arXiv:2305.01541v1 [math.FA] 2 May 2023

p-拉普拉斯算子在分数阶 g-拉普拉斯算子局部化下的普遍性

ALEJANDRO ORTEGA

ABSTRACT. 在这项研究中，我们分析了截断泛函的行为，

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^N} \qquad \text{for } \delta\to 0^+.$$

这里的函数 G 是一个 Orlicz 函数，此外还假设它在 0 处是正则变函数。此类函数的一个原型为 $G(t) = t^p(1+|\log(t)|)$，其中 $p \geq 2$。这类泛函自然出现在 *peridynamics*中，在那里长程相互作用被忽略，只考虑距离小于 $\delta > 0$ 的相互作用，即 *horizon* $\delta > 0$表示相互作用范围或非局部性。

这项研究受到 Bourgain、Brezis 和 Mironescu 著名成果的启发，他们分析了在 $G(t) = t^p$的条件下的极限 $s \to 1^-$。特别地，我们证明，在适当条件下，

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{p(1-s)}{G(\delta^{1-s})}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^N} = K_{N,p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|^p dx,$$

对于 $p = index(G)$ 以及显式常数 $K_{N,\,p} > 0$。此外，逆命题也成立：如果上述局部化极限在 $\delta \to 0^+$ 下存在，则 Orlicz 函数 G 是一个正则变函数，且其$index(G) = p$。

1. 引言

在 Bourgain、Brezis 和 Mironescu 的著名论文 [7], 中，作者证明了以下如今广为人知的收敛结果。

定理1. 给定 $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ 和 $0 < s < 1$，有

$$\lim_{s\to 1^-}(1-s)\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dydx = K_{N,p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|^p dx,$$

其中 t 约定 $\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx = \infty$ 若 $u \notin W^{1,\,p}(\mathbb{R}^N)$，且对于 e 单位向量 r,

$$K_{N,p} = \frac{1}{|\mathbb{S}^{N-1}|}\int_{\mathbb{S}^{N-1}}|w\cdot e|^p d\sigma_w = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+p}{2}\right)}.$$

这项研究促成了大量关于泛函在 Γ-收敛意义下收敛的文献（参见 [1, 3, 10, 13, 17, 18, 20, 21, 22, 23] 及其中的参考文献），以及近年来关于相关算子谱收敛的研究（参见 [5, 6, 9, 12, 24, 26, 25]）。特别地， [12], 证明了以下结果（精确定义请参见第 2 节）。

(A. Ortega) DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID, AV. UNIVERSIDAD 30,28911 LEGANÉS (MADRID), SPAIN*E-mail address*: alortega@math.uc3m.es。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 46E30、35R11、49J45、26A12；次要分类号 47G20、45G05。

Key words and phrases. 分数阶索об列夫空间、Orlicz-Sobolev 空间、 Γ-收敛、正则变分、分数阶 g-拉普拉斯算子、非局部问题、近场动力学。作者部分受西班牙国家研究署资助，研究项目编号为 PID2019- 106122GB-I00。

定理 2. 设 G 为一个 Orlicz 函数，使得以下极限存在 ，

$$\tilde{G}(a) = \lim_{s\to 1^+}(1-s)\int_0^1\int_{\mathbb{S}^{N-1}} G(a|z_n|r^{1-s})dS_z\frac{dr}{r}.$$

于是，给定 $u \in L^G(\mathbb{R}^N)$ 和 $0 < s < 1$，有

$$\lim_{s\to 1^-}(1-s)\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^N} = \int_{\mathbb{R}^N}\tilde{G}(|\nabla u(x)|)dx.$$

作者还得到了一个完整的 Γ-收敛结果，并据此推导出，对于 g-拉普拉斯算子的某些分数阶版本，当 $s \to 1^-$ 时解的收敛性，

$$\Delta_g = div\left(g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right).$$

本研究旨在分析这些泛函在局部化下的行为。具体而言，给定视界 $\delta > 0$ 和 $0 < s < 1$，我们分析当 $\delta \to 0^+$ 时以下形式的泛函的行为

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^N}. \tag{1.1}$$

这类问题自然产生于近场动力学及其相关的非局部算子，即

$$(-\Delta_g)^s_\delta u(x) = p.v.\int_{B(x,\delta)} g(|D_s u|)\frac{D_s u}{|D_s u|}\frac{dy}{|x-y|^N},$$

其中 $g(t) = G'(t)$ 且

$$D_s u = D_s u(x,y) = \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^s},$$

实际上可以视为一种近场动力学分数阶 g-拉普拉斯算子。近场动力学是 Silling 于 [27] 提出的一种用于固体力学的非局部连续介质模型。经典理论与近场动力学的主要区别在于非局部性，即相隔一定正距离的点会相互施力。这一特性使近场动力学区别于依赖梯度的经典理论。因此，近场动力学特别适用于涉及不连续性的情形，例如断裂、位错或多尺度材料。算子 $(-\Delta_g)^s_\delta$ 对应于 $[2, 12, 25, 26]$, 中分析的分数阶 g-拉普拉斯算子的截断

$$(-\Delta_g)^s u(x) = p.v.\int_{\mathbb{R}^N} g(|D_s u|)\frac{D_s u}{|D_s u|}\frac{dy}{|x-y|^N}.$$

由于我们关注 $\delta \to 0^+$ 时的极限行为，因此考虑 Orlicz 函数 G，并进一步假设它们属于在 0 处正则变的函数类，例如对某个正数 $\rho \in \mathbb{R}$，满足 $\mathcal{RV}_\rho(0)$。粗略地说，如果函数 $G(t)$ 满足以下极限，则称其为在 0 处正则变函数

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{G(\lambda t)}{G(t)} = h_G(\lambda), \quad \text{exists for all } \lambda > 0. \tag{1.2}$$

一个属于类 $\mathcal{RV}_p(0)$ 的 Orlicz 函数示例如下：

$$G(t) = t^p(1 + |\log(t)|). \tag{1.3}$$

J. Karamata 对使极限 (1.2) 存在的函数给出了完整刻画（参见 [14]），由此开创了正则变函数理论。我们将利用这一刻画（见下文定理 6）证明本文的主要结果，该结果将在下文引出。

定理 3. 设 G 是满足 $(\mathcal{H})$ 的 Orlicz 函数。则给定 $u \in L^G(\mathbb{R}^N)$ 和 $0 < s < 1$，有

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{p(1-s)}{G(\delta^{1-s})} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right) \frac{dydx}{|x-y|^N} = K_{N,p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p dx,$$

其中 $p = index(G)$，并约定当 $u \notin W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 时，$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx = \infty$。

我们还证明了以下结论。

定理 4. 设 G 为满足 $(\mathcal{H})$ 且满足 $u \in L^G(\mathbb{R}^N)$ 的 Orlicz 函数。如果

$$\liminf_{\delta\to 0^+} \frac{1}{G(\delta^{1-s})} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right) \frac{dydx}{|x-y|^N} < \infty, \tag{1.4}$$

那么 $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$。

上述定理 3 与下一个关于分数阶p-拉普拉斯算子的局部化结果密切相关（参见 [6]）。令 $\Omega_\delta = \{z \in \mathbb{R}^N : |x-z| < \delta, \text{ 其中 } x \in \Omega\}$。

定理 5. 设 $p > 1$、$0 < s < 1$ 和 $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$。那么，

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{p(1-s)}{\delta^{p(1-s)}} \int_{\Omega_\delta} \int_{\Omega_\delta \cap B(x,\delta)} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dydx = K_{N,p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx,$$

约定：若 $u \notin W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$，则 $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p dx = \infty$。

定理 5 的证明依赖于一个一般的 Γ-收敛结果（参见 [4, 定理 1]），而该结果的关键在于利用势函数的齐次性。特别地，将 [4, 定理 1] 应用于我们的情形时，要求函数 $G(t)$ 接近一个齐次函数，即$t \to 0^+$，也就是说，给定 $a \in \mathbb{R}_+$，要求极限

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^\beta} G\left(at^{1-s}\right) = G^\circ(a),$$

对某个 $\beta \in \mathbb{R}$ 以及某个函数 $G^\circ(a)$ 成立。显然，像（1.3）这样的函数无法与任何幂函数 t^q、$\beta > 1$ 相比，具体而言，

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{G(t)}{t^\beta} = \begin{cases} 0 & \text{if } 1 < \beta < p, \\ +\infty & \text{if } \beta \geq p. \end{cases}$$

还值得注意以下一点。若 $G(t) = t^p$，那么定理 2 中定义的函数为 $\tilde{G}(t) = K_{N,p}^{\,p}\, t^p$，因此，在适当缩放~~后，~~ 极限 $s \to 1^-$ 得到的结果与适当缩放后的极限 $\delta \to 0^+$ 所产生的局部化结果相同。对于一般函数 $G(t) = t^p \ell(t)$，这一点不再成立。事实上，根据正则变函数的刻画（见下文定理 6），若极限（1.2）存在，则函数 G 必须是正则变函数，而函数 $h_G(t)$ 必然是幂函数 $h_G(t) = t^p$；但定理 2 中出现的极限函数一般并非幂函数（见注 2）。

涉及 Orlicz 函数的非局部泛函最近也在 [11] 中得到了研究。特别是，作者考虑了如下形式的泛函

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} G(|u(x)-u(y)|) J(|x-y|) dydx, \tag{1.5}$$

对于 Orlicz 函数 G 和适当的核 J。定理 3 可以很容易地推广到类似于 (1.5) 的泛函；例如，若 $J(z) = |z|^{-(N+ps)}$，则有

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{\delta^{sp}}{G(\delta)} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x,\delta)} G(|u(x)-u(y)|) J(|x-y|) dydx = \frac{K_{N,p}}{p(1-s)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p dx.$$

一般来说，如果 G 是指标为 $p>1$ 的正则变函数，并且核 J 也假设为指标为 $q\in\mathbb{R}$ 的正则变函数 $0<N+p+q$，那么（见命题 2），

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{N+p+q}{G(\delta)J(\delta)\delta^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x,\delta)}G(|u(x)-u(y)|)J(|x-y|)dydx=K_{N,p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|^p dx.$$

根据其定义，类似于 (1.1) 的泛函只考虑给定点 $x\in\mathbb{R}^N$ 邻域内的贡献，而忽略函数尾部 u。这一现象在取极限 $\delta\to 0^+$ 时会带来一些困难，因为与情形 $s\to 1^-$ 不同，后者的积分总是在整个 $\mathbb{R}^N$ 上考虑；函数在一点 $x_0\in\mathbb{R}^N$ 处的局部化，本身就会丢失关于 x_0 远处行为 u 的信息（见第 4 节）。

论文结构：在第 2 节中，我们回顾 Orlicz 函数以及正则变函数的一些重要性质。最后，我们陈述关于奥利奇-索博列夫空间的一些经典事实。第 2.2 节包含用于证明定理 3 的一些技术性结果，其证明见第 3 节。最后，第 4 节专门讨论类似于 (1.1) 的泛函的 Γ-收敛，以及其在研究 $(-\Delta_g)^s_\delta$ 在极限 $\delta\to 0^+$ 下的谱行为中的应用。

2. Functional Setting

2.1. Orlicz 函数与正则变函数。

本节介绍 Orlicz 函数和正则变函数，并回顾一些在定理 3 的证明中起关键作用的性质。我们还将介绍分数阶 Orlicz-Sobolev 空间，以及近期在 [12] 中提出的一些基本性质。

2.1.1. Orlicz 函数。

定义 1. 若函数 $G:\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 是 Orlicz 函数，则

H_1) G 连续、凸、递增，且 $G(0)=0$。

H_2) G 满足 Δ_2 条件，即存在 $\mathfrak{c}>2$ 使得

$$G(2t)\le\mathfrak{c}\,G(t),\qquad \textit{for all } t\in\mathbb{R}_+.$$

H_3) G 在 0 处是超线性的，即 $\lim_{t\to 0^+}\frac{G(t)}{t}=0$。

Orlicz 函数的一些例子如下（参见 [19, 12]），

- $G(t)=t^p$，其中 $p>1$。
- $G(t)=t^p(1+|\log(t)|)$，其中 $p\ge 2$。
- 一般而言，$G(t)=t^p(1+|\log(t)|)^q$，其中 $p\ge 2$ 且 $0\le q\le 1$。

引理 1 ([12, 引理 2.4])。设 $G:\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 为 Orlicz 函数，则P_1) G 是利普希茨连续的。

P_2) 给定 $s\in(0,1)$，函数 G 在 0 和无穷远处的可积性，亦即

$$\int_1^\infty\frac{G(x^{-s})}{x}\,dx\le\frac{\mathfrak{g}}{s}\qquad\textit{and}\qquad\int_0^1\frac{G(x^{1-s})}{x}\,dx\le\frac{\mathfrak{g}}{1-s},$$

其中 $\mathfrak{g}=\sup_{x\in(0,1)}x^{-1}G(x)$。

P_3) $G(t)=\int_0^t g(s)ds$ 对于非递减右连续函数 $g(t)$。

P_4) G 是次可加的，即

$$G(a+b)\le\frac{\mathfrak{c}}{2}(G(a)+G(b)),\qquad\textit{for all } a,b\in\mathbb{R}_+.$$

P_5) 对任意 $a \geq 0$，都有 $G(ab) \leq bG(a)$，其中 $0 < b < 1$

那么， Δ_2 条件等价于不等式（参见 [19]），

$$\frac{G'(t)}{G(t)} \leq \frac{p}{t}, \qquad \text{for all } t > 0,$$

对某个 $p > 1$。因此，（参见 [12, 引理 2。5]），对于每个 $t \geq 0$ 和 $\lambda \geq 1$,

$$G(\lambda t) \leq \lambda^p G(t).$$

此外（参见 [12, 引理 2.7]），存在 $q > 1$，使得对所有 $t \geq 0$ 和 $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\lambda^{2q} G(t) \leq G(\lambda t).$$

综上所述，函数 G 满足增长条件。

$$p^- \leq \frac{tG'(t)}{G(t)} \leq p^+ \qquad \text{for all } t > 0, \tag{2.1}$$

以及一些 $0 < p^- \leq p^+$。因此,

$$\min\{\lambda^{p^-}, \lambda^{p^+}\} G(t) \leq G(\lambda t) \leq \max\{\lambda^{p^-}, \lambda^{p^+}\} G(t), \qquad \text{for all } \lambda, t \geq 0. \tag{2.2}$$

例如,

- 若 $G(t) = t^p$ 满足 $p > 1$，则 $p^{\pm} = p$,
- 若 $G(t) = t^p(1 + |\log(t)|)$，则 $p^{\pm} = p \pm 1$。

因此，函数 G 也满足所谓的 ∇_2-条件，即

$$G(2t) \geq cG(t), \qquad \text{for all } t \geq 0 \tag{2.3}$$

其中 $c > 2$为正常数。实际上，由于 (2.2)，我们有 $c = 2^{p^-}$。

本节最后回顾这些 Orlicz 空间的 Hölder 型共轭。令补函数 G^* 定义为

$$G^*(a) = \sup_{t>0}\{at - G(t)\}.$$

容易看出，对于 $G(t) = \frac{t^p}{p}$，则 $G^*(t) = \frac{t^q}{q}$，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，即标准的 H¨older 共轭。根据 G^* 的定义，以下杨型不等式成立

$$at \leq G(t) + G^*(a), \qquad \text{for all } a, t \geq 0.$$

2.1.2. 正则变函数。

设 G 是定义在无穷远处某个邻域 $[a, +\infty)$ 上的正函数，并假设对所有 $\lambda > 0$,

$$\frac{G(\lambda t)}{G(t)} \to h(\lambda), \qquad \text{as } t \to +\infty$$

若 G 具有一定的最低光滑性，例如可测性，则上述收敛在 $(0, +\infty)$ 的紧子集上一致成立。此外，函数 h 必然是一个幂函数。研究这些性质及类似关系，以及它们的各种应用，构成了 J. Karamata 提出的正则变动函数理论的基础（参见 [14, 15, 16]）。

定义 2. 若函数 $G : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ 在 $+\infty$ 处是正则变函数，则称其为正则变函数；对所有 $\lambda > 0$,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{G(\lambda t)}{G(t)} = h_G(\lambda) \in \mathbb{R}_+$$

且极限是有限的。

正则变函数理论中的一些关键结果，以及贯穿本研究的基础结果，是 Karamata 给出的刻画结果。

定理 6（[16]）。每个正则变函数 $G\colon\ \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ 都具有如下形式

$$G(t) = t^{\beta}\ell(t),$$

wh其中，$\beta \in \mathbb{R}$ 称为 G 的指标，而 $\ell\colon\ \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ 是一个缓变函数 $n,$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ell(\lambda t)}{\ell(t)} = 1.$$

相应地，

定义 3。如果函数 $G\colon\ \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ 在 $+\infty$ 处是指标为 $p \in \mathbb{R}$的正则变函数，记作 $G \in \mathcal{RV}_p$（$+\infty$），当且仅当

$$G(t) = t^{p}\ell(t),$$

其中某个缓变函数为 $\ell\colon\ \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$。

注意，缓变函数是指标为 0 的正则变函数。若将关注点从无穷远转向原点；也就是说，若 $G(t)$ 可测、为正且

$$\lim_{t\to0^+} \frac{G(\lambda t)}{G(t)} = \lambda^{p}, \qquad \text{for all } \lambda > 0,$$

我们称 G 在原点处（右侧）以 $p \in \mathbb{R}$ 为指标正则变，即 $G \in \mathcal{RV}_p(0)$。显然，这等价于（参见 [19]）：

$$G(t) \in \mathcal{RV}_p(0) \quad \Longleftrightarrow \quad G\left(\frac{1}{t}\right) \in \mathcal{RV}_{-p}(+\infty). \tag{2.4}$$

在正则变函数的基本结果中，我们将用到以下结论。

定理 7（一致收敛定理 [19]）。设连续函数 $G \in \mathcal{RV}_p(+\infty)$（若$p > 0$，则假设 G 在每个区间 $(0, a]$ 上有界），那么

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{G(\lambda t)}{G(t)} = \lambda^{p} \quad \textit{uniformly in } \lambda \textit{ on each } \begin{cases} [a,b],\ 0 < a \le b < +\infty & \textit{if } p = 0, \\ (0,b],\ 0 < b < +\infty & \textit{if } p > 0, \\ [a,+\infty),\ 0 < a < +\infty & \textit{if } p < 0. \end{cases}$$

在处理缩放泛函的极限 $\delta \to 0^+$ 时，下面这个刻画也将发挥关键作用。

定理 8（Karamata。直接部分）。设 $G \in \mathcal{RV}_p(+\infty)$ 在 $[a,\infty)$ 上局部有界。那么，

- 对于 $\sigma \ge -(p+1)$，我们有

$$\frac{t^{\sigma+1}G(t)}{\displaystyle\int_a^t s^{\sigma}G(s)ds} \to \sigma + p + 1, \qquad \textit{as } t \to +\infty,$$

- 对于 $\sigma < -(p+1)$，我们有

$$\frac{t^{\sigma+1}G(t)}{\displaystyle\int_t^{\infty} s^{\sigma}G(s)ds} \to -(\sigma + p + 1), \qquad \textit{as } t \to +\infty.$$

定理 9（Karamata. 逆部分）。设 G 是定义在 $[a,\infty)$ 上的正值、可测且局部可积函数，且满足 $a > 0$。那么，

- 若对于某个 $\sigma > -(p+1)$，我们有

$$\frac{t^{\sigma+1}G(t)}{\int_a^t s^\sigma G(s)ds} \to \sigma + p + 1, \qquad as\ t \to +\infty,$$

则 $G \in \mathcal{RV}_p(+\infty)$。

- 若对于某个 $\sigma < -(p+1)$，有

$$\frac{t^{\sigma+1}G(t)}{\int_t^\infty s^\sigma G(s)ds} \to -(\sigma + p + 1), \qquad as\ t \to +\infty,$$

则 $G \in \mathcal{RV}_p(+\infty)$。

由关系式 (2.4)、定理7、8和9，以及事实 $G(0) = 0$，我们得到（参见[19, 定理1.7.2b]），

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{G(\lambda t)}{G(t)} = \lambda^p, \qquad \text{uniformly in } \lambda \text{ on each compact set of } [0,+\infty), \tag{2.5}$$

and

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta^{\sigma+1}\ell(\delta)} \int_0^\delta t^\sigma \ell(t)\, dt = \frac{1}{\sigma+1}. \tag{2.6}$$

因此，给定 $G \in \mathcal{RV}_p(0)$,

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{G(\delta)} \int_0^\delta \frac{G(t)}{t} dt = \frac{1}{p}. \tag{2.7}$$

如前所述，满足所需假设的 Orlicz 函数的典型例子是函数 $G(t) = t^p(1 + |\ln(t)|)$，其中 $p > 1$。我们有 $G(t) \in \mathcal{RV}_p(0)$，显然它与任何幂函数 t^q, $q > 1$ 都不可比。通过直接计算可得 $p^\pm = p \pm 1$，此外， $G'(t)$ 属于 $\mathcal{RV}_{p-1}(0)$。因此，接下来我们将假设函数 $G(t) = t^p\ell(t)$ 满足以下假设

$(\mathcal{H})$ $\begin{cases} G \in \mathcal{RV}_p(0) \text{ 是一个分段光滑的 Orlicz 函数，并且 } G' \in \mathcal{RV}_{p-1}(0)\text{，( ) 有一个正的下界，例如，} \\ \ell\ t \end{cases}$
对所有 $t > 0$， $\ell(t) \geq c_\ell > 0$ 。

2.1.3. 分数阶 Orlicz-Sobolev 空间。

给定一个 Orlicz 函数 G，Orlicz空间 $L^G(\mathbb{R}^N)$ 定义为

$$L^G(\mathbb{R}^N) := \{u : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R},\ \text{measurable, such that } \Phi_G(u) < \infty\},$$

其中

$$\Phi_G(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(|u(x)|)dx.$$

接下来，给定 $0 < s \leq 1$，奥利奇-索博列夫空间 $W^{1,G}(\mathbb{R}^N)$ 定义为

$$W^{s,G,\delta}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^G(\mathbb{R}^N),\ \text{such that } \Psi_{s,G,\delta}(u) < \infty\},$$

with

$$\Psi_{s,G,\delta}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right) \frac{dydx}{|x-y|^N},$$

对于 $0 < s < 1$，且

$$\Psi_{1,G,\delta}(u) = \Phi_G(|\nabla u|).$$

这些空间赋予了所谓的 Luxemburg 范数，
$\|u\|_G = \|u\|_{L^G(\mathbb{R}^N)} := \inf_{\lambda>0}\left\{\Phi_G\left(\frac{u}{\lambda}\right)\le 1\right\}$ 且 $\|u\|_{s,G,\delta} = \|u\|_{W^{s,\ G,\ \delta}(\mathbb{R}^N)} := \|u\|_G + [u]_{s,G,\delta}$,

其中

$$[u]_{s,G,\delta} := \inf_{\lambda>0}\left\{\Phi_{s,G,\delta}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\le 1\right\}.$$

根据 [12], 给定的 $\delta>0$ 和 $0<s<1$，项 $[u]_{s,\ G,\ \delta}$ 称为 (s,G,δ)-Gagliardo 半范数。注意，由于 $(\mathcal{H})$,

$$L^G(\mathbb{R}^N)\subset L^p(\mathbb{R}^N). \tag{2.8}$$

接下来我们回顾空间 $L^G(\mathbb{R}^N)$ 和 $W^{1,\ G}(\mathbb{R}^N)$ 的一些重要性质。

定理10. 设 G 是符合定义 1 的 Orlicz 函数。则空间 $L^G(\mathbb{R}^N)$ 和 $W^{1,\ G}(\mathbb{R}^N)$ 是自反的可分巴拿赫空间。此外， $L^G(\mathbb{R}^N)$ 的对偶空间可与 $L^{G^*}(\mathbb{R}^N)$ 等同。最后， $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在 $L^G(\mathbb{R}^N)$ 和 $W^{s,\ G}(\mathbb{R}^N)$ 中均稠密。

Orlicz-Sobolev 空间的许多这些性质，都是通过对普通 Sobolev 空间中相同性质的证明作直接推广而得到的。特别是，Δ_2-条件保证空间 $W^{1,G}(\mathbb{R}^N)$ 是可分的，而 ∇_2-条件 (2.3) 则保证空间 $W^{1,G}(\mathbb{R}^N)$ 是自反的。如 [12, 命题 2.11], 所示，将这些泛函性质推广到空间 $W^{s,G,\infty}(\mathbb{R}^N)$ 也同样直接。根据空间 $W^{s,G,\infty}(\mathbb{R}^N)$ 的定义，这里也同样成立。特别地，$C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 的稠密性可通过截断与磨光函数正则化的标准论证，并结合凸性或 Jensen 不等式得出（参见 [12,命题 2.11]）。

定理11. 设 G 是根据定义 1 的 Orlicz 函数，且 $\delta>0$ 和 $0<s<1$。则 $W^{s,G,\delta}(\mathbb{R}^N)$ 是一个自反且可分的 Banach 空间。此外，空间 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在 $W^{s,G,\delta}(\mathbb{R}^N)$ 中稠密。

根据 [12, 定理 3.1] ，还可以证明空间 $W^{s,\ G,\ \delta}(\mathbb{R}^N)$ 满足 Rellich–Kondrakov 型定理，即嵌入 $W^{s,\ G,\ \delta}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^G(\mathbb{R}^N)$ 具有紧性。

定理 12. 设 $\delta>0$、 $0<s<1$ ，且 G为一个 Orlicz 函数。那么，对于每个有界的 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset W^{s,\ G,\ \delta}(\mathbb{R}^N)$ 序列，即 $\sup_k\|u_k\|_{s,\ G,\ \delta}<\infty$，存在 $u\in W^{s,\ G,\ \delta}(\mathbb{R}^N)$，使得在取一个子列后， $u_k\to$ 属于 $L^G_{loc}(\mathbb{R}^N)$。

定理 12 的证明在于证明以下等度连续估计，以便应用著名的 Fr`echet-Kolmogorov 紧性定理的一个变体。尽管证明与 [12, 引理 3.2] 中的证明相同，为求完整起见，我们仍将其列出。

引理 2. 设 $\delta>0$、 $0<s<1$ 和 G 为 Orlicz 函数。则存在常数 $C>0$，使得

$$\Phi_G(u(x+h)-u(x))\le C|h|^s\Psi_{s,G,\delta}(u),$$

对所有 $u\in W^{s,\ G,\ \delta}(\mathbb{R}^N)$ 以及每个 $0<|h|<\min\{\frac{1}{2},\delta\}$ 均成立。

证明。由于 H_2),

$$G(|u(x+h)-u(x)|)\le \mathfrak{c}\Big(G(|u(x+h)-u(y)|)+G(|u(x)-u(y)|)\Big)$$

对于所有 $y \in B(x,|h|)$。于是，

$$\begin{aligned}\Phi_G(u(x+h)-u(x)) &= \int_{\mathbb{R}^N} G(|u(x+h)-u(x)|)dx \\ &= \frac{1}{|B(x,|h|)|}\int_{B(x,|h|)}\int_{\mathbb{R}^N} G(|u(x+h)-u(x)|)dxdy \\ &\le \frac{\mathfrak{c}}{\omega_N|h|^N}\left(\int_{B(x,|h|)}\int_{\mathbb{R}^N} G(|u(x+h)-u(y)|)dxdy \right. \\ &\qquad \left. + \int_{B(x,|h|)}\int_{\mathbb{R}^N} G(|u(x)-u(y)|)dxdy\right) \\ &= \frac{\mathfrak{c}}{\omega_N|h|^N}(I_1+I_2).\end{aligned}$$

接下来注意，给定 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 $y \in B(x,|h|)$，我们有 $|x-y| \le |h|$ 和 $|x+h-y| \le |x-y|+|h| \le 2|h|$。于是，由于 P_5) 以及 G 的单调性，我们得到

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{B(x,|h|)}\int_{\mathbb{R}^N} G\left(\frac{|u(x+h)-u(y)|}{|x+h-y|^s}|x+h-y|^s\right)|x+h-y|^N\frac{dx}{|x+h-y|^N}dy \\ &\le \int_{B(x,|h|)}\int_{\mathbb{R}^N} G\left(\frac{|u(x+h)-u(y)|}{|x+h-y|^s}2^s|h|^s\right)2^N|h|^N\frac{dx}{|x+h-y|^N}dy \\ &\le \int_{B(x,|h|)}\int_{\mathbb{R}^N} G\left(\frac{|u(x+h)-u(y)|}{|x+h-y|^s}\right)2^{N+s}|h|^{N+s}\frac{dx}{|x+h-y|^N}dy \\ &= 2^{N+s}|h|^{N+s}\int_{B(x,|h|)}\int_{\mathbb{R}^N} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dx}{|x-y|^N}dy \\ &\le 2^{N+s}|h|^{N+s}\int_{B(x,\delta)}\int_{\mathbb{R}^N} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dx}{|x-y|^N}dy \\ &= 2^{N+s}|h|^{N+s}\int_{B(0,\delta)}\int_{\mathbb{R}^N} G\left(\frac{|u(x+z)-u(x)|}{|z|^s}\right)\frac{dx}{|z|^N}dz \\ &= 2^{N+s}|h|^{N+s}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,\delta)} G\left(\frac{|u(x+z)-u(x)|}{|z|^s}\right)\frac{dzdx}{|z|^N} \\ &= 2^{N+s}|h|^{N+s}\Psi_{s,G,\delta}(u).\end{aligned}$$

同理，我们可以证明 $I_2 \le |h|^{N+s}\Psi_{s,G,\delta}(u)$，结论得证。 □

定理 12 的证明。由于 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $W^{s,\,G,\,\delta}(\mathbb{R}^N)$ 中有界，因此它在 $L^G(\mathbb{R}^N)$ 中也有界。令

$$M := \sup_k \Big(\Psi_{s,G,\delta}(u_k) + \Phi_G(u_k)\Big).$$

因此，由引理 2,

$$\sup_k \Phi_G\Big(u_k(x+h)-u(x)\Big) \le C\,M\;|h|^s.$$

根据 [19, 定理11.5], ，存在 $u \in L^G(\mathbb{R}^N)$，使得取一个子列后， $u_k \to u$ 在$L^G_{loc}(\mathbb{R}^N)$中。此外，$u \in W^{s,G,\delta}(\mathbb{R}^N)$，且取一个子列后， $u_k \to u$几乎处处于 $\mathbb{R}^N$中。于是，

$$0 \le \lim_{k\to+\infty} G\left(\frac{|u_k(x)-u_k(y)|}{|x-y|^s}\right) = G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right) \qquad \text{a.e. in } \mathbb{R}^N\times B(x,\delta).$$

根据 Fatou 引理和 G的下半连续性，我们得到

$$\Psi_{s,G,\delta}(u) \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u_k(x)-u_k(y)|}{|x-y|^s}\right) \frac{dydx}{|x-y|^N} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \Psi_{s,G,\delta}(u_k) \leq M < +\infty.$$

因此， $u \in W^{s,\ G,\ \delta}(\mathbb{R}^N)$。 □

在介绍了主要定义之后，我们通过阐述一种为定理 3 提供动机的初步方法来结束本节。事实上，将恒等式 (2.7) 与定理1结合起来，可得以下结论。取一个光滑函数 u 并考虑

$$\begin{aligned}\Psi_{s,G,\delta}(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right) \frac{dydx}{|x-y|^N} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x,\delta)} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{sp}} \ell\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right) \frac{dydx}{|x-y|^N}.\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{\delta\to 0^+} \sup_{y\in B(x,\delta)} \Big| |u(x)-u(y)| - |\nabla u(x)||x-y| \Big| = 0,$$

由此可得

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0^+} \Psi_{s,G,\delta}(u) &= \lim_{\delta\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right) \frac{dydx}{|x-y|^N} \\ &= \lim_{\delta\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x,\delta)} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{sp}} \ell\left(|\nabla u(x)||x-y|^{1-s}\right) \frac{dydx}{|x-y|^N}.\end{aligned}$$

在 [7], 之后，我们来定义

$$\rho_\delta(z,a) := \frac{\ell(a|z|)}{|x|^{N-p(1-s)}} \chi_{B(0,\delta)}.$$

直接计算可得,

$$\int \rho_\delta(z,a)dz = \frac{1}{a^p(1-s)} \int_0^{a\delta^{1-s}} \frac{t^p \ell(t)}{t} dt,$$

因此，由 (2.6) 可得,

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{G(\delta^{1-s})} \int \rho_\delta(z,a)dz &= \frac{1}{a^p(1-s)} \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{G(\delta^{1-s})} \int_0^{a\delta^{1-s}} \frac{t^p\ell(t)}{t} dt \\ &= \frac{1}{a^p(1-s)} \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{G(\delta^{1-s})} \frac{(a\delta^{1-s})^p \ell(a\delta^{1-s})}{p} \\ &= \frac{1}{p(1-s)} \lim_{\delta\to 0^+} \frac{(\delta^{1-s})^p \ell(\delta^{1-s})}{G(\delta^{1-s})} \\ &= \frac{1}{p(1-s)},\end{aligned}$$

这里用到了 $\ell(t)$ 是一个缓变函数这一事实。接着，令

$$\overline{\rho}_\delta(z,a) = \frac{p(1-s)}{G(\delta^{1-s})} \rho_\delta(z,a),$$

我们得到

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int \overline{\rho}_\delta(z,a)dz = 1, \qquad \text{for all } a \geq 0.$$

因此，根据定理1，我们得出结论。

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{p(1-s)}{G(\delta^{1-s})}\Psi_{s,G,\delta}(u)=\lim_{\delta\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x,\delta)}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^p}\overline{\rho}_\delta(|x-y|,|\nabla u(x)|)dydx$$
$$=K_{n,p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|^p dx.$$

2.2. 技术结果。
本节将给出与给定函数$u\in L^G(\Omega)$相关的正则化族的一些估计，这些估计将在下文中发挥作用。

设 $\rho\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 是一个标准磨光函数，满足 $supp(\rho)=B(0,1)$，并令 $\rho_r(x)=r^{-N}\rho\left(\frac{x}{r}\right)$ 恒等逼近，从而族 $\{\rho_r\}_{r>0}$ 是一个正函数族，满足

$$\rho_r\in C_c^\infty(\mathbb{R}),\qquad supp(\rho_r)=B(0,r)\qquad\text{and}\int_{\mathbb{R}^N}\rho_r\,dx=1. \tag{2.9}$$

对于每个 $u\in L^G(\Omega)$ 和 $r>0$，我们将磨光函数 $u_r\in L^G(\Omega)\cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 定义为

$$u_r=u(x)*\rho_r(x). \tag{2.10}$$

注意，如果 $u\in L^G(\mathbb{R}^N)$，特别地有 $u\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$，因此

$$u_r\to u\quad\text{in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^N),\quad\text{and a.e. in }\mathbb{R}^N. \tag{2.11}$$

此外，若 $u\in W^{1,G}(\mathbb{R})$，特别是 $u\in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$，则

$$\nabla u_k\to\nabla u\qquad\text{a.e. in }\mathbb{R}^N. \tag{2.12}$$

磨光函数满足以下有用估计。

Lemma 3. 设 $u\in L^G(\Omega)$，且 $\{u_r\}_{r>0}$ 为如（2.10）中所定义的族。则

$$\Psi_{s,G,\delta}(u_r)\le\Psi_{s,G,\delta}(u).$$

证明。首先，注意到

$$\begin{aligned}\Psi_{s,G,\delta}(u_r)&=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x,\delta)}G\left(\frac{|u_r(x)-u_r(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^N}\\&=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,\delta)}G\left(\frac{|u_r(x+h)-u_r(x)|}{|h|^s}\right)\frac{dh}{|h|^N}dx\\&=\int_{B(0,\delta)}\int_{\mathbb{R}^N}G\left(\frac{|u_r(x+h)-u_r(x)|}{|h|^s}\right)dx\frac{dh}{|h|^N}.\end{aligned}$$

此外，由于 G 是凸的，因此

$$\begin{aligned}G\left(\frac{|u_r(x+h)-u_r(x)|}{|h|^s}\right)&=G\left(\left|\int_{\mathbb{R}^N}u(x+h-z)-u(x-z)\rho_r(z)|h|^{-s}dz\right|\right)\\&\le\int_{\mathbb{R}^N}G\Big(|u(x+h-z)-u(x-z)||h|^{-s}\Big)\rho_r(z)dz.\end{aligned}$$

因此，由于 (2.9),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} G\left(\frac{|u_r(x+h)-u_r(x)|}{|h|^s}\right)dx &\le \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} G\Big(|u(x+h-z)-u(x-z)||h|^{-s}\Big)\rho_r(z)dzdx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} G\Big(|u(x+h-z)-u(x-z)||h|^{-s}\Big)dx\right)\rho_r(z)dz\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} G\Big(|u(x+h)-u(x)||h|^{-s}\Big)dx\right)\rho_r(z)dz\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} G\Big(|u(x+h)-u(x)||h|^{-s}\Big)dx.\end{aligned}$$

于是，我们得出

$$\begin{aligned}\Psi_{s,G,\delta}(u_r) &= \int_{B(0,\delta)}\int_{\mathbb{R}^N} G\left(\frac{|u_r(x+h)-u_r(x)|}{|h|^s}\right)dx\frac{dh}{|h|^N}\\ &\le \int_{B(0,\delta)}\int_{\mathbb{R}^N} G\Big(|u(x+h)-u(x)||h|^{-s}\Big)dx\frac{dh}{|h|^N}\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,\delta)} G\Big(|u(x+h)-u(x)||h|^{-s}\Big)\frac{dh}{|h|^N}dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^N}\\ &= \Psi_{s,G,\delta}(u).\end{aligned}$$

□

接下来，我们给出截断函数的估计。设 $\eta\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 使得 $\eta\equiv 1$ in $B(0,1)$,$supp(\eta)=B(0,2)$ 且 $0\le\eta\le 1$ in $\mathbb{R}^N$and $\|\nabla\eta\|_\infty\le 2$。给定 $k\in\mathbb{N}$，我们定义 $\eta_k(x)=\eta\left(\frac{x}{k}\right)$。注意，$\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$，并且对于 $k\in\mathbb{N}$，我们有

$$0\le\eta_k\le 1,\quad \eta_k=1\in B(0,k),\quad supp(\eta_k)=B(0,2k),\quad \text{and}\quad |\nabla\eta_k|\le\frac{2}{k}. \tag{2.13}$$

给定 $u\in L^G(\Omega)$，我们将截断函数 u_k、$k\in\mathbb{N}$ 定义为

$$u_k=\eta_k u. \tag{2.14}$$

接下来，我们证明一个关于截断函数的估计。

引理4. 设 $u\in L^G(\mathbb{R}^N)$ 和 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 如上文（2.14）中所定义。则

$$\Psi_{s,G,\delta}(u_k)\le\frac{\mathfrak{c}}{2}\Psi_{s,G,\delta}(u)+\frac{N\omega_N\mathfrak{c}^2}{2k(1-s)}\Phi_G(u\,\delta^{1-s}).$$

证明。由于 $0\le\eta_k\le 1$，根据 P_4），我们有（参见 [12, 引理 2.14]），

$$G\left(\frac{|u_k(x)-u_k(y)|}{|x-y|^s}\right)\le\frac{\mathfrak{c}}{2}G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)+\frac{\mathfrak{c}}{2}G\left(\frac{|u(x)||\eta_k(x)-\eta_k(y)|}{|x-y|^s}\right).$$

因此，由 P_5）、H_2）和（2.13），我们得出

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u(x)||\eta_k(x)-\eta_k(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^N} &\le \int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{2}{k}|u(x)||x-y|^{1-s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^N}\\ &\le \frac{\mathfrak{c}}{k}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x,\delta)} G\left(|u(x)||x-y|^{1-s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^N}\\ &\le \frac{\mathfrak{c}}{k}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x,1)} G\left(|u(x)|\delta^{1-s}|x-y|^{1-s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^N}\\ &\le \frac{\mathfrak{c}}{k}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x,1)} G\left(|u(x)|\delta^{1-s}\right)|x-y|^{1-s}\frac{dydx}{|x-y|^N}\\ &\le \frac{\mathfrak{c}}{k}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,1)} G\left(|u(x)|\delta^{1-s}\right)|w|^{1-s}\frac{dwdx}{|w|^N}\\ &= \frac{\mathfrak{c}N\omega_N}{k(1-s)}\int_{\mathbb{R}^N} G\left(|u(x)|\delta^{1-s}\right)dx,\end{aligned}$$

其中 ω_N 表示单位球面的表面 $\mathbb{S}^{N-1}$。 □

3. Asymptotic Behavior

我们从以下结果开始，该结果包含极限过程 $\delta\to 0^+$ 的关键要点。其证明在很大程度上依赖定理 6，阐明了要求 $G\in\mathcal{RV}_p(0)$ 的原因，以及考虑缩放 $^{p}{}_{(1-s)\ G(\delta^{1-s})}$ 的原因。

命题 1. 设 G 是满足 $(\mathcal{H})$ 和 $u\in C_c^2(\mathbb{R}^N)$ 的 Orlicz 函数。那么，对于每个$x\in\mathbb{R}^N$，我们有

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{p(1-s)}{G(\delta^{1-s})}\int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dy}{|x-y|^N} = K_{N,p}|\nabla u(x)|^p.$$

证明。对于 $x\in\mathbb{R}^N$ 和 $y\in B(x,\ \delta)$，$x\neq y$，我们有

$$\begin{aligned}\left|G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)-G\left(\left|\nabla u(x)\cdot\frac{x-y}{|x-y|^s}\right|\right)\right| &\le G'(\xi_M)\frac{|u(x)-u(y)-\nabla u(x)\cdot(x-y)|}{|x-y|^s}\\ &\le cG'(\xi_M)|x-y|^{2-s},\end{aligned}$$

对于某个取决于 u 的 C^2 范数的 $c>0$，以及某个使得

$$G'(\xi_M)=\max_{\xi\in[0,\|\nabla u\|_\infty\delta^{1-s}]} G'(\xi).$$

那么，

$$\begin{aligned}\frac{1}{G(\delta^{1-s})}\int_{B(x,\delta)}\left|G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)-G\left(\left|\nabla u(x)\cdot\frac{x-y}{|x-y|^s}\right|\right)\right|\frac{dy}{|x-y|^N} &\le c\,\frac{G'(\xi_M)\delta^{2-s}}{G(\delta^{1-s})}\\ &= c\,\frac{G'(\xi_M)}{G'(\delta^{1-s})}\frac{\delta^{1-s}G'(\delta^{1-s})}{G(\delta^{1-s})}\delta\\ &\le c\,p^+\frac{G'(\xi_M)}{G'(\delta^{1-s})}\delta,\end{aligned}$$

对于 $^{p^+}$ gi 由 (2.1) 给出。取 $\lambda_M\in[0,\|\nabla u\|_\infty]$ 使得 $\xi_M=\lambda_M\delta^{1-s}$，由 $(\mathcal{H})$，可得 t

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{G'(\xi_M)}{G'(\delta^{1-s})}=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{G'(\lambda_M\delta^{1-s})}{G'(\delta^{1-s})}=\lambda_M^{p-1}\le\|\nabla u\|_\infty^{p-1}.$$

于是可得

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{G(\delta^{1-s})}\Psi_{s,G,\delta}(u)=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{G(\delta^{1-s})}\int_{B(x,\delta)}G\left(\left|\nabla u(x)\cdot\frac{x-y}{|x-y|^s}\right|\right)\frac{dy}{|x-y|^N}.$$

接下来注意到，根据 $B(x,\delta)$ 上积分的对称性，我们有

$$\begin{aligned}\int_{B(x,\delta)}G\left(\left|\nabla u(x)\cdot\frac{x-y}{|x-y|^s}\right|\right)\frac{dy}{|x-y|^N}&=\int_{B(x,\delta)}G\left(|\nabla u(x)|\left|e_x\cdot\frac{x-y}{|x-y|^s}\right|\right)\frac{dy}{|x-y|^N}\\&=\int_{B(0,\delta)}G\left(|\nabla u(x)|\left|e\cdot\frac{h}{|h|^s}\right|\right)\frac{dh}{|h|^N}\\&=\int_{B(0,1)}G\left(|\nabla u(x)|\ \delta^{1-s}\ \left|e\cdot\frac{w}{|w|^s}\right|\right)\frac{dw}{|w|^N},\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 e_x、 e_0 分别是以 $x\in\mathbb{R}^N$ 和 $0\in\mathbb{R}^N$ 为起点的单位向量。因此，由于 $G\in\mathcal{RV}_p(0)$，根据（2.5），我们得出

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{G(\delta^{1-s})}\int_{B(0,1)}G\left(|\nabla u(x)|\ \delta^{1-s}\left|e\cdot\frac{w}{|w|^s}\right|\right)\frac{dw}{|w|^N}&=\int_{B(0,1)}\lim_{\delta\to 0^+}\frac{G\left(|\nabla u(x)|\ \delta^{1-s}\ \left|e\cdot\frac{w}{|w|^s}\right|\right)}{G(\delta^{1-s})}\frac{dw}{|w|^N}\\&=\int_{B(0,1)}|\nabla u(x)|^p\left|e\cdot\frac{w}{|w|^s}\right|^p\frac{dw}{|w|^N}\\&=\frac{K_{N,p}}{p(1-s)}|\nabla u(x)|^p.\end{aligned}$$

□

注1. 根据 [4, 命题 9], ，上述命题 1 可通过考虑具有有界梯度的函数来放宽。也就是说，设 $\mathcal{F}\subset C^1(\mathbb{R}^N)$ 满足 $\{\nabla u:\ u\in\mathcal{F}\}$ 在$C^1(\mathbb{R}^N)$中有界且等度连续。那么，

$$\lim_{\delta\to 0^+}\sup_{u\in\mathcal{F}}\left|\frac{1}{G(\delta^{1-s})}\int_{B(x,\delta)}G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dy}{|x-y|^N}-K_{N,p}|\nabla u|^p\right|=0.$$

令 M 为 $u\in\mathcal{F}$ 的 Lipschitz常数 上确界。由于集合 $\{\nabla u:\ u\in\mathcal{F}\}$ 等度连续，因此存在 $\mu:[0,\infty)\mapsto[0,\infty)$，使得当 $t\to 0^+$ 时， $\mu(t)\to\mu(0)=0$，并且对于所有 $u\in\mathcal{F}$，$|\nabla u(x)-\nabla u(y)|\le\mu(|x-y|)$。因此，若 $y\in B(x,\delta)$，则我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{u(x)-u(y)-\nabla u(x)\cdot(x-y)}{|x-y|^s}\right|&\le\int_0^1|\nabla u(x-t(x-y))-\nabla u(x)|dt\ |x-y|^{1-s}\\&\le\int_0^1\mu(t|x-y|)dt\ |x-y|^{1-s}\\&\le\mu(\delta)\delta^{1-s}.\end{aligned}$$

按照命题 1 的论证，我们得出，

$$\int_{B(x,\delta)}\left|G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)-G\left(\left|\nabla u(x)\cdot\frac{x-y}{|x-y|^s}\right|\right)\right|\frac{dy}{|x-y|^N}\le cG'(\xi_M)\mu(\delta)\delta^{1-s},$$

其中某个常数为 $c>0$，且某个 $\xi_M\in[0,\|\nabla u\|_\infty\delta^{1-s}]$。此外，由 (2.1)，

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{G'(\xi_M)\mu(\delta)\delta^{1-s}}{G(\delta^{1-s})}\le p^+\lim_{\delta\to 0^+}\frac{G'(\xi_M)}{G'(\delta^{1-s})}\mu(\delta)\le p^+\|\nabla u\|_\infty^p\lim_{\delta\to 0^+}\mu(\delta)=0,$$

在假设 $u\in C^1(\mathbb{R}^N)$ 下，命题 1 即得。

若考虑形式如 (1.5) 的截断泛函，即

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x,\delta)} G(|u(x)-u(y)|)J(|x-y|)dydx,$$

命题 1 的证明可以很容易地改编来证明以下结论。

命题 2. 设 G 为满足 $(\mathcal{H})$ 的 Orlicz 函数，$J\in\mathcal{RV}_q$ 是满足 $0<N+p+q$ 和 $u\in C_c^2(\mathbb{R}^N)$ 的某个 $q\in\mathbb{R}$ 下的核，且 $J\in\mathcal{RV}_q(0)$。那么，对每个 $x\in\mathbb{R}^N$，

$$\lim_{\delta\to0^+}\frac{N+p+q}{G(\delta)J(\delta)\delta^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x,\delta)} G(|u(x)-u(y)|)J(|x-y|)dydx = K_{N,p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|^p dx.$$

证明. 仿照命题 1 的论证，(3.1) 的类似结论为

$$\begin{aligned}\int_{B(x,\delta)} G\Big(|\nabla u(x)\cdot(y-x)|\Big)J(|x-y|)dy &= \int_{B(x,\delta)} G\Big(|\nabla u(x)|\,|e_x\cdot(y-x)|\Big)J(|x-y|)dy\\ &= \int_{B(0,\delta)} G\left(|\nabla u(x)|\,|e\cdot h|\right)J(|h|)dh\\ &= \int_{B(0,1)} G\Big(|\nabla u(x)|\ \delta\ |e\cdot w|\Big)J(\delta|w|)\delta^N dh,\end{aligned}$$

因此，若 G 满 足 $(\mathcal{H})$，并假设对于某个 $q\in\mathbb{R}$，$J\in\mathcal{RV}_q(0)$ 且满足 $0<N+p+q$，则可得

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{G(\delta)J(\delta)\delta^N}\int_{B(0,1)} G\Big(|\nabla u(x)|\ \delta|e\cdot w|\Big)J(\delta|w|)\delta^N dw,\\ &\qquad= \int_{B(0,1)}\lim_{\delta\to0^+}\frac{G\Big(|\nabla u(x)|\ \delta|e\cdot w|\Big)J(\delta|w|)}{G(\delta)J(\delta)}dh,\\ &\qquad= \int_{B(0,1)}|\nabla u(x)|^p|e\cdot w|^p|w|^q dw,\\ &\qquad= \frac{K_{N,p}}{N+p+q}|\nabla u(x)|^p.\end{aligned}$$

□

命题 1 中极限 $\delta\to0^+$ 所涉及的主要对象由式 (3.1) 给出。因此，给定 $a\in\mathbb{R}_+$ 和一个单位向量 e，我们定义

$$\varphi(a,s,\delta):=\int_{B(0,\delta)} G\left(a\left|e\cdot\frac{h}{|h|^s}\right|\right)\frac{dh}{|h|^N}.$$

注意，由于对称性，$\varphi(a,s,\delta)$ 与向量 e 无关。此外，

$$\varphi(a,s,\delta)=\int_{B(x,1)} G\left(a\,\delta^{1-s}\left|e\cdot\frac{w}{|w|^s}\right|\right)\frac{dw}{|w|^N}=\int_0^1\int_{\mathbb{S}^{N-1}} G\left(a\,\delta^{1-s}r^{1-s}|w_N|\right)dS_w\frac{dr}{r}.$$

s 和 δ 中的依赖关系由函数 $\varphi(a,s,\delta)$ 编码，因此，该函数也出现在极限 $s\to1^-$的刻画中。实际上，根据定理 2,

$$\tilde{G}(a):=\lim_{s\to1^-}(1-s)\int_0^1\int_{\mathbb{S}^{N-1}} G\left(a\,r^{1-s}|w_N|\right)dS_w\frac{dr}{r}=\lim_{s\to1^-}(1-s)\varphi(a,s,1).$$

由此可见， δ 中的适当缩放由 $G(\delta^{1-s})$ 在 $\delta \to 0^+$时的行为决定。因此，在对 $\delta \to 0^+$的泛函进行如 (1.1) 所示的局部化时，我们需要研究

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{G(\lambda \delta^{1-s})}{G(\delta^{1-s})},$$

其中 $\lambda = |\nabla u(x)| \left| v \cdot \frac{w}{|w|^s} \right|$。根据定理 6，当且仅当对某个 $p \in \mathbb{R}$， $G \in \mathcal{RV}_p(0)$ 时，上述极限存在。因此，只有当涉及 Orlicz 函数 G 且满足 $G \in \mathcal{RV}_p(0)$ 的泛函 (1.1) 时，局部化过程才是良定义的。

˜注 2. 让我们针对 $G(t)$ 的若干种选择，计算定理 2 中的函数 $G(a)$，以说明一般而言，极限 $s \to 1^-$ 和 $\delta \to 0^+$ 会产生不同的结果。

- 若 $G(t) = t^p$，则有：

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} G\left(a\, r^{1-s} |w_N|\right) dS_w = a^p r^{p(1-s)} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |w_N|^p dS_w = K_{N,p}\, a^p r^{p(1-s)}.$$

Then,

$$\tilde{G}(a) = \lim_{s \to 1^-} (1-s)\varphi(a,1) = \frac{K_{N,p}}{p} a^p$$

and

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{p(1-s)}{G(\delta^{1-s})} \varphi(a,\delta) = K_{N,p}\, a^p.$$

因此，极限 $s \to 1^-$ 和局部化 $\delta \to 0^+$ 所得结果相同，至多相差一个乘法常数。

- 若 $G(t) = t^p(1 + |\ln(t)|) = t^p + G_2(t)$，且 $p > 1$，则有（参见 [12, 例 2.17-(2)]），

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} G_2\left(a\, r^{1-s} |w_N|\right) dS_w = a^p r^{p(1-s)} \Big(K_{N,p} |\ln(a)| + K_{N,p,\ln} - (1-s) K_{N,p} \ln(r) \Big),$$

其中

$$K_{N,p,\ln} = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |w_n|^p \, |\ln |w_N|| dS_w.$$

直接计算可得

$$\varphi(a,s,\delta) = \frac{a^p}{p(1-s)} \delta^{p(1-s)} \left(K_{N,p} + K_{N,p} |\ln(a)| + K_{N,p,\ln} + \frac{K_{N,p}}{p} \Big(1 - p(1-s)\ln(\delta) \Big) \right), \tag{3.2}$$

因此，

$$\tilde{G}(a) = \lim_{s \to 1^-} (1-s)\varphi(a,1) = \frac{a^p}{p} \left(K_{N,p} + K_{N,p} |\ln(a)| + K_{N,p,\ln} + \frac{K_{N,p}}{p} \right).$$

接下来求 $\delta \to 0^+$ 时的极限。对于 $\delta < 1$，式 (3.2) 中给出的函数 $\varphi(a,s,\delta)$ 可写为

$$\varphi(a,s,\delta) = \frac{a^p}{p(1-s)} \delta^{p(1-s)} \left(K_{N,p} + K_{N,p} |\ln(a)| + K_{N,p,\ln} + \frac{K_{N,p}}{p} \Big(1 + p |\ln(\delta^{1-s})| \Big) \right).$$

$\varphi(a,s,\delta)$ 的行为显然由项 $\delta^{p(1-s)} \ln(\delta^{1-s}) = G(\delta^{1-s})$ 所刻画，并且

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{p(1-s)}{G(\delta^{1-s})} \varphi(a,\delta) = K_{N,p}\, a^p.$$

因此，对于 $G(t) = t^p(1 + |\ln(t)|)$，在极限 $\delta \to 0^+$ 下进行局部化会得到一个不同于在极限 $s \to 1^-$下所得的算子。

- 如果 $G(t) = \max\{t^q, t^p\}$，且满足 $1 < q < p$，则有（参见 [12, 例 2.17-(4)]）

$$\tilde{G}(a) = \begin{cases} \dfrac{K_{N,q}}{q} a^q & \text{if } a \le 1, \\ \dfrac{a^q}{q} \displaystyle\int_{|w_N| \le \frac{1}{a}} |w_N|^q dS_w + \frac{a^p}{p} \int_{|w_N| > \frac{1}{a}} |w_N|^p dS_w + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \int_{|w_N| > \frac{1}{a}} dS_w & \text{if } a > 1, \end{cases}$$

而通过直接计算，

$$\varphi(a,s,\delta) = \begin{cases} \dfrac{K_{N,q}}{q(1-s)} a^q \delta^{q(1-s)} & \text{if } a \le \frac{1}{\delta^{1-s}}, \\ \dfrac{a^q \delta^{q(1-s)}}{q(1-s)} \displaystyle\int_{|w_N| \le \frac{1}{a\delta^{1-s}}} |w_N|^q dS_w + \frac{a^p \delta^{p(1-s)}}{p(1-s)} \int_{|w_N| > \frac{1}{a\delta^{1-s}}} |w_N|^p dS_w \\ + \left(\dfrac{1}{q(1-s)} \delta^{q(1-s)} - \dfrac{1}{p(1-s)} \delta^{p(1-s)}\right) \displaystyle\int_{|w_N| > \frac{1}{a\delta^{1-s}}} dS_w & \text{if } a > \frac{1}{\delta^{1-s}}. \end{cases}$$

由于对于 $\delta < 1$，我们有 $G(\delta^{1-s}) = \delta^{q(1-s)}$，因此

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{q(1-s)}{G(\delta^{1-s})} \varphi(a,s,\delta) = K_{N,q}\, a^q.$$

下面的命题 3 对应于 [1, 引理 3.4] 和 [12, 引理4.2]。再次注意，根据问题的定义，函数尾部的贡献被忽略了。另一方面， δ 的作用体现为一种缩放，它按照正则变函数的规律作用于函数 G 。

命题 3. 设 $u \in W^{1,G}(\mathbb{R}^N)$。那么，对于 $\delta > 0$，我们有

$$\Psi_{s,G,\delta}(u) \le \frac{N\omega_N}{1-s} \Phi_G(|\nabla u| \delta^{1-s}).$$

证明。由于 $u \in W^{1,G}(\mathbb{R}^N)$，特别地 $u \in W^{1}_{,loc}{}^{1}(\mathbb{R}^N)$，因此

$$u(x+h) - u(x) = \int_0^1 \nabla u(x+th) \cdot h \, dt \qquad \text{for a.e. } x, h \in \mathbb{R}^N$$

因此，

$$\frac{|u(x+h) - u(x)|}{|h|^s} \le \int_0^1 |\nabla u(x+th)| |h|^{1-s} dt.$$

因此，由于 G 是凸的，我们得到

$$G\left(\frac{|u(x+h) - u(x)|}{|h|^s}\right) \le G\left(\int_0^1 |\nabla u(x+th)| |h|^{1-s} dt\right) \le \int_0^1 G(|\nabla u(x+th)| |h|^{1-s}) dt.$$

将此与 P_5) 结合起来，我们得出

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,\delta)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dy}{|x-y|^N}dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,\delta)} G\left(\frac{|u(x+h)-u(x)|}{|h|^s}\right)\frac{dh}{|h|^N}dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,\delta)}\int_0^1 G(|\nabla u(x+th)||h|^{1-s})dt\frac{dh}{|h|^N}dx \\
&= \int_0^1\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,\delta)} G(|\nabla u(x+th)||h|^{1-s})\frac{dh}{|h|^N}dxdt \\
&= \int_0^1\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,1)} G(|\nabla u(x+t\delta w)|\delta^{1-s}|w|^{1-s})\frac{dw}{|w|^N}dxdt \\
&\le \int_0^1\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,1)} G(|\nabla u(x+t\delta w)|\delta^{1-s})|w|^{1-s}\frac{dw}{|w|^N}dxdt \\
&= \int_0^1\int_{B(0,1)}\int_{\mathbb{R}^N} G(|\nabla u(x+t\delta w)|\delta^{1-s})dx|w|^{1-s-N}dwdt \\
&= \int_0^1\int_{B(0,1)}\int_{\mathbb{R}^N} G(|\nabla u(x)|\delta^{1-s})dx|w|^{1-s-N}dwdt \\
&= \int_{B(0,1)}|w|^{1-s-N}dw\int_{\mathbb{R}^N} G(|\nabla u(x)|\delta^{1-s})dx \\
&= \frac{N\omega_N}{1-s}\Phi_G(|\nabla u|\delta^{1-s}).
\end{aligned}$$

□

接下来，我们讨论下极限不等式。

命题 4。设 $u\in C^1(\mathbb{R}^N)$。那么，对每个 $x\in\mathbb{R}^N$，我们有

$$\liminf_{\delta\to 0^+}\frac{1}{G(\delta^{1-s})}\int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dy}{|x-y|^N}\ge K_{N,p}|\nabla u(x)|^p.$$

证明。给定 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对所有 $x\in\mathbb{R}^N$ 和 $y\in B(x,\delta)$，

$$|u(x)-u(y)-\nabla u(x)\cdot(y-x)|\le\epsilon|x-y|,$$

从而

$$\left|\nabla u(x)\cdot\frac{x-y}{|x-y|}\right||x-y|^{1-s}\le\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}+\epsilon|x-y|^{1-s}.$$

反过来，给定 $\delta>0$，令 $\varepsilon=\varepsilon(\delta)>0$ 定义为

$$\varepsilon=\min\{\epsilon>0:\ |u(x)-u(y)-\nabla u(x)\cdot(y-x)|\le\epsilon|x-y|,\ \text{for } y\in B(x,\delta)\}.$$

显然，对于函数 $u\in C^1(\mathbb{R}^N)$，ε 是定义良好的；此外，当 $\delta\to 0^+$时，ε 关于 δ 和 $\varepsilon\to 0$递减。接下来，固定 $\eta\in(0,1)$。利用 G的凸性，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x,\delta)} G\left(\left|\nabla u(x)\cdot\frac{x-y}{|x-y|}\right||x-y|^{1-s}\right)\frac{dy}{|x-y|^N}\\
&\quad\le \int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{(1-\eta)|x-y|^s}\right)\frac{dy}{|x-y|^N}+\int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{\varepsilon}{\eta}|x-y|^{1-s}\right)\frac{dy}{|x-y|^N}\\
&\quad= \int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{(1-\eta)|x-y|^s}\right)\frac{dy}{|x-y|^N}+\omega_N\int_0^\delta G\left(\frac{\varepsilon}{\eta}r^{1-s}\right)\frac{dr}{r}\\
&\quad= \int_{B(x,\delta)} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{(1-\eta)|x-y|^s}\right)\frac{dy}{|x-y|^N}+\frac{\omega_N}{1-s}\int_0^{\frac{\varepsilon}{\eta}\delta^{1-s}}\frac{G(t)}{t}dt.
\end{aligned}$$

接下来，固定 $\delta_0>0$ 并取 $\varepsilon_0=\varepsilon(\delta_0)$。由于根据定理 8,

$$\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{G(\frac{\varepsilon_0}{\eta}\delta^{1-s})}\int_0^{\frac{\varepsilon_0}{\eta}\delta^{1-s}}\frac{G(t)}{t}dt=\frac{1}{p},$$

由此可得

$$\lim_{\delta\to0^+}\frac{p}{G(\delta^{1-s})}\int_0^{\frac{\varepsilon_0}{\eta}\delta^{1-s}}\frac{G(t)}{t}=\left(\frac{\varepsilon_0}{\eta}\right)^p.$$

因此，由于 ε 随 δ 递减,

$$\lim_{\delta\to0^+}\frac{p(1-s)}{G(\delta^{1-s})}\int_0^{\frac{\varepsilon}{\eta}\delta^{1-s}}\frac{G(t)}{t}\le\left(\frac{\varepsilon_0}{\eta}\right)^p,\qquad\text{for all }\delta_0>0.$$

由于 $\delta_0>$0 是任意的，且当 $\delta\to0^+$ 时 $\varepsilon\to0$，我们可以取任意小的 ε_0，因此,

$$\lim_{\delta\to0^+}\frac{p(1-s)}{G(\delta^{1-s})}\int_0^{\frac{\varepsilon}{\eta}\delta^{1-s}}\frac{G(t)}{t}=0.$$

因此,

$$\begin{aligned}
|\nabla u(x)|^p&=\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{G(\delta^{1-s})}\int_{B(x,\delta)}G\left(\left|\nabla u(x)\cdot\frac{x-y}{|x-y|}\right||x-y|^{1-s}\right)\frac{dy}{|x-y|^N}\\
&\le\liminf_{\delta\to0^+}\int_{B(x,\delta)}G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{(1-\eta)|x-y|^s}\right)\frac{dy}{|x-y|^N}.
\end{aligned}$$

最后，我们令 $v=\frac{1}{1-\eta}u$，并取极限 $\eta\to0^+$ （参见 [1, 引理 3.3]）。 □

现在我们可以证明本研究的主要结果。

定理 3 的证明。证明过程与 [1, 定理1.1]中的相同。令 $u\in W^{1,G}(\mathbb{R}^N)$，并令 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$为由 (2.10) 定义的序列。注意，由 (2.8)， $u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$。于是，由命题 3、引理 3 和命题 4，可得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|^p\,dx&\ge\limsup_{\delta\to0^+}\frac{1}{G(\delta^{1-s})}\int_{B(x,\delta)}G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dy}{|x-y|^N}\\
&\ge\liminf_{\delta\to0^+}\frac{1}{G(\delta^{1-s})}\int_{B(x,\delta)}G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dy}{|x-y|^N}\\
&\ge\liminf_{\delta\to0^+}\frac{1}{G(\delta^{1-s})}\int_{B(x,\delta)}G\left(\frac{|u_k(x)-u_k(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dy}{|x-y|^N}\\
&\ge\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_k(x)|^p\,dx.
\end{aligned}$$

由 (2.12) 和 Fatou 引理，我们得出

$$\liminf_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_k(x)|^p\,dx\geq\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|^p\,dx.$$

□

我们通过证明定理 4 来结束本节。

定理 4 的证明。令 $u\in L^G(\mathbb{R}^N)$，并且对于 $k\in\mathbb{N}$，令 u_k 为在 (2.10) 中定义的函数，其中 $r=\frac{1}{k}$。那么，由于 (1.4) 和引理 3，存在 $c>0$ 使得

$$\liminf_{\delta\to0^+}\frac{1}{G(\delta^{1-s})}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(x,\delta)}G\left(\frac{|u_k(x)-u_k(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^N}<c,\qquad\text{for } k\in\mathbb{N}.$$

因此，根据命题 4,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_k(x)|^p dx\leq c\qquad\text{for } k\in\mathbb{N}.$$

由于 $u\in L^G(\mathbb{R}^N)$，并且根据 ($\mathcal{H}$),

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u_k(x)|^p\,dx\leq c_\ell\int_{\mathbb{R}^N}G(|u(x)|)dx\qquad\text{for } k\in\mathbb{N},$$

序列 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中有界，因此，存在 $v\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 以及一个子序列（仍记为 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$），使得 $u_k\rightharpoonup v$ 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中成立。由于 $u\in L^G(\mathbb{R}^N)$，特别地，$u\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$，因此，根据 (2.11)，我们得出 $v=u$，从而 $u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$。□

4. Further comments

4.1. 序列的情形。

我们先回顾泛函的 Γ-收敛的定义。

定义 4. 设 X 为一个度量空间，且 $F,F_k:X\mapsto\overline{\mathbb{R}}$。若对每个 $u\in X$，以下条件均成立，则称 F_k Γ 收敛到 F:

(1)（下极限不等式）对于每个满足 $u_k\to u$ 属于 X 的序列 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset X$，

$$F(u)\leq\liminf_{k\to\infty}F_k(u_k).$$

(2)（上极限不等式）对于每个 $u\in X$，存在一个序列 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset X$，使得 $u_k\to u$ 属于 X，并且

$$\limsup_{k\to\infty}F_k(u_k)\leq F(u).$$

泛函的完整 Γ-收敛结果还要求有界序列具有紧性。在我们的设定中，这意味着

命题 5. 设 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset L^G(\mathbb{R}^N)$。若

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{G(\delta_k^{1-s})}\Psi_{s,G,\delta_k}(u_k)<+\infty\qquad and\qquad\sup_{k\in\mathbb{N}}\Phi_G(u_k)<+\infty,$$

则对于某个 $u\in W^{1,\,p}(\mathbb{R}^N)$，$u_k\to u$ 属于 $L^G_{loc}(\mathbb{R}^N)$。

鉴于前几节证明的结果，只要证明下极限不等式和命题 5，就可得出一个完整的 Γ-收敛结果。结合命题 1 和引理 3 即可实现第一个目标。

命题 6. 设 $\delta_k \to 0$和 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^G(\mathbb{R}^N)$ 是一个序列，使得对于某个 $u \in W^{1,G}(\mathbb{R}^N)$，当 $k \to +\infty$ 时， $u_k \to u$属于 $L^G(\mathbb{R}^N)$。那么，

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p dx \le \liminf_{k\to+\infty} \frac{p(1-s)}{G(\delta_k^{1-s})} \Psi_{s,G,\delta_k}(u_k).$$

证明。证明过程与 [4, 定理 1-D2)]中的证明相同。对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $r > 0$，令$u_{k,\ r}$ 和 u_r分别表示按照（2.10）定义的 u_k 和 u 的正则化函数。由命题 1 和引理 3,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_r(x)|^p dx = \lim_{k\to+\infty} \frac{p(1-s)}{G(\delta_k^{1-s})} \Psi_{s,G,\delta_k}(u_{k,r}) \le \liminf_{k\to+\infty} \frac{p(1-s)}{G(\delta_k^{1-s})} \Psi_{s,G,\delta_k}(u_k).$$

我们得出结论，因为根据磨光子的标准性质， $u_r \to u$在 $W^{1,\ p}$（$\mathbb{R}^N$）中当 $r \to 0$时成立。 □

关于命题 5，我们注意到以下事实。在分析完整泛函 $s \to 1^+$ 的极限时，

$$\Psi_{s,G,\infty}(u) = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^N},$$

下极限不等式和紧性借助以下不等式得以证明（参见[12, 定理5.2]），

$$(1-s_1)\Psi_{s_1,G,\infty}(u) \le 2^{1-s_1}(1-s_2)\Psi_{s_2,G,\infty}(u) + \frac{2\mathfrak{c}\omega_N(1-s_1)}{s_1}\Phi_G(u). \tag{4.1}$$

这个不等式有两方面的用途。一方面，通过固定$s_1 = t$ 某个 $0 < t < 1$，然后令 $s_2 = s_k \to 1^-$ 在 $k \to +\infty$ 时取极限，并通过令 $t \to 1^-$取极限得出结论，可以证明下极限不等式。换言之，不等式 (4.1) 可以在 s_1处利用两项来控制 $(1-s)\Psi_{s,\ G,\ \infty}$：一项在 s_2 处，且不依赖于 s_1；另一项则在 $s_1 \to 1^-$时趋于零。

另一方面，令 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 满足

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}(1-s_k)\Psi_{s_k,G,\infty}(u_k) < +\infty \qquad \text{and} \qquad \sup_{k\in\mathbb{N}}\Phi_G(u_k) < +\infty.$$

接着，固定 $0 < t < 1$，于是由 (4.1) 可得 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{t,\ G}(\mathbb{R}^N)$ 有界，因此，借助 [12, 定理 3.1], 所提供的紧性，存在 $u \in L^G(\mathbb{R}^N)$，使得$u_k \to u$ 在 $L^G_{loc}(\mathbb{R}^N)$ 中成立。

将 [12, 定理 5.2] 的思路调整到 $\delta \to 0^+$ 的情形，可得如下结果。

引理 5. 设 $u \in L^G(\mathbb{R}^N)$且 $0 < \delta_2 < \delta_1$。则

$$\frac{1}{G(\delta_1^{1-s})}\Psi_{s,G,\delta_1}(u) \le \frac{1}{G(\delta_2^{1-s})}\Psi_{s,G,\delta_2}(u) + \frac{\mathfrak{c}\,\omega_N N}{s}\left(1-\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^s\right)\frac{1}{G(\delta_2^{1-s})}\Phi_G\left(u\,\delta_2^{-s}\right).$$

遗憾的是，与 $s \to 1^-$的情形不同，在后者中，该函数在整个$\mathbb{R}^N$ 上积分，且与 $0 < s < 1$ 无关（因此在极限过程的每一步，我们都能完整地了解 u）；根据问题本身的定义，即 $\delta \to 0^+$，我们无法消去引理 5 中第二项对 δ_2 的依赖。也就是说，给定 $\delta_k \to 0$ 和 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，使得

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{G(\delta_k^{1-s})}\Psi_{s,G,\delta_k}(u_k) < +\infty \qquad \text{and} \qquad \sup_{k\in\mathbb{N}}\Phi_G(u_k) < +\infty,$$

引理 5 并不能让我们得出结论

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\Psi_{s,G,\delta_0}(u_k) < +\infty, \tag{4.2}$$

对某个 $\delta_0 > 0$ 固定值。注意，若 (4.2) 成立，则 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{s,G,\delta_0}(\mathbb{R}^N)$ 有界，并且根据定理 12，我们可以得到一个收敛子列的存在性。我们将此留作一个开放问题。

4.2. 当 $\delta \to 0^+$ 时谱的行为。
与该泛函相关的非局部算子的谱

$$\Psi_{s,G,\infty}(u) = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} G\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dydx}{|x-y|^N},$$

在 [24] 中进行了分析。特别地，给定 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，作者分析了以下问题

$$\begin{cases} (-\Delta_g)^s_\infty u = \lambda g(|u|)\frac{u}{|u|}, & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \mathbb{R}^N\backslash\Omega, \end{cases} \tag{4.3}$$

其中 $(-\Delta_g)^s_\infty$ 表示分数阶 g-拉普拉斯算子，

$$(-\Delta_g)^s u(x) = (-\Delta_g)^s_\infty u(x) = p.v.\int_{\mathbb{R}^N} g(|D_s u|)\frac{D_s u}{|D_s u|}\frac{dy}{|x-y|^N},$$

其中 $g = G'$ 和

$$D_s u = D_s u(x,y) = \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^s}.$$

算子 $(-\Delta_g)^s$ 可视为 g-拉普拉斯算子的非局部对应物，即

$$-\Delta_g u = -div\left(g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right).$$

问题 (4.3) 是对应于以下极小化问题的欧拉-拉格朗日方程

$$\alpha_{1,\mu} = \inf_{u\in M_\mu}\frac{\Psi_{s,G,\infty}(u)}{\Phi_G(u)} \qquad \text{with} \qquad M_\mu = \{u \in W_0^{s,G,\infty}(\Omega) : \Phi_g(u) = \mu\},$$

其中 $W^{s,\,G,\,0}{}^{\infty}(\Omega) = \{u \in W^{s,G,\infty}(\Omega) :\ u = 0$ 在 $\mathbb{R}^N\backslash\Omega\}$上。之后，这一构造被扩展（参见 [2]），从而得到一个递增的变分特征值序列 $\{\lambda_k^{s,G,\infty}\}_{k\in\mathbb{N}}$。由于泛函的 Γ- 收敛蕴含这些泛函的极小值收敛（参见 [8]），根据 [12], 的结果，作者证明了（参见 [24, 命题 6.3]），

$$\lim_{s\to 1^-}(1-s)\alpha_{1,\mu,s} = \alpha_{1,\mu,1}.$$

对于情形 $G(t) = t^p$， [9]中证明了类似结果。

因此，当讨论分数阶 g-拉普拉斯算子的截断版本时，自然会提出同样的问题：给定视界 $\delta > 0$、$s \in (0,1)$、$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，考虑问题

$$\begin{cases} (-\Delta_g)^s_\delta u = \lambda g(|u|)\frac{u}{|u|}, & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial_\delta\Omega, \end{cases}$$

其中，$(-\Delta_g)^s_\delta$ 表示周动力学分数阶 g-拉普拉斯算子，

$$(-\Delta_g)^s_\delta u(x) = p.v.\int_{B(x,\delta)} g(|D_s u|)\frac{D_s u}{|D_s u|}\frac{dy}{|x-y|^N}$$

且 $\partial\Omega_\delta = \{z \in \mathbb{R}^N\backslash\Omega :\ |x-z| < \delta$，对于 $x \in \Omega\}$。情形 $G(t) = t^p$ 已在 [5, 6], 中得到处理，并证明了

$$\frac{1}{\delta^{p(1-s)}}\lambda_k^{\delta,s,p} \to K_{N,p}\,\lambda_k^{1,p} \qquad \text{as } \delta \to 0^+, \text{ for } k \in \mathbb{N}.$$

根据上述结果，一旦证明了完整的 Γ-收敛，预期以下结论成立：

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{p(1-s)}{G(\delta^{1-s})}\lambda_1^{\delta,s,G}=K_{N,p}\lambda_1^{1,p},$$

其中 G 是满足 $(\mathcal{H})$ 和 $p=index(G)$ 的 Orlicz 函数。

References

[1] A. Alberico、A. Cianchi、L. Pick 和 L. Slav´ık´ova，林琴国家科学院院刊：林琴数学与应用学报，31（2020），第 879–899 页。[2] S. Bahrouni、H. Ounaies 和 A. Salort，复变函数与椭圆方程，（2022），第 1–24 页。[3] K. Bal、K. Mohanta 和 P. Roy，非线性分析：理论、方法与应用：国际多学科期刊，199（2020），第 111928 页，10。[4] J. C. Bellido、C. Mora-Corral 和 P. Pedregal，变分法与偏微分方程，（），第 – 页。[5] J. C. Bellido 和 A. Ortega，变分法与偏微分方程，（），论文编号：。[6] J. C. Bellido 和 A. Ortega，应用数学与优化，84（2021），第 S253–S276 页。[7] J. Bourgain、H. Brezis 和 P. Mironescu，载于《最优控制与偏微分方程》，IOS，阿姆斯特丹，2001 年，第 439–455 页。[8] A. Braides，牛津数学及其应用讲座丛书第 22 卷，牛津大学出版社，牛津，2002 年。[9] L. Brasco、E. Parini 和 M. Squassina，离散与连续动力系统：A辑，36（2016），第 1813–1845 页。[10] H. Brezis 和 H.-M. Nguyen，林琴国家科学院院刊：林琴数学与应用学报，27（2016），第 515–533 页。[11] E. Correa 和 A. de Pablo，非线性分析进展，9（2020），第 305–326 页。[12] J. Fern´andez Bonder 和 A. M. Salort，泛函分析杂志，277（2019），第 333–367 页。[13] R. Ferreira、P. H¨ast¨o 和 A. M. Ribeiro，当代数学通讯，22（2020），第 1850079 页，共 25 页。[14] J. Karamata，克雷尔杂志（1931），第 27–39 页。[15] J. Karamata，数学杂志，33（1931），第 294–299 页。[16] J. Karamata，法国数学会通报，61（1933），第 55–62 页。[17] G. Leoni 和 D. Spector，泛函分析杂志，261（2011），第 2926–2958 页。[18] G. Leoni 和 D. Spector，泛函分析杂志，（），第 – 页。[19] J. R. M.A. Krasnoselskii，P. Noordhoff 有限公司，格罗宁根，，1961 年，由 Leo F. Boron 根据俄文第一版翻译，MR 0126722。[20] V. Maz'ya 和 T. Shaposhnikova，泛函分析杂志，（），第 – 页。[21] V. Maz'ya 和 T. Shaposhnikova，泛函分析杂志，201（2003），第 298–300 页。[22] H.-M. Nguyen，泛函分析杂志，237（2006），第 689–720 页。[23] A. C. Ponce，变分法与偏微分方程，19（2004），第 229–255 页。

[24] A. Salort，微分方程杂志，268（2020），第 5413–5439 页。[25] A. Salort、B. Schvager 和 A. Silva，微分与积分方程：国际理论与应用期刊，36（2023），第 573–592 页。[26] A. Salort 和 H. Vivas，微分方程杂志，327（2022），第 166–188 页。[27] S. A. Silling，固体力学与物理学杂志，48（2000），第 175–209 页。