瑞利模型的第一性原理推导：用于各向异性非均匀体散射的 Gans-德拜模型

M. H. Shachar 和 J. E. Garay*

加利福尼亚大学圣迭戈分校材料科学与工程项目、机械与航空航天工程系，拉霍亚，加利福尼亚州 *通讯邮箱：jegaray@ucsd.edu

摘要

散射问题对于描述光在多种介质中的传播十分重要，这些介质包括大气、胶体溶液、超材料、玻璃陶瓷复合材料、透明多晶陶瓷以及表面。瑞利-甘斯-德拜（RGD）近似在描述各种散射现象方面取得了巨大成功。我们从麦克斯韦方程组的微扰出发，推导出一种广义 RGD 表述。与大多数 RGD 散射研究不同，我们的表述能够对线性介质中的任意软散射现象进行建模，包括随机过程引起的散射、有损介质中的散射，以及发生于多个长度尺度上的各向异性非均匀体所产生的散射。我们的第一性原理推导明确阐释了其背后的假设，并为更一般的处理方法提供了出发点。该推导还有助于加深对软散射的理解。研究表明，散射源并非通常所认为的界面，而是发射未补偿辐射的过剩加速电荷。文中还给出了并讨论了方程的近似形式。例如，我们证明，在大尺寸 RGD 极限下，散射系数与投影相移的相关长度及方差成正比。

目录

1. 引言 2. 电介质中的软散射场 2.1. 散射方程的一阶微扰 2.2. 随机源项 2.3. 一阶微扰的有效性 2.4. 使用并矢格林函数求解 3. 总散射强度 3.1. 欧姆型均匀弱各向异性介质中的远场强度 3.2. 远场散射强度的一般表达式 3.2.1. 来自随机过程 3.2.2. 来自空间平稳随机过程 3.3. 体近似 3.4. 散射源的强度与空间相干性的作用 3.5. 各向同性随机过程 3.6. 总散射 3.7. 散射系数 3.7.1. 完整散射系数

3.7.2. 无吸收散射介质中的各向同性随机过程 3.7.3. 瑞利小尺寸极限 3.7.4. 各向同性大尺寸 RGD 极限 4. 讨论 5. 结论 6. 致谢 7. 附录 8. 参考文献

表 1：符号列表

符号	Name
$\boldsymbol{E}$	电场；电场相量
$\nabla\times$	旋度算子
μ	相对磁导率
ϵ	相对磁化率张量
k_0	真空中光的波数
μ_0	真空磁导率
ϵ_0	真空磁化率
ω	角频率
λ_0	真空波长
$\boldsymbol{r}$	空间坐标
$\bar{\epsilon}$	平均介电张量
$\overline{\boldsymbol{E}}$	入射场
$\bar{E}_0$	单向入射场振幅
$\widehat{\boldsymbol{E}}_0$	单向入射偏振方向
$\boldsymbol{k}$	入射光波矢
$\tilde{\boldsymbol{E}}$	由非均匀性引起的电散射场
$\tilde{\epsilon}$	介电常数涨落张量
$\boldsymbol{Q}$	散射源项
σ	电导率张量
$\boldsymbol{J}$	电流密度；电流密度相量
t	time
$\langle\cdot\rangle_W$	样本系综平均
$\langle\cdot\rangle_V$	体积平均
$\|\cdot\|$	线性算子范数
$\lambda_{max}(A)$	A的最大特征值
<escape>†</escape>上标符号	表示伴随；共轭转置
$\mathrm{tr}(A)$	A 的迹
$\Delta\phi$	未受扰动解与受扰动解之间的相位差
L_c	散射源的相关长度
$\tilde{n}_{max}$	最大折射率差

m	相对折射率
x	散射体尺寸参数
$\Gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$	位于 $\boldsymbol{r}'$ 的光源在 $\boldsymbol{r}$ 处的并矢格林函数
$\delta(\boldsymbol{r})$	三维狄拉克δ函数
$\mathcal{V}$	三维向量空间；赋范向量空间
I_d	单位张量；单位矩阵
$\otimes$	复并矢积
$\bar{n}$	折射率均方根
$\langle\cdot\rangle_\Omega$	沿所有晶体学取向的平均值
n_{ff}	远场折射率
$\Re$	复数的实部
I	强度（辐照度）
β	坡印廷矢量与受照表面法线之间的夹角
$\bar{n}_{ff}$	取向平均远场折射率
c	真空光速
G	强度比例常数
$\tilde{I}$	散射强度
$\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''$	散射源的位置
$\mathcal{v}$	散射体体积中的点集
$1_{\mathcal{v}}(\boldsymbol{r})$	散射体积指示函数
$\boldsymbol{q}$	动量传递
$\boldsymbol{\rho}$	两个脉冲点源之间的向量差
$\hat{r}_\perp$	来自$\hat{\boldsymbol{r}}$ 算子的向量拒斥
I_0	入射光强
K	单位电场波的散射源协方差函数
$\mathcal{F}$	傅里叶变换
$\mathcal{F}_x$	变量 x 上的傅里叶变换
$\mathcal{F}^{-1}$	逆傅里叶变换
$\star$	卷积算子
V	散射介质体积
$\mathcal{v}_I$	散射体内部体积中的点集
$\mathcal{v}_S$	散射体表面体积中的点集
$\lvert\mathcal{v}_I\rvert$	内部点的体积
$\lvert\mathcal{v}_S\rvert$	表面点的体积
$\hat{\boldsymbol{\rho}}$	与 $\boldsymbol{\rho}$ 平行的单位向量
$\boldsymbol{Q}_\perp$	源项在观测方向上的向量拒斥
k	入射光的波数
$Q_\perp$	$\boldsymbol{Q}_\perp$ 的模
Var_W	样品系综方差
K_0	散射源强度
κ	散射源自相关
$\kappa_{\vec{E}}$	入射光振幅自相关
κ_W	结构自相关
$\tau_{\vec{E}}$	入射光的相干时间

$L_{\bar{E}}$	入射光的相干长度
W	由随机过程产生的样品集合
ρ	$\boldsymbol{\rho}$的模
$q(\hat{\boldsymbol{r}})$	$\boldsymbol{q}$ 在$\hat{\boldsymbol{r}}$方向上的模
φ	$\boldsymbol{k}$ 与$\boldsymbol{r}$之间的夹角
$\hat{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$向量空间中的所有单位向量集合
$\hat{\boldsymbol{r}}$	与$\boldsymbol{r}$平行的单位向量
α_{sc}	总散射强度
A	横截面积
ℓ	光程
μ_{sc}	散射系数
L_W	非均匀性的相干长度
K'	比例常数
n	折射率（通常为张量）
$\Im$	复数的虚部
$*$-上标	复共轭
$\cdot_{\hat{\boldsymbol{r}}}$	沿所有观测方向的平均值
V_{corr}	相关体积
$\widehat{\boldsymbol{k}}$	平行于 $\boldsymbol{k}$ 的单位向量
$\mathcal{V} \perp \widehat{\boldsymbol{k}}$	所有与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的向量
$\delta_k(\boldsymbol{q})$	半径为 k 的球体的狄拉克表面δ函数
$\delta(r)$	一维狄拉克δ函数
$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$	向量 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 的内积
$L_{corr}(\widehat{\boldsymbol{k}})$	方向 $\widehat{\boldsymbol{k}}$ 上的相关长度
$\hat{k}_{\perp}$	$\widehat{\boldsymbol{k}}$ 算子的向量拒斥
$\frac{d\phi_{\perp}}{dl}$	沿$\hat{k}$ 方向传播的光的延迟系数

1. 引言

由非均匀性引起的光散射在自然界和技术领域中无处不在。重要的例子包括大气中粒子产生的光散射 [1] 以及胶体材料中的光散射 [2]。评估光散射对于开发新型光学材料至关重要，例如光学超材料 [3-6], 玻璃陶瓷复合材料 [7] 和透明多晶陶瓷 [8,9]。本系列两篇论文的总体目标是开发用于处理非均匀介质中散射问题的解析方法。我们认为，所推导出的表达式将有助于设计和测试新型光学材料的实验人员，也有助于对模型进一步开发感兴趣的科学家。这些成果的益处包括清晰列出的假设，以及由此得到的解析方程，这些方程可作为未来解析或数值工作的起点。

我们提出了一种处理弱非均匀性引起的弹性电磁散射的方法。我们相信，本文采用的方法及其清晰阐述的假设，有助于建立光学性质与材料设计之间的联系。特别是，本文推导的表达式应有助于研究当代材料开发，例如生物材料[2,3], 玻璃陶瓷复合材料[4,5] 和多晶光学陶瓷[6-8]。

尽管由此得到的方程很重要，但其中大多数此前已以某种形式见诸文献[9-24]。1881年，瑞利[9]采用麦克斯韦方程组的一阶微扰来描述光被介电常数和磁导率均存在弱标量非均匀性的介质散射的现象。后来，Gans重新推导了这一结果[10]。瑞利在同一篇论文中，将其结果用于分析均匀扰动的球体（以及无限长圆柱体）。1910年，爱因斯坦[11] 采用麦克斯韦方程组的一阶微扰来描述接近临界点的流体所产生的散射。介电常数涨落用密度涨落表示，而密度涨落则通过统计力学加以描述。1914年，布里渊[12] 将爱因斯坦的结果应用于热涨落引起的密度涨落。1949年，德拜和Bueche[13] 利用爱因斯坦的结果开发了一种利用散射测量表征非均匀性的方法。德拜和Bueche还利用相关函数重新表述了强度方程。在上述所有研究中，非均匀性始终都用标量介电常数来描述。1955年，Goldstein and Michalik[14] 将德拜和Bueche的结果扩展至具有单轴对称性的非吸收性非均匀体。1980年，Ross和Nieto-Vesperinas[15]发表论文，将该问题推广到吸收介质。同年，Ross和Jarvis发表了两篇系列论文[16, 17] ，将该问题推广到各向异性介质。

上文讨论的许多结果将在此重现。有鉴于此，本文的目标有四个方面：

(1) 给出清晰的第一性原理推导

(2) 尽可能长时间地保持方程的普适性

(3) 阐释重要结果的物理解释

(4) 重新表述 结果，使其更易于用于与实验进行比较 t

第一个目标通过明确阐述所有假设、定义和技术来实现，尤其是那些通常被视为理所当然的内容，例如体近似以及该理论中的随机性要素。第二个目标则通过在必要之前避免采用假设来实现。因此，大部分分析仍具有足够的通用性，能够适用于各向异性介电常数场和吸收。明确指出这些假设，也为未来有意将这些技术应用于违反某些假设的问题的研究人员提供了自然的切入点。第三个目标通过重新表述方程，使其含义更加清晰，并进一步给出相应的解释来实现。第四个目标则通过使用散射系数来表述散射过程来实现，该系数可以从直线传输测量[25]中提取。

尽管这并非本文的主要目标，文中仍将展示一些新颖的结果。尤其是，许多结果还进行了额外的散射系数计算，使其更便于用于直线传输模型，而这类模型常用于与实验结果进行比较。此外，**第 3.2 节**给出了散射体积几何形状对散射强度的影响。此外，**第 3.7.4 节**给出了适用于大尺寸瑞利-甘斯-德拜（RGD）散射系数的广义方程。

我们采用一阶微扰方法求解散射方程中的散射场。随后，我们求得由微扰场引起的远场散射强度。由于通常难以提供样品在每一点的微观性质（例如介电常数和磁导率），因此我们

将散射源项视为随机的。利用这种方法，我们给出了描述由小散射体积引起的总散射强度的表达式。

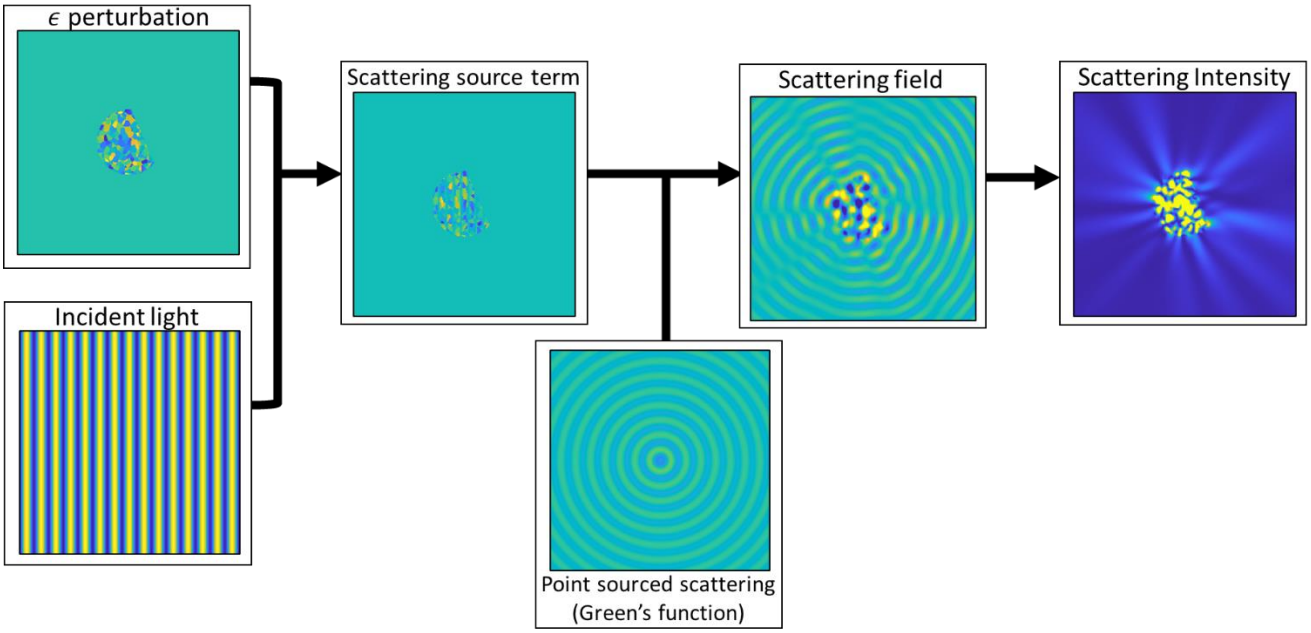

图 1： 计算非均匀散射强度的流程示意图

图 1 展示了用于求解非均匀性所致软散射强度的分析流程示意图。非均匀性的信息以空间依赖的 ϵ 函数形式给出。此外，入射光的信息通过其波长和传播方向（或波矢）给出。结合非均匀性和入射光的信息，可以计算散射源项。散射源项与散射体积内由非均匀性诱导的超额加速电荷成正比。利用线性原理，将光源分解为脉冲及其远场响应（由远场格林函数给出），然后将这些响应相加，得到整体远场散射场。最后，对该场取平方，得到一个与总散射强度成正比的量。为计算散射系数，可以对所有取向上的散射场强度进行积分。

图 2中的步骤将**图 1**中的步骤扩展到了由随机过程产生的散射体积系综。此时，关于非均匀性的信息以随机变量 ϵ 的形式给出。当随机过程具有空间不变性时，随机变量 ϵ 与空间位置无关。以随机方式处理材料使得 ϵ 更易于指定和建模，但也使散射强度的确定更加复杂。**图 2**概略展示了一种用于确定散射强度的随机方法，该方法与**图 1**中的过程相对应。现在，该过程在系综上执行，从而得到远场散射强度的系综。随后对该系综进行平均，得到平均远场散射强度，进而可以对其积分，得到该随机过程的散射系数。

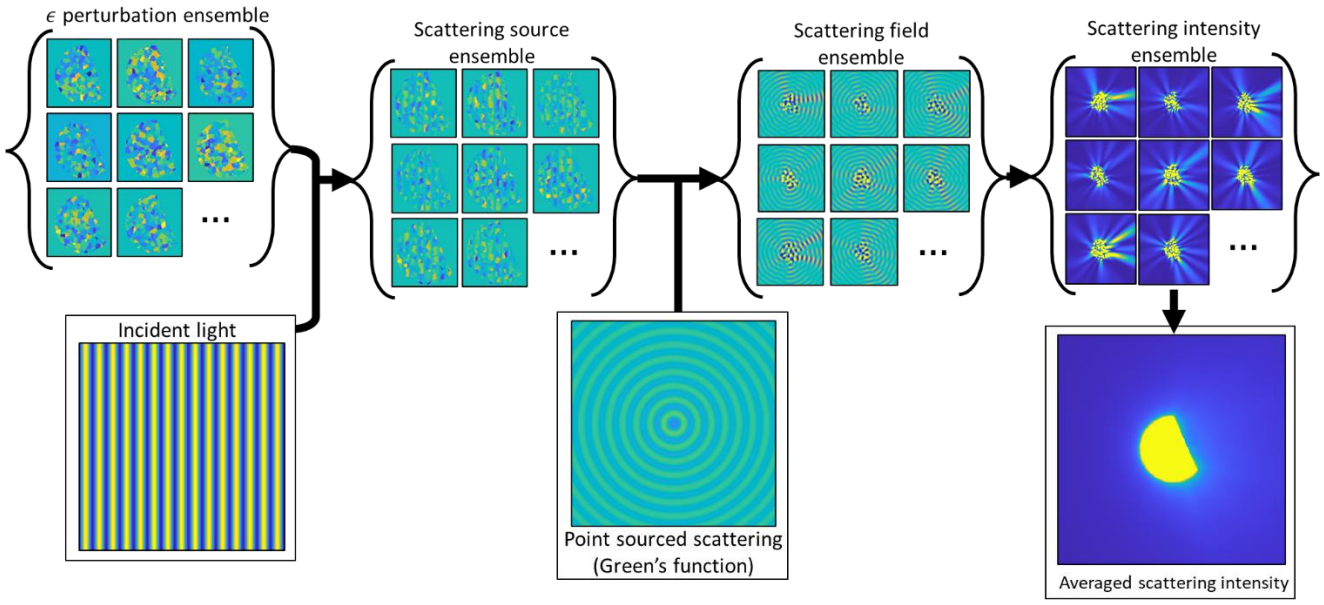

图 2：用于计算非均匀散射强度的随机方法示意图

图 1 和图 2中概述的方法给出了散射系数的解析表达式。随后，我们利用这些表达式研究各种尺寸极限下的近似：瑞利小尺寸极限近似，以及大尺寸瑞利-Gans-德拜（RGD）极限。

这种方法有几个优点。我们从麦克斯韦方程组出发进行第一性原理推导，有助于更深入地理解非均匀散射的来源。例如，推导出的表达式清楚地表明，非均匀介质中的散射源是过剩加速电荷，而非人们通常认为的介质中的折射率反差（例如，常见的一种说法是晶界会在多晶体中产生散射，见 [26-36]）。此外，我们的方法为发展更一般的模型提供了多个切入点。例如，可以沿着推导过程进行，直到假设软散射和弱各向异性成立，再据此研究非软散射和非弱各向异性的情形。对于非软散射，可以采用更高阶的微扰；对于非弱各向异性，则可以使用各向异性并矢格林函数。

2. 电介质中的软散射场

本节的目标是描述光学性质弱非均匀的材料中的弹性电磁散射（其具体定义将在**第2.3**节中给出）。在欧姆型、时间不变的材料中，单色入射光产生的散射场可由下列方程描述

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \mu\epsilon k_0^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{1}$$

其中，$\nabla\times$表示旋度，μ表示相对磁导率，ϵ 表示相对介电常数，k_0 表示真空波数，$\boldsymbol{E}$ 表示电场。关于从麦克斯韦方程组推导此方程的过程，请参见**附录 A（补充信息）**。真空波数与入射光的角频率之间的关系为

$$k_0^2 \coloneqq \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \tag{2}$$

且与真空波长 λ_0 之间的关系为

$$k_0 = 2\pi/\lambda_0 \tag{3}$$

几乎所有电介质的磁响应都很弱，因此非磁性近似

$$\mu \approx 1 \tag{4}$$

有效。如果仅考虑非磁性介质，则支配电场的方程变为

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \epsilon k_0^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{5}$$

其中，一般而言， ϵ 是空间的张量值函数。我们将求解方程 (5)，以处理 ϵ 的非均匀性。不过，将结果中的 ϵ 全部替换为 $\mu\epsilon$ ，即可得到稍具一般性的方程 (1) 的解，该方程包含 μ 的非均匀性。

2.1 散射方程的一阶微扰

当介电率 ϵ 是位置$\boldsymbol{r}$的函数时，方程（5）是一个具有变系数的偏微分方程。目前尚无已知的通用解析方法能够求解此类方程的精确解，但微扰方法可以利用一个解已知的相似方程，得到近似解。对于这样一个已知精确解的方程，称为...

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = k_0^2 \bar{\epsilon} \boldsymbol{E} \tag{6}$$

其中，非均匀介电常数 ϵ 已被均匀的平均介电常数 $\bar{\epsilon}$ 所取代。(6) 的精确解记为 $\overline{\boldsymbol{E}}$ ，可视为入射场。(6) 的解是单向解的线性组合，每个单向解的形式为

$$\begin{aligned} &\overline{\boldsymbol{E}} = \bar{E}_0 \widehat{\boldsymbol{E}}_0 \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) \\ &|k^2| = |\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}| = k_0^2 \left| \bar{\epsilon} \widehat{\boldsymbol{E}}_{0,\boldsymbol{k}} \right| \end{aligned} \tag{7}$$

复振幅表示为 $\bar{E}_0$，偏振表示为 $\widehat{\boldsymbol{E}}_0$，介质中的波数为$k$，波矢表示为 $\boldsymbol{k}$。$\boldsymbol{k}$ 的每一种选择都与$\boldsymbol{k}$的其他任一种选择线性无关。此外，还可以从两个线性无关的偏振轴中进行选择。这些解的任意线性组合都会产生另一个解。适当的解的选择取决于入射辐射所施加的边界条件。由非均匀性 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 引起的散射场可写为

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E} - \overline{\boldsymbol{E}} \tag{8}$$

由于$\tilde{\boldsymbol{E}}$ 近似等于微扰场 $\boldsymbol{E}$（其近似于方程（5）的解）与入射场 $\overline{\boldsymbol{E}}$之差，因此定义围绕平均值的介电率涨落也很有用

$$\tilde{\epsilon} \coloneqq \epsilon - \bar{\epsilon} \tag{9}$$

假设一阶微扰是足够好的近似（其成立条件将在下文的**第 2.3 节**中进行分析），描述散射场的偏微分方程可表示为

$$\nabla \times \left(\nabla \times \tilde{\boldsymbol{E}} \right) - k_0^2 \bar{\epsilon} \tilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{Q} \tag{10}$$

这是一个非齐次偏微分方程，其中源项为

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}) = k_0^2 \tilde{\epsilon} \overline{\boldsymbol{E}} \tag{11}$$

源项代表散射源。 求解方程 (10) 中的 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 即可得到由非均匀性引起的散射的一阶近似。可以证明，该源项近似正比于 $\boldsymbol{r}$处超额加速电荷的密度。 复电导率、介电常数和磁导率之间的关系为

$$\mu\epsilon \coloneqq 1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0} \tag{12}$$

使用非磁性近似 $\mu \approx 1$

$$\sigma = i\omega\epsilon_0(1-\epsilon) \tag{13}$$

由于电流密度与电荷速度成正比，因此加速电荷与电流密度的时间导数成正比，可表示为

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} = -i\omega\boldsymbol{J} = -i\omega\sigma\boldsymbol{E} = \omega^2\epsilon_0(1-\epsilon)\boldsymbol{E} = \frac{k_0^2}{\mu_0}(1-\epsilon)\boldsymbol{E} \tag{14}$$

如**第 2.3 节**所述，一阶微扰的有效性取决于电场是否接近入射场。假设 $\boldsymbol{E} \approx \bar{\boldsymbol{E}}$，超额加速电荷可表示为

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\boldsymbol{J}}}{\partial t} = -\frac{k_0^2}{\mu_0}\tilde{\epsilon}\bar{\boldsymbol{E}} \tag{15}$$

将这一结果与方程（11）进行比较，可以证明散射源项与超额加速电荷成正比。

2.2 随机源项

远场散射强度是微扰场 $\tilde{\boldsymbol{E}}$产生的强度。方程 (10) 是一个方程，其解将近似于 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ （近似有效性的判据见**第 2.3 节**）。然而，要建立方程 (10)，必须完整指定源项 $\boldsymbol{Q}$ 。为此，需要知道散射样品内部每一点 $\boldsymbol{r}$ 处的源项，也就需要知道介电常数 $\epsilon(\boldsymbol{r})$。实际上，提供这类信息并不可行。例如，对于双折射多晶体，这需要了解每个晶粒的三维形貌以及每个晶粒的晶体学取向。此外，通常没有实际必要知道特定样品将产生的精确散射剖面。相比之下，描述由已知随机过程（例如已知的材料合成/加工过程）产生的非均匀性所引起的散射，实用得多。电介质常用的合成工艺包括熔铸 [37]，纤维拉制 [37]，粉末烧结/致密化 [6-8] 和自组装 [38]。此外，采用特定工艺制造的样品，其微观状态可能会因外加场而改变，例如应力和温度梯度。

为保持一般性，我们将这些统称为随机过程。这样的过程会产生一个样品系综W ，其中各个样品的微观状态彼此不同，但宏观性质相似。因此，我们的目标是描述这一系综的散射。

要取得任何进展，都需要假设系综遍历性。系综遍历性指出，随着对一个过程测得的样品越来越多，其散射剖面的平均值将趋近于系综平均。样品遍历性的一个必要条件见 **图3。**随着系综中的样品数量增加，各点光学性质的样品平均值将趋近于光学性质的系综平均值。违反这一假设将导致不可预测的

来自 随机过程所产生的样品的散射。除了难以处理之外，这还会使所研究的过程本身变得不切实际。

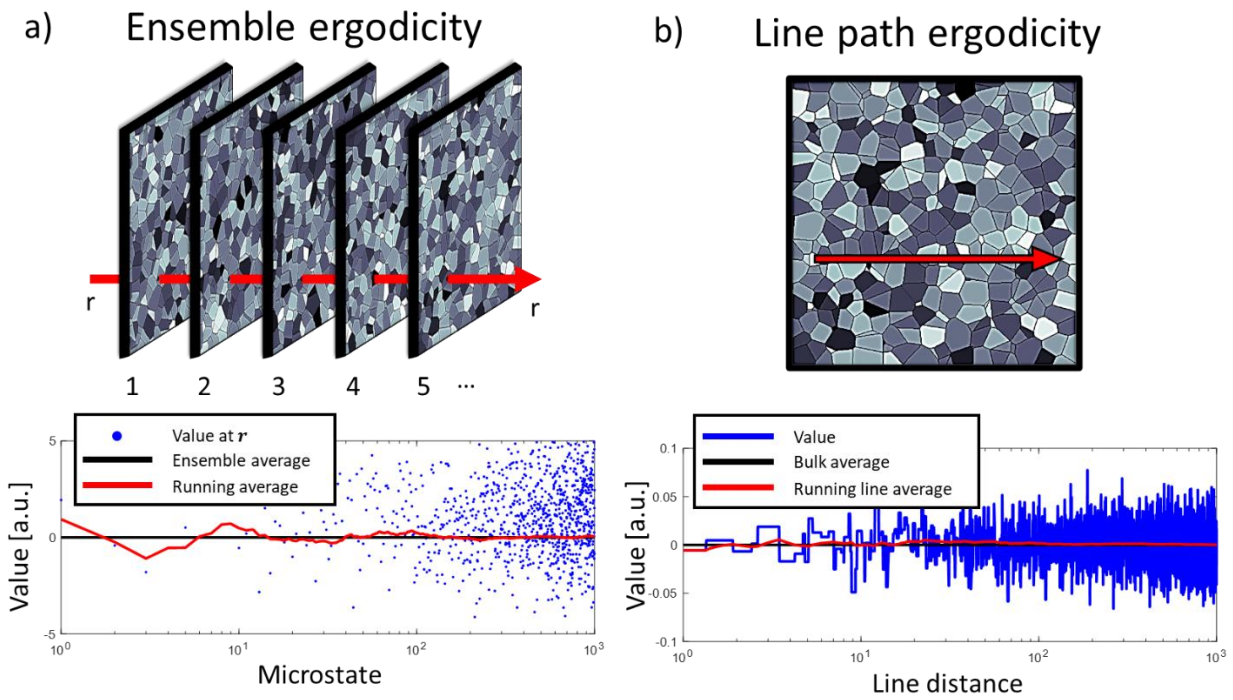

图3：遍历性的示意图：a）系综，b）线性路径

在遍历性假设下，可以计算随机过程的平均行为。从数学上讲，介电常数涨落分布 $\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{r})$是一个随机变量，代表随机过程产生的样品的介电常数涨落。采用随机框架，可以将方程（6）中首次引入的平均介电常数重新定义为

$$\bar{\epsilon} \coloneqq \langle\langle\epsilon\rangle_W\rangle_V \tag{16}$$

其中，$\langle\cdot\rangle_W$ 表示系综平均，$\langle\cdot\rangle_V$ 表示体积平均。使用式（16）的优点是，$\bar{\epsilon}$ 将不再是微观状态的函数。另一个有用的假设是随机过程具有空间不变性，简称空间不变性（不要与均匀性混淆）。

图4示意对比了空间不变性、均匀性/均匀性，以及非均匀性/非均匀性。由于空间不变性，$\epsilon(\boldsymbol{r})$的统计特性不能显式依赖于坐标 $\boldsymbol{r}$. 在这种情况下，平均介电常数可简化为

$$\bar{\epsilon} = \langle\epsilon\rangle_W \tag{17}$$

如果 ϵ（$\boldsymbol{r}$） 沿直线的演化也具有遍历性（如线性路径遍历性下的**图3**所示），那么对于远大于涨落相关长度 L_C 的体积（即**第3.3节**所述的体相极限）

$$\bar{\epsilon} \approx \langle\epsilon\rangle_V \tag{18}$$

公式（18）提供了一种实用方法，可根据单个足够大的样品近似 $\bar{\epsilon}$。请注意，按照我们对这些术语的用法，空间不变随机过程可以产生非均匀的介电常数。一般而言，我们将“均匀”和“均质”用于描述在空间中

恒定的性质或函数，而将“空间不变”用于描述将空间中所有位置视为等同的随机过程（即统计特性均匀的过程）。

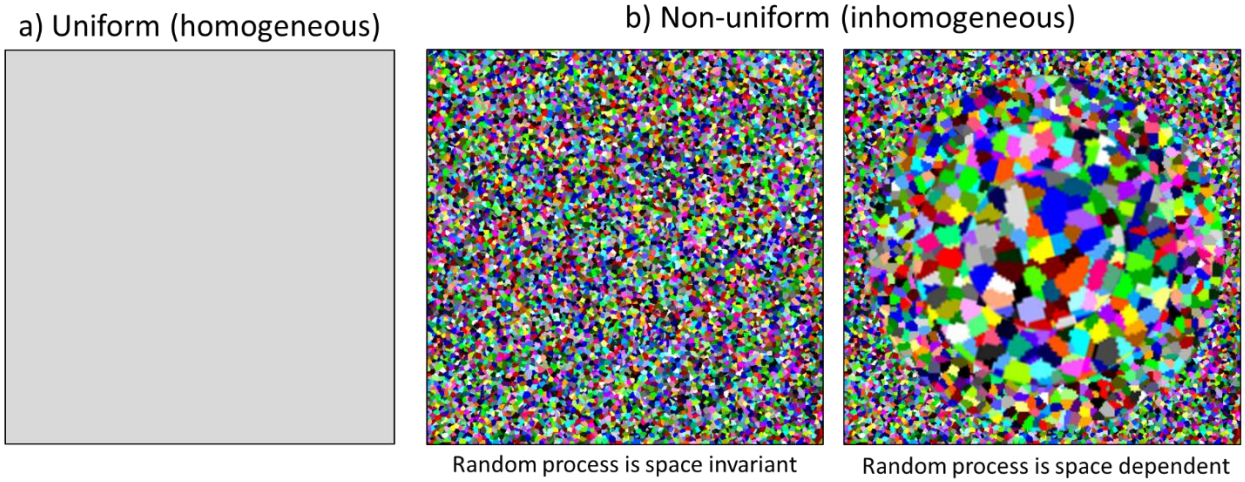

图4： a）空间不变的均匀性/均匀性，以及 b）非均匀性/非均匀性的示意图。对于非均匀情形，随机过程可能具有空间依赖性，也可能具有空间不变性。

2.3 一阶微扰的有效性

要使一阶微扰（10）成为有效近似，受扰场与入射场在模和相位上的偏差应当很小。为此，只需满足两个假设：（1）软散射；（2）小相位差。

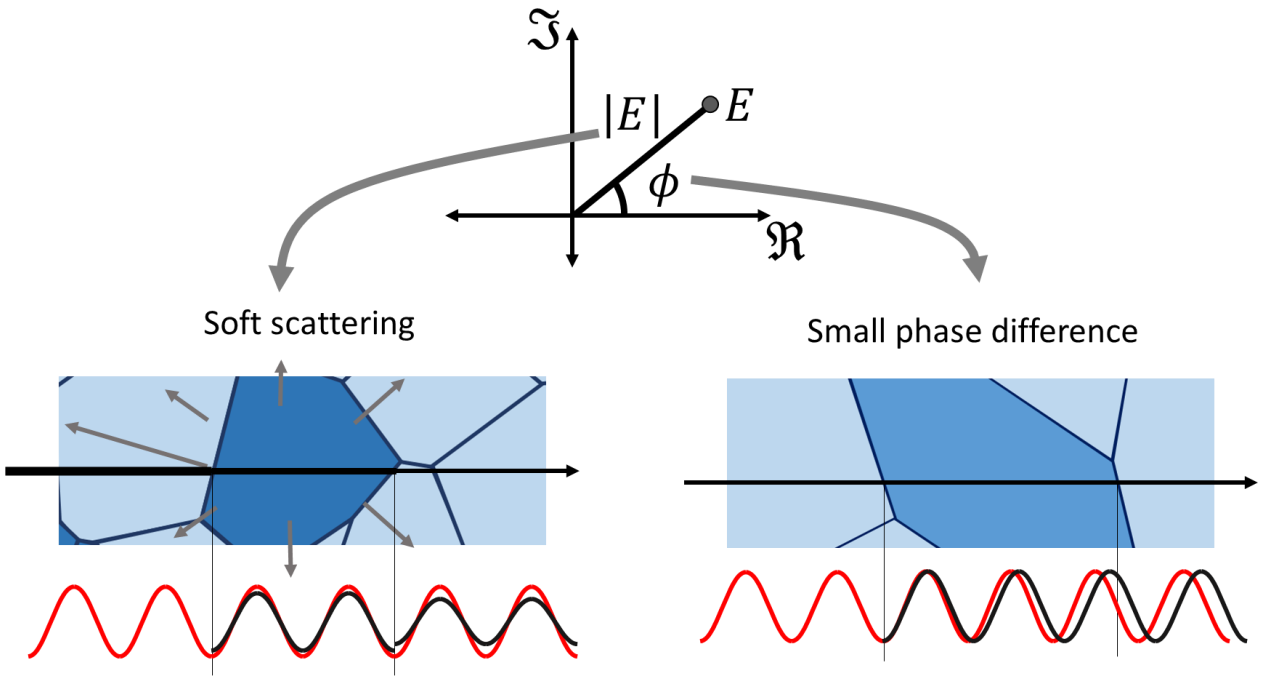

图5： 使一阶微扰近似成立所需的两个假设（软散射和小相位差）的示意图

图 5 示意性地说明了这两个假设。限制模的偏差较小，就得到软散射假设。折射率变化足够大时，经过一个相关长度后会产生显著损耗。如果损耗足够大，受扰场与入射场的模将出现足够大的差异，因此需要引入高阶微扰项。同样，限制相位偏差较小，就得到小相位差近似。如果折射率变化或相关长度足够大，那么在一个相关长度内累积的相位差就会过大。此时仍需引入高阶微扰项，以计入这些相位延迟。

对这两个假设进行数学描述，可以使其更加精确。当非均匀性的强度较小时，软散射假设便成立。非均匀性的强度可使用线性算子范数的一般化形式来量化，该范数定义见

附录 B

$$\|\tilde{\epsilon}\| = \sqrt{\langle \lambda_{max}(\tilde{\epsilon}^{\dagger}\tilde{\epsilon})\rangle_W} \tag{19}$$

其中 $\langle\cdot\rangle_W$ 是系综平均。若 $\tilde{\epsilon}$ 是厄米的（无源无损介质满足这一条件，见**附录 C**），则

$$\|\tilde{\epsilon}\| = \sqrt{\langle |\lambda_{max}(\tilde{\epsilon})|^2\rangle_W} \tag{20}$$

在这种情况下，范数就是最大的介电常数。范数的一般化形式允许存在分布。如果算子是标量，那么该算子还可进一步简化为

$$\|\tilde{\epsilon}\| = \sqrt{\langle |\tilde{\epsilon}|^2\rangle_W} \tag{21}$$

这就是 $\tilde{\epsilon}$ 的均方根。利用算子范数，我们可以将软散射假设更精确地表述为

$$\|\tilde{\epsilon}\| \ll \frac{1}{3}|\mathrm{tr}(\bar{\epsilon})| \tag{22}$$

其中 $\mathrm{tr}(\cdot)$ 是算子的迹。若 $\bar{\epsilon}$ 是各向同性的（即标量），则 (22) 可简化为

$$\|\tilde{\epsilon}\| \ll |\bar{\epsilon}| \tag{23}$$

一阶微扰能够作为有效近似所需满足的第二个假设是小相位差假设。当散射体内部产生的相位差 $\Delta\phi$ 远小于一个完整周期时，该假设便成立。判断 $\Delta\phi$ 是否足够小的一个合理判据是

$$\Delta\phi \ll 1 \tag{24}$$

可能出现的折射率差上限估计为

$$\tilde{n}_{max} \coloneqq \sqrt{\|\tilde{\epsilon}\|} \tag{25}$$

如果 L_c 表示非均匀性的相关长度，那么由长度为 L_c、折射率差为 $\tilde{n}_{max}$ 的涨落引起的相位差为

$$\Delta\phi = k_0 L_c \tilde{n}_{max} \tag{26}$$

因此，小相位差判据变为

$$k_0 L_c \tilde{n}_{max} \ll 1 \tag{27}$$

方程（10）和（11）构成了散射与衍射文献中广泛采用的瑞利-甘斯-德拜近似（瑞利-甘斯-德拜近似）。条件（24）和（27）构成了使用瑞利-甘斯-德拜近似通常所需的假设。这些条件通常表示为

$$|m-1| \ll 1 \tag{28}$$

$$x|m-1| \ll 1 \tag{29}$$

其中，m 是散射体与介质之间的相对折射率，x 是散射体的尺寸参数。条件（24）对应于条件（28），允许我们忽略非均匀性对散射光传播的影响。条件（27）对应于条件（29），并确保散射足够弱，使入射辐射能够作为方程（11）所述源项中使用的足够良好的近似。

2.4 使用并矢格林函数求解

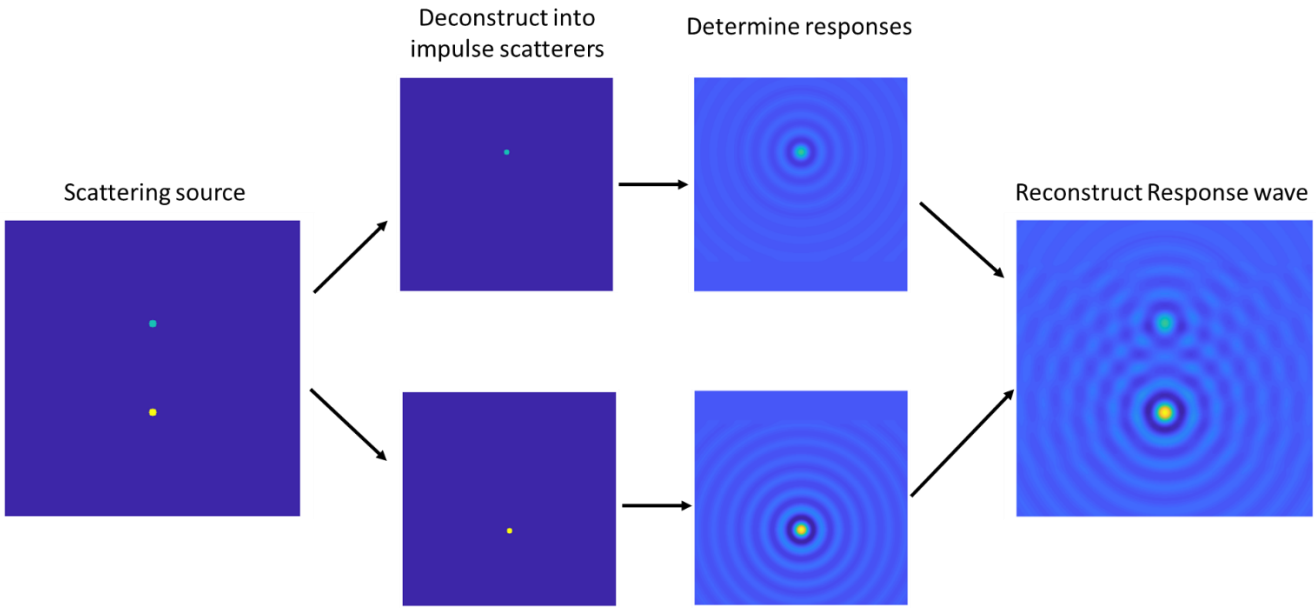

图 6： 用于求解描述散射场的偏微分方程的点源方法示意图

利用线性，使用并矢格林函数 $\Gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$，可轻易求得任意源项 $\boldsymbol{Q}$ 对应的方程 (10) 的解。该函数给出了位于 $\boldsymbol{r}'$ 的点源在 $\boldsymbol{r}$ 处产生的电场解。**图 6** 展示了解的构造方式。线性意味着源的和会产生响应的和。任意源都可以分解为冲激源之和，每个冲激源都会产生自身的响应（由格林函数给出）。将这些响应相加，即可构造出任意源对应的解。

形式上，对于每个点源位置 $\boldsymbol{r}'$，格林函数必须满足

$$\nabla \times \left(\nabla \times \Gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right) - k_0^2 \bar{\epsilon}\, \Gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{30}$$

其中 $\delta(\boldsymbol{r}-\ \boldsymbol{r}')$ 是三维狄拉克δ广义函数。方程 (10) 的远场解 is

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \iiint_{\boldsymbol{V}} d\boldsymbol{r}'\, \Gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}') \tag{31}$$

将其代入 (10) 即可验证

$$\nabla \times \left(\nabla \times \tilde{\boldsymbol{E}}\right) - k_0^2 \bar{\epsilon} \tilde{\boldsymbol{E}} = \iiint_{\boldsymbol{V}} d\boldsymbol{r}' \left[\nabla \times \left(\nabla \times \Gamma(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right) - k_0^2 \bar{\epsilon}\, \Gamma(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right] \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}') = \iiint_{\boldsymbol{V}} d\boldsymbol{r}'\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{Q} \tag{32}$$

由于源具有方向性，格林函数最一般的形式是并矢（即张量），此时乘积 (31) 是内积。对于任意无损各向异性 $\bar{\epsilon}$，其精确的并矢格林函数已知 [39], ，但对于电介质散射中的大多数应用而言，这种表达式过于复杂。因此，对于弱各向异性介质，可用各向同性并矢格林函数近似其并矢格林函数。在远场中，各向同性并矢格林函数为

$$\Gamma(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \overset{r \gg 2k}{\approx} \frac{e^{i\bar{n}k_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\left(I_d - \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \otimes (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\right) \tag{33}$$

其中，$\bar{n}$ 是各向同性折射率，I_d 是单位矩阵（记作I_d 以避免与强度 I混淆），$\otimes$ 是复并矢积（对第一个参数线性，对第二个参数反线性）。$\bar{n}$ 定义为

$$\bar{n} \coloneqq \sqrt{\langle \bar{\epsilon} \rangle_\Omega} = \sqrt{\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\bar{\epsilon})} \tag{34}$$

其中，$\langle \cdot \rangle_\Omega$ 是对所有取向求平均。弱各向异性的条件可用以下表达式表示

$$\|\bar{\epsilon} - \langle \bar{\epsilon} \rangle_\Omega\| \ll |\langle \bar{\epsilon} \rangle_\Omega| \tag{35}$$

如果已知格林函数，方程（31）便可为方程（10）提供一个解。对于条件（34）所表示的弱各向异性，可以使用（33）中的简化格林函数来求解远场中的方程（10）。

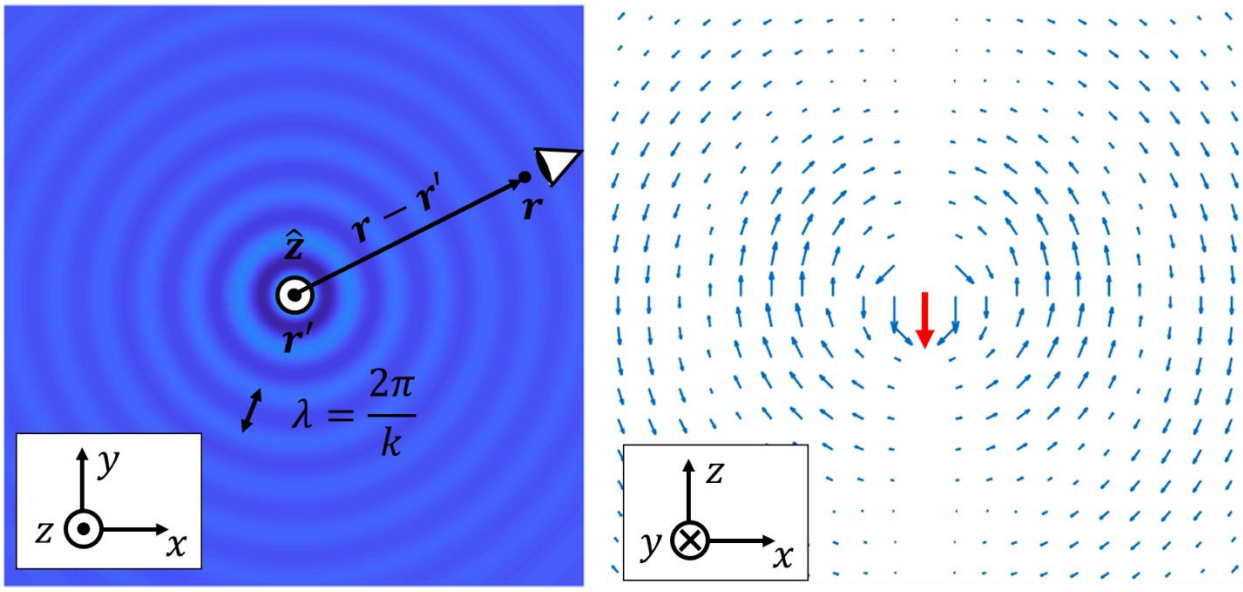

图 7： 位于$\boldsymbol{r}'$处、沿$\boldsymbol{z}$方向振荡的光源所对应的远场二重格林函数。a) xy 平面内的z 分量；b) xz 平面内的 xz 向量分量

图 7 绘出了方程 (33) 中所指定的远场二重格林函数，该函数对应于位于 $\boldsymbol{r}'$并沿 $\boldsymbol{z}$方向振荡的光源。其响应关于绕 z轴（振荡方向）的旋转具有对称性。沿 z方向没有光辐射，而光强在 xy 平面内达到最大。源散射场的这种各向异性，在源项具有各向异性时，可能导致总散射场出现各向异性。

3. 总散射强度

对非均匀样品的散射进行测量，通常是在远场中进行，此时只有传播模才与测量相关。此外，远场介质通常为空气，其折射率为$n = 1$。由于样品平均折射率$\bar{n}$ 通常不等于1，散射光离开样品介质时会发生反射和折射。这使得角度相关的远场散射强度难以精确计算，因为格林函数必须考虑样品边界处的反射和折射。由于边界反射和折射的影响取决于辐射源在样品中的位置，这样的格林函数会失去空间不变性，也变得难以描述。

然而，如果我们只关注介质散射出的总能量，而不考虑散射角度，这个问题便无关紧要。关键在于，远场散射的总强度不受光从样品进入周围介质时发生的反射或折射影响。这是因为被反射或折射的散射光能量仍然是散射光能量。反射和折射只是改变了散射光的传播方向。由于改变透明周围介质的折射率只会影响表面反射和折射，因此改变折射率时，散射光总能量所占的比例保持不变。这使我们能够在计算散射光总能量时，为周围介质任意选择折射率。最方便采用的周围介质，其折射率为$n_{ff} \coloneqq \mathrm{R}(\bar{n})$。这就是方程（34）中定义的样品平均折射率$\bar{n}$ 的实部（若为张量，则为厄米分量）。选择 n_{ff} 作为介质折射率，既能最大限度地减少界面处的反射，又能确保介质均匀、无损且各向同性。

我们的目标是计算散射的总能量，以获得散射系数。因此，当远场介质为 n_{ff} 时，我们将求解散射问题，从而忽略反射的影响，并将远场介质视为欧姆型、均匀、无损且各向同性的介质。除非实验是在折射率为 n_{ff} 的周围介质中进行，否则本文推导的角度相关结果不应与测得的角度相关散射相对应。然而，本文推导的样品非均匀散射系数将与测得的散射系数相对应。

3.1 欧姆型、均匀、弱各向异性介质中的远场强度

如果入射光的相干长度跨越多个晶粒，则入射光和弹性散射光可以近似为单色光。如果远场介质也是均匀的（空间不变），那么远场中不存在散射，所有散射源均来自样品。在远场中，散射体可以近似为一个点源（我们将其置于原点），并由此发射球面波。因此，散射的远场辐射在局部是单向的（平面波），且坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 的方向为 $\hat{\boldsymbol{r}}$。如果远场介质还具有弱各向异性，那么远场强度可以表示为

$$I(\boldsymbol{r},\omega)=\frac{\bar{n}_{ff}\cos\beta}{2\mu_0 c}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)|^2=G\cos\beta\,|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)|^2 \tag{36}$$

其中 β 是收集面与坡印廷矢量之间的夹角，c 是真空光速，G 是比例常数（其精确值最终会证明与散射系数的表达式无关），而 $\bar{n}_{ff}$ 是

$$\bar{n}_{ff}\coloneqq\sqrt{\langle n_{ff}^2\rangle_\Omega}=\sqrt{\frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(n_{ff}^2\right)} \tag{37}$$

关于方程 (36) 在弱各向异性介质中有效性的一项第一性原理推导可见**附录 D**。为了计算总散射损耗，我们将对单位球面上的 $I(\boldsymbol{r})$进行积分。在这种情况下，表面法线将与 $\boldsymbol{r}$ 对齐，这意味着 $\cos\beta=1$，此时

$$I(\boldsymbol{r})=G|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)|^2 \tag{38}$$

方程 (38) 与针对折射率为$\bar{n}_{ff}$的各向同性远场介质推导出的结果相同。因此，对于各向异性程度足够弱、满足 (35) 的材料，假设远场为各向同性并无不妥。方程 (38) 常被用作出发点，却很少得到充分论证。这里我们给出了一组足以证明其合理性的假设。

3.2 远场散射强度的一般表达式

3.2.1 从随机过程出发

目标是计算远场散射强度的系综平均。通过在周围介质中选择 $\bar{n}_{ff}$，我们也构建了一个均匀、无损且各向同性的远场介质。在这种情况下，远场散射强度的系综平均为

$$\tilde{I}(\boldsymbol{r})=G\left\langle\left|\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})\right|^2\right\rangle_W=G\iiint_{\mathcal{v}}d\boldsymbol{r}'\iiint_{\mathcal{v}}d\boldsymbol{r}''\left\langle\left(\Gamma(\hat{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}')\right)^\dagger\Gamma(\hat{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{r}'')\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}'')\right\rangle_W \tag{39}$$

其中$\langle\cdot\rangle_W$ 是系综的平均值（参见**第 2.2 节**），$\mathcal{v}$ 是散射体体积中的点集，而上标†表示伴随（共轭转置）。此外，平均介电常数$\bar{\epsilon}$ 将对系综取平均，因此不依赖于（参见**第 2.2 节**）。我们假设 $\boldsymbol{r}$ 处的场足够远，使得在$\boldsymbol{r}$ 处测得、由位于$\boldsymbol{r}'$（靠近原点）的光源发出的光近似为单向。将原点置于散射体积内后，远场中以下近似成立

$$r^2\approx|r-r'||r-r''| \tag{40}$$

$$\hat{\boldsymbol{r}}\approx\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\approx\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|&=\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\\&\approx\hat{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')-\hat{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\\&=\hat{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}'')\end{aligned} \tag{42}$$

设函数 $1_{\mathcal{v}}$（$\boldsymbol{r}$）为示性函数，用于判断某个点是否位于散射体积内。

$$1_{\mathcal{v}}(\boldsymbol{r})\coloneqq\begin{cases}1 & \boldsymbol{r}\in\mathcal{v}\\0 & otherwise\end{cases} \tag{43}$$

那么，由于介质是均匀的，介电常数涨落满足

$$\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{r}) = 1_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{r})\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{r}) \tag{44}$$

设入射光为单色、沿波矢 $\boldsymbol{k}$ 传播，波数为 $k = \bar{n}k_0$，并沿方向 $\widehat{\boldsymbol{E}}_0$ 线偏振，且复振幅 $\bar{E}_0$ 均匀。则入射光为

$$\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \bar{E}_0\widehat{\boldsymbol{E}}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{45}$$

将此应用于 (11)

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}) = k_0^2\bar{E}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} 1_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{r})\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{r})\widehat{\boldsymbol{E}}_0 \tag{46}$$

通过引入以下中介定义，我们可以简化所得方程

$$\boldsymbol{q} \coloneqq \bar{n}k_0\left(\hat{\boldsymbol{r}} - \widehat{\boldsymbol{k}}\right) \tag{47}$$

$$\boldsymbol{\rho} \coloneqq \boldsymbol{r}'' - \boldsymbol{r}' \tag{48}$$

$$\hat{r}_\perp \coloneqq I_d - \hat{\boldsymbol{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{r}} \tag{49}$$

其中，$\boldsymbol{q}$ 是以波数为单位的动量传递，$\boldsymbol{\rho}$ 表示两个点源（$\boldsymbol{r}''$ 和 $\boldsymbol{r}'$）之间的间距，$\hat{r}_\perp$ 是一个线性向量算子，用于求向量相对于 $\hat{\boldsymbol{r}}$的垂直投影。在远场中，近似为

利用方程 (33)、(39)-(42)、(48)-(49)、性质 $\hat{r}_\perp^H\hat{r}_\perp = \hat{r}_\perp$以及一些代数运算，可得散射强度为

$$\tilde{I}(\boldsymbol{r}) = \frac{I_0 k_0^4}{(4\pi r)^2}\iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{\rho}\iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{r}'\, 1_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{r}')1_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\rho})\left\langle\widehat{\boldsymbol{E}}_0^\dagger\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{r}')^\dagger\hat{r}_\perp\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\rho})\widehat{\boldsymbol{E}}_0\right\rangle_W e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} \tag{50}$$

其中 I_0 是入射辐射的强度，定义为

$$I_0 \coloneqq G|\bar{E}_0|^2 \tag{51}$$

3.2.2 从空间平稳随机过程出发

如果随机过程是空间不变的，那么对微观状态取任何平均值都会是均匀的。因此，式（50）中对系综取平均的因子在 $\boldsymbol{r}'$发生平移时保持不变。通过选取 $\boldsymbol{r}' = 0$

$$\tilde{I}(\boldsymbol{r}) = I_0\frac{k_0^4}{(4\pi r)^2}\iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{\rho}\left[K(\boldsymbol{\rho},\hat{\boldsymbol{r}})\iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{r}'\, 1_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{r}')1_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\rho})\right]e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} \tag{52}$$

其中 $K(\boldsymbol{\rho},\hat{\boldsymbol{r}})$ 是两点散射源自协方差函数。它用于量化相距 $\boldsymbol{\rho}$ 的光源所产生散射的远场干涉。其定义为

$$K(\boldsymbol{\rho},\hat{\boldsymbol{r}}) \coloneqq \left\langle\widehat{\boldsymbol{E}}_0^\dagger\tilde{\epsilon}(0)^\dagger\hat{r}_\perp\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{\rho})\widehat{\boldsymbol{E}}_0\right\rangle_W \tag{53}$$

方程（52）中的外层积分是函数乘积的傅里叶变换，对应于各函数傅里叶变换的卷积。方括号内的积分是示性函数的空间自协方差。在傅里叶空间中，这对应于傅里叶变换的模平方。对于任意函数 $f(\boldsymbol{r})$，若其傅里叶变换定义为

$$\mathcal{F}\{f(\boldsymbol{r})\}(\boldsymbol{q}) = \iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{r}\, f(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{54}$$

与……成反比

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\boldsymbol{q})\}(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{q}\, F(\boldsymbol{q}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k}} \tag{55}$$

那么方程（52）可写为

$$\tilde{I}(\boldsymbol{r}) = I_0 \frac{k_0^4}{(4\pi r)^2} \left[\mathcal{F}_{\boldsymbol{\rho}}\{K(\boldsymbol{\rho}, \hat{\boldsymbol{r}})\} \star |\mathcal{F}\{1_{\mathcal{v}}(\boldsymbol{r}')\}|^2\right](\boldsymbol{q}) \tag{56}$$

当输入函数有多个自变量时，F和F^{-1} 的下标表示积分变量。$\star$ 是定义如下的卷积算子

$$[f \star g](\boldsymbol{r}) = \iiint_{\boldsymbol{\mathcal{V}}} d\boldsymbol{r}'\, f(\boldsymbol{r}') g(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{57}$$

方程 (56) 的物理解释是：由于散射体积表面处的性质发生突变，空间不变性在该表面附近遭到破坏。卷积描述了散射体积的形状对散射强度的影响。一般而言，可用包络振幅函数替代示性函数，以反映涨落模的渐变。

3.3 体近似

方程 (56) 表明，当散射体积 V变得非常大时，空间不变性仍可作为一种有用的近似。当 $\mathcal{v}$ 趋近于 $\mathcal{V}$时， $|\mathrm{F}\{1_{\mathcal{v}}(\boldsymbol{r}')\}|^2$ 发散，但单位体积平均散射并不会发散，而是

$$\lim_{\mathcal{v}\to\mathcal{V}} \frac{1}{V} |\mathcal{F}\{1_{\mathcal{v}}(\boldsymbol{r}')\}|^2 = \delta(\boldsymbol{\rho}) \tag{58}$$

其中，δ 是三维空间中的狄拉克δ函数。将（58）代入方程（56），其成立条件是示性函数 $1_{\mathcal{v}}$ 的空间频率带宽远小于散射源的空间频率带宽。

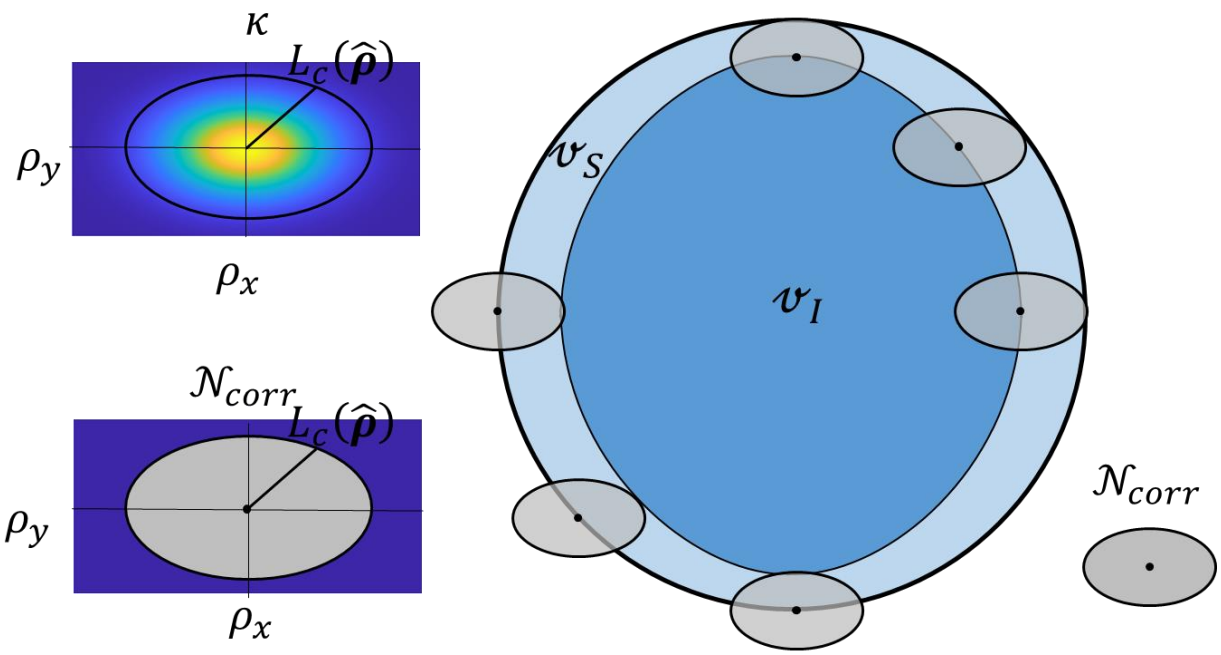

图8：区分外部（表面）点与内部点的方法。

对此条件的一种物理理解是：如果大部分散射体积都位于内部，那么空间不变性仍可作为一种有用的近似。**图8** 给出了一个示意图，展示如何区分内部点和外部点。为此，可以使用散射源 L_c 的相关长度（相关长度与 K的空间频率带宽成反比）。一般而言，L_c 将是 $\hat{\boldsymbol{\rho}}$（位移 $\boldsymbol{\rho}$的位移方向）的函数。假设距离超过 L_c 的点对自协方差函数的贡献可以忽略，因为它们的散射贡献 K 将近乎为零。位于 L_c 以内的点属于中心点的相关邻域 $\mathcal{N}$，不能忽略。如果某个邻域内的所有点都在散射体积内，那么该点就属于内部体积 $\mathcal{V}_I$。散射体积中的非内部点则属于表面体积 $\mathcal{V}_S$。内部点的散射可以很好地近似为无限散射体积中的散射（因为它们的相关邻域相同）。如果内部体积远大于表面体积，那么 $\mathcal{V}$ 中的单位体积平均散射就与无限体积 $\mathcal{V}$中发生的散射相同。形式上，条件是

$$|\mathcal{V}_I| \gg |\mathcal{V}_S| \tag{59}$$

其中，$|\mathcal{V}_I|$ 是内部点的体积，$|\mathcal{V}_S|$ 是表面点的体积，据此可将散射强度表示为

$$\tilde{I}(\boldsymbol{r}) = V\left\langle\frac{d\tilde{I}}{dV}\right\rangle_{\mathcal{V}} \approx V\left\langle\frac{d\tilde{I}}{dV}\right\rangle_{\mathcal{V}} = V\frac{I_0 k_0^4}{(4\pi r)^2}\iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{\rho}\, K(\boldsymbol{\rho},\hat{\boldsymbol{r}})e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} \tag{60}$$

这与将极限代入(56)式后从(58)式得到的方程相同。(60)式中的散射强度适用于可忽略表面效应的块体样品。

由于假定散射体积无限大，散射源项为

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}) = k_0^2\bar{E}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{E}}_0 \tag{61}$$

比较此　　根据方程 (53) 中 K 的定义，我们可以用源项表示 K　　m

$$K(\boldsymbol{\rho},\hat{\boldsymbol{r}}) = \frac{G}{k_0^4 I_0}\boldsymbol{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}\left\langle \boldsymbol{Q}^{\dagger}(\boldsymbol{0})\hat{r}_{\perp}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\rho})\right\rangle_W \tag{62}$$

注意到 $\hat{r}_{\perp} = \hat{r}_{\perp}^{\dagger}\hat{r}_{\perp}$，我们可以用 $\boldsymbol{Q}_{\perp}$ 表示源项 $\boldsymbol{Q}$ 相对于观测方向 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 的向量拒斥（或者等价地，将 $\boldsymbol{Q}$ 投影到垂直于 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 的平面上）

$$K(\boldsymbol{\rho},\hat{\boldsymbol{r}}) = \frac{G}{k_0^4 I_0}\boldsymbol{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}\left\langle \boldsymbol{Q}_{\perp}^{\dagger}(\boldsymbol{0})\boldsymbol{Q}_{\perp}(\boldsymbol{\rho})\right\rangle_W \tag{63}$$

由此可见，两点散射源自协方差函数 K 与原点处和点 $\boldsymbol{\rho}$处的投影散射源之间的协方差成正比。将方程 (63) 代入 (59)，得到

$$\tilde{I}(\boldsymbol{r}) = \frac{GV}{(4\pi r)^2}\left\{\left\langle \boldsymbol{Q}_{\perp}^{\dagger}(\boldsymbol{0})\boldsymbol{Q}_{\perp}(\boldsymbol{\rho})\right\rangle_W\right\}(k\hat{\boldsymbol{r}}) \tag{64}$$

其中，$k\hat{\boldsymbol{r}}$ 是远场散射光的波矢。方程 (64) 明确揭示了散射源项的数学作用。软散射强度（或更一般地说，软衍射产生的强度）与投影散射源场自协方差函数的傅里叶变换成正比。利用体近似中的线性路径遍历性和非均质性，我们可以用体积平均代替对 W 的平均（见**第 2.2**），从而得到

$$\begin{aligned}\tilde{I}(\boldsymbol{r}) &= \frac{GV}{(4\pi r)^2}\mathcal{F}\left\{\left\langle \boldsymbol{Q}_{\perp}^{\dagger}(\boldsymbol{0})\boldsymbol{Q}_{\perp}(\boldsymbol{\rho})\right\rangle_V\right\}(k\hat{\boldsymbol{r}})\\ &= \frac{G}{(4\pi r)^2}\mathcal{F}\left\{\iiint_{\boldsymbol{\mathcal{V}}} d\boldsymbol{r}'\,\boldsymbol{Q}_{\perp}^{\dagger}(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{Q}_{\perp}(\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\rho})\right\}(k\hat{\boldsymbol{r}})\\ &= \frac{G}{(4\pi r)^2}|\mathcal{F}\{\boldsymbol{Q}_{\perp}\}(k\hat{\boldsymbol{r}})|^2\end{aligned} \tag{65}$$

方程 (65) 表明，$\boldsymbol{r}$ 处的软散射强度与垂直于 $\hat{\boldsymbol{r}}$的源项在 $k\hat{\boldsymbol{r}}$ 处的空间谱功率密度成正比。方程 (65) 揭示，散射波由波数相同的源波产生。之所以投影到垂直于 $\hat{\boldsymbol{r}}$的平面上，是因为只有横向电磁波才能传播到远场。

3.4 散射源强度与空间相干性的作用

有时，将 K 表示为方差 K_0与归一化自相关 κ的乘积会比较方便；前者衡量散射源的强度，后者衡量散射源的空间相干性。二者定义如下：

$$K_0(\hat{\boldsymbol{r}}) \coloneqq K(0,\hat{\boldsymbol{r}}) = \mathrm{Var}_W\left(\left|\hat{r}_{\perp}\tilde{\epsilon}\hat{\boldsymbol{E}}_0\right|\right) = \frac{G}{k_0^4 I_0}\mathrm{Var}_W(Q_{\perp}) \tag{66}$$

$$\kappa(\boldsymbol{\rho},\hat{\boldsymbol{r}}) \coloneqq K(\boldsymbol{\rho},\hat{\boldsymbol{r}})/K_0(\hat{\boldsymbol{r}}) \tag{67}$$

其中 $方差_W(\cdot)$ 是系综方差，$Q_{\perp}$ 是散射源在垂直于观测方向 $\hat{\boldsymbol{r}}$的表面上的投影模。其优点在于，散射源强度 K_0 取决于电磁响应的强度，而不取决于响应的空间分布。另一方面，散射源自相关 κ通常取决于响应的空间分布，而不取决于响应本身。为说明这一点，考虑式 (11) 中表示的散射源项 $\boldsymbol{Q}$ 要产生相关性，介电常数涨落 $\tilde{\epsilon}$ 和入射光场的相位 $\overline{\boldsymbol{E}}$ 都必须相关。由于在实践中，介电常数涨落的来源（晶粒结构、热噪声、缺陷等）几乎总是独立于相关性

入射光（其受光源影响）的相关性，因此整体自相关性应为各自相关性的乘积

$$\kappa(\boldsymbol{\rho},\hat{\boldsymbol{r}}) = \kappa_{\bar{E}}(\boldsymbol{\rho})\kappa_W(\boldsymbol{\rho},\hat{\boldsymbol{r}}) \tag{68}$$

其中，$\kappa_{\bar{E}}$ 是入射光相位的空间自相关，κ_W 是结构自相关。$\kappa_{\bar{E}}(\boldsymbol{\rho})$不依赖于 $\hat{\boldsymbol{r}}$ ，因为相位是标量场，没有固有取向。对于单色光，$\hat{\boldsymbol{E}}_0$ 处处完全相关，且$\kappa_{\bar{E}}(\boldsymbol{\rho})= 1$。对于非单色光，可以根据入射光的发射光谱定义相干时间$\tau_{\bar{E}}$ ，并由此得到材料中的相干长度$L_{\bar{E}} =(c/\bar{n})\tau_{\bar{E}}$。在大多数情况下，入射光的相关长度远大于结构相关长度（$L_{\bar{E}} \gg L_W$），因此可以假设

$$\kappa(\boldsymbol{\rho},\hat{\boldsymbol{r}}) \approx \kappa_W(\boldsymbol{\rho},\hat{\boldsymbol{r}}) \tag{69}$$

因此，κ 仅编码结构信息。当相关长度远小于结构相关长度时，入射光便无法再探测结构非均匀性；如果仍满足一阶微扰条件（27），则由非均匀性引起的散射可以忽略。将方程（67）代入（60），

$$\tilde{I}(\boldsymbol{r}) = I_0 V \frac{k_0^4}{(4\pi r)^2} K_0(\hat{\boldsymbol{r}}) \iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{\rho}\, \kappa_W(\boldsymbol{\rho},\hat{\boldsymbol{r}}) e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} \tag{70}$$

在方程 (70) 中，散射源 $K_0(\hat{\boldsymbol{r}})$的强度直接决定散射强度 $\tilde{I}(\boldsymbol{r})$。散射源的空间相干性 $\kappa_W(\boldsymbol{\rho},\hat{\boldsymbol{r}})$通过方程 (70) 中的积分，决定远场干涉的影响。

3.5 各向同性随机过程

如果随机过程也是各向同性的，那么沿样品系综 W进行平均时不存在优先取向，因此可以得出结论：κ_W 仅是 $\rho \coloneqq |\boldsymbol{\rho}|$ 的函数。沿 $\boldsymbol{\rho}$ 的所有取向积分可得

$$\tilde{I}(\boldsymbol{r}) = I_0 V \frac{k_0^4}{4\pi r^2} K_0(\hat{\boldsymbol{r}}) \int_0^\infty d\rho\, \rho^2 \kappa_W(\rho)\mathrm{sinc}(q(\hat{\boldsymbol{r}})\rho) \tag{71}$$

其中

$$q(\hat{\boldsymbol{r}}) \coloneqq |\boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{r}})| = 2\bar{n}k_0 \sin(\varphi/2) \tag{72}$$

且 φ 是 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{r}$之间的夹角。

对于大多数点位于内部的空间不变过程，方程 (70) 可以给出散射强度。如果随机过程也是各向同性的，那么方程 (71) 也可以给出散射强度。方程 (71) 更简单，因为三重积分被单积分取代，而且微结构自相关 κ_W 仅取决于位移长度 ρ ，而不取决于位移方向。然而，要利用这些方程，还需要找到散射源强度 K_0 和自相关 κ_W 的方法。

3.6. 总散射

可以通过对所有方向$\hat{\boldsymbol{r}}$上的散射强度$\tilde{I}$ 进行积分，求得小散射体积α_{sc} 的总散射。

$$\alpha_{sc} = \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}}\, \tilde{I}(\hat{\boldsymbol{r}}) \tag{73}$$

wh在此 $\hat{\mathcal{V}}$ 表示三维空间中所有实值单位向量的集合。使用方程（60 ）

$$\alpha_{sc} = I_0 V \frac{k_0^4}{16\pi^2} \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}} \iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{\rho}\, K(\boldsymbol{\rho}, \hat{\boldsymbol{r}}) e^{-i\boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{r}})\cdot\boldsymbol{\rho}} \tag{74}$$

对于由空间不变且各向同性随机过程引起的小涨落，可使用方程 (71) 计算散射强度，并通过改变积分顺序

$$\alpha_{sc} = I_0 V k_0^4 \int_0^\infty d\rho\, \rho^2 \kappa_W(\rho) \frac{1}{4\pi} \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}} K_0(\hat{\boldsymbol{r}}) \mathrm{sinc}(q(\hat{\boldsymbol{r}})\rho) \tag{75}$$

方程 (74) 和 (75) 给出了求解由小型散射体积引起的总散射强度的表达式。然而，对于大型散射体积，散射系数作为散射强度的度量更为合适。

3.7. 散射系数

3.7.1 完整散射系数

为了使一阶微扰能够准确表示，入射场在局部范围内应与驱动场（即驱动散射源振荡的场）相似，且该范围的长度尺度应与扰动相干长度 L_c 相当。然而，在长距离传播过程中，驱动场穿过散射体积时预计会因散射而衰减。对于单向入射辐射，可通过朗伯定律描述这一行为；该定律可通过将散射体积分割成垂直于入射光能量传递方向 （坡印廷矢量）的薄片推导得出。若受照部分的横截面积为 A ，且每片的厚度为 dl，则每片的体积为

$$dV = A d\ell \tag{76}$$

假设非均匀性产生的散射光永远不会被重新收集（例如，每个切片的散射彼此独立；如果不同体积切片的散射存在相关性，则该假设可能不成立），则每个区段中由散射损耗引起的光束强度变化为

$$dI = -\frac{d\alpha_{sc}}{A} = -\frac{1}{A}\left(\frac{I dV}{I_0 V}\alpha_{sc}\right) = \left(-\frac{\alpha_{sc}}{I_0 V}\right) I d\ell \tag{77}$$

求解该方程可得到熟知的朗伯定律

$$I = I_0 \exp(-\mu_{sc}\ell) \tag{78}$$

其中，散射系数为

$$\mu_{sc} = \frac{\alpha_{sc}}{I_0 V} = \frac{k_0^4}{16\pi^2} \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}} \iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{\rho}\, K(\boldsymbol{\rho}, \hat{\boldsymbol{r}}) e^{-i\boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{r}})\cdot\boldsymbol{\rho}} \tag{79}$$

对于各向同性随机过程，方程（79）变为

$$\mu_{sc} = k_0^4 \int_0^\infty d\rho\, \rho^2 \kappa_W(\rho) \frac{1}{4\pi} \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}} K_0(\hat{\boldsymbol{r}}) \mathrm{sinc}(q(\hat{\boldsymbol{r}})\rho) \tag{80}$$

由 (79) 和 (80) 给出的散射截面 μ_{sc}量化了折射率非均匀性所导致的散射损耗。对于 k_0的每个取值，都必须计算 (79) 中的五重积分和 (80) 中的三重积分。因此，尽管这些结果具有极强的通用性，但在计算 μ_{sc} 随 k_0 或 λ变化时，执行起来可能较慢。为此，我们将研究在更具体条件下对这些解的近似。

3.7.2 各向同性随机过程在无吸收介质中

对于无源无损介质中由各向同性随机过程产生的散射应用，$K_0(\hat{\boldsymbol{r}})$ 可近似为一个与 ϵ的方差成正比的常数

$$K_0(\hat{\boldsymbol{r}}) \approx K' \mathrm{var}_W(\epsilon) \tag{81}$$

其中，K' 是一个比例常数，取值约为 0.7。各向同性、被动且无损足以推导出（81），但并非必要条件。事实上，只要介电常数非均匀性近似为厄米，方程（81）就成立。当吸收非均匀性（折射率张量 n 的反厄米分量）远小于折射率非均匀性时，便会出现这种情况。吸收较弱或不存在时，通常就是如此。即使吸收较强，只要吸收位置呈各向同性，折射率非均匀性同样近似为厄米。我们计划发表一篇论文，推导并证明厄米折射率情况下的方程（81）。不过，本文只研究方程（81）成立所产生的结果。于是，方程（80）可化简为

$$\mu_{sc} = K' \frac{k_0^2}{\bar{n}^2} \mathrm{var}_W(\epsilon) \int_0^\infty d\rho\, \kappa_W(\rho) \sin^2(k\rho) \tag{82}$$

当满足 RGDA 条件 (23) 时，折射率 n 的方差可近似为

$$\mathrm{var}_W(n) = \mathrm{var}_W\left(\sqrt{\epsilon}\right) = \mathrm{var}_W\left(\sqrt{\bar{\epsilon} + \tilde{\epsilon}}\right) \approx \mathrm{var}_W\left(\sqrt{\bar{\epsilon}} + \frac{\tilde{\epsilon}}{2\sqrt{\bar{\epsilon}}}\right) = \frac{\mathrm{var}_W(\tilde{\epsilon})}{4\bar{\epsilon}} = \frac{\mathrm{var}_W(\epsilon)}{4\bar{n}^2} \tag{83}$$

或者等价地

$$\mathrm{var}_W(\epsilon) = 4\bar{n}^2 \mathrm{var}_W(n) \tag{84}$$

将其代入 (82)

$$\mu_{sc} = 4K' k_0^2 \mathrm{var}_W(n) \int_0^\infty d\rho\, \kappa_W(\rho) \sin^2(\bar{n} k_0 \rho) \tag{85}$$

与 (80) 相比，方程 (85) 的计算更简单、处理起来更方便，也更易于解释。因此，在各向同性无吸收介质中，优先采用方程 (85)，而非方程 (80)。

3.7.3 瑞利小尺寸极限

实际上，对 ρ 的积分不会是无穷大的。只需积分到散射源 L_c 相关长度的某个倍数即可。如果相关长度足够小，满足

$$\bar{n} k_0 L_c \ll 1 \tag{86}$$

然后 $q(\hat{\boldsymbol{r}})\rho \ll 1$ 对方程 (79) 中的指数函数进行一阶近似，得到

$$\mu_{sc} = \frac{k_0^4}{16\pi^2} \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}} \iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{\rho}\, K(\boldsymbol{\rho}, \hat{\boldsymbol{r}})(1 - i\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\rho}) \tag{87}$$

利用空间不变性所继承的性质

$$K(\boldsymbol{\rho}, \hat{\boldsymbol{r}}) = \left\langle \widehat{\boldsymbol{E}}_0^\dagger \tilde{\epsilon}(0)^\dagger \hat{r}_\perp \tilde{\epsilon}(\boldsymbol{\rho}) \widehat{\boldsymbol{E}}_0 \right\rangle_W = \left\langle \widehat{\boldsymbol{E}}_0^\dagger \tilde{\epsilon}(-\boldsymbol{\rho})^\dagger \hat{r}_\perp \tilde{\epsilon}(0) \widehat{\boldsymbol{E}}_0 \right\rangle_W \tag{88}$$

$$= \left\langle \widehat{\boldsymbol{E}}_0^{\dagger} \tilde{\epsilon}(0)^{\dagger} \hat{r}_{\perp} \tilde{\epsilon}(-\boldsymbol{\rho}) \widehat{\boldsymbol{E}}_0 \right\rangle_W^* = K(-\boldsymbol{\rho}, \hat{\boldsymbol{r}})^*$$

$$\mu_{sc} = \frac{k_0^4}{16\pi^2} \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}} \left(\iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{\rho}\, K(\boldsymbol{\rho}, \hat{\boldsymbol{r}}) + \iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{\rho}\, \Im[K(\boldsymbol{\rho}, \hat{\boldsymbol{r}})](\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\rho}) \right) \tag{89}$$

如果介质不吸收（电介质），那么 ϵ 是厄米的，且 K 不含虚部分量，第二个积分为零，因此得到

$$\mu_{sc} = \frac{k_0^4}{16\pi^2} \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}} \iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{\rho}\, K(\boldsymbol{\rho}, \hat{\boldsymbol{r}}) \tag{90}$$

这是瑞利散射极限，当涨落足够小时，条件 (86) 得以满足，此极限便成立。使用 (90) 的优点是只需计算一次五重积分，而 (79) 则要求针对 k_0 的每个取值分别积分。

3.7.3.1 各向同性

在各向同性的情况下，在瑞利极限下，$\mathrm{sinc}(q(\hat{\boldsymbol{r}})\rho) \approx 1$，方程 (80) 变为

$$\mu_{sc} = k_0^4 \langle K_0 \rangle_{\hat{\boldsymbol{r}}} \int_0^{\infty} d\rho\, \rho^2 \kappa_W(\rho) \tag{91}$$

其中 $\langle \cdot \rangle_{\hat{\boldsymbol{r}}}$ 是沿所有观测方向 $\hat{\boldsymbol{r}}$取平均的结果。对于函数 x，关于 $\hat{\boldsymbol{r}}$ a 定义为 s

$$\langle x \rangle_{\hat{\boldsymbol{r}}} \coloneqq \frac{1}{4\pi} \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}}\, x(\hat{\boldsymbol{r}}) \tag{92}$$

$\langle K_0 \rangle_{\hat{\boldsymbol{r}}}$ 是沿所有取向求平均后的散射强度，其定义为

$$\langle K_0 \rangle_{\hat{\boldsymbol{r}}} \coloneqq \frac{1}{4\pi} \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}}\, K_0(\hat{\boldsymbol{r}}) \tag{93}$$

如果介质也不吸收，那么（85）变为

$$\mu_{sc} = 4K' k_0^4 \bar{n}^2 \mathrm{var}_W(n) \int_0^{\infty} d\rho\, \rho^2 \kappa_W(\rho) \tag{94}$$

3.7.3.2 当 κ_W 不依赖于 $\hat{\boldsymbol{r}}$时

自相关的一种解释是，它是对信号进行最小二乘多元回归所得到的线性变换。通常，将原点处的散射源 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{0})$映射到另一点 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\rho})$处散射源的最佳拟合线性变换，可以很好地近似为缩放变换。在这种情况下，κ_W 不再依赖于 $\hat{\boldsymbol{r}}$，而只成为 $\boldsymbol{\rho}$ 的函数，其表达式为

$$\kappa_W(\boldsymbol{\rho}, \hat{\boldsymbol{r}}) \approx \kappa_W(\boldsymbol{\rho}) \tag{95}$$

假设 (95) 成立，可得出 μ_{sc} 的瑞利极限表达式，其含义更加明确：

$$\mu_{sc} = \frac{k_0^4}{16\pi^2} \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}}\, K_0(\hat{\boldsymbol{r}}) \iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{\rho}\, \kappa_W(\boldsymbol{\rho}) = \frac{k_0^4 V_{corr}}{4\pi} \left(\frac{1}{4\pi} \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}}\, K_0(\hat{\boldsymbol{r}}) \right) \tag{96}$$

$$= \frac{k_0^4 \langle K_0 \rangle_{\hat{\boldsymbol{r}}} V_{corr}}{4\pi}$$

其中，V_{corr} 是相关体积，用于表示平均而言与某一点相关联的体积。其定义为

$$V_{corr} \coloneqq \iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{\rho}\, \kappa_W(\boldsymbol{\rho}) \tag{97}$$

当κ_W 不依赖于$\hat{\boldsymbol{r}}$时，方程 (96) 和 (97) 提供了一种便捷的方式来计算散射系数。我们可以用一种不那么具体、但更有意义的方式来表达方程 (96)。为此，将$\langle K_0 \rangle_{\hat{\boldsymbol{r}}}$ 重新表述为

$$\begin{aligned} \langle K_0 \rangle_{\hat{\boldsymbol{r}}} &= \left\langle \widehat{\boldsymbol{E}}_0^{\dagger} \tilde{\epsilon}(0)^{\dagger} \langle \hat{r}_{\perp} \rangle_{\hat{r}} \tilde{\epsilon}(0) \widehat{\boldsymbol{E}}_0 \right\rangle_W = \frac{2}{3} \left\langle \widehat{\boldsymbol{E}}_0^{\dagger} \tilde{\epsilon}(0)^{\dagger} \tilde{\epsilon}(0) \widehat{\boldsymbol{E}}_0 \right\rangle_W = \frac{2}{3} \mathrm{Var}_W\left(\left| \tilde{\epsilon} \widehat{\boldsymbol{E}}_0 \right| \right) \\ &= \frac{2G}{3k_0^4 I_0} \mathrm{Var}_W(Q) \end{aligned} \tag{98}$$

其中Var$_W(Q)$是散射源振幅的方差。代入此结果

$$\mu_{sc} = \frac{G}{6\pi I_0} V_{corr} \mathrm{Var}_W(Q) \tag{99}$$

我们可以看到，散射系数与相关体积以及散射源振幅的方差成正比。

3.7.4. 大尺寸 RGD 极限

3.7.4.1 各向同性

对于各向同性微观结构，方程 (85) 可写为

$$\mu_{sc} = 2K' k_0^2 \mathrm{var}_W(n) \left(\int_0^{\infty} d\rho\, \kappa_W(\rho) + \int_0^{\infty} d\rho\, \kappa_W(\rho) \cos(2\bar{n} k_0 \rho) \right) \tag{100}$$

在大尺寸极限下

$$\bar{n} k_0 L_c \gg 1 \tag{101}$$

且（100）中的第二个积分消失，从而得到

$$\mu_{sc} = 2K' k_0^2 \mathrm{var}_W(n) \int_0^{\infty} d\rho\, \kappa_W(\rho) \tag{102}$$

这就是方程（80）的大尺寸 RGD 极限。采用大尺寸 RGD 极限的优势在于，对于满足（101）的整个入射光范围，只需计算一个积分。

3.7.4.2 当 $\boldsymbol{\kappa_W}$ 不依赖于 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 时

假设（95）成立，并结合（67）中的定义和方程（79）

$$\mu_{sc} = \frac{k_0^4}{16\pi^2} \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}}\, K_0(\hat{\boldsymbol{r}}) \iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{\rho}\, \kappa_W(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{r}})\cdot\boldsymbol{\rho}} = \frac{k_0^4}{16\pi^2} \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}}\, K_0(\hat{\boldsymbol{r}}) \mathcal{F}\{\kappa_W\}\left(\boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{r}})\right) \tag{103}$$

$\boldsymbol{q}(\hat{\boldsymbol{r}})$ 描绘出一个半径为 $\bar{n}k_0$ 、中心位于 $\boldsymbol{k} = k\hat{\boldsymbol{k}} = \bar{n}k_0\hat{\boldsymbol{k}}$ 的球体。这就是埃瓦尔德球，表示材料中与弹性散射相关的所有波。在大尺寸极限下

$$\bar{n}k_0 L_\perp \gg 1 \tag{104}$$

其中，$L_\perp$ 是垂直于传播方向 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 的相关长度。 当满足 (104) 时，埃瓦尔德球可近似为垂直于 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 的平面。**图 9** 示意性地展示了方程 (103) 中小尺寸、中等尺寸和大尺寸情形所需的积分。

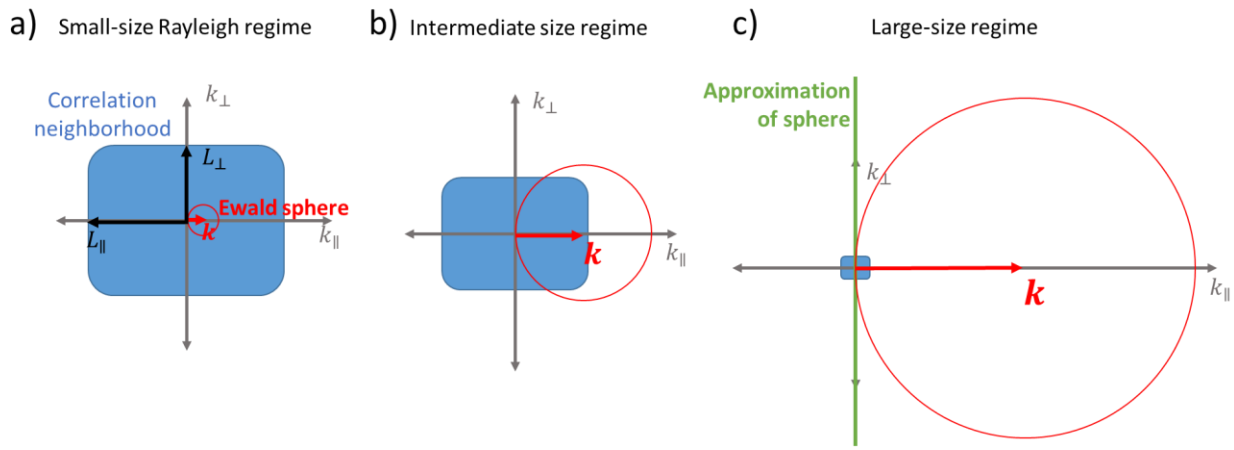

图 9： 不同尺寸范围内傅里叶空间中的散射计算示意图。积分对象是散射源相关性 κ ，并沿埃瓦尔德球在傅里叶空间中进行。相关邻域表示模 $|\mathrm{F}\{\kappa\}|$ 大到不可忽略的区域。

在小尺寸区域中，**图 9a** 说明埃瓦尔德球足够小，因此几乎处处为零，所以 $\boldsymbol{q} \approx 0$ 是一种有效的近似，这是推导（96）的另一种方法。在大尺寸区域中，**图 9c** 说明埃瓦尔德球变得足够大，可以用一个平面近似。平面近似在 $\hat{\boldsymbol{r}} \approx \hat{\boldsymbol{k}}$ 附近的区域内是准确的。结果是，方程（103）可以表示为

$$\mu_{sc} \approx \frac{k_0^4 K_0(\hat{\boldsymbol{k}})}{16\pi^2(\bar{n}k_0)^2} \iint_{\mathcal{V}\perp\hat{\boldsymbol{k}}} d\boldsymbol{q}\, \mathcal{F}\{\kappa_W\}(\boldsymbol{q}) \tag{105}$$

其中，引入因子$(\bar{n}k_0)^2$ ，以计入该平面按半径平方缩放的影响；$\mathcal{V} \perp \hat{\boldsymbol{k}}$ 是所有垂直于$\hat{\boldsymbol{k}}$的向量。$\mathcal{V} \perp \hat{\boldsymbol{k}}$ 也可以看作是垂直于$\hat{k}$ 且经过原点的平面。方程（105）可以写成一个内积

$$\mu_{sc} = \frac{k_0^4 K_0(\hat{\boldsymbol{k}})}{16\pi^2(\bar{n}k_0)^2} \iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{q}\, \delta_k(\boldsymbol{q})\, \mathcal{F}\{\kappa_W\}(\boldsymbol{q}) = \frac{k_0^2 K_0(\hat{\boldsymbol{k}})}{16\pi^2\bar{n}^2} \langle \delta_k, \mathcal{F}\{\kappa_W\} \rangle \tag{106}$$

其中，$\delta_k(\boldsymbol{q})$ 是一个狄拉克曲面δ函数，定义为

$$\delta_k(\boldsymbol{q}) = \delta\left(\boldsymbol{q}\cdot\widehat{\boldsymbol{k}}\right) \tag{107}$$

其中 δ 是 o　　维狄拉克δ函数。方程（106）中的内积定义为　　s

$$\langle f, g\rangle = \iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{q}\, f^*(\boldsymbol{q}) g(\boldsymbol{q}) \tag{108}$$

其中，上标 $*$ 表示复共轭。三维傅里叶变换（及其逆变换）在相差 $(2\pi)^3$ 的比例因子的情况下保持内积不变，因此（106）可改写为

$$\mu_{sc} = \frac{k_0^2 K_0\left(\widehat{\boldsymbol{k}}\right)}{16\pi^2\bar{n}^2}\,(2\pi)^3\langle \mathcal{F}^{-1}\{\delta_k\}, \kappa_W\rangle \tag{109}$$

δ_k 的逆傅里叶变换可直接计算，所用坐标轴满足 $\hat{\boldsymbol{z}} = \widehat{\boldsymbol{k}}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{\delta_k\}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{q}\,\delta_k(\boldsymbol{q}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z\,\delta(q_z) e^{i(q_x x + q_y y + q_z z)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dq_x\, e^{iq_x x}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} dq_y\, e^{iq_y y}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} dq_z\,\delta(q_z) e^{iq_z z}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\delta(x)\delta(y)
\end{aligned} \tag{110}$$

代入方程（109）

$$\begin{aligned}
\mu_{sc} &= \frac{k_0^2 K_0\left(\widehat{\boldsymbol{k}}\right)}{4\bar{n}^2}\langle\delta(x)\delta(y), \kappa_W\rangle = \frac{k_0^2 K_0\left(\widehat{\boldsymbol{k}}\right)}{4\bar{n}^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\kappa_W(\boldsymbol{k}) = \frac{k_0^2 K_0\left(\widehat{\boldsymbol{k}}\right)}{2\bar{n}^2}\int_{0}^{\infty} dk\,\kappa_W(\boldsymbol{k}) \\
&= \frac{k_0^2 K_0\left(\widehat{\boldsymbol{k}}\right)}{2\bar{n}^2} L_{corr}\left(\widehat{\boldsymbol{k}}\right)
\end{aligned} \tag{111}$$

其中，$L_{corr}\left(\widehat{\boldsymbol{k}}\right)$ 是沿传播方向的相关长度，其值表示沿 $\widehat{\boldsymbol{k}}$ 方向上平均而言与某一点相关联的长度。利用 RGDA 条件（23），可以证明

$$K_0\left(\widehat{\boldsymbol{k}}\right) \approx 4\bar{n}^2 \mathrm{Var}_W\left(\left|\hat{k}_\perp n\widehat{\boldsymbol{E}}_0\right|\right) \tag{112}$$

其中，$\hat{k}_\perp$ 是一个将向量拒斥到 $\widehat{\boldsymbol{k}}$ 上的算子，其定义与（49）类似：

$$\hat{k}_\perp \coloneqq I_d - \widehat{\boldsymbol{k}}\otimes\widehat{\boldsymbol{k}} \tag{113}$$

将 (112) 代入 (111)

$$\mu_{sc} = 2L_{corr}\left(\widehat{\boldsymbol{k}}\right)\mathrm{Var}_W\left(\left|k_0\hat{k}_\perp n\widehat{\boldsymbol{E}}_0\right|\right) = 2L_{corr}\left(\widehat{\boldsymbol{k}}\right)\mathrm{Var}_W\left(\left|\boldsymbol{k}\times\widehat{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{0}}\right|\right) \tag{114}$$

项 $\left|\boldsymbol{k}\times\widehat{\boldsymbol{E}}_0\right|$ 可解释为光沿 $\widehat{\boldsymbol{k}}$方向传播时经历的相位延迟系数（注意，如果 n 是标量，该项将简化为 $k_0 n = \frac{d\phi}{d}$ l）。据此，我们可以写出

$$\mu_{sc} = 2L_{corr}\left(\widehat{\boldsymbol{k}}\right)\mathrm{Var}_W\left(\frac{d\phi_\perp}{dl}\right) \tag{115}$$

方程 (115) 表明，在大尺寸极限下，散射系数与入射光束方向上的相关长度以及相位累积的方差成正比。

4. 讨论

表 2： 假设列表

#	Name	假设
<9>	非磁性介质	介质的磁响应可以忽略，因此 $\mu = 1$ 是一个有效的近似。
<10>	无源介质	产生的辐射不超过入射辐射的介质
<11>	无损介质	不吸收辐射的介质
<12>	一阶微扰近似；瑞利-Gans-德拜近似（瑞利-甘斯-德拜近似）	非均匀散射可以用一阶介电常数场微扰来近似
<13>	软散射	介电常数涨落的强度远小于平均介电常数。参见方程（23）
<14>	小相位差	介电常数涨落相关的点所经历的在完整解中的相位延迟与其在入射解中近似相同。见方程 (27)
<15>	弱各向异性	各向异性足够弱，因此散射的二阶效应可能可以忽略。见方程（31）
<16>	远场	测量发生在远离辐射源的位置；辐射源是近似点源
<17>	理想远场介质	远场是弱各向同性、均匀、无源、无损的，并且使……最小反射
<18>	均匀	空间不变
<19>	单向	仅有一个波矢 $\boldsymbol{k}$ 的解
<20>	各向同性；未对齐多晶体	旋转不变；用于描述随机过程时，旋转不变的统计特性随机过程
<21>	系综遍历性	存在系综平均散射强度，并且它可由样品的体积平均散射强度逼近任意大的体积（不要与马尔可夫遍历性混淆）
<22>	线偏振	仅存在一个电场方向的解 $\hat{\boldsymbol{E}}_0$
<23>	理想入射辐射	入射辐射为单向。要求完全单色光。当光源距离较远时，对入射光近似成立，并且入射光振幅的相关长度远大于结构相关长度
<24>	均匀过程	具有均匀的统计特性。当介质在内部均匀且由内部体积占主导时，近似成立
<25>	内部体积占主导	内部体积远大于表面体积
<28>	电介质	非导电
<29>	独立散射	散射源之间不会发生干涉；散射强度是各光源强度之和；在比尔-朗伯定律中，

入射辐射的衰减发生在远大于光源相关长度的尺度上 L_c ($\mu_{sc}L_c \ll 1$)<30> 各向同性源 源在各个方向均匀散射<31> $\hat{r}$-无关 源自相关 κ 不依赖于观测方向 自相关 $\hat{\boldsymbol{r}}$<32> 瑞利近似；当电介质的尺寸参数远小于瑞利极限时，近似散射有效<33> 大尺寸 RGD 极限 当尺寸参数远大于 1 时的瑞利-甘斯-德拜近似

如前所述，本文推导的一些方程此前已经被推导过。与本工作最接近的是 Debye and Beuche [13], Goldstein and Michalik [14], Ross and Javis [16-17] 的研究路线。Goldstein [14] 和 Ross [17] 也推导了适用于各向异性非均匀性的散射方程。我们的工作通过使现有推导更加清晰、通用且有意义，改进了这些推导。

为使表述清晰，我们公开说明了一些通常被视为理所当然的分析内容，例如使用随机系综（**第 2.2 节**）、远场介质所需满足的假设（**第 3.1 节**），以及散射体积所需满足的假设（**第 3.3 节**）。我们还为所有变量和运算提供了明确的定义。例如，求平均需要一个带有概率测度的样本空间，而常用的 $\langle\cdot\rangle$ 并未明确其所依据的概率测度。我们特别标注了不同类型的平均（例如，系综平均 $\langle\cdot\rangle_W$ 与体积平均 $\langle\cdot\rangle_V$），以便更清楚地说明所讨论的期望运算。

通过有策略地引入假设，我们对结果进行了组织，以最大限度地提高其普适性。例如，首先给出一般软散射的结果（**第 3.2.1 节**），然后给出空间不变过程的结果（**第 3.2.2 节**），接着给出同时具有体相特征的过程的结果（**第 3.3 节**），最后给出同时具有各向同性特征的过程的结果（**第 3.5 节**）。这样，后续研究者便能选择适合自己的普适性层次。我们还推广了一些结果。在该系列的第一篇论文 [1], 中，我们证明了即使对于非正交晶系，构造正交主轴也是可行的，因为无论晶系如何，无损介质总是可对角化的。此外，**第 3.7.4 节**将各向异性涨落的大尺寸 RGD 散射方程推广了。

通过将这些结果应用于散射系数的计算，使其更具实际意义；这些散射系数可从在线透射测量中提取 [25]。我们通过论证（**第 3 节**）改变远场介质不会影响散射系数，拓展了模型的适用范围，因此，与其他研究提供的散射强度相比，本模型对散射系数的建模适用范围更广。在可能的情况下，我们都尽量为所用变量及其相互关系提供物理解释，使方程更具实际意义。例如，推导方程 (65) 是为了阐明过剩加速电荷与软散射光强度之间的关系。

在本系列的第一篇论文中 [1], ，我们从麦克斯韦方程组推导出了弹性散射方程。本文通过对散射方程进行微扰，评估非均匀性导致的电介质软散射，从第一性原理阐述了大量RGD文献中的工作。我们推导了

一阶微扰下的散射电场和总散射强度（其有效性在**第 2.3 节**中进行了研究），最终在方程（79）中推导出了散射系数。对于各向同性随机过程，方程（80）给出了更简洁的散射系数表达式；对于无吸收介质，方程（85）给出了相应表达式。表 2 总结了分析过程中不同阶段所作的假设。

对于小尺寸（**第 3.7.3 节**）和大尺寸（**第 3.7.4 节**）情形，还可以进一步简化。**图 10** 总结了无吸收介质在不同情形下的散射系数表达式。图中还直观展示了在不同情形下，积分前乘以正弦^2 所产生的影响。

本文推导出了一些新颖的结果。在方程 (79)、(80) 和 (85) 中，对不同形式的散射强度进行积分，得到将非均匀性与散射系数联系起来的方程。随后，可将模型预测与散射系数的测量值进行比较；这些测量值可从在线透射测量中提取。方程 (56) 给出了描述散射体积几何形状对散射强度影响的方程。此外，方程 (111) 给出了大尺寸 RGD 散射系数。恰如其分的是，该方程令人联想到推广后的程函方法，其中考虑了非标量折射率。

我们的第一性原理推导有助于更深入地理解非均匀散射的光源。从物理上看，方程 (11) 中的源项与过量的（或在其为负值时，与缺少的）加速电荷成正比。“过量”是指加速度大于在均匀

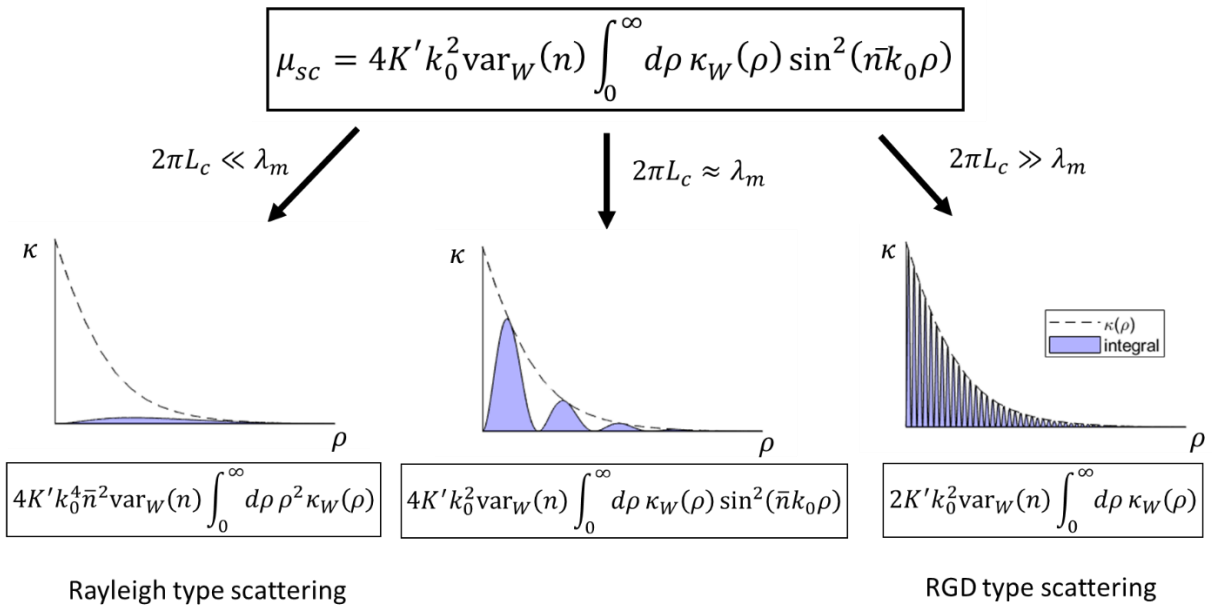

图 10： 适用于不同尺寸区域的表达式汇总。虚线表示散射源自相关$\kappa(\rho)$，蓝色阴影区域表示方程中的积分。大尺寸区域中的积分约为 $\kappa(\rho)$ 下方总面积的一半

具有平均介电常数的样品。加速电荷会产生电磁辐射，并表现为辐射源。在均匀透明介质中，辐射源会发生相长干涉，在传播方向上形成表观较慢的波，同时发生相消干涉。

每个其他方向。然而，与源项成正比的过量散射源$\boldsymbol{Q}$不会得到适当的补偿，导致传播方向上的相长干涉不完全（直线传输损失），以及其他方向上的相消干涉不完全（散射）。由此可见，非均匀介质中的散射源是超额加速电荷。这与常见的说法相反 [26-36] 即多晶透明陶瓷中的晶界会产生散射。几乎在所有情况下，晶界本身并不散射；导致散射的是光学性质偏离平均值，从而产生超额加速电荷。例外情况是未满足 RGDA 假设，或者介质中有相当大的体积分数位于边界区域内或附近；此时可将晶界视为会产生散射的第二相。方程 (65) 揭示了散射源对远场散射强度的数学作用：由此可见，$\boldsymbol{r}$ 处的远场散射强度与波矢 $k\hat{\boldsymbol{r}}$处的源项功率密度成正比。

认识到 RGD 理论是一阶微扰理论，有助于揭示一些重要见解。如果平均介电常数 $\bar{\epsilon}$ 是张量，那么入射光束中仍可能发生双折射。这意味着，各向异性的整体取向可能导致非均匀介质中发生双折射。例如，各向异性多晶体的部分取向应会在宏观尺度上引入较弱的双折射。即使采用 RGD 表述，其他讨论多晶体取向的模型也未能预测这一现象 [14, 31, 40-44]。另一个常被忽视的见解是软散射条件 (28) 的由来 [13, 27, 29, 45-51]。有时，人们以可以忽略反射为由来论证软散射条件 [48, 49, 51]。当粒子足够大、能够产生反射时，这一说法是成立的，因为反射对光传播的修正项影响最大。然而，对于小于光波长的粒子，反射与散射之间的界限会变得模糊，但通过条件 (23) 更一般的构造，软散射条件 (28) 仍被证明成立。这些论证要求入射场在非均匀性的相干长度尺度上近似于实际场。由此，我们可以从更根本的角度理解软散射条件：它对非均匀性导致的电场振幅降低施加限制，无论这种降低是由反射、散射还是其他损耗机制造成的。

散射系数的推导也阐明了一些被忽视的概念。方程 (38) 指出，强度与电场强度的平方成正比，且常在缺乏充分论证的情况下被用作起点 [40, 42, 51-54]。在此，我们给出了一组足以证明其适用性的假设（欧姆型、均匀、弱各向异性介质）。方程 (56) 给出了有限样品中散射强度的表达式。方程 (56) 的一种物理解释是：由于表面处性质发生突变，散射体积表面附近的空间不变性被打破。卷积描述了这种非均匀性对散射强度的影响。一般而言，可以用包络振幅函数替代示性函数，以考虑涨落模的变化。判据 (59) 是体近似 (60) 的有效性条件，该近似使我们能够忽略散射体积表面的影响。

与 Debye and Beuche [13], 的做法一致，在**第 3.4 节** 中，我们将散射源自协方差 K 分解为散射源强度 K_0 和散射源自相关 κ。这样做的优点是，散射源强度 K_0 通常取决于材料属性，而不取决于空间分布。另一方面，散射源自相关 κ通常取决于

介电常数的空间分布，而非介电常数本身的值。这样，我们就可以通过考察两个更简单的量K_0 和 κ，来求得自相关。

当散射源自相关 κ 不随 $\hat{\boldsymbol{r}}$变化时，方程（79）中的积分变得可分离。这使得散射系数可以分解为两个因子：第一个因子表示散射源的典型强度，第二个因子表示与某个散射源具有相关性（因而发生相长干涉）的散射源的典型数量。在考察瑞利区间时，这意味着散射系数与散射源幅值方差和相关体积成正比。在大尺寸 RGD 区间，散射系数与相位累积方差和相关长度成正比。

5. 结论

总而言之，我们以通俗易懂且全面的方式重新推导了 RGD 散射理论。结合本系列的第一篇论文，我们展示了如何从麦克斯韦微观方程推导非均匀散射系数。这让我们对采用 RGD 方法时所依据的假设有了更深入的理解，也揭示了该方法可能的推广方向。具体而言，RGD 假设可理解为源于这样一个条件：相关体积内的入射辐射与散射后辐射十分接近；而强度与振幅平方的关系则要求介质为欧姆型、均匀且各向同性（或弱各向异性）。此外，研究表明，软散射源是过剩加速电荷。我们还推广了 RGD 散射理论，以描述散射体积的几何形状所产生的影响，并预测介电常数具有整体取向时双折射的影响。**表 3。**列出了主要方程及其适用所需的假设。

表 3：主要方程及所需假设列表。方程使用 () 标示，假设使用 <> 标示。

方程	结论	Eq #	必要条件
$\nabla \times (\nabla \times \widetilde{\boldsymbol{E}}) - k_0^2 \tilde{\epsilon} \widetilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{Q}$	一阶散射的偏微分方程	(10)	(1) <13,14>→<12>
$\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \iiint_{\boldsymbol{V}} d\boldsymbol{r}'\, \Gamma(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}')$	一阶散射	(27)	(10) <15>
$\tilde{I}(\boldsymbol{r}) = \frac{I_0 k_0^4}{(4\pi r)_2^{}} \left[\mathrm{F}\rho\{K(\hat{\boldsymbol{r}})\} \star |\mathrm{F}\{1_{\mathcal{V}}\}|^2 \right](\boldsymbol{q})$	描述样品的影响 边界对强度的影响	(56)	(27,39) <23, 24>
$\tilde{I}(\boldsymbol{r}) = \frac{G}{(4\pi r)_2^{}} |\mathrm{F}\{\boldsymbol{Q}_\perp\}(\boldsymbol{q})|^2$	散射场作为谱功率密度	(65)	(56) <25>
$\mu_{sc} = \frac{1}{I_0 V} \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}}\, \tilde{I}\ (\hat{\boldsymbol{r}})$	散射系数来自散射强度	(73)+(79)	<29>
$\mu_{sc} = \frac{k_0^4}{16\pi^2} \iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}} \iiint_{\mathcal{V}} d\boldsymbol{\rho}\, K(\boldsymbol{\rho}, \hat{\boldsymbol{r}}) e^{-iq(\hat{\boldsymbol{r}})\cdot\boldsymbol{\rho}}$	散射系数来自软非均匀散射	(79)	(56) <25, 29>

$\mu_{sc} = \frac{k_0^4}{4\pi}\int_0^\infty d\rho\,\rho^2\kappa_W(\rho)\iint_{\hat{\mathcal{V}}} d\hat{\boldsymbol{r}}K_0(\hat{\boldsymbol{r}})\mathrm{sinc}(q(\hat{\boldsymbol{r}})\rho)$	Isotropic scattering coefficient	(80)	(79) <20>
$\mu_{sc} = \frac{G}{6\pi I_0}V_{corr}\mathrm{Var}_W(Q)$	Small-size Rayleigh regime	(99)	(79) <31, 32>
$\mu_{sc} = 2L_{corr}(\hat{\boldsymbol{k}})\mathrm{Var}_W\left(\frac{d\phi_\perp}{dl}\right)$	Large-size regime	(115)	(79) <31, 33>

6. 致谢

谨此衷心感谢美国海军研究办公室（ONR）通过 DE-JTO 的 MRI 对本研究提供支持。

7. 附录

附录 A：散射方程的推导

我们首先假设麦克斯韦方程组能够充分描述非均匀介质中的弹性散射，并尝试求解存在此类涨落时的方程。麦克斯韦微观方程的微分形式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{e} = \rho_e \tag{A-116}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{b} = 0 \tag{A-117}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{e} = -\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} \tag{A-118}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{b} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t} \tag{A-119}$$

其中，$\boldsymbol{e}$ 为电场，ρ_e 为电荷密度，$\boldsymbol{b}$ 为磁通量密度，t 为时间，$\boldsymbol{j}$ 为电流密度，μ_0 为真空磁导率，ϵ_0 为真空介电常数。对方程 (A-3) 取旋度，然后代入方程 (A-4)

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{e}) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{e}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} \tag{A-120}$$

我们将方程 (A-5) 改写为算子形式

$$[(\nabla \times)^2 + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t^2]\boldsymbol{e} = -\mu_0 \partial_t \boldsymbol{j} \tag{A-121}$$

其中，$\nabla \times$ 表示旋度算子，$(\nabla \times)^2$ 表示取旋度的旋度，∂_t^2 表示二阶偏时间导数算子，∂_t 表示偏时间导数算子。(A-6)中的动力学可分解为一个与时间无关的因子与一个指数$e^{-i\omega t}$ 因子的乘积，其中ω 是

角频率。这是因为动力学是线性的且与时间无关。限定为物理相关场，即实值且平方可积的场后，任何时变解都可以表示为单色解（即 ω 为实值的解）之和。因此，将范围限定为方程(A-6)的单色解并不失一般性。具体而言，这些解的形式为

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega t} \tag{A-122}$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega t} \tag{A-123}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是空间坐标，下标 $\boldsymbol{r}$ 表示时不变单色解。$\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 为实值的条件意味着

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r},\omega) &= \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}^{*}(\boldsymbol{r},-\omega)\\ \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r},\omega) &= \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{r}}^{*}(\boldsymbol{r},-\omega)\end{aligned} \tag{A-124}$$

其中，上标 $*$ 表示复共轭。该条件允许将 ω 限制为仅取非负值。对于 ω 的每个取值，都存在一个单色解。将 (A-7) 和 (A-8) 应用于方程 (A-6)，并假设 $\omega \neq 0$ （即忽略非辐射静态场）

$$\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{r}} = \left[\frac{(\nabla\times)^2 - k_0^2}{i\omega\mu_0}\right]\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \tag{A-125}$$

其中，k_0 是真空中的光的波数，其定义为

$$k_0 \coloneqq \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \tag{A-126}$$

其中，c 是真空光速。我们将矢量场上的线性算子定义为

$$\underline{J}_e \coloneqq \frac{(\nabla\times)^2 - k_0^2}{i\omega\mu_0} \tag{A-127}$$

下划线 $_$ 将用于在适当处表示作用于场的算子。为便于阅读，后续将省略下标 $\boldsymbol{r}$ （另有说明的情况除外），因此 $\boldsymbol{e}$ 现在将表示单色解。将 (A-12) 代入 (A-10)

$$\boldsymbol{j} = \underline{J}_e\boldsymbol{e} \tag{A-128}$$

方程 (A-12) 阐明了 J_e 的作用。它是一个算子，在给定_电场的情况下输出电流密度场。更具体地说，该算子返回微观非位移电流密度，其中位移电流被视为真空位移电流。

$$\boldsymbol{j}_D \coloneqq \epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{e}}{\partial t} \tag{A-129}$$

真空位移电流被移除，因为它不考虑电荷运动，因此应单独处理。电流密度 $\boldsymbol{j}$ 尤为重要，因为它是唯一的微观材料响应场，因此适用于任何尺度。

设 $\underline{M}$ 是一个将微观尺度场转换为宏观尺度场的算子。$\underline{M}$ 描述了将微观场转换为宏观场所采用的过程。实际中，$\underline{M}$ 通常是某种形式的体积平均算子。于是，我们可以将宏观电流和场表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J} &= \underline{M}\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{E} &= \underline{M}\boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{B} &= \underline{M}\boldsymbol{b}\end{aligned} \tag{A-15}$$

使用方程 (A-13)

$$\boldsymbol{J} = \underline{M}\boldsymbol{j} = \underline{M}\underline{J_e}\boldsymbol{e} = \underline{J_e}\underline{M}\boldsymbol{e} = \underline{J_e}\boldsymbol{E} \tag{A-16}$$

其中，假定微观到宏观算子 $\underline{M}$ 与电流密度算子 $\underline{J_e}$ 可交换。若 $\underline{M}$ 是线性的、空间不变的且时间不变的（通常如此，例如参见 [1]第 6.6 节），则这一_假设成立。方程 (A-16) 表明，麦克斯韦方程组所描述的电流与电场之间的关系通常也适用于宏观尺度。

将 $\boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 联系起来的本构方程，通常是基于宏观尺度测量得出的经验观察。欧姆材料中感应出的电流可由以下方程描述：

$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} = \underline{J_e}\boldsymbol{E} \tag{A-17}$$

其中，电导率 σ 通常是一个张量场，用于关联每个点处的电场与电流密度。方程 (A-17) 建立了材料中动力学的方程。利用定义 (A-11) 和 (A-12)，

$$0 = \left[\underline{J_e} - \sigma\right]\boldsymbol{E} = \left[(\nabla\times)^2 - \left(1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0}\right)k_0^2\right]\boldsymbol{E} \tag{A-18}$$

然后，我们可以利用以下关系，将其与复相对介电常数 ϵ、复相对磁导率 μ以及复折射率联系起来：

$$\mu\epsilon = n^2 = 1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0} \tag{A-19}$$

由此，在方程 (A-18) 中得到更为熟悉的

$$\begin{aligned} 0 &= [(\nabla\times)^2 - \mu\epsilon k_0^2]\boldsymbol{E} \\ 0 &= [(\nabla\times)^2 - n^2 k_0^2]\boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{A-20}$$

[1] J. Jackson。《经典电动力学。 3rd 版， Wiley，纽约州纽约，（1999年）

附录 B：线性算子范数的定义

线性算子范数$\|\cdot\|$定义为：对于作用于赋范向量空间 $\mathcal{V}$ 上的算子 $A\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ ，满足条件 $|A\boldsymbol{v}| \le a|\boldsymbol{v}|$（对任意向量 $\boldsymbol{v}$）的最小实数 a ，其中 $|\cdot|$ 为向量范数。形式上，

$$\|A\| \coloneqq \inf\{a \in \mathbb{R} | \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}\colon |A\boldsymbol{v}| \le a|\boldsymbol{v}|\} \tag{B-1}$$

其中，inf表示集合的下确界，R表示实数集。对于由内积诱导的向量范数（即 $|\boldsymbol{v}| \coloneqq \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle}$），算子$\|A\|$的范数等于 $A^\dagger A$ 的最大特征值的平方根（谱定理保证 $A^\dagger A$ 可对角化）。对于有限维向量空间上的算子，实际计算时通常采用这种方法，这里也属于这种情况。令 $\lambda_{max}(A)$表示算子 A 中模最大的特征值，则可写为

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{max}(A^\dagger A)} \tag{B-2}$$

如果 A 是可对角化的，例如无源无损介质的介电常数，那么

$$\|A\| = \lambda_{max}(A) \tag{B-3}$$

在这种情况下，范数就是模最大的特征值。

附录 C：非吸收介质中的传导

如果介质是无源无损的，那么就不存在时间平均的辐射源或汇。从数学上讲，这对应于坡印廷矢量的时间平均散度为零，

$$\langle \nabla \cdot \boldsymbol{S} \rangle_t = 0 \tag{C-1}$$

对单色实值波的方程 (C-1) 取时间平均，并用下标 $\boldsymbol{r}$ 表示与时间无关的复振幅，得到：

$$\begin{aligned} 0 = \left\langle \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} - i\omega \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) + \nabla \cdot \boldsymbol{S} \right\rangle_t &= \frac{1}{2} \Re \left(\langle \boldsymbol{E_r}, \boldsymbol{J_r} \rangle - i\omega \left(\epsilon_0 E_r^2 + \frac{B_r^2}{\mu_0} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re \langle \boldsymbol{E_r}, \boldsymbol{J_r} \rangle = \frac{1}{4} \left(\langle \boldsymbol{E_r}, \boldsymbol{J_r} \rangle + \langle \boldsymbol{E_r}, \boldsymbol{J_r} \rangle^* \right) = \frac{1}{4} \left(\langle \boldsymbol{E_r}, \boldsymbol{J_r} \rangle + \langle \boldsymbol{J_r}, \boldsymbol{E_r} \rangle \right) \end{aligned} \tag{C-2}$$

其中，R 表示复数的实部，上标 $*$ 表示复共轭，而 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示在任意正交归一基下定义的内积：

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle \coloneqq \sum_i A_i^* B_i \coloneqq \boldsymbol{A}^\dagger \boldsymbol{B} \tag{130}$$

其中，A_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个分量，B_i 是 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 个分量。一般而言，方程 (C-2) 表明，无源无损介质的单色解满足

$$\langle \boldsymbol{E}, \boldsymbol{J} \rangle = -\langle \boldsymbol{J}, \boldsymbol{E} \rangle \tag{C-131}$$

这里再次省略了下标 $\boldsymbol{r}$ 。请注意，由于任何时变解都是一系列与时间无关的解的叠加，方程 (C-4) 对时变解仍然成立。如果本构方程 (A-17) 也成立（材料是线性的，且电流由电驱动力主导），那么

$$\boldsymbol{E}^\dagger \sigma \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^\dagger \boldsymbol{J} = \langle \boldsymbol{E}, \boldsymbol{J} \rangle = -\langle \boldsymbol{J}, \boldsymbol{E} \rangle = -(\sigma \boldsymbol{E})^\dagger \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E}^\dagger \sigma^\dagger \boldsymbol{E} \tag{132}$$

其中，σ 通常是一个张量，上标 †表示伴随，即正交基下表示矩阵的共轭转置。由于方程 (C-5) 对 $\boldsymbol{E}$ 的任意选择都成立，被动无损介质的电导率张量 σ 必须满足

$$\sigma^\dagger = -\sigma \tag{133}$$

此外，也可以反向进行证明，说明满足 (C-6) 的电导率张量足以证明 (C-1) 成立。也就是说，条件 (C-6) 等价于材料是线性的、被动的且无损的。利用定义 (A-19)，条件 (C-6) 可以重新表述为关于其他材料属性的条件

$$n^2 = (n^2)^\dagger \tag{134}$$

$$\mu\epsilon = (\mu\epsilon)^\dagger \tag{135}$$

如果材料是非磁性的（或者更一般地说，具有弱各向异性的厄米磁响应），这在电介质中很常见，那么条件 (C-8) 变为

$$\epsilon = \epsilon^\dagger \tag{136}$$

在全部四个条件 (C-6)-(C-9) 中，所讨论的张量都是正规张量。根据线性代数中的谱定理，这意味着：

1. 该张量可对角化 2. 其特征向量彼此正交
3. 该张量可通过旋转对角化

通常，用对角矩阵表示张量在数学上更为方便。条件 (46)-(49) 保证线性、无源且无损的介质具有可通过旋转对角化的电磁材料特性。实际应用中，只要条件允许，都会将响应张量对角化，并将其特征向量称为主轴。对于 n^2 响应张量，其特征值是主折射率的平方。

附录 D：介质中单向光的强度

由于我们的计算依赖于弱各向异性远场介质中的强度与 $|\boldsymbol{E}|^2$ 成正比，因此我们希望证明，此类介质中的强度将与 $|\boldsymbol{E}|^2$成正比。$\boldsymbol{r}$ 处无穷小表面上的微观强度（辐照度）是穿过该表面的时间平均通量，可写为

$$i(\boldsymbol{r}) = |\langle \boldsymbol{s}(\boldsymbol{r},t)\rangle_t| \cos\beta \tag{D-1}$$

其中$\langle\cdot\rangle_t$ 表示时间平均值，β 表示$\boldsymbol{S}$ 与表面法线之间的夹角。随时间变化的坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r},t) \coloneqq \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r},t) \tag{D-2}$$

其中，$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r},t)$是随时间变化的电场，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r},t)$ 是随时间变化的磁场。假设介质与时间无关，则可使用单色解（7）。将方程（A-7）代入方程（A-3）可知，磁场$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r},t)$也是单色的。对方程（D-2）中的单色场进行时间平均，并代入方程（D-1），可得

$$i(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{1}{2\mu_0}|\Re[\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r},\omega)\times\boldsymbol{b}^*(\boldsymbol{r},\omega)]|\cos\beta \tag{D-3}$$

其中，$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r},\omega)$和 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r},\omega)$现在表示频率为 ω时 $\boldsymbol{r}$ 处与时间无关的相量。由多个单色模式之和构成的解，其强度可通过将各模式的强度相加得到。这是因为交叉项（例如 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r},\omega_1)\times\boldsymbol{b}^*(\boldsymbol{r},\omega_2)$，其中 $\omega_1\neq\omega_2$）在足够长时间内取时间平均时总是消失。为作说明

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r},\omega_1)\times\boldsymbol{b}^*(\boldsymbol{r},\omega_2)\rangle_t &= \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r},\omega_1)\times\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r},\omega_2)\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}e^{i(\omega_2-\omega_1)t}dt\right)\\ &= \begin{cases}0 & \omega_1\neq\omega_2\\ 1 & \omega_1=\omega_2\end{cases}\end{aligned} \tag{D-4}$$

如果在有限时间间隔内取时间平均，相近频率之间的交叉项可能不会消失。实际上，用于测量强度的仪器不会进行无限长时间的平均，因此 T 是有限的，而条件

$$\omega_2-\omega_1 \gg \frac{2\pi}{T} \tag{D-5}$$

足以确保交叉项不会出现在测量结果中。这对驻留时间有限的仪器的频率分辨率施加了根本性限制 T。此处我们将关注理想强度，其中 $T \to \infty$，且计算中不会出现交叉项。这样我们便可以只关注单色波的强度，而不考虑色散效应对强度的影响。

要利用方程 (D-3) 求得强度，我们需要知道 $\boldsymbol{e}$ 与 $\boldsymbol{b}$之间的关系。将单色电场代入 (A-3) 中的线性时不变介质，可得

$$\boldsymbol{b} = \frac{\nabla \times \boldsymbol{e}}{i\omega} \tag{D-6}$$

将方程 (D-6) 代入时间平均坡印廷矢量，可得

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{s} \rangle_t &= \frac{|\Re[\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{b}^*]|}{2\mu_0} = \frac{|\Im[\boldsymbol{e}^* \times (\nabla \times \boldsymbol{e})]|}{2\mu_0 \omega} \\ &= \frac{\left|\Im\left[e^2\left(\hat{\boldsymbol{e}}^* \times \left(\frac{\nabla e}{e} \times \hat{\boldsymbol{e}}\right)\right) + e^2\left(\hat{\boldsymbol{e}}^* \times (\nabla \times \hat{\boldsymbol{e}})\right)\right]\right|}{2\mu_0 \omega} \\ &= \frac{e^2}{2\mu_0 \omega} |\Im[\hat{\boldsymbol{e}}^* \times (\nabla \ln e \times \hat{\boldsymbol{e}}) + \hat{\boldsymbol{e}}^* \times (\nabla \times \hat{\boldsymbol{e}})]| \end{aligned} \tag{D-7}$$

代入 (D-3) 后可得

$$\begin{aligned} i(\boldsymbol{r}, \omega) &= \frac{\cos\beta}{2\mu_0 \omega} |\Im[\boldsymbol{e}^* \times (\nabla \times \boldsymbol{e})]| \\ &= \frac{E^2 \cos\beta}{2\mu_0 \omega} |\Im[\hat{\boldsymbol{e}}^* \times (\nabla \ln e \times \hat{\boldsymbol{e}}) + \hat{\boldsymbol{e}}^* \times (\nabla \times \hat{\boldsymbol{e}})]| \end{aligned} \tag{D-8}$$

方程 (D-8) 提供了一种方法，可根据任意单色模式的电场计算微观光强。

在波长 λ_m 尺度上均匀的欧姆介质能够支持波数为 $k \coloneqq 2\pi/\lambda_m$的单向波。由于我们要求介质在波长尺度上均匀，因此可以忽略小于波长尺度的微观细节。由此，单向性可视为一种宏观现象，以下许多内容仅适用于材料的宏观性质允许存在单向波解的情况。通常，有许多可行的微观到宏观算子 $\underline{M}$。有效的微观到宏观算子在数学上必须满足以下要求：与电流密度算子可交换（见**附录 A**）；能够恢复与散射相关的模式（例如，对于弹性散射，能够恢复埃瓦尔德球）；确保宏观场满足均匀欧姆本构方程；并能够恢复具有所关注波数的强度模式（例如，对于弹性散射，波数为$2k$的强度模式）。对于波矢为 $\boldsymbol{k} = k\hat{\boldsymbol{k}}$、沿其方向传播的线偏振单向电磁波，方程 (D-8) 可写为

$$I(\boldsymbol{r}, \omega) = \frac{k(\boldsymbol{r}, \omega) E^2 \cos\beta}{2\mu_0 \omega} \left|\hat{\boldsymbol{E}} \times \hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{E}}\right| = \frac{\cos\beta}{2\mu_0 c} n\left(\boldsymbol{r}, \hat{\boldsymbol{k}}, \omega\right) \sin\alpha\left(\boldsymbol{r}, \hat{\boldsymbol{k}}, \omega\right) E^2 \tag{D-9}$$

其中，n 是折射率（一种宏观属性；请注意，只有 n^2 被定义为微观属性），α 是 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{E}$之间的夹角。方程 (D-9) 是单色、单向强度的一般方程。对于弱各向异性介质，还可以进一步简化。若介质满足以下条件，则称其为弱各向异性介质

$$\|n^2 - \langle n^2\rangle_\Omega\| \ll |\langle n^2\rangle_\Omega| \tag{D-10}$$

其中，$\langle\cdot\rangle_\Omega$ 表示对所有取向求得的平均值，而$\|\cdot\|$是附录 B**附录 B**中所述的线性算子范数。计算张量取向平均值的一种简单方法是使用

$$\langle n^2\rangle_\Omega = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\mu\epsilon) \tag{D-11}$$

其中，$\mathrm{tr}(\cdot)$是算子的迹。在无损欧姆介质中，弱各向异性条件允许我们采用以下近似

$$\begin{aligned} n^2 &\approx \bar{n}^2 \\ n &\approx \bar{n} \end{aligned} \tag{D-12}$$

因此，各向异性折射率n 可以近似为平均各向同性折射率$\bar{n}$。还可以证明，条件 (D-10) 蕴含$\sin\alpha\left(\widehat{\boldsymbol{k}},\omega\right) \approx 1$。为此，从式 (4) 的单色、单向和欧姆型形式开始

$$i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B} = (\mu_0\sigma - i\omega\mu_0\epsilon_0)\boldsymbol{E} = -i\omega\mu_0\epsilon_0 n^2\boldsymbol{E} \tag{D-13}$$

将式 (D-13) 与$\widehat{\boldsymbol{k}}$作点积

$$0 = \widehat{\boldsymbol{k}}\cdot\left(n^2\widehat{\boldsymbol{E}}\right) = \bar{n}^2\widehat{\boldsymbol{k}}\cdot\widehat{\boldsymbol{E}} + \widehat{\boldsymbol{k}}\cdot\left((n^2-\bar{n}^2)\widehat{\boldsymbol{E}}\right) \tag{D-14}$$

重新整理，并使用柯西-施瓦茨不等式

$$\left|\widehat{\boldsymbol{k}}\cdot\widehat{\boldsymbol{E}}\right| = \left|\frac{\widehat{\boldsymbol{k}}\cdot\left((n^2-\bar{n}^2)\widehat{\boldsymbol{E}}\right)}{\bar{n}^2}\right| \le \frac{\left|(n^2-\bar{n}^2)\widehat{\boldsymbol{E}}\right|}{|\bar{n}^2|} \tag{D-15}$$

由于远场介质是无损的，n^2 是厄米的，并具有与主轴上n_1^2, n_2^2, n_3^2 相对应的特征值的正交特征向量。张量$(n^2-\bar{n}^2)$是厄米的，其特征值分别对应于$n_1^2-\bar{n}^2, n_2^2-\bar{n}^2, n_3^2-\bar{n}^2$。由于其所有特征值均为有限值，张量$(n^2-\bar{n}^2)$有界，并且根据式 (54)，其范数为

$$\|n^2-\bar{n}^2\| = \max\left(\left|n_i^2-\bar{n}^2\right|\right) \tag{D-16}$$

因此，方程 (D-15) 变为

$$\left|\widehat{\boldsymbol{k}}\cdot\widehat{\boldsymbol{E}}\right| \le \frac{\|n^2-\bar{n}^2\|\left|\widehat{\boldsymbol{E}}\right|}{|\bar{n}^2|} \le \frac{\|n^2-\bar{n}^2\|}{|\bar{n}^2|} \ll 1 \tag{D-17}$$

其中，最后一个不等式用到了远场中的弱各向异性条件 (D-10)。这意味着

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left|\widehat{\boldsymbol{k}}\cdot\widehat{\boldsymbol{E}}\right|^2} \approx 1 \tag{D-18}$$

利用 (D-13) 和 (D-18)，只要远场介质满足 (D-10)，方程 (D-9) 就可以近似为

$$I(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{\bar{n}\cos\beta}{2\mu_0 c}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)|^2 \coloneqq G|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)|^2 \tag{D-19}$$

其中，G 是比例常数，取决于介质以及表面法线与坡印廷矢量之间的夹角β 。方程（D-19）表示弱各向异性介质中单色单向

模式下的强度。强度测量通常测量通过一个表面的总功率A

$$P(\omega) = \iint_A d\boldsymbol{r}\, I(\boldsymbol{r},\omega) = \iint_A d\boldsymbol{r}\, G(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)|^2 \qquad \text{(D-20)}$$

如果将收集面设计成使 β（$\boldsymbol{r}$）保持恒定（例如，使 $\beta = 0$ 处处成立，或使用足够小的平面，使得 $\boldsymbol{S}$ 的方向处处均匀），则测得的功率变为

$$P(\omega) = G \iint_A d\boldsymbol{r}\, |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)|^2 \qquad \text{(D-21)}$$

在这种情况下，G 的实际值并不重要，因为：1）测得的 I 通常以电压或计数为单位，因此在将理论与数据关联时，未知的比例常数仍然存在；2）计算透射率时，该常数会被约去。顺便一提，方程（D-20）与针对折射率为 $\bar{n}$ 的各向同性介质推导出的方程相同。回顾我们的假设，只要辐射是单向的、时间平均足够充分以消除交叉项、介质是欧姆型、宏观上均匀且弱各向异性，方程（D-21）就成立。

8. 参考文献

[1] M. H. Shachar 和 J. E. Garay，“非均匀介质中的光散射：1. 通过电流密度算子构建严格的电磁学框架”

[2] Xin Yang、Ye Pu 和 Demetri Psaltis，《利用散斑扫描显微镜穿透散射生物组织对血细胞成像》**《光学快报》**第 22 卷，3405-3413 页（2014年）https://doi.org/10.1364/OE.22.003405

[3] M. Eder、S. amini、P. Fratzl，《生物复合材料——实现功能多样性的复杂结构》《科学》（2018年）362，543-547 页 DOI: 10.1126/science.aat8297

[4] D.Chen、W. Xiang、X. Liang、J.Zhong、H. Yu、 M. Ding、H. Lu、Z. Ji《用于白光发光二极管的先进透明玻璃陶瓷荧光体——综述》。欧洲陶瓷学会杂志，35（2015年）859-869

[5] M. P. Shepilov、O. S. Dymshits、A. A. Zhilin，《玻璃陶瓷中的光散射：概念修订》，第 35 卷，第 7 期 / 2018 年 7 月 / 美国光学学会 B 期刊

[6] H. Furuse、N. Horiuchi 和 B.-N. Kim，《具有精细微观结构的透明非立方激光陶瓷》《科学报告》 **第 9 卷**，文章编号：10300（2019）

[7] J. R. Morales、N. Amos、S. Khizroev 和 J. E. Garay，《纳米晶氧化物中的磁光法拉第效应》，《应用物理学杂志》（2011）**109**，093110。

[8] A. D. Dupuy、Y. Kodera 和 J. E. Garay，“无铅透明陶瓷具有前所未有的电光性能。”*Advanced Materials*，(2016) **28**，7970–7977 DOI：10.1002/adma.201600947。

[9] 瑞利勋爵。（1881年）。X. 光的电磁理论。《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学杂志》，*12*（73），81–101。https://doi.org/10.1080/14786448108627074

[10] Gans, R.（1925年）。超显微粒子的辐射图。《物理学年鉴》，*381*(1),29–38。https://doi.org/10.1002/andp.19253810103

[11] 爱因斯坦，A.（1910年）。临界状态附近均匀液体及液体混合物的乳光理论。《物理学年鉴》，*338*(16), 1275–1298。https://doi.org/10.1002/andp.19103381612

[12] 布里渊，L.（1914年）。均匀透明介质对光的散射。《科学院会议记录》科学院每周会议记录。，1331–1334。http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k480277d/f1533.item.r=

[13] 德拜, P., & Bueche, A. M. (1949年). 非均匀固体的散射。《应用物理学杂志》，*20*(6), 518–525。https://doi.org/10.1063/1.1698419

[14] Goldstein, M., & Michalik, E. R. (1955年). 具有密度涨落和各向异性的非均匀固体的散射理论。《应用物理学杂志》，*26*(12), 1450–1457。https://doi.org/10.1063/1.1721930

[15] Ross, G., & Nieto-Vesperinas, M. (1980年). 非晶吸收介质的光散射理论。《光学学报》，*27*(11), 1591–1601。https://doi.org/10.1080/713820165

[16] Ross, G., & Jarvis, D. A. (1980年). 通过弹性光散射表征各向异性介质的取向：I. 各向异性介质的非均匀性及其描述。《光学学报》，*27*(3),359–370。https://doi.org/10.1080/716099506

[17] Ross, G., & Jarvis, D. A. (1980年). 各向异性介质中取向的表征：通过弹性光散射：II. 非均匀介质对光的弹性散射。 《光学学报》，*27*(3), 371–384. https://doi.org/10.1080/716099506a

[18] Ta Tarski V. I. (1961年), 湍流介质中的波传播, McGraw-Hill, New Yo rk

[19] Lee, R. W., & Harp, J. C. (1969). 随机介质中的弱散射及其在远程探测中的应用。IEEE会议录, 57(4), 375–406. https://doi.org/10.1109/PROC.1969.6993

[20] Tinin, M. V., Kim, B. C., & Kolesnik, S. N. (2005). 随机强各向异性非均匀体的波单次散射。《随机与复杂介质中的波》, 15(1), 61–69.https://doi.org/10.1080/17455030500053146

[21] Stein, R. S. (1958). 拉伸聚乙烯的X射线衍射、双折射和红外二向色性。II. 广义单轴晶体取向。《聚合物科学杂志》，31(123), 327–334.https://doi.org/10.1002/pol.1958.1203112309

[22] Stein, R. S., & Rhodes, M. B. (1960). 聚乙烯薄膜的摄影光散射。《应用物理学杂志》，31(11), 1873–1884. https://doi.org/10.1063/1.1735468

[23] Stein, R. S., & Wilson, P. R. (1962). 具有相关取向涨落的聚合物薄膜的光散射。《应用物理学杂志》，33(6), 1914–1922.https://doi.org/10.1063/1.1728869

[24] Bhatnagar, H. L. (1961年). 应变作用下薄聚合物薄膜中各向异性非均匀体的光散射。II. 化学物理学杂志, 35(3), 999–1002. https://doi.org/10.1063/1.1701252

[25] Shachar, M. H., Uahengo, G., Penilla, E. H., Kodera, Y., & Garay, J. E. (2020年). 对多晶材料中散射和吸收对光透射影响的建模。《应用物理学杂志》, 128(8). https://doi.org/10.1063/5.0014937

[26] Yamashita, I., Nagayama, H., & Tsukuma, K. (2008年). 半透明多晶氧化铝的透射特性。美国陶瓷学会志 , *91*(8), 2611–2616.https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2008.02527.x

[27] Apetz, R., & Van Bruggen, M. P. B. (2003年). 透明氧化铝：光散射模型。 美国陶瓷学会志，*86*(3), 480–486. https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.2003.tb03325.x

[28] Hříbalová, S., & Pabst, W. (2021年). 为计算透明陶瓷的透射率而对球形孔隙光散射进行建模 – 您需要了解的一切。 《欧洲陶瓷学会志》，*41*(4), 2169–2192. https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2020.11.046

[29] Wen, T. C., & Shetty, D. K. (2015年). 双折射对多晶氟化镁中光透射的影响。 美国陶瓷学会志， *98*(3), 829–837.https://doi.org/10.1111/jace.13351

[30] Zhang, Y.（2014年）。使氧化钇稳定四方氧化锆呈半透明。 牙科材料， *23*(1)，1–7。https://doi.org/10.1016/j.dental.2014.08.375.Making

[31] Mishra, V.、Garay, J. E. 和 Dames, C.（2020年）。利用各向异性，对高功率激光应用微结构材料中的热传输和光透射进行耦合优化。 先进理论与模拟， *3*(9)，1–12。https://doi.org/10.1002/adts.202000036

[32] Klimke, J.、Trunec, M. 和 Krell, A.（2011）。透明四方相氧化钇稳定氧化锆陶瓷：双折射引起的散射的影响。 美国陶瓷学会志， *94*(6)，1850–1858。https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2010.04322.x

[33] Petit, J., Dethare, P., Sergent, A., Marino, R., Ritti, M. H., Landais, S., Lunel, J. L., & Trombert, S. (2011). 用于高透明陶瓷应用的α-氧化铝的烧结。《欧洲陶瓷学会志》，*31*(11), 1957–1963。https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2011.04.034

[34] Shahbazi, H., Tataei, M., Enayati, M. H., Shafeiey, A., & Malekabadi, M. A. (2019). 透明陶瓷中的结构—透射率关系。《合金与化合物杂志》，*785*，260–285。https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2019.01.124

[35] Stuer, M., Bowen, P., Cantoni, M., Pecharroman, C. 和赵, Z.（2012）。透明多晶氧化铝的纳米孔表征与光学建模。《先进功能材料》，*22*(11),2303–2309。https://doi.org/10.1002/adfm.201200123

[36] Wieg, A. T., Kodera, Y., Wang, Z., Dames, C. 和 Garay, J. E.（2015）。用于激光增益介质的稀土掺杂氮化铝的热机械性能：晶界和晶粒尺寸的作用。《材料学报》，*86*，148–156。https://doi.org/10.1016/j.actamat.2014.11.045

[37] N. P. Mellott, S. L. Brantley, J. P. Hamilton, C. G. Pantano，《玻璃表面制备方法的评估》《表面与界面分析》（2001）31：362 – 368 **https://doi.org/10.1002/sia.971**

[38] A. Tran, C. E. Boott, M. J. MacLachlan，《理解纤维素纳米晶体的自组装——迈向手性光子材料》*Advanced Materials*（2020年）**https://doi.org/10.1002/adma.201905876**

[39] Sirenko, Y., & Velychko, L.（编）。（2016）。复杂系统中的电磁波。施普林格。http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-31631-4

[40] Pecharromán, C., Mata-Osoro, G., Díaz, L. A., Torrecillas, R., & Moya, J. S.（2009）。纳米结构氧化铝的透明性：各向异性球体的瑞利–甘斯模型。《光学快报》，*17*（8），6899。https://doi.org/10.1364/oe.17.006899

[41] Pabst, W., & Hříbalová, S.（2021年）。用于描述透明和半透明氧化铝及氧化锆陶瓷透射率的光散射模型。《欧洲陶瓷学会志》，*41*（3），2058–2075。https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2020.10.025

[42] Raman, C. V., 和 Viswanathan, K. S.（1955年）。光在多晶介质中的传播理论。《印度科学院学报 *A* 辑》，*41*（2），37–44。https://doi.org/10.1007/BF03047170

[43] Kahan, H. M., Stubbs, D. P., & Jones, R. V. (1974). 细晶陶瓷在光学与声学应用方面的潜力。载于 光学与声学微电子学（第 185–202 页）。

[44] Kuna, L., Mangeri, J., Gorzkowski, E. P., Wollmershauser, J. A., & Nakhmanson, S. (2019). 多晶体光传输的介观建模 e。《材料学报》，*175*，82–89。https://doi.org/10.1016/j.actamat.2019.06.001[45] Shimizu, K. (1983)。瑞利-德拜近似的修正。*73*(4)，504–507。

[46] van de Hulst, H. C. (1957). 小粒子光散射，Wiley，纽约 k.

[47] Gordon, H. R. (2007). 瑞利-Gans散射近似：对理解盘状粒子的后向散射出奇地有用。《光学快报》，*15*(9)，5572。https://doi.org/10.1364/oe.15.005572

[48] Bohren, C. F., & Huffman, D. R. (1998). 小粒子的光吸收与散射. John Wiley & Sons, Inc.

[49] Sharma, S. K., & Somerford, D. J. (2006). 光学软粒子的光散射：理论与应用. 施普林格。

[50] Kerker, M. (1969). 光散射：以及其他电磁辐射。

[51] Al-Chalabi, S. A. M., & Jones, A. R. (1995). 瑞利-Gans-德拜近似下不规则粒子的光散射。《物理学*D*辑：应用物理》，*28*(7), 1304–1308。https://doi.org/10.1088/0022-3727/28/7/004

[52] Patsyk, A., Sivan, U., Segev, M., & Bandres, M. A. (2020年). 光的分支流动现象的观测。*Nature*，*583*(7814), 60–65。https://doi.org/10.1038/s41586-020-2376-8

[53] Hussein, E. M. A. (2007). 辐射力学：原理与实践（第一版）。Elsevier。

[54] Gordon, J. E. (1985). 近似米氏散射的简便方法。美国光学学会期刊 *A*，*2*(2), 156。https://doi.org/10.1364/josaa.2.000156