}_j \bar{\Lambda}^i - \eta B^i, \\ \partial_t \beta^i &= B^i, \end{aligned} \tag{12}$$

^其中，D_i 是关于背景平直度规的协变导数，而 $\kappa_B = 0$ 会导出标准的非平流 Γ-驱动移位；$\kappa_B = 1$ 则会导出一种改进形式，该形式已被证明对于包含黑洞的时空更为准确。

在球坐标中对 fCCZ4（及其他）系统进行正则化的一个关键思想，是在相对于背景共形度规正交归一的基底中演化张量量。为区分坐标基分量与正交归一基分量，我们将采用 [34] 的记号。

假设 $T^{i_1 i_2 \cdots}{}_{j_1 j_2 \cdots}$ 是张量 T 的坐标分量，则正交归一分量记为 $T^{\{a_1\}\{a_2\}\cdots}{}_{\{b_1\}\{b_2\}\cdots}$，其中

$$\begin{aligned} & T^{\{a_1\}\{a_2\}\cdots}{}_{\{b_1\}\{b_2\}\cdots} \\ &= \mathbf{e}^{\{a_1\}}_{i_1}\mathbf{e}^{\{a_2\}}_{i_2}\cdots\mathbf{e}^{j_1}_{\{b_1\}}\mathbf{e}^{j_2}_{\{b_2\}}\cdots T^{i_1 i_2 \cdots}{}_{j_1 j_2 \cdots}, \end{aligned} \tag{13}$$

并且$\mathbf{e}^{\{j\}}_i$ 和$\mathbf{e}^i_{\{j\}}$ 分别是（背景）正交归一向量基和协向量基的元素。在我们的记号中，$\mathbf{e}^{\{i\}}_j$ 表示第 i 个基元素的第 j 个坐标分量。

背景正交归一向量基的形式为

$$\mathbf{e}^j_{\{r\}} = \left(\frac{1}{r'(x_1)}, 0, 0\right), \tag{14}$$

$$\mathbf{e}^j_{\{\theta\}} = \left(0, \frac{1}{r(x_1)}, 0\right), \tag{15}$$

$$\mathbf{e}^j_{\{\varphi\}} = \left(0, 0, \frac{1}{r(x_1)\ \sin\theta}\right), \tag{16}$$

相应的正交归一余基为，

$$\mathbf{e}^{\{r\}}_j = (r'(x_1), 0, 0), \tag{17}$$

$$\mathbf{e}^{\{\theta\}}_j = (0, r(x_1), 0), \tag{18}$$

$$\mathbf{e}^{\{\varphi\}}_j = (0, 0, r(x_1)\ \sin\theta). \tag{19}$$

在该系统中，我们的演化变量为 $\epsilon_{\{i\}\{j\}}$、$A_{\{i\}\{j\}}$ 等。为了将坐标分量演化方程转换为正交归一基分量形式，我们用基的解析导数和张量分量的有限差分导数来表示坐标分量张量的导数。例如，类似于下式的表达式

$$\partial_i A_{jk} \tag{20}$$

变为

$$\begin{aligned} & \partial_i\left(\mathbf{e}^{\{l\}}_j\mathbf{e}^{\{m\}}_k A_{\{l\}\{m\}}\right) \\ &= \partial_i\left(\mathbf{e}^{\{l\}}_j\mathbf{e}^{\{m\}}_k\right) A_{\{l\}\{m\}} + \mathbf{e}^{\{l\}}_j\mathbf{e}^{\{m\}}_k \partial_i A_{\{l\}\{m\}}, \end{aligned} \tag{21}$$

其中，$\partial_i A_{\{l\}\{m\}}$ 使用有限差分进行计算，基元素的导数则通过解析方法求得。

fCCZ4 演化系统右端项的数值代码以及广义相对论磁流体动力学（GRMHD）源项均由 SENR/NRPy+ 代码提供，时间积分则采用 MoL [33] thorn 中实现的线法。我们已在 MoL中实现了一种四阶强稳定保持龙格–库塔（SSPRK54）方法 [86]，与更为传统的 RK2 或 RK 3 [87, 88]方法相比，该方法具有更大的 CFL 因子，足以弥补因 SSRK54 包含更多阶段而产生的额外计算开销。

关于演化系统的完整细节，请参阅 [29, 34, 80–82] ，但请注意，与 [34], 相比，我们对其中的GRMHD代码进行了若干改进 SphericalNR：我们开发了定制的九阶WENO-Z9重构（局部光滑度指标 β_k 写成完全平方形式 [89], 、最优高阶全局光滑度指标 τ_{r2-1} [90]以及自适应 ϵ [91]）。此外，还可以将WENO-Z9重构与保单调性（MP）限制器结合 [92], ，从而得到MPWENO格式 [93]。我们实现了一致性保证求和 [94], ；将其应用于MP限制算法后，有助于减轻我们在 [34]中使用MP5重构时观察到的自发对称性破缺及相关漂移。我们还实现了七阶和九阶MP7以及MP9 [92], ，但发现，即使采用一致性保证求和，MPWENO-Z9在这方面仍然更加稳健（而WENO-Z9则更优）。使用高阶重构方法时，重构后的密度或压力有时可能变为负值；在这种情况下，我们使用带minmod限制器的总变差减小（TVD）重构对其进行重构。我们还实现了 [95]的高阶通量修正，使用单元中心通量作为面通量的高阶修正，如 [96]所述。关于在黑洞吸积流的GRMHD模拟中使用高阶方法，WENO-Z9方法将在即将发表的论文中详细介绍。

在模拟中使用 WENO-Z9 时（我们仍可使用原有 GRHydro 代码 [97]中已有的任何重构方法），通常采用十阶中心有限差分演化磁矢势 A_i 和电磁标量势 Φ ，并使用九阶 Kreiss-Oliger（KO）耗散 [98] ，以抑制 A_i 和Φ在演化过程中产生的高频噪声。计算 B^i 的旋度时，我们使用十阶有限差分由 A_i求得磁场 A_i。因此，源项 [方程（73）和（80） [34]]中也采用十阶中心有限差分。除非下文第III 节另有说明，否则我们均使用 WENO-Z9 和十阶中心有限差分。

需要指出的是，这些高阶方法确实需要更多幽灵区，这可能会影响运行速度。十阶中心模板需要五个幽灵区。

最后，为了提高广义相对论磁流体力学演化的稳健性，我们还进行了若干改进，尤其是原始变量恢复和人工大气方面。在尝试进行原始变量恢复之前，我们对 [99] 附录 C 中给出的守恒变量施加以下条件：

$$\tau = \max\left(\tau, \sqrt{\gamma}\left((\rho\epsilon)_{\rm floor} + \frac{B^2}{2}\right)\right), \tag{22}$$

以及该附录中的步骤（2）和（3）。随后，我们采用 [100] 的原始变量恢复方案。如果初次恢复失败，我们会使用 [100] 的初始猜测值再次尝试。在原始变量恢复愈发困难的区域（低等离子体-β $2P/b^2$、高内能密度 ϵ、高洛伦兹因子 W），原始变量恢复仍容易失败。为缓解这一问题，我们遵循 [102, 103]，并在参考度规形式中演化守恒熵，

$$\partial_t \mathcal{S} + \hat{\mathcal{D}}_i\left(\alpha\mathcal{S}\left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha}\right)\right) = 0, \tag{23}$$

其中

$$\mathcal{S} = e^{6\phi}\sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{\hat{\gamma}}}W\frac{P}{\rho^{\Gamma-1}}, \tag{24}$$

ˆand $\mathcal{D}$ 是与球对称背景度规 ˆγ_{ij}相关联的协变导数， α 是切片函数， v^i 是 Valencia 流体三速度， β^i 是位移矢量， ϕ 是共形因子， $\bar{\gamma}$ 是共形度规 $\bar{\gamma}_{ij}$的行列式，ˆγ是球对称背景度规的行列式， P是流体压力， ρ 是流体静质量密度， Γ是绝热指数（参考 [34]，了解参考度量形式体系中的演化方程详情）。我们始终使用带 minmod 限制器的 TVD 重构来重构熵。每次原始变量恢复成功后，都会根据原始变量重新计算 $\mathcal{S}$ ，并将其演化一个龙格-库塔子步。只要$\beta^{-1} = b^2/(2P) > 100$ 或 [100] 的恢复方案失败，我们就从 $\mathcal{S}$ 恢复压力 P 。虽然这种方法能保证压力为正，但恢复仍可能失败；此时，我们遵循 [103] ，尝试对恢复成功的相邻网格单元中的原始变量求平均；否则，将原始变量设为带有 $v^i = 0$的大气值。磁场 B^i 始终不作改动，并始终根据 A_i的旋度计算。

对于人工大气，我们为密度和压力实现了各向同性下限和径向相关下限，其中

$$\rho_{\rm floor} = \rho_{\rm atmo}\ \max(r_{\rm min}, r)^{-1.5} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} P_{\rm floor} &= (\Gamma-1)(\rho\epsilon)_{\rm floor} \\ &= (\Gamma-1)(\rho\epsilon)_{\rm atmo}\ \max(r_{\rm min}, r)^{-1.5\,\Gamma}, \end{aligned} \tag{26}$$

其中 $r_{\rm min}$ 是一个用于避免地板值在原点发散的参数。对于演化后低于这些地板值的网格单元，我们只需将 ρ 或 P 提升至各自的地板值；如果 $10b^2 > \min(\rho, p/(\Gamma-1))$，则改为在漂移参考系中 [104] 添加物质。使用近似的 HLLE（Harten-Lax-van Leer-Einfeldt）黎曼求解器 [105, 106]，时，在磁化度 $\sigma = \frac{b^2}{\rho} > 1$、等离子体逆量 $\beta^{-1} > 100$、$\rho < 10\,\rho_{\rm floor}$、 $\rho\epsilon < 10\,(\rho\epsilon)_{\rm floor}$或网格点位于表观视界内的任何位置，我们都会切换到耗散性更强的全局 Lax-Friedrichs 通量（特征速度为 1）。熵方程（23）始终采用 Lax-Friedrichs 通量和全局特征速度 1 进行演化。我们还对 W 设置上限（通常为 50），并对 ϵ设置上限。

对原始变量进行这些可能的修正后，我们会在所有位置重新计算守恒变量。虽然这会破坏严格的守恒性，但要维持守恒变量与原始变量的一致性，这是必要的。

最后，受其他 GRMHD代码的启发 [61, 107], ，在 $r=0$ 单元面处，我们将重构得到的电场分量设为 $E_\theta = E_\varphi = 0$，而对于 $\theta = 0$， π 单元面设为 $E_r = E_\varphi = 0$。

A. 滤波算法

我们使用 FFTW3 [108]库执行所有傅里叶变换。该算法的主要思路是在给定的半径和纬度处，通过在极向和方位角方向执行快速傅里叶变换，修改演化场的傅里叶展开，从而抑制库朗–弗里德里希–列维不稳定模态；随后执行逆快速傅里叶变换，得到实空间中的滤波后场。双重快速傅里叶变换滤波器先沿 θ 方向进行快速傅里叶变换滤波，再沿 φ 方向进行快速傅里叶变换滤波。为了能够沿 θ方向进行滤波，我们定义一个新的角坐标 ϑ，将 θ 坐标从 $[0,\pi]$ 延伸至 $[0,2\pi]$。为此，我们首先构造场$\mathbf{X}(x_1,\ \vartheta,\ \varphi)$,

$$\mathbf{X}(x_1,\vartheta,\varphi) = \begin{cases} \mathbf{X}(x_1,\theta,\varphi), & \vartheta\in[0,\pi] \\ (-1)^a\mathbf{X}(x_1,\pi-\theta,\pi+\varphi), & \vartheta\in[\pi,2\pi] \end{cases} \tag{27}$$

其中 $a=0$ 或 1，分别取决于该场的轴奇偶性因子，即正奇偶性或负奇偶性（见 [34] 中的表I）。随后，我们对 $\mathbf{X}(x_1,\ \vartheta,\ \varphi)$ 沿 ϑ 坐标执行快速傅里叶变换，得到傅里叶展开 $\tilde{\mathbf{X}}(x_1,\ l,\ \varphi)$（注意， l 表示 θ 方向上的傅里叶模态），然后对其进行滤波，最后通过逆快速傅里叶变换得到滤波后的场 $\mathbf{X}(x_1,\ \vartheta,\ \varphi)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x_1,\vartheta,\varphi) &\xrightarrow{\text{FFT}} \tilde{\mathbf{X}}(x_1,l,\varphi) \to f(l,l_{\max})\tilde{\mathbf{X}}(x_1,l,\varphi) \\ &\xrightarrow{\text{iFFT}} \mathbf{X}(x_1,\vartheta,\varphi), \end{aligned} \tag{28}$$

其中滤波函数 $f(l,\ l_{\max})$ 取决于被滤波场的类型，后文将对此进行说明（见（39）和（40））。随后，我们以类似方式沿 φ方向对演化场进行滤波，

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x_1,\theta,\varphi) &\xrightarrow{\text{FFT}} \tilde{\mathbf{X}}(x_1,\theta,m) \to f(m,m_{\max})\tilde{\mathbf{X}}(x_1,\theta,m) \\ &\xrightarrow{\text{iFFT}} \mathbf{X}(x_1,\theta,\varphi) \end{aligned} \tag{29}$$

（注意， m 表示沿 φ 方向的傅里叶模态）。 θ和 φ 滤波器允许的最大模态 $l_{\max}$ 和 $m_{\max}$ 分别为,

$$l_{\max} = \max\left(2, \frac{2\,r}{dr_{\min}}\mathcal{L}\right), \tag{30}$$

$$m_{\max} = \max\left(2, \frac{2r}{dr_{\min}}\sin\theta\mathcal{L}\right), \tag{31}$$

其中 r 是物理坐标半径（即通过鱼眼变换与计算径向坐标相关联）， $dr_{\min}$ 是计算域上的最小径向网格间距。由于即使在极点和原点，演化场的角向依赖也并非平凡，我们从不滤除前 $\mathcal{L}$ 个模态（见下文讨论）。

若要实现 $\propto dr_{\min}$ 的时间步长，我们需要对演化场进行滤波，使其在靠近轴的位置达到 $m_{\max}$，即使角分辨率仅为中等水平也是如此。然而，我们通常无法将滤波范围一直延伸到 $m=0$ 和 $l=0$。在两个极点及原点附近，笛卡尔坐标中的正则度规会在所得的球坐标度规中同时引入 $m=1$ 和 $m=2$ 模态（尤其是在正交归一基下的分量中）。通过考察极点附近的笛卡尔坐标中的一般度规（即 $x\sim0$、$y\sim0$ 和 $z=z_0$），很容易证明这一点。一般而言，该度规将会

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1+a)dx^2 + 2b\ dxdy + 2cdxdz + (1+d)dy^2 \\ &+ 2e\ dydz + (1+f)dz^2 \\ &+ \mathcal{O}(x,y,z-z_0). \end{aligned} \tag{32}$$

由此得到的背景（球坐标）正交归一基中的度规分量将包含与 $\exp(\pm i\varphi)$、$\exp(\pm i2\varphi)$、$\exp(\pm i\theta)$ 和 $\exp(\pm i2\theta)$ 成正比的项。例如，

$$\begin{aligned} \gamma_{\{r\}\{r\}} &= (a+1)\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) \\ &+ \sin(\varphi)(\sin^2(\theta)(2b\cos(\varphi)+(d+1)\sin(\varphi)) \\ &+ e\sin(2\theta)) + c\sin(2\theta)\cos(\varphi) \\ &+ (f+1)\cos^2(\theta), \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\{\varphi\}\{\varphi\}} &= 1/2(2+a+d+(-a+d)\cos[2\varphi] \\ &- 2b\sin[2\varphi]), \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\{\theta\}\{\varphi\}} &= \cos(\theta)((d-a)\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ &+ b\cos(2\varphi)) + \sin(\theta)(c\sin(\varphi) - e\cos(\varphi)) \end{aligned} \tag{35}$$

在极点处，这些项变为

$$\gamma_{\{r\}\{r\}} = 1+f, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\{\varphi\}\{\varphi\}} &= 1 + ((d-a)\cos(2\varphi) + a \\ &- 2b\sin(2\varphi) + d)/2, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\gamma_{\{\theta\}\{\varphi\}} = (d-a)\sin(\varphi)\cos(\varphi) + b\cos(2\varphi). \tag{38}$$

因此，在原点和极点处，如果球坐标中的度规要复现这一简单的笛卡尔度规，则 θ 和 φ 中都应包含 $m=2$ 模态（但不应包含更高阶模态）。

为了完整保留 θ 和 φ中的 $m=2$ 模态，我们可以将所有不需要的模态设为零（本质上是一种频谱锐截止的低通滤波器），或者使用指数滤波器:

$$f_{\exp}(l,l_{\max}) = \begin{cases} 1, & |l|\le l_{\max} \\ e^{-(|l|-l_{\max})}, & l > l_{\max} \end{cases} \tag{39}$$

它保留模态 $|l|\le l_{\max}$ 中的全部功率。我们对所有演化的时空场使用指数滤波器，这些场

是平滑的 [109]，因此在未滤波模态中保留全部功率不会导致新的极值，也不会在滤波过程中产生吉布斯现象。这种情况与经过滤波的广义相对论磁流体力学场 $\hat{}$ $(D,\ S_i,\ \tau,\ \mathcal{S},\ A_i,\ \Phi)$截然不同，因为这些场通常可能变得不连续。使用指数滤波器对不连续场进行滤波会产生吉布斯现象，导致非物理振荡，并可能产生非正值（后者会导致灾难性故障，需要在滤波后的后续步骤中修正，类似于人工大气中的处理方法）。为解决这一问题，我们使用高斯滤波器对 $(D,\ S_i,\ \tau,\ \mathcal{S})$进行滤波：

$$f_{\rm Gaussian}(l,l_{\rm max}) = \exp\left(\log(0.9)\left(\frac{l}{l_{\rm max}+1}\right)^2\right), \quad (40)$$

在使用指数滤波器滤波磁矢势和电磁标量势（$A_i,\ \Phi$）时（39）。高斯滤波器通过降低除 $l,\ m=0$ 模态以外所有傅里叶模态的功率来避免吉布斯现象。虽然这能保证滤波过程中不会产生新的极值，但较低阶模态功率的降低会对模拟的整体分辨率产生负面影响。我们选择将第一个库朗–弗里德里希–列维不稳定模态（即模态 $l=l_{\rm max}+1$）的功率降至 0.9，以此在尽可能减少库朗–弗里德里希–列维稳定模态（因此本不应滤波）的功率损失，同时确保充分抑制库朗–弗里德里希–列维不稳定模态、避免演化过程中出现库朗–弗里德里希–列维不稳定性之间取得折中。

在我们对第 III 节所展示测试的初步探索中，我们发现，在 $m=2$ 处和原点保持模态的全部功率至关重要。因此，我们设计了一种混合滤波器，旨在尽可能使用指数滤波器，并仅在所滤波的坐标环中检-测到不连续性时切换到高斯滤波器。对于场u，我们尝试检测 ϑ 和 φ 环中的不连续性，使用Jameson激波探测器 [110]:

$$\sigma_i = \frac{|u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}|}{|u_{i-1}|+2|u_i|+|u_{i+1}|+\epsilon}, i=\theta,\varphi, \quad (41)$$

其中，$u_i,\ u_{i\pm1}$ 分别表示当前单元格及其邻居中的场值，ϵ 是一个用于避免分母为零的小数。如果 ϑ 或 φ 环中的某个单元格满足 $\sigma_i >= 0.95$，则对给定的环和场使用高斯滤波器；否则使用指数滤波器。

最后需要指出的是，广义相对论磁流体力学演化的特征速度始终小于时空演化的特征速度（某些规范模态的速度为$\sqrt{2}$），因此，广义相对论磁流体力学演化通常允许使用比 fCCZ4变量演化更大的库朗–弗里德里希–列维因子。因此，对于度规场，我们通常选择$\mathcal{L}=3$；对于物质场，则选择 $\mathcal{L}=12$。

1. *Filtering spacetime fields in the presence of BHs*

SphericalNR 中的时空演化受两个代数约束的制约：

$$\bar{\gamma} = \hat{\gamma} \quad (42)$$

$$\bar{\gamma}^{ij}\bar{A}_{ij} = 0, \quad (43)$$

其中，$\bar{\gamma}$ 和$\hat{}\gamma$ 分别是共形相关度规 $\bar{\gamma}_{ij}$ 和背景度规$\hat{}\gamma_{ij}$的行列式，而 A_{ij} 是共形相关的外曲率。在开发双重快速傅里叶变换滤波器的过程中，我们注意到，为了获得稳定的演化，在存在黑洞时空时沿 θ 方向进行滤波，需要调整这两个约束的施加方式。通常，在演化的每个龙格-库塔子步中，我们通过在区域内所有网格点执行以下替换来施加上述约束：

$$h_{\{i\}\{j\}} \to \left(\frac{\hat{\gamma}}{\bar{\gamma}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\delta_{ij}+h_{\{i\}\{j\}}\right)-\delta_{ij}, \quad (44)$$

其中 δ_{ij} 是克罗内克δ，且

$$\bar{A}_{\{i\}\{j\}} \to \bar{A}_{\{i\}\{j\}} - \left(\delta_{ij}+h_{\{i\}\{j\}}\right)\frac{\bar{\gamma}^{ij}\bar{A}_{ij}}{3}, \quad (45)$$

这里我们再次沿用 [34], 的记号，即花括号中的指标表示相对于球对称背景度规的正交归一基分量，而普通指标表示坐标基分量。

以这种方式施加代数约束，在黑洞时空中靠近黑洞中心沿 θ 方向进行滤波时会变得不稳定（无论演化的是包含黑洞初始数据的初始数据，还是演化过程中动态形成黑洞的情形，例如中子星坍缩）。

为解决这一不稳定性，我们按如下方式调整代数约束的施加方法：在需要沿 θ 方向进行滤波以保证库朗–弗里德里希–列维稳定性，且切片函数 $\alpha < 0.3$ 的区域，我们按如下方式施加约束（42）（另见 [111]）：

$$h_{\{1\}\{1\}} = \left(\hat{\gamma}+\bar{\gamma}_{12}^2\bar{\gamma}_{33}-2\bar{\gamma}_{12}\bar{\gamma}_{13}\bar{\gamma}_{23}+\bar{\gamma}_{13}^2\bar{\gamma}_{22}\right) / \left(\bar{\gamma}_{22}\bar{\gamma}_{33}-\bar{\gamma}_{23}^2\right)/(\hat{\mathcal{R}}_{\{1\}}\hat{\mathcal{R}}_{\{1\}})-1, \quad (46)$$

$\hat{}$其中 $\mathcal{R}_{\{i\}}$ 是球对称背景度规的重缩放因子（见 [34]），并且我们完全不施加约束（43）。请注意，我们仅在视界内放宽了代数约束的施加。

B. 滤波并行化

下面介绍我们用于在多个计算节点之间执行快速傅里叶变换滤波的算法。首先需要指出的是，实现 MPI 并行快速傅里叶变换滤波有两种策略：我们可以选择

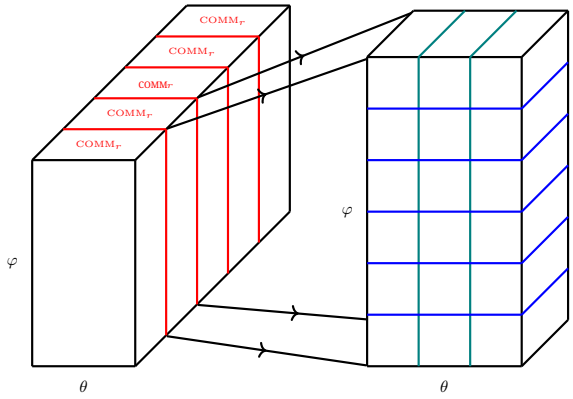


图1。不同 MPI通信器组的概览。全局通信器沿 r 方向进行拆分，随后每个 r 组再拆分为两个不同的子组。对于其中一个子组，第二次拆分沿 θ 方向进行，而对于另一个子组，则沿 φ 方向进行。

使用并行 FFTW3 [108] 实现；或者收集需要滤波的数据，使用串行快速傅里叶变换进行滤波，再将滤波后的数据广播回各自对应的 MPI 进程。这里我们选择了第二种方法，而不是依赖于特定集群中安装了某个并行 FFTW3 库实现。需要注意的是，即使我们使用 FFTW3 的并行实现，仍然需要执行下文所述的 MPI 通信器拆分。

我们首先沿 r 方向将全局 MPI 通信器拆分为一组较小的通信器：COMM$_r$。在每个 COMM$_r$组中，所有成员进程共享相同的 r坐标范围。随后，我们将每个 COMM$_r$进一步拆分为两组独立的通信器：COMM$_{r\theta}$，它们共享相同的 r 和 θ 范围；以及 COMM$_{r\varphi}$，它们共享相同的 r 和 φ 范围（见图 1）。

COMM$_{r\theta}$ 中的计算域覆盖 $0 \leq \varphi < 2\pi$。由于需要将 θ 中的区域扩展至 $0 < \theta < 2\pi$，我们将 $\varphi < \pi$ 对应进程的数据复制到给定通信器中拥有$\varphi+\pi$的对应进程。此时，COMM$_{r\theta}$ 中的进程同时包含对应于 $0 < \theta < \pi$ 的数据和对应于 $\pi < \theta < 2\pi$的数据。

为了对 φ 方向进行滤波，我们使用 MPI散播/收集操作重新分配数据，使 COMM$_{r\theta}$ 中的每个 MPI进程都包含数量大致相等的数组，这些数组包含在某些固定的 r 和 θ值下的完整 φ 点集。随后，每个进程对这些数组执行快速傅里叶变换（使用 OpenMP一次执行多个快速傅里叶变换），对变换结果进行滤波，并执行逆快速傅里叶变换。然后，将滤波后的场重新分配回通信器中的原始进程。对 θ 进行滤波的过程大致相同。然而，由于我们使用双重覆盖，只需对一半的环进行变换（即，一次快速傅里叶变换 — 滤波 — 逆快速傅里叶变换操作实际上会滤波两个不同的 θ 环），因此只需一半的 MPI进程执行滤波（我们可以重新分配这些数据.....）

表I. 图2中所报告的强扩展性测试所使用的各方向MPI进程数以及每个MPI进程的线程数。

N_{core}	N_r	N_θ	N_φ	线程
64	8	2	4	1
128	8	4	4	1
256	8	4	8	1
512	8	4	8	2
1024	16	4	8	2
2048	16	4	8	4
4096	16	8	16	2

再次分发数据，以便所有 MPI进程都能执行快速傅里叶变换（但由于额外的通信开销，这种做法的效率会较低）。

在图2中，我们展示了 SphericalNR 在德州高级计算中心的Frontera超级计算机上进行快速傅里叶变换滤波时的强扩展性性能。这里，我们使用 $n_r = 256$、n_θ =128、$n_\varphi = 256$ 个网格点，并将核心数从64增加到4096。我们同时考察并行滤波器和未滤波算法的性能。未滤波算法所需的时间步长 ~ 136 小于滤波算法。当仅比较单位墙钟时间内的迭代次数时，可以看到，在核心数达到约300之前，滤波开销可以忽略不计。在4096个核心下，就单位墙钟时间内的时间步长而言，未滤波算法的速度快1．38倍。当然，当考虑未滤波算法所受到的严重库朗–弗里德里希–列维限制时（图2的下图），我们看到，在4096个核心下，滤波算法实际上快了约100倍（按物理时间计）。在表I中，我们列出了该扩展性测试中各方向的MPI进程数和所使用的线程数。

III. 结果

A. 真空时空测试

为了评估我们新滤波算法的稳健性，我们对同一个物理黑洞系统进行了模拟，该系统此前曾用于 [29] 介绍我们的新代码。该系统由一个自旋 Bowen-York黑洞组成 [112]（注意，与Kerr黑洞不同，自旋 Bowen-York黑洞会因初始数据共形平坦而包含辐射）。我们考虑两种物理上等价的情形：一种是自旋与极轴（z）对齐，另一种是自旋与 y 轴对齐。在 [29], 中，我们证明了通过Weyl标量 Ψ_4提取黑洞振铃的引力波时，对齐自旋情形下，直到 $\ell = 8$的所有模态都能以很高的精度获得。在先前的结果中，我们使用挖除技术消除了球坐标原点处严重的CFL限制。此处，我们采用滤波而非挖除，重新进行了这些模拟。尽管这两种配置——

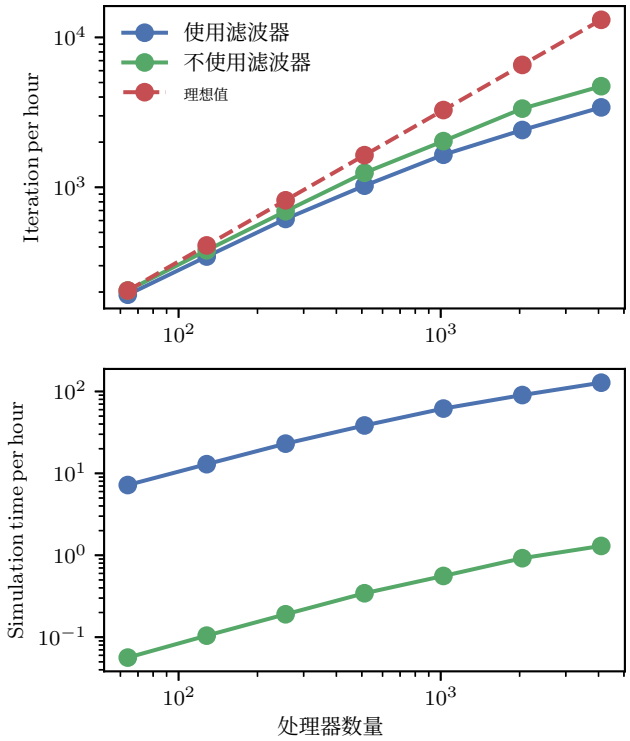


图2. 使用快速傅里叶变换滤波方案时 SphericalNR 的强扩展性。上图展示了使用和不使用快速傅里叶变换滤波器的代码每小时迭代次数。不使用滤波器时，所需时间步长仅为使用滤波时的 1/136。下图展示了运行时间与墙钟时间之间的实际性能。

表 II. 所有数值模拟的网格参数。这里，n_r、n_θ和 n_φ 分别是径向、极向和方位角方向上的网格点数，dt 是时间步长。

	n_r	n_θ	n_φ	dt
Aligned(64)	2500	64	4	0.00490
Aligned(96)	3750	96	4	0.00327
快速傅里叶变换(64)	2500	64	128	0。001
快速傅里叶变换(96)	3750	96	192	0.00067

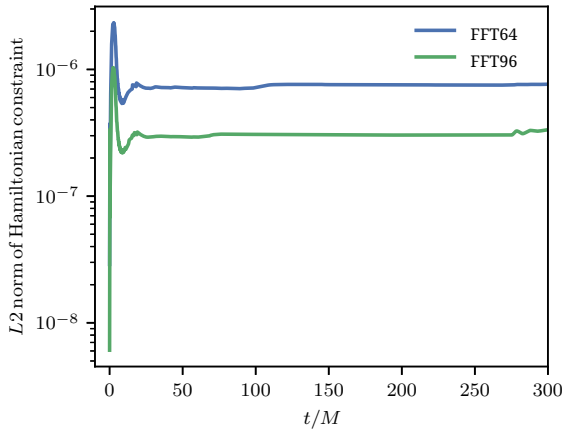


图 3. 两种分辨率 FFT64 和 FFT96 下，哈密顿约束的 L^2 范数随时间的变化。这里，范数仅包括视界外部的点。FFT64 和 FFT96 之间约束量级的下降与二阶收敛阶一致。

在物理上等价，但它们对数值网格的选择有很大不同。对于 z自旋对齐的情形，场没有方位角变化；而在 y–对齐情形下，则需要很高的方位角分辨率。因此，在 y 情形下，与极轴相关的CFL限制十分重要。作为参考，挖除模拟的CFL限制为$dt < r_{\rm exc}\sin(\theta_0/2)d\varphi$，其中 $r_{\rm exc}$ 是挖除半径，θ_0 是最靠近极点的 θ 网格点。

初始数据使用 TwoPunctures 代码 [113] 获得（其中一个视界的质量、自旋和动量参数设为零）。与该数据相关的参数为：裸质量 $1M$，自旋角动量 $0.8M^2$。这对应于一个视界质量为 $M_{\rm H} = 1.1811M$、无量纲自旋为 $\chi = 0.5735$ 的黑洞。我们使用 AHFinderDirect thorn [114, 115] 寻找表观视界（AH）[116]，并使用 QuasiLocalMeasures thorn [117, 118] 计算演化过程中表观视界的角动量。黑洞自旋采用平直时空旋转 Killing 矢量方法测量 [119]；研究表明，在适应时空轴对称性的叶状分解中，该方法等价于 Komar 角动量 [120] [121]。

我们将这些数值模拟分别记为 Aligned(XX) 和 FFT(XX)，其中 XX 表示极向网格点的数量；Aligned 和 FFT 分别表示自旋与极轴对齐和不与极轴对齐的数值模拟（因此需要 θ 和 φ 快速傅里叶变换滤波器）。请注意，对齐情形采用切除法去除了黑洞内部（因此没有使用任何类型的滤波）。

在表II中，我们给出了所有数值模拟所用计算网格的参数。对于这些运行，我们将滤波参数 $\mathcal{L}$ 设为 $\mathcal{L} = 2$。

在图3中，我们展示了 L^2 使用快速傅里叶变换滤波器时，$n_\theta = 64$ 和 $n_\theta = 96$ 的哈密顿约束范数。经过初始振荡后，约束违背稳定在 7×10^{-7} 和 3×10^{-7}，分别对应 $n_\theta = 64$和 $n_\theta = 96$。

在图 4 中，我们展示了沿 $\theta = d\theta/2$、$\varphi = 0$在 $t = 150M$ 处的代数约束违反情况（43）和哈密顿约束。未强制施加代数约束的区域位于视界以内。视界上的所有点及其外部的所有点均强制施加了代数约束。正如我们所见，即使在半径为 10^{-13} 的位置，代数约束违反量仍保持在 $r \sim 0.35$ 以下（此处，视界半径为 $r = 0.915$）。代数约束违反量在靠近穿孔点时确实会增大至约 1。0。然而，这种违反是非传播的。

在图 5中，我们展示了不可约质量的演化

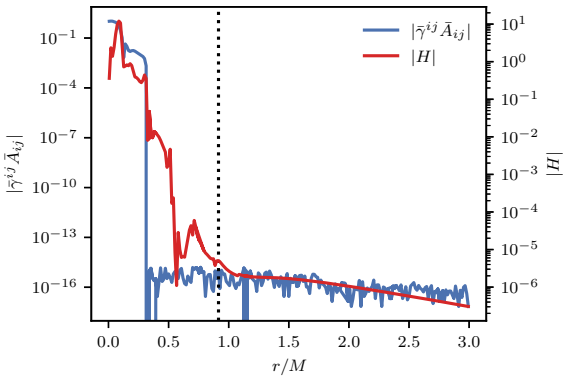


图 4. 代数约束（43）和哈密顿约束沿着 $\theta = d\theta/2$, $\varphi = 0$ 在 $t = 150M$ 处的情况（FFT96）。竖线表示表观视界的半径。

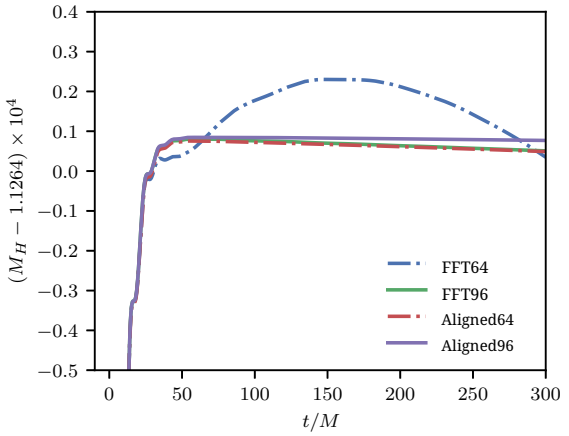


图 5. 使用双重快速傅里叶变换滤波器，比较黑洞不可约质量随时间的变化； AHFinderDirect 测量了对齐情形下的 $n_\theta = 64$ 和$n_\theta = 96$。这里，质量守恒意味着不可约质量最终趋于一个常数值。

$M_{\rm irr}$。吸收了一部分初始杂散辐射后， $M_{\rm irr}$ 在没有数值误差的情况下应保持不变（自由演化过程中出现的约束违背可能表现为负质量，并导致 $M_{\rm irr}$ [122–124]出现非物理性降低）。我们看到，采用双重快速傅里叶变换滤波器的非对齐情形迅速收敛到$M_{\rm irr}$ 在对齐情形中得到的结果；对齐情形是我们的参考点。在图 6中，我们展示了非对齐情形的高阶波形模态与对齐情形非常吻合。在这里，我们将非对齐情形的所有波形旋转到一个坐标系中，使 z 轴与自旋轴对齐，从而应能重现对齐波形。在这个坐标系中，只有 $m = 0$ 模态在连续统极限下是非平凡的。预计 Aligned96 运行的误差最小，我们看到，双重快速傅里叶变换滤波器运行结果迅速向其收敛。请注意，差异仅在最后几个周期中明显。

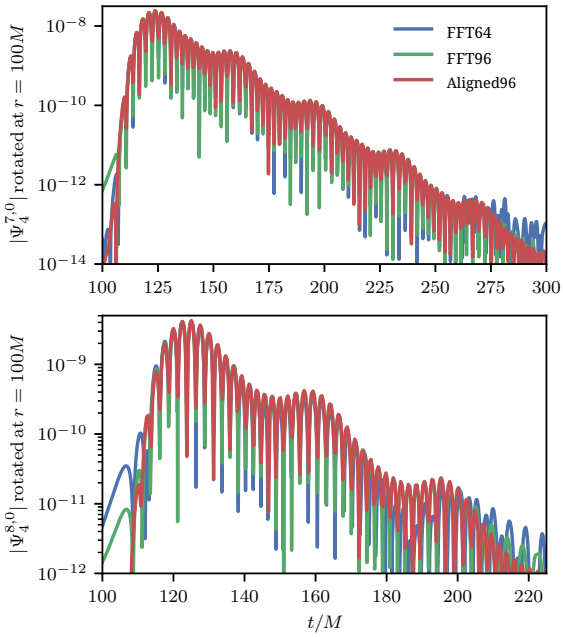


图 6. 比较 Ψ_4的 $\ell = 7$ 和 $\ell = 8$ 模态。

B. 广义相对论磁流体动力学测试

1. *Off-center spherical explosion*

为评估我们新型滤波算法在解决具有挑战性的相对论磁流体力学问题时的有效性，我们选用了与先前研究相同的测试案例 [34]: 球形爆炸 [125], ，但有意将爆炸中心移离原点。初始数据由一个过密的（$\rho = 1 \times 10^{-2}$, $p = 1.0$）球体组成，半径为 1.0。从半径 0.8 处向外，解以指数衰减的形式与周围介质（$\rho = 1 \times 10^{-4}$, $p = 3 \times 10^{-5}$）相匹配。我们采用 Γ–律状态方程（EOS），其中 $\Gamma = 4/3$。整个区域初始时均匀贯穿着一个恒定幅值的磁场（$B^z = 0.1$）。流体三速度在区域内处处初始设为零。本测试问题采用固定的闵可夫斯基时空背景。为了消除初始数据中的所有对称性，并在完整的三维设置下测试双重快速傅里叶变换滤波，将过密区域的中心偏移至（$x = 1.1$, $y = 0$, $z = 0$），并在初始时将磁场绕 x 轴旋转 $45°$；因此，爆炸的激波前沿将穿过原点和极轴。

我们使用（$n_r = 160$, $n_\theta = 80$, $n_\varphi = 160$）个网格点，外边界为 $r_{\rm max} = 6.0$，并使用双重快速傅里叶变换滤波器将时间步长从 $dt = 7 \times 10^{-6}$（不使用滤波器时的稳定上限）增大到 $dt = 1 \times 10^{-3}$。这里使用滤波参数 $\mathcal{L} = 4$。我们使用 MPWENO-Z9，因为我们发现 MP限制器有助于激波穿过原点和轴；在 {

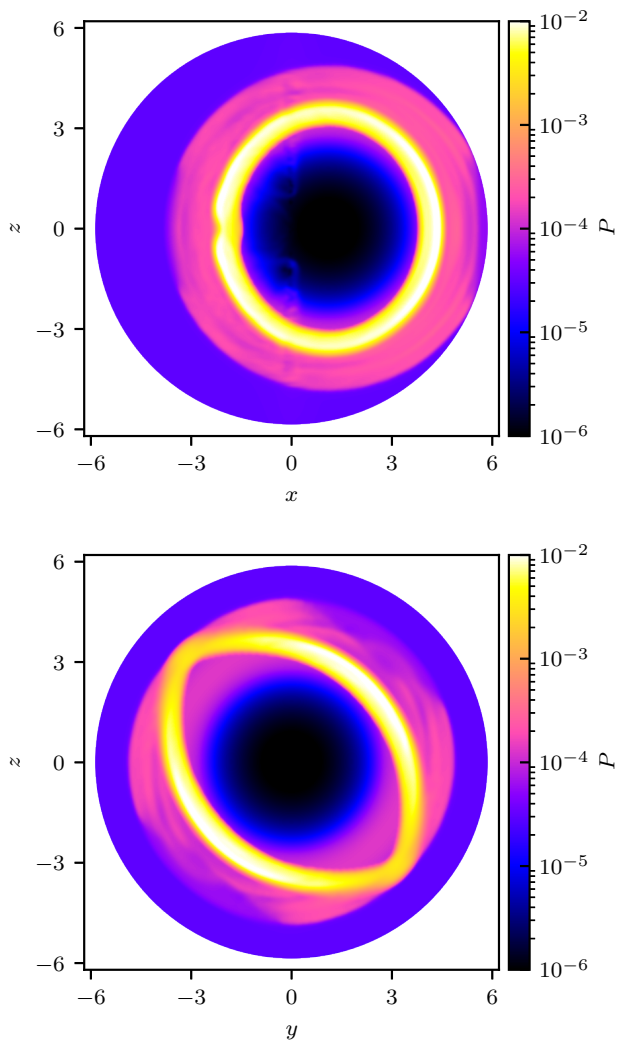


图 7. 在 $t = 4$时，初始磁场 $B^z = 0.1$ 绕 x 轴旋转了 $45°$ 后，x-z 平面和 y-z 平面上的压力。上图显示了沿 xz 平面（$y = 0$）的激波前沿，下图显示了平面 $x = 1.1$ 上的激波前沿（注意，爆炸中心位于 $x = 1.1$）。下图展示了 $x = 1.1$ 平面（激波沿 $x = 1.1$ 居中）。流动形态明显倾斜了 $45°$。

旋度中使用十阶有限差分处理 A_i，使用耗散强度为 $\epsilon_{\rm diss} = 0.1$ 的九阶 KO 耗散、带高阶通量修正的全局 Lax-Friedrich 通量，以及各向同性下限$\rho_{\rm floor} = 1 \times 10^{-7}$，$(\rho\epsilon)_{\rm floor} = 1 \times 10^{-9}$。

在 $t = 4$ 压力 P（$x = 1.1$ 和 $y = 0$ 平面上的最终分布）如图 7所示。我们确实看到激波前沿穿过原点和极点，但仍留有少量与之相关的残余伪影。此处的测试尤其具有挑战性，因为原点附近的径向流需要转换为原点周围的角向流（该处较低的径向面尺寸为零）。考虑纵向流时，极点处也会出现类似的复杂情况。在这项测试中，我们看到，尽管磁化激波大体上穿过了原点和坐标轴，但仍有可见的伪影。激波前沿穿过原点时略有延迟，导致激波前沿出现凸起。极点附近还出现了额外的压力，这是偶发的原始变量恢复失败所致；这并不出乎意料，因为这项测试的难点就在于原始变量恢复 [126]。我们指出，我们在此前的一篇论文 [34], 中也进行了类似的测试，当时仅沿 φ 方向进行滤波（所用时间步长相应小于本文所用的时间步长），并采用了较低阶的重构方法。凭借上文第 II 节所述的 SphericalNR GRMHD代码鲁棒性改进，现在能够使用高阶方法演化偏心球形爆炸。

2. *Off-center neutron star*

接下来，我们研究中子星的动力学时空演化，并在耦合的时空与广义相对论磁流体动力学演化中测试双重快速傅里叶变换滤波器。首先测试一颗稳定旋转中子星的演化。我们演化 [127]中的 B2 模型，并在初始时加入一个较弱的极向磁场。与球形爆炸相似，我们将恒星中心初始时放在偏离中心的位置 $(x, y, z) = (1,1,0)$。流体和时空初始数据由 RNS 代码 [128], 生成，该代码已作为 Hydro RNSID thorn 集成到 Einstein Toolkit中。

B2 模型具有差分旋转，其旋转特性由 j律剖面描述

$$\Omega_c - \Omega = \frac{1}{\hat{A}^2 R_e^2}\left[\frac{(\Omega-\omega) r^2 \sin^2\theta e^{-2\nu}}{1-(\Omega-\omega) r^2 \sin^2\theta e^{-2\nu}}\right] \tag{47}$$

$\hat{}$其中 R_e，Ω_c 的值列于表 III，而 A 用于衡量差分旋转的程度，我们将其设为 $\hat{} A = 1$。将流体和时空数据从 Hydro RNSID插值并转换坐标至球坐标中的正交归一基后，我们按照 [16]的矢势方案，加入一个较弱的极向磁场：

$$A_x = -(y - y_c) A_b \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right)^{n_s} \max(P_{\rm cut} - P, 0), \tag{48}$$

$$A_y = (x - x_c) A_b \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right)^{n_s} \max(P_{\rm cut} - P, 0), \tag{49}$$

$$A_z = 0, \tag{50}$$

$$\varphi = 0, \tag{51}$$

其中 A_b、ρ_c、n_s、以及 $P_{\rm cut}$ 的取值见表III。这种在笛卡尔坐标中选取初始矢量势的方式，会得到纯方位矢量势，因此磁场也完全是极向的。 A_i随后被变换到球坐标中的正交归一基，并通过对 A_i取旋度计算初始磁场。尽管初始数据的状态方程

是多方的，我们采用具有 $\Gamma = 2$的 Γ律状态方程来演化恒星。时间积分使用SSPRK54；时空演化中采用四阶有限差分和五阶KO耗散，并使用 $\epsilon_{\rm diss} = 0.01$ ；黎曼求解器采用HLLE，重构采用WENO-Z9；对 A_i的旋度采用十阶有限差分；采用具有 $\epsilon_{\rm diss} = 0.01$的九阶KO耗散、具有$\rho_{\rm floor} = 5 \times 10^{-9}$的各向同性下限、 $(\rho\epsilon)_{\rm floor} = 5 \times 10^{-11}$、 $W_{\rm max} = 50$和 $\epsilon_{\rm max} = 1$。我们使用四种不同分辨率演化这一偏心中子星构型：$n_r \times n_\theta \times n_\varphi$ =$256 \times 16 \times 32$ （h_0）、 $512 \times 32 \times 64$ （h_1）、$768 \times 48 \times 96$ （h_2）和 $1024 \times 64 \times 128$ （h_3）。

由于中子星没有位于原点，截断误差会在其演化过程中引入不对称性。因此，中子星会偏离其起始位置（若网格适配恒星的对称性，它本应保持在该位置）。根据我们先前测试的结果，物质流经过原点时会受到阻碍，相较之下，物质流经过非奇异点时则不然。因此，事先并不能确定随着分辨率提高，这种漂移是否会持续收敛至零。

在图 8 中，我们展示了中子星（NS）从其初始位置的漂移以二阶精度收敛至零。在图中，叉号和加号分别表示 h_2 和 h_3 分辨率下的漂移。当将前两者乘以其分辨率与 h_1 分辨率之比的平方后，它们的漂移曲线与 h_1 分辨率下的漂移曲线重合。（请注意，尽管我们采用了高阶重构方法，但主要算法仍然是二阶收敛的。）这表明，与流体流经奇异区域相关的误差确实会随着分辨率提高而逐渐消失。

图。 9显示了区域内总静质量守恒的相对误差。正如 [34], 所述，在参考度规形式下，我们对连续性方程的实现无法将总静质量守恒到舍入误差范围内，但随着分辨率提高，总质量的损失/增加将收敛至零（此外，原始变量恢复中的一些修正以及使用人工大气的需要也会破坏总静质量守恒）。该图显示了 h_2 和h_3 分辨率曲线上的若干点，这些点乘以 h_2 / h_3 分辨率比值的倒数，并将 h_1 分辨率提高到 2.76 次幂（即，展示了介于二阶和三阶之间的收敛）。

最大密度相对变化的演化如图 10所示。时空演化中的截断误差、中子星表面的界面

此外，我们设置中的大气以及非对称网格会对中子星产生扰动，导致中心密度振荡。由于 B2 模型是稳定的，在没有额外扰动的情况下，这些振荡应随着网格分辨率的提高而逐渐消失。中心密度振荡的收敛情况不如质心漂移或总质量的收敛情况清晰，这可能是因为 h_1 分辨率过低。在这里可以看到，当扰动较大时，振荡总体上呈二阶收敛并逐渐消失。

最后，图11 展示了 ρ 和 b^2

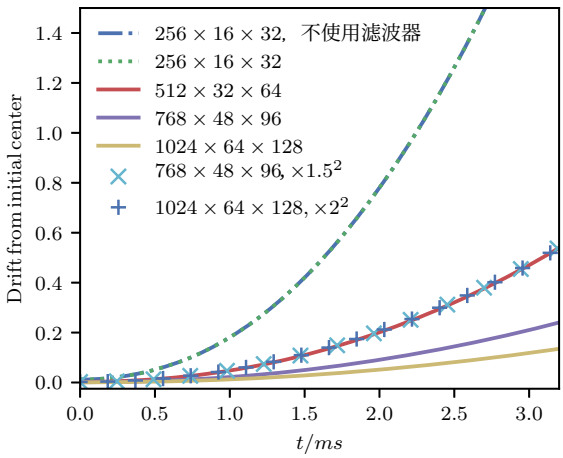


图 8. 不同分辨率下中子星质心的漂移。图中展示了四种不同分辨率下中子星中心的相对漂移： h_0 (256 × 16 × 32)、 h_1 (512 × 32 × 64)、h_2 (768 × 48 × 96)、 h_3 (1024 × 64 × 128)。叉号表示 h_2 运行的相对漂移，该漂移已按 h_2 与 h_1 网格尺寸之比的平方进行缩放。加号表示 h_3 情形下经过相同缩放的漂移。这些缩放后的漂移显示出明显的二阶收敛。虚线和点线分别表示两个 h_0 分辨率的运行结果，分别对应滤波和未滤波情形。两条曲线重合，表明滤波器不会影响中子星的漂移。

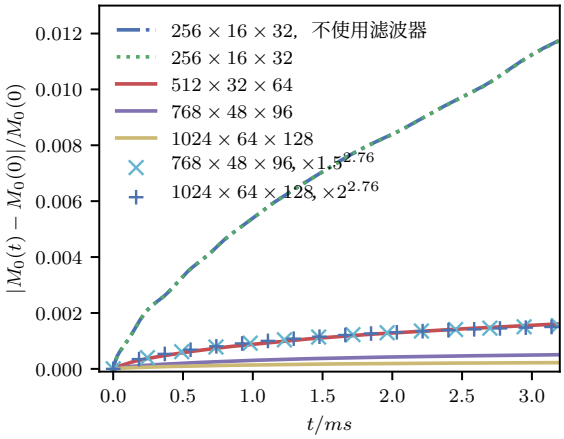


图 9. 不同分辨率下总静质量的守恒性。图中显示了四种不同分辨率下中子星总质量的相对变化： h_0(256 × 16 × 32)、h_1(512 × 32 × 64)、 h_2(768 × 48 × 96)、 h_3(1024 × 64 × 128)。叉号表示将 h_2 分辨率模拟的质量相对变化乘以 h_2 分辨率与 h_1 分辨率网格尺寸之比的 2.76 次方后得到的结果。加号表示同样缩放后的质量变化，但对应于 h_3 情形。因此，收敛阶介于 2 和 3 之间。虚线和点线分别表示采用和未采用滤波的两组 h_0 分辨率模拟。两条曲线重合，表明滤波器对总静质量的守恒性没有影响。

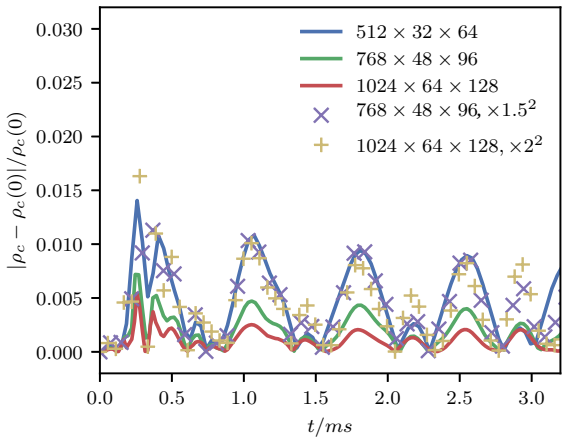


图1 10. 不同分辨率下最大密度随时间的变化。图中显示了中子星中心密度相对于时间的相对变化，涵盖三种不同分辨率。叉号表示将 h_2 分辨率模拟的相对变化乘以 h_2 分辨率与 h_1 分辨率网格尺寸之比的平方后得到的结果。加号表示对h_3 分辨率情形进行同样缩放后的变化。在中心密度相对变化较大的区域，可以观察到二阶收敛。

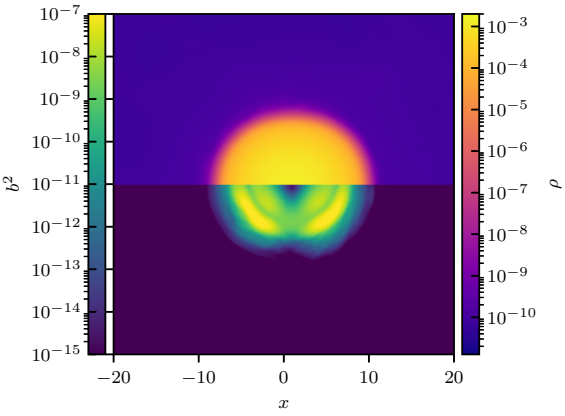


图 11. 在 $t = 3$ 毫秒时，B2 模型的 $y = 1$ 中 $x - z$ 平面上的 ρ 和 b^2 演化。

在 $y = 1$ 平面上，时间为 $t = 3$ 毫秒。恒星保持稳定，代码对恒星表面的捕捉也很准确。在演化过程中，物理量 b^2 呈现出比初始时更丰富的形态。该测试表明，双 FFT 滤波方法适用于动力学时空中的广义相对论磁流体动力学演化，即使设置并未针对坐标系的对称性进行调整。

3. *Dynamical bar-mode instability*

我们的最终代码测试可作为双中子星并合后遗迹的替代模型：研究处于动力学棒模不稳定性中的中子星的演化。

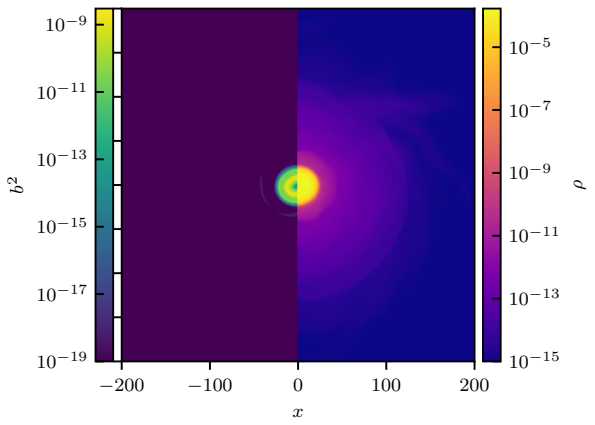
表III. 相对论性多方模型 B2 [127]和 U11 [129]的主要性质：中心静质量密度 ρ_c、静质量和引力质量 M_0 以及 M、无量纲角动量 J/M^2、本征赤道半径 R_e、轴处角速度 Ω_c 和赤道处角速度 Ω_e、恒星的极半径与赤道半径之比 r_p/r_e、动能与引力束缚能之比 $T/|W|$、绝热指数 Γ、多方常数 K以及规定初始磁场的常数 A_b, n_s 和 $P_{\rm cut}$ (详见正文)。

	B2	U11
ρ_c	1.28×10^{-3}	1.092×10^{-4}
M_0	1.592	1.508
M	1.478	1.462
J/M^2	3.177×10^{-1}	1.660
R_e	9.92	23.3
Ω_c	1.53×10^{-2}	1.29×10^{-2}
Ω_e	9.45×10^{-3}	8.61×10^{-3}
r_p/r_e	0.900	0.250
$T/\|W\|$	2.574×10^{-2}	2.743×10^{-1}
Γ	2	2
K	100	100
A_b	10	10
n_s	3	2
$P_{\rm cut}$	6.542×10^{-6}	9.083×10^{-8}

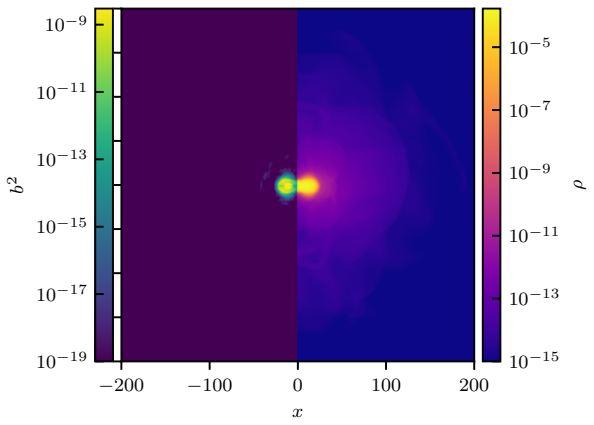
时空 [130] （另请参阅综述 [131, 132]）。我们从开始演化模型U11中的动力学棒模不稳定性。初始数据配置概述于表III中。为生成初始中子星，我们再次使用 Hydro RNSID thorn，并将恒星置于原点，使其自旋轴与极轴对齐。为触发棒模不稳定性的增长，我们在初始时对压力施加 5% 的随机噪声扰动。我们添加初始极向磁场，其由方程（48）-（51）确定，并令 $x_c = y_c = 0$ ，因为恒星初始位于坐标原点。常数 A_b、n_s、和 P_{cut} 的选取满足$b^2_{\rm max}$（$t = 0$） $\approx 1 \times 10^{15} G$，在 [129], 中，该磁场被归类为中等磁场强度；研究表明，这种磁场强度不足以抑制棒模不稳定性的发展。

我们在时空演化中采用 SSPRK54 进行时间积分、采用四阶有限差分并配合五阶 KO耗散，$\epsilon_{\rm diss} = 0.05$ 采用 HLLE 黎曼求解器、WENO-Z9重构，并对 A_i的旋度采用十阶有限差分，采用九阶 KO耗散，$\epsilon_{\rm diss} = 0.001$, $W_{\rm max} = 50$, $\epsilon_{\rm max} = 1$，并采用径向相关下限，$\rho_{\rm floor} = 1 \times 10^{-19}$, $(\rho\epsilon)_{\rm floor} = 1 \times 10^{-24}$，以及 $r_{\rm min} = 20$。第 II 节所述对原始变量恢复格式所作的改进，使我们能够使用这些极低的下限值，同时仍能在整个区域内稳定地演化磁场。

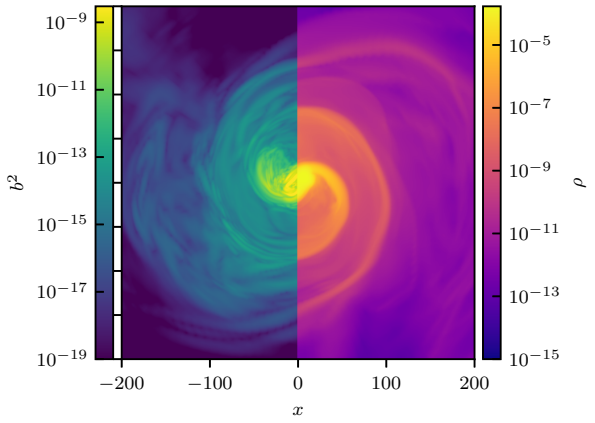
在图12中，我们展示了以下两者的快照： b^2 和 ρ 在xy 和 xz 平面上，时间点经过挑选：棒模不稳定性开始之前，以及棒模完全发展之后



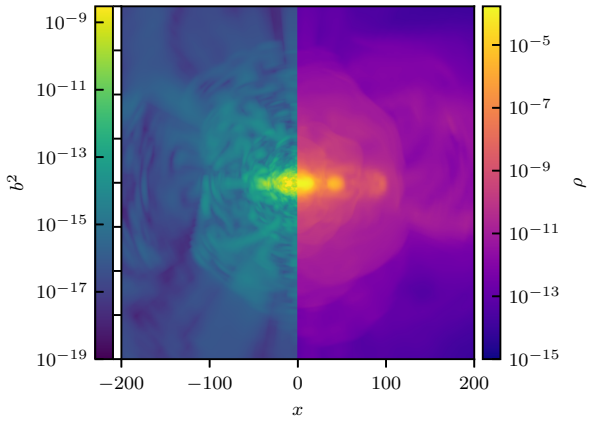
(a) $t = 9$ 毫秒。



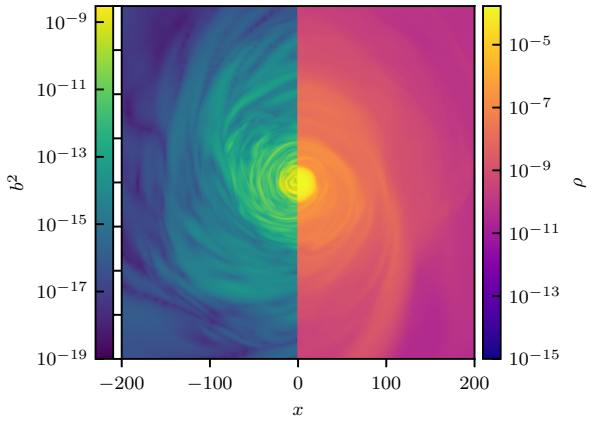
(b) $t = 9$ 毫秒。



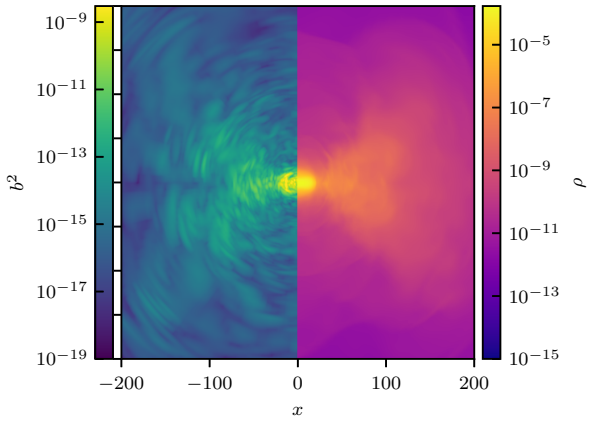
(c) $t = 18$ 毫秒。



(d) $t = 18$ 毫秒。



(e) $t = 45$ 毫秒。



(f) $t = 45$ 毫秒。

图12. 模型U11在 $t = 9$ms（上排）、$t = 18$ms（中排）和 $t = 45$ms（下排）时 $x - y$（左列）和 $x - z$（右列）平面上的 b^2 和 ρ 快照。

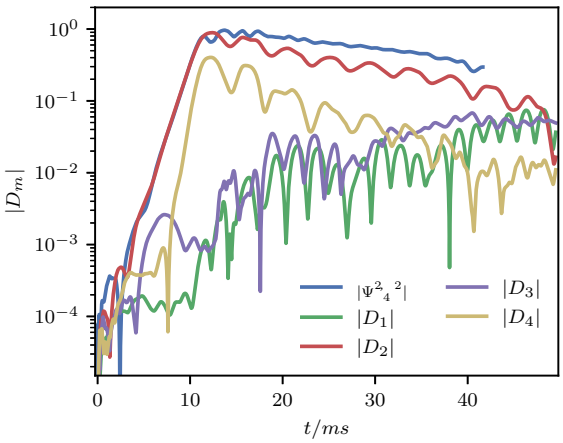


图13. 前四个非轴对称物质分布模态以及 Ψ_4 的 $(\ell = 2, m = 2)$ 模态的演化。正如预期，密度分布的 $m = 2$ 模态是波形四极模态的主要贡献。

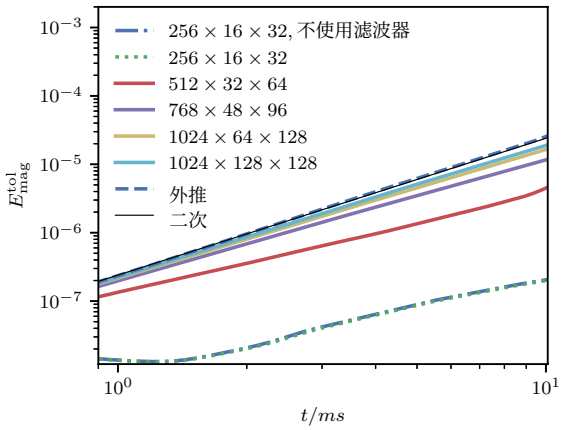


图14。早期时间和不同分辨率下的环向磁能 E^{tor}_{mag} 。在不稳定性形成之前， E^{tor}_{mag} 的幅度预计会随时间 [129, 138] 呈二次增长（即，如 t^2）。该图显示了不同分辨率下的 E^{tor}_{mag} 以及假设二阶收敛的 Richardson外推结果，还有二次曲线 $y = ct^2$ （其选取使其与 Richardson外推曲线的初始行为相匹配）。最低分辨率的运行（$256 \times 16 \times 32$）分别在使用和不使用滤波器的情况下进行。由于添加或移除滤波器时环向磁能增长没有可见差异，这表明截断误差相较于滤波器引入的任何误差占主导地位。

<escape>包括旋臂，以及在晚期阶段，此时中子星再次变得近乎轴对称，并且由于磁旋转不稳定性的增长，其周围形成了一个具有湍流磁场的盘 [133–136]。为了量化棒模不稳定性的发展及其随后达到的饱和状态，我们绘制了 ρ的方位角傅里叶模随时间的演化，</escape>

$$D_m = \int \alpha\sqrt{\gamma}\rho e^{-im\varphi} d^3x \tag{52}$$

见图 13。其演化与 [129, 137] 的结果非常相似（尤其可参见 [137]中图 8 所示的模态演化示意图 [137]）。正如 [129],所观察到的，所选初始磁场强度不足以破坏动力学棒模不稳定性。

为了检验时空与流体演化耦合的正确性，我们还绘制了Weyl标量$\ell = 2$， $m = 2$模态（ Ψ_4 见图 13 ），并将其与 D_2进行比较。这里的思路是， $\ell = 2$， $m = 2$ 引力波形的四极矩应主要由密度分布的方位角 $m = 2$ 模态主导。进而，该模态应是引力波信号的主要贡献来源。如图 13所示，这两个模态之间存在很强的相关性（考虑到我们提取 $t = 1600$的位置与信号之间的距离所造成的 Ψ_4时间平移，并乘以一个任意因子以便更清楚地看出两条曲线具有相同的增长率）。

在图 14 中，我们绘制了磁能的“环向”分量 [129],

$$E^{\rm tor}_{\rm mag} = \int \sqrt{\gamma}\frac{1}{2} B_{\parallel} B_{\parallel} d^3x, \tag{53}$$

其中， $B_{\parallel} = B^j v_j/(v^i v_i)^{1/2}$ 是沿流体运动方向的磁场“平行”部分。请注意， v^i 是Valencia三速度，而指标通过空间度规进行升降γ_{ij}。在早期，棒模尚未形成时，中子星的差分旋转分布会卷绕极向磁场；因此，环向磁能预计会随时间呈二次增长（即 $\sqrt{E^{\rm tor}_{\rm mag}} \propto t$） [129, 138]。这里，我们以四种不同的分辨率进行了模拟，并测量了这种能量的增长。我们发现，能量的环向分量呈现一阶至二阶收敛。我们绘制了四种分辨率下的 $E^{\rm tor}_{\rm mag}$ 以及这些结果的Richardson外推，见图 14。在棒模开始出现之前（即，对于 $t \lesssim 10$毫秒），Richardson外推得到的 $E^{\rm tor}_{\rm mag}$ 按 t^2 增长（即在双对数图上斜率为2）；分辨率较低的模拟所呈现的指数依次更小，表明代码收敛至预期行为。最低分辨率模拟（$256 \times 16 \times 32$）分别在启用和未启用滤波器的情况下运行。启用或移除滤波器后，环向磁能的增长均无明显差异，这表明截断误差的影响大于滤波器引入的任何误差。

在图 15中，我们展示了 L^2 三种分辨率下哈密顿约束的范数。请注意，棒模不稳定性的出现由随机扰动触发，因此预计其爆发时间不会收敛。在其出现之前，我们确实观察到了约束的收敛（但在 $t = 0$处例外，因为初始扰动导致的约束违反占据主导）。请注意

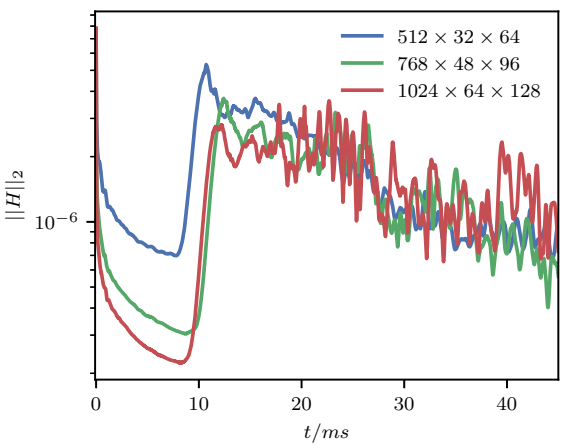


图15. 棒模不稳定恒星的哈密顿约束的 L^2 范数。在棒模不稳定性开始之前，我们看到收敛（趋于零）达到 1.5 阶。请注意，在不稳定性开始之后（由随机扰动触发），约束违背仍然很小，且未表现出指数增长。

初始棒模不稳定性开始后，约束违背大致保持不变（由于 fCCZ4 时空演化系统中的约束阻尼作用，随时间略有衰减）。

IV. 讨论

对于具有（近似）球对称性或轴对称性的系统，球坐标是进行GRMHD模拟的一种理想选择；尤其是，它能守恒流体角动量，并且与笛卡尔坐标相比所需的网格点更少。然而，在球坐标中以高分辨率求解双曲型偏微分方程会受到众所周知的CFL限制，导致时间步长小到难以实际应用。在这项工作中，我们为SphericalNR/Einstein Toolkit 框架下动力学时空与GRMHD的耦合演化开发了一种双重快速傅里叶变换滤波算法，通过根据半径和纬度对 θ 中的大圆以及 φ 中的坐标环进行滤波，以缓解这些CFL限制。通过指数衰减CFL不稳定模态来滤波光滑场；对于可能出现不连续的流体场，则使用混合指数/高斯滤波器，以避免滤波时产生吉布斯现象。针对这些场，滤波器利用Jameson激波探测器，在指数滤波与高斯滤波之间自动切换。

此处介绍的双重快速傅里叶变换滤波器完全采用 MPI-并行化，即使快速傅里叶变换滤波器是一种全局操作（针对每个大圆或方位角坐标环），也能够在角坐标中进行区域分解。重要的是，我们展示了良好的强扩展性该算法可扩展至数千个核心。借助新的滤波算法，我们将时间步长从 $dt \sim dr/2\sin(\pi/(2n_\theta))$ $2\pi/n_\varphi$ 增加到使用有效$n_\theta < 10$ 和 $n_\varphi < 10$的时间步长；在高角分辨率数值模拟中进行滤波时，时间步长可能增大数个数量级。

我们对采用双重快速傅里叶变换滤波器的新 SphericalNR 代码进行了大量测试，测试场景既包括真空时空，也包括与广义相对论磁流体动力学耦合的时空，以评估其稳健性和有效性。我们开展了代码测试，刻意让SphericalNR 在使用滤波时面对不适用于球坐标系的情形：自旋轴与 y轴对齐的Bowen-York黑洞的演化，以及偏心的磁化球形爆炸和稳定磁化中子星的数值模拟。这些测试需要在 φ 坐标中采用比利用对称性时显著更高的角分辨率（这三个问题均为轴对称），才能得到准确结果。对于真空测试，我们重复了最初实现的真空时空测试， SphericalNR [29]结果表明，对于自旋Bowen-York黑洞，快速傅里叶变换滤波能够迅速收敛到预期结果；我们将其与自旋和 z 轴对齐时的轴对称结果进行了比较。随后，我们通过开展两项具有挑战性的偏心广义相对论磁流体动力学数值模拟，成功测试了新实现：偏心球形爆炸，以及偏心稳定磁化中子星的演化。我们的代码能够准确复现已知结果，并呈现预期的收敛性。

最后，我们演化了一个在动力学棒模不稳定性下不稳定的磁化中子星模型。选择此项测试，是因为动力学棒模的形成与饱和过程模拟了双中子星并合的晚期阶段：并合形成旋臂，随后演化为一颗稳定中子星，其周围环绕着炽热的吸积盘。这项测试展示了收敛性，以及动力学时空与物质之间正确的耦合演化：密度分布中 $m = 2$ 方位傅里叶模的增长率与 Weyl 标量的 $\ell = 2$, $m = 2$模之间呈现出明确的相关性 Ψ_4。这类测试十分重要，可证明 SphericalNR 能够对双中子星并合后的遗迹（例如超大质量中子星和黑洞吸积盘）开展超长期数值模拟。采用新的快速傅里叶变换滤波算法，我们能够在球坐标中进行这些模拟，同时保持收敛性。

通过本文提出的双快速傅里叶变换滤波器避免库朗–弗里德里希–列维时间步长限制后， SphericalNR 非常适合模拟双中子星并合后的长期遗迹。以往使用球坐标代码 [27]研究双中子星并合后过程的工作采用固定度规方法，而我们的框架则包含完全动态的度规。这将使我们能够研究超大质量中子星遗迹的寿命、喷流形成，以及其他有趣的天体物理情景，包括引力核坍缩以及物质吸积到单个或双黑洞系统中。

致谢

作者感谢 Thomas W. Baumgarte、Pablo Cerd´a-Dur´an、Luciano Combi、Eirik Endeve、Roland Haas、J. Austin Harris、W. Raphael Hix、Jay V. Kalinani、Eric Lentz、Carlos O. Lousto、Jens F. Mahlmann、O. E. Bronson Messer、Scott C. Noble、Martin Obergaulinger、David Radice 和 Erik Schnetter 提供有益的讨论。我们衷心感谢美国国家科学基金会（NSF）提供的经费支持：授予罗切斯特理工学院（RIT）的资助编号为 PHY-2110338、OAC-2004044/1550436、AST-2009330、OAC-1811228 和 PHY-1912632；授予爱达荷大学的资助编号为 PHY-1806596、PHY-2110352 和 OAC-2004311。

我们衷心感谢美国国家航空航天局通过以下资助为本文提供经费支持：授予罗切斯特理工学院的 NASA NNH17ZDA001N-TCAN-17-TCAN17-0018 和 80NSSC18K1488 号资助，以及 ISFM-授予爱达荷大学的 80NSSC18K0538 号资助。V.M. 获得百亿亿次级计算项目（17-SC-20-SC）的支持。该项目由美国能源部（DOE）科学办公室和国家核安全管理局合作开展。橡树岭国家实验室的工作由美国能源部合同编号 DE-AC05-00OR22725 资助。计算资源由德克萨斯高级计算中心的 Frontera 超级计算机资源配额提供（资助编号 PHY-20010 和 AST-20021）。此外，罗切斯特理工学院的 BlueSky、Green Pairie 和 Lagoon 集群也提供了资源；这些集群由美国国家科学基金会资助购置，资助编号为 PHY-2018420、PHY-0722703、PHY-1229173 和 PHY-1726215。用于支持开发工作的计算机设备经费部分由美国国家科学基金会实验性研究促进竞争计划资助，资助编号 OIA-1458952，授予西弗吉尼亚大学。本文所有图表均使用SENR/NRPy+ 绘制 Matplotlib [139]，其中我们使用了 PyCactus [140] 来导入Carpet 数据。

[1] B. P. Abbott *et al.* (LIGO 科学合作组, Virgo), 《物理评论快报》116, 061102 (2016), arXiv:1602.03837 [gr-qc]. [2] B. P. Abbott *et al.* (LIGO 科学合作组, Virgo), 《物理评论快报》116, 241102 (2016), arXiv:1602.03840 [gr-qc]. [3] B. P. Abbott *et al.* (LIGO 科学合作组, Virgo), 《物理评论快报》116, 241103 (2016), arXiv:1606.04855 [gr-qc]. [4] B. P. Abbott *et al.* (LIGO 科学合作组, VIRGO), 《物理评论快报》118, 221101 (2017), [勘误: 《物理评论快报》121, no.12, 129901 (2018)], arXiv:1706.01812 [gr-qc]. [5] B. P. Abbott *et al.* (LIGO 科学合作组, Virgo), 《天体物理学杂志》851, L35 (2017), arXiv:1711.05578 [astro-ph.HE]. [6] B. P. Abbott *et al.* (LIGO 科学合作组, Virgo), 《物理评论快报》119, 141101 (2017), arXiv:1709.09660 [gr-qc]. [7] B. P. Abbott *et al.* (LIGO 科学合作组, Virgo), 《物理评论快报》119, 161101 (2017), arXiv:1710.05832 [gr-qc]. [8] B. P. Abbott *et al.* (LIGO 科学合作组, Virgo, 费米伽马射线暴监视器, 国际伽马射线天体物理实验室, 冰立方中微子观测站, AstroSat 碲锌镉成像仪团队, 星际行星际网络, 慧眼卫星, ANTARES 中微子望远镜, 雨燕卫星, AGILE 团队, 1M2H 团队, 暗能量相机引力波电磁对应体团队, 暗能量巡天, DLT40, GRAWITA, 费米大面积望远镜, 澳大利亚望远镜紧凑阵列, 澳大利亚平方公里阵列探路者, 拉斯坎布雷斯天文台团队, 澳大利亚引力波发现卓越中心, 更深、更广、更快计划 , 南极巡天望远镜 , 澳大利亚天文学研究中心 , VINROUGE, MASTER, 日本引力波电磁对应体观测团队, 全球中子星并合瞬变观测网络, JAGWAR, 加州理工学院—美国国家射电天文台, 德克萨斯理工大学—美国国家射电天文台, 核光谱望远镜阵列, 泛星计划望远镜, MAXI 团队, TZAC 联盟, 堪萨斯大学, 北欧光学望远镜, 扩展公共ESO超新星巡天, GROND, 德克萨斯理工大学, 南非大望远镜团队, TOROS, BOOTES, 默奇森宽场阵列, 宇宙射线能量与质量实验, IKI-GW 后随观测团队, 高能立体望远镜系统, 低频阵列, 长波长阵列, 高海拔水切伦科夫观测站, 皮埃尔·奥杰宇宙线观测站, 阿塔卡马大型毫米/亚毫米阵列, 欧洲甚长基线干涉测量团队, Pi of Sky, 麦吉尔大学 Chandra 团队, 沙漠火流星网络, ATLAS 望远镜, 高时间分辨率宇宙巡天, RIMAS, RATIR, 南非平方公里阵列/MeerKAT), 《天体物理学杂志》848, L12 (2017), arXiv:1710.05833 [astro-ph.HE]. [9] B. P. Abbott *et al.* (LIGO 科学合作组, Virgo, 费米伽马射线暴监视器, 国际伽马射线天体物理实验室), 《天体物理学杂志》848, L13 (2017), arXiv:1710.05834 [astro-ph.HE]. [10] M. Shibata 和 K. ¯o. Ury¯u, 《物理评论D》61, 064001 (2000), arXiv:gr-qc/9911058 [gr-qc].

[11] F. Pretorius, 《物理评论快报》95, 121101（2005）, arXiv: gr-qc/0507014 [gr-qc]。[12] M. Campanelli、C. O. Lousto、P. Marronetti 和 Y. Zlochower, 《物理评论快报》96, 111101（2006）, arXiv: gr-qc/0511048 [gr-qc]。[13] J. G. Baker、J. Centrella、D.-I. Choi、M. Koppitz 和 J. van Meter, 《物理评论快报》96, 111102（2006）, arXiv: gr-qc/0511103 [gr-qc]。[14] M. Shibata 和 K. Ury¯u, 《物理评论D》74, 121503（2006）, arXiv: gr-qc/0612142 [gr-qc]。[15] M. Anderson、E. W. Hirschmann、L. Lehner、S. L. Liebling、P. M. Motl、D. Neilsen、C. Palenzuela 和 J. E. Tohline, 《物理评论快报》100, 191101（2008）, arXiv: 0801.4387 [gr-qc]。[16] Y. T. Liu、S. L. Shapiro、Z. B. Etienne 和 K. Taniguchi, 《物理评论D》78, 024012（2008）, arXiv: 0803.4193。[17] S. Chawla、M. Anderson、M. Besselman、L. Lehner、S. L. Liebling、P. M. Motl 和 D. Neilsen, 《物理评论快报》105, 111101（2010）, arXiv: 1006.2839 [gr-qc]。[18] J. A. Faber 和 F. A. Rasio, 《相对论在线评论》15, 8（2012）, arXiv: 1204.3858 [gr-qc]。[19] L. Lehner 和 F. Pretorius, 《天文学与天体物理学年度评论》 **52**, 661 2014 1405 4840 ( ), ar [ ] Xiv: . astro-ph.HE 。[20] L. Baiotti 和 L. Rezzolla, 《物理学进展报告》80, 096901（2017）, arXiv: 1607.03540 [gr-qc]。[21] F. K. Thielemann、M. Eichler、I. V. Panov 和 B. Wehmeyer, 《核与粒子科学年度评论》67, 253（2017）, arXiv: 1710.02142 [astro-ph.HE]。[22] B. D. Metzger, 《相对论在线评论》23, 1（2019）, arXiv: 1910.01617 [astro-ph.HE]。[23] M. D. Duez 和 Y. Zlochower, 《物理学进展报告》82, 016902（2019）, arXiv: 1808.06011 [gr-qc]。[24] M. Shibata 和 K. Hotokezaka, 《核与粒子科学年度评论》69, 41（2019）, arXiv: 1908.02350 [astro-ph.HE]。[25] L. Baiotti, 《粒子与核物理进展》109, 103714（2019）, arXiv: 1907.08534 [astro-ph.HE]。

[26] K. Kyutoku、M. Shibata 和 K. Taniguchi，《相对论在线评论》 **24**, 5 2021 2110 06218 ( ), [ ] arXiv: . astro-ph.HE 。[27] F. G. Lopez Armengol、Z. B. Etienne、S. C. Noble、B. J. Kelly、L. R. Werneck、B. Drachler、M. Campan- elli、F. Cipolletta、Y. Zlochower、A. Murguia-Berthier、L. Ennoggi、M. Avara、R. Ciolfi、J. Faber、G. Fi- acco、B. Giacomazzo、T. Gupte、T. Ha、J. H. Krolik、V. Mewes、R. O'Shaughnessy、J. M. Rueda-Becerril 和 J. Schnittman，《物理评论D》106，083015（2022），arXiv: 2112.09817 [astro-ph.HE]。[28] O. Porth 等，《天体物理学杂志增刊》243，26 2019 1904（），arXiv: .04923 [astro-ph.HE]。[29] V. Mewes、Y. Zlochower、M. Campanelli、I. Ruchlin、Z. B. Etienne 和 T. W. Baumgarte，《物理评论D》97，084059 2018 1802（），arXiv: .09625 [gr-qc]。[30] M. Shibata 和 T. Nakamura，《物理评论D》52，5428（1995）。[31] T. W. Baumgarte 和 S. L. Shapiro，《物理评论D》59，024007 1999（），arXiv: gr-qc/9810065 [gr-qc]。[32] https://einsteintoolkit.org/。[33] F. L¨offler、J. Faber、E. Bentivegna、T. Bode、P. Di- ener、R. Haas、I. Hinder、B. C. Mundim、C. D. Ott、E. Schnetter、G. Allen、M. Campanelli 和 P. Laguna，《经典与量子引力》29，115001（2012），arXiv: 1111.3344 [gr-qc]。[34] V. Mewes、Y. Zlochower、M. Campanelli、T. W. Baumgarte、Z. B. Etienne、F. G. Lopez Armengol 和 F. Cipolletta，《物理评论D》101，104007（2020），arXiv: 2002.06225 [gr-qc]。[35] P. J. Montero、T. W. Baumgarte 和 E. M¨uller，《物理评论D》89，084043（2014），arXiv: 1309.7808 [gr-qc]。[36] D. Alic、C. Bona-Casas、C. Bona、L. Rezzolla 和 C. Palenzuela，《物理评论D》85，064040（2012），arXiv: 1106.2254 [gr-qc]。[37] D. Alic、W. Kastaun 和 L. Rezzolla，《物理评论D》88，064049（2013），arXiv: 1307. 7391 [gr-qc]。[38] N. Sanchis-Gual、P. J. Montero、J. A. Font、E. M¨uller 和 T. W. Baumgarte，《物理评论D》89，104033（2014），arXiv: 1403.3653 [gr-qc]。[39] R. Courant、K. Friedrichs 和 H. Lewy，《数学年鉴》100，32（1928）。[40] C. Ronchi、R. Iacono 和 P. Paolucci，《计算物理学杂志》124，93（1996）。[41] R. Gomez、L. Lehner、P. Papadopoulos 和 J. Wini- cour，《经典与量子引力》14，977（1997），arXiv: gr-qc/9702002。[42] N. T. Bishop、R. G´omez、L. Lehner、M. Maharaj 和 J. Winicour，《物理评论D》56，6298（1997），arXiv: gr- qc/9708065 [gr-qc]。[43] R. Gomez *et al.*，《物理评论快报》80，3915（1998），arXiv: gr-qc/9801069 [gr-qc]。[44] N. T. Bishop、R. Gomez、L. Lehner、B. Szilagyi、J. Wini- c our 和 R. A. Isaacson，载于 *Black Holes, Gravitational Radiation and the Universe: Essays in Honor of C.V. Vishveshwara*，由 B. R. Iyer 和 B. Bhawal 编（1999），第383页，arXiv: gr-qc/9801070 [gr-qc]。[45] A. Kageyama 和 T. Sato，《地球化学、地球物理学、地球系统》5，Q09005（2004），physics/0403123。[46] J. Thornburg，《经典与量子引力》21，3665（2004），arXiv: gr-qc/0404059 [gr-qc]。[47] P. Diener、E. N. Dorband、E. Schnetter 和 M. Tiglio，《科学计算杂志》32，109（2007），arXiv: gr-qc/0512001。[48] L. Lehner、O. Reula 和 M. Tiglio，《经典与量子引力》22, 5283（2005），arXiv:gr-qc/0507004。[49] E. Schnetter、P. Diener、E. N. Dorband 和 M. Tiglio，《经典与量子引力》23，S553（2006），arXiv:gr-qc/0602104 [gr-qc]。[50] B. Zink、E. Schnetter 和 M. Tiglio，《物理评论D》77，103015 2008 0712（），arXiv: 。0353 [astro-ph]。[51] D. A. Calhoun、C. Helzel 和 R. J. Leveque，《SIAM评论》50，723（2008）。[52] D. Pollney、C. Reisswig、E. Schnetter、N. Dorband 和 P. Diener，《物理评论D》83，044045（2011），arXiv:0910.3803 [gr-qc]。[53] P. C. Fragile、C. C. Lindner、P. Anninos 和 J. D. Salmonson，《天体物理学杂志》691，482（2009），arXiv:0809.3819。[54] A. Wongwathanarat、N. J. Hammer 和 E. M¨uller，《天文学与天体物理学》 **514**, 48 2010 1003 1633 [ ] A （），arXiv: . astro-ph.IM 。[55] T. Melson、H.-T. Janka 和 A. Marek，《天体物理学快报》801，L24（2015），arXiv:1501. 01961 [astro- ph.SR]。[56] H. Shiokawa、R. M. Cheng、S. C. Noble 和 J. H. Krolik，《天体物理学杂志》 **861**, 15 2018 1701 05610 （），[ ] arXiv: . astro-ph.IM 。[57] S. W. Bruenn、J. M. Blondin、W. R. Hix、E. J. Lentz、O. E. B. Messer、A. Mezzacappa、E. Endeve、J. A. Har- ris、P. Marronetti、R. D. Budiardja、M. A. Chertkow 和 C.-T. Lee，《天体物理学杂志增刊》248，11 2020 1809（），arXiv: .05608 [astro-ph.IM]。[58] R. Sadourny、A. Arakawa 和 Y. Mintz，《月刊天气评论》96，351（1968）。[59] Q. Du，《计算机在应用力学与工程中的方法》192，3933（2003）。[60] B. M¨uller，《皇家天文学会月刊》453，287（2015），arXiv:1506.05139 [astro-ph.SR]。[61] M. Liska、C. Hesp、A. Tchekhovskoy、A. Ingram、M. van der Klis 和 S. Markoff，《皇家天文学会月刊》474，L81（2018），arXiv:1707.06619 [astro-ph.HE]。[62] M. A. Skinner、J. C. Dolence、A. Burrows、D. Radice 和 D. Vartanyan，《天体物理学杂志增刊》241，7（ 2019），arXiv:1806.07390 [astro-ph.IM]。[63] B. M¨uller、T. M. Tauris、A. Heger、P. Banerjee、Y.- Z. Qian、J. Powell、C. Chan、D. W. Gay 和 N. Langer，《皇家天文学会月刊》484，3307（2019），arXiv:1811.05483 [astro-ph.SR]。[64] K. Nakamura、T. Takiwaki 和 K. Kotake，《日本天文学会出版物》71，98 2019 1904（），arXiv: .08088 [astro-ph.HE]。[65] B. Zhang、K. A. Sorathia、J. G. Lyon、V. G. Merkin 和 M. Wiltberger，《计算物理学杂志》376，276（2019）。[66] T. Dang、B. Zhang、J. Lei、W. Wang、A. Burns、H.-l. Liu、K. Pham 和 K. A. Sorathia，《地球科学模型开发》14，859（2021）。[67] R. Shapiro，《地球物理与空间物理评论》8，359（1970）。[68] P. R. Gent 和 M. A. Cane，《计算物理学杂志》81，444（1989）。[69] C. Jablonowski, *Adaptive Grids in Weather and Climate Modeling Ph.D. dissertation University of Michigan* , , , *Ann Arbor MI* , , 博士论文，密歇根大学（2004）。[70] O. Korobkin、E. B. Abdikamalov、E. Schnetter、N. Ster- gioulas 和 B. Zink，《物理评论D》83，043007（2011），arXiv:1011.3010 [astro-ph.HE]。[71] S. C. Noble、B. C. Mundim、H. Nakano、J. H. Krolik,

M. Campanelli、Y. Zlochower 和 N. Yunes，《天体物理学杂志》755，51（2012），arXiv:1204.1073 [astro-ph.HE]。[72] J. F. Mahlmann、A. A. Philippov、V. Mewes、B. Rip- perda、E. R. Most 和 L. Sironi，《天体物理学快报》947，L34（2023），arXiv:2302.07273 [astro-ph.HE]。[73] F. Banyuls、J. A. Font、J. M. Ib´a˜nez、J. M. Mart´ı 和 J. A. Miralles，《天体物理学杂志》476，221（1997）。[74] L. Ant´on、O. Zanotti、J. A. Miralles、J. M. Mart´ı、J. M. Ib
´~ **637**, anez、J. 296 2006
A. Font 和 J. A. Pons，《天体物理学杂志》（），ar Xiv:astro-ph/0506063 [astro-ph]。[75] https://www.cactuscode.org。[76] T. Goodale、G. Allen、G. Lanfermann、J. Mass´o、T. Radke、E. Seidel 和 J. Shalf，载于 *High Perfor- mance Computing for Computational Science — VECPAR 2002* 2003 （ Springer，柏林，）。[77] https://bitbucket.org/eschnett/carpet。[78] E. Schnetter、S. H. Hawley 和 I. Hawke，《经典与量子引力》 **21**, 1465 2004 0310042 （），[ ] arXiv:gr-qc/ gr-qc 。[79] J. G. Baker、M. Campanelli 和 C. O. Lousto，《物理评论D》65，044001（2002），arXiv:gr-qc/0104063 [gr-qc]。[80] T. W. Baumgarte、P. J. Montero、I. Cordero-Carrion 和 E. Muller，《物理评论D》87，044026（2013），arXiv:1211.6632 [gr-qc]。[81] T. W. Baumgarte、P. J. Montero 和 E. M¨uller，《物理评论D》91，064035（2015），arXiv:1501.05259 [gr-qc]。[82] I. Ruchlin、Z. B. Etienne 和 T. W. Baumgarte，《物理评论D》97，064036（2018），arXiv:1712.07658 [gr-qc]。[83] J. D. Brown，《物理评论D》79，104029（2009），arXiv:0902.3652 [gr-qc]。[84] C. Bona、J. Mass´o、E. Seidel 和 J. Stela，《物理评论快报》75，600（1995），arXiv:gr-qc/9412071 [gr-qc]。[85] M. Alcubierre、B. Br¨ug mann、P. Diener、M. Koppitz、D. Pollney、E. Seidel 和 R. Takahashi，《物理评论D》67，084023（2003），arXiv:gr-qc/0206072 [gr-qc]。[86] R. J. Spiteri 和 S. J. Ruuth，《SIAM数值分析杂志》40，469（2002）。[87] C.-W. Shu 和 S. Osher，《计算物理学杂志》77，439（1988）。[88] S. Gottlieb 和 C. W. Shu，《数学计算》67，73（1998）。[89] D. S. Balsara、S. Garain 和 C.-W. Shu，《计算物理学杂志》326，780（2016）。[90] M. Castro、B. Costa 和 W. S. Don，《计算物理学杂志》230，1766（2011）。[91] A. Tchekhovskoy、J. C. McKinney 和 R. Narayan，《皇家天文学会月刊》379，469（2007），arXiv:0704.2608 [astro-ph]。[92] A. Suresh 和 H. T. Huynh，《计算物理学杂志》136，83（1997）。[93] D. S. Balsara 和 C.-W. Shu，《计算物理学杂志》160，405（2000）。[94] N. Fleischmann、S. Adami 和 N. A. Adams，《计算与流体》189，94（2019）。[95] L. Del Zanna、O. Zanotti、N. Bucciantini 和 P. Londrillo，《天文学与天体物理学》473，11（2007），arXiv:0704.3206 [astro-ph]。[96] Y. Chen、G. T´oth 和 T. I. Gombosi，《计算物理学杂志》305，604（2016）。[97] P. M¨osta、B. C. Mundim、J. A. Faber、R. Haas、S. C. Noble、T. Bode、F. L¨offler、C. D. Ott、C. Reisswig 和 E. Schnetter，《经典与量子引力》31，015005 2014 1304（），arXiv: .5544 [gr-qc]。[98] H.-O. Kreiss 和 J. Oliger，*Methods for the approximate solution of time dependent problems*，10（国际科学联合会理事会、世界气象组织，1973年）。[99] Z. B. Etienne、Y. T. Liu、V. Paschalidis 和 S. L. Shapiro，《物理评论D》85，064029（2012），arXiv:1112.0568 [astro-ph.HE]。[100] S. C. Noble、C. F. Gammie、J. C. McKinney 和 L. Del Zanna，《天体物理学杂志》641，626（2006年），arXiv:astro-ph/0512420 [astro-ph]。[101] P. Cerd´a-Dur´an、J. A. Font、L. Ant´on 和 E. M¨uller，《天文学与天体物理学》492，937（2008年），arXiv:0804.4572。[102] D. S. Balsara 和 D. Spicer，《计算物理学杂志》148，133（1999）。[103] S. C. Noble、J. H. Krolik 和 J. F. Hawley，《天体物理学杂志》692，411（2009年），arXiv:0808.3140 [astro-ph]。[104] S. M. Ressler、A. Tchekhovskoy、E. Quataert 和 C. F. Gammie，《皇家天文学会月刊》467，3604（2017），arXiv:1611.09365 [astro-ph.HE]。[105] B. Einfeldt，《SIAM数值分析杂志》25，294（1988）。[106] A. Harten，《计算物理学杂志》49，357（1983）。[107] O. Porth、H. Olivares、Y. Mizuno、Z. Younsi、L. Rez-zolla、M. Moscibrodzka、H. Falcke 和 M. Kramer，《计算天体物理学与宇宙学》4，1（2017），arXiv:1611.09720 [gr-qc]。[108] M. Frigo 和 S. Johnson，《IEEE会刊》93，216（2005）。[109] 我们在演化中使用的 1+log [84] 和“Γ-driver” [85] 规范条件，用于演化切片函数和位移矢量时，实际上可能会产生真正的激波（参见 [141–144]，其中介绍了这些病态行为以及避激波规范条件）；不过，我们尚未发现任何证据表明此类规范激波会出现，也未发现使用指数滤波器处理数值模拟中的时空场会引发相关问题。[141, 144] 的避激波切片条件已被证明是 1 +log切片条件的一种可行替代方案 [145]„ 这意味着在容易产生规范激波的情况下，也可以将其与指数滤波器配合使用。[110] A. Jameson、W. Schmidt 和 E. Turkel，见 *14th AIAA Fluid and Plasma Dynamic Conference* 1981 1259 ( ) p. .

[111] H.-J. Yo、T. W. Baumgarte 和 S. L. Shapiro，《物理评论D》66，084026（2002），arXiv:gr-qc/0209066 [gr-qc]。[112] J. M. Bowen 和 J. W. York, Jr.，《物理评论D》21，2047（1980）。[113] M. Ansorg、B. Br¨ugmann 和 W. Tichy，《物理评论D》70，064011（2004年），arXiv:gr-qc/0404056 [gr-qc]。[114] J. Thornburg，《经典与量子引力》21，743（2004），arXiv:gr-qc/0306056 [gr-qc]。[115] E. Schnetter、F. Herrmann 和 D. Pollney，《物理评论D》71，044033（2005），arXiv:gr-qc/0410081 [gr-qc]。[116] J. Thornburg，《相对论在线评论》10，3（2007）。[117] O. Dreyer、B. Krishnan、D. Shoemaker 和 E. Schnet-ter，《物理评论D》67，024018（2003），arXiv:gr-qc/0206008 [gr-qc]。[118] E. Schnetter、B. Krishnan 和 F. Beyer，《物理评论D》74，024028（2006），arXiv:gr-qc/0604015 [gr-qc]。[119] M. Campanelli、C. O. Lousto、Y. Zlochower、B. Krish-nan 和 D. Merritt，《物理评论D》75，064030（2007），arXiv:gr-qc/0612076 [gr-qc]。[120] A. Komar，《物理评论》113，934（1959）。[121] V. Mewes、J. A. Font 和 P. J. Montero，《物理评论

D91，124043（2015），arXiv:1505.07225 [gr-qc]。[122] B. C. Mundim、B. J. Kelly、Y. Zlochower、H. Nakano 和 M. Campanelli，《经典与量子引力》28，134003（2011），arXiv:1012.0886 [gr-qc]。[123] G. Reifenberger 和 W. Tichy，《物理评论D》86，064003（2012），arXiv:1205.5502 [gr-qc]。[124] H. Okawa、H. Witek 和 V. Cardoso，《物理评论D》89，104032（2014），arXiv:1401.1548 [gr-qc]。[125] P. Cerd´a-Dur´an、J. A. Font、L. Ant´on 和 E. M¨uller，《天文学与天体物理学》 **492**，937 2008 0804 4572 ()，arXiv: . [ ] astro-ph .[126] K. Beckwith 和 J. M. Stone，《天体物理学杂志增刊》193，6（2011），arXiv:1101.3573 [astro-ph.HE]。[127] N. Stergioulas、T. A. Apostolatos 和 J. A. Font，《皇家天文学会月刊》352，1089（2004），astro-ph/0312648。[128] N. Stergioulas 和 J. L. Friedman，《天体物理学杂志》444，306（1995），astro-ph/9411032。[129] L. Franci、R. De Pietri、K. Dionysopoulou 和 L. Rez-zolla，《物理评论D》 **88**，104028 2013 1308 3989 ()，arXiv: . [ ] gr-qc .[130] M. Shibata、T. W. Baumgarte 和 S. L. Shapiro，《天体物理学杂志》 **542**，453 2000 0005378 ()，[ ] arXiv:astro-ph/ astro-ph 。[131] N. Andersson，《经典与量子引力》20，R105（2003），arXiv:astro-ph/0211057 [astro-ph]。[132] V. Paschalidis 和 N. Stergioulas，《相对论在线评论》20，7（2017），arXiv:1612.03050 [astro-ph.HE]。[133] E. Velikhov，《苏联物理学—实验与理论物理学杂志》36，995（1959）。[134] S. Chandrasekhar，《美国国家科学院院刊》46，253（1960年）。[135] S. A. Balbus 和 J. F. Hawley，《天体物理学杂志》376，214（1991年）。[136] S. A. Balbus 和 J. F. Hawley，《现代物理评论》70，1（1998年）。[137] L. Baiotti、R. de Pietri、G. M. Manca 和 L. Rez- zolla，《物理评论D》75，044023（2007年），arXiv：astro- ph/0609473 [astro-ph]。[138] M. D. Duez、Y. T. Liu、S. L. Shapiro、M. Shibata 和 B. C. Stephens，《物理评论D》73，104015（2006年），arXiv：astro-ph/0605331 [astro-ph]。[139] J. D. Hunter，《科学与工程计算》9，90（2007年）。[140] W. Kastaun，“PyCactus：用于 Cactus 计算工具包模拟数据的后处理工具”，天体物理学源代码库，记录号 ascl:2107.017（2021年），ascl:2107.017。[141] M. Alcubierre，《物理评论D》55，5981（1997年），arXiv：gr- qc/9609015 [gr-qc]。[142] M. Alcubierre 和 J. Mass´o，《物理评论D》57，R4511（1998年），arXiv：gr-qc/9709024 [gr-qc]。[143] M. Alcubierre，《经典与量子引力》22，4071（2005年），arXiv：gr-qc/0503030 [gr-qc]。[144] M. Alcubierre，《经典与量子引力》20，607（2003年），arXiv：gr-qc/0210050 [gr-qc]。[145] T. W. Baumgarte 和 D. Hilditch，《物理评论D》106，044014（2022年），arXiv：. 06376 [gr-qc]。