度量图顶点处阶数为$0 < \alpha < 1$的空间分数阶算子的边界条件推导

Sabirov K.K.[1,2], AshurovR.R.[1]

[1]*Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, University street 9, Tashkent,* 100174, *Uzbekistan*[2] *Tashkent University of Information Technology, Amir Temur street 108, Tashkent 100200, Uzbekistan*

我们研究度量星形图上阶数为 $0 < \alpha < 1$ 的空间分数阶算子。推导了保证该算子自伴性的度量星形图顶点处的边界条件。所得结果推广至度量图的其他拓扑。

arXiv:2305.01551v1 [math.SP] 22 Feb 2023

I. 引言

近几十年来，分数阶微分算子因其在众多看似相距甚远的科学与技术领域中的应用而受到广泛关注（见 [1]-[3]）。T.S.Aleroev 对非自伴分数阶微分算子的谱分析进行了详细研究 [8]-[10]；文献 [4]-[7] 研究了因薛定谔方程、狄拉克方程和博戈留博夫–德热纳方程而退化的算子在度量图顶点处的自伴边界条件。

本文研究度量图上的分数阶微分算子。本文结构如下：第 2 节介绍数学预备知识，包括分数阶积分和导数。第 3 节研究星形图上阶数为 $0 < \alpha < 1$ 的分数阶微分算子，并推导星形图顶点处的自伴边界条件。第 4 节将所得结果推广到其他拓扑，最后一节给出结论。

II. 数学预备知识

定义 1：设 $\Omega = [a; b]$ 是实轴 R 上的有限区间。阶数为 $\alpha \in C$（$Re(\alpha) > 0$）的黎曼–刘维尔分数阶积分，记作 I^{α}_{a+} 和 I^{α}_{b-}，定义如下：

$$\left(I^{\alpha}_{a+}f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\ (x > a;\ Re(\alpha > 0)) \tag{1}$$

and

$$\left(I^{\alpha}_{b-}f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{b}\frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}},\ (x < b;\ Re(\alpha > 0)) \tag{2}$$

其中 $\Gamma(\alpha)$ 为伽马函数，积分式 (1) 和 (2) 分别称为左侧和右侧分数阶积分。

定义 2 阶数为 $\alpha \in \mathbf{C}\ (Re(\alpha) \geq 0)$ 的黎曼–刘维尔导数（记作 $D^{\alpha}_{a+}y$ 和 $D^{\alpha}_{b-}y$）定义为

$$\left(D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}\frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}},\ (n = [Re(\alpha)] + 1,\ x > a), \tag{3}$$

and

$$\left(D^{\alpha}_{b-}y\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{x}^{b}\frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}},\ (n = [Re(\alpha)] + 1,\ x < b), \tag{4}$$

分别地，其中 $[Re(\alpha)]$ 表示 $Re(\alpha)$ 的整数部分。特别地，若 $0 < \alpha < 1$，则

$$\left(D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}\frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha}},\ (x > a), \tag{5}$$

and

$$\left(D_{b-}^{\alpha}y\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{b}\frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha}},\ (x<b) \tag{6}$$

我们引入以下推论。

推论 1（见 [2]）：若 $0<\alpha<1$ 和 $y(x)\in AC[a,b]$，则

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{y(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_{a}^{x}\frac{y'(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}\right], \tag{7}$$

and

$$\left(D_{b-}^{\alpha}y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{y(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int_{x}^{b}\frac{y'(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}\right]. \tag{8}$$

III. 问题的表述

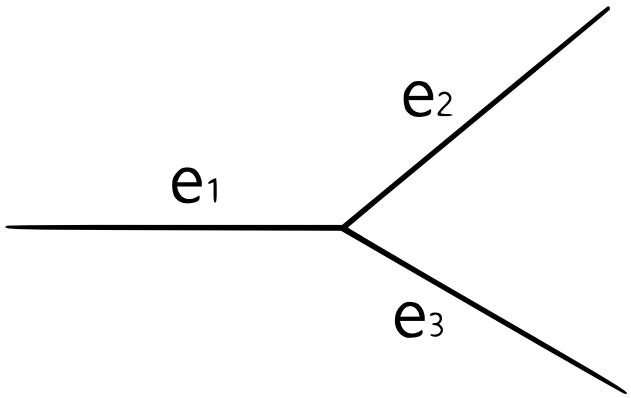

图 1：度量星形图

我们考虑由树边 e_j, $j=1,2,3$ 构成的星形图 G，并为其指定坐标 x_j。将坐标原点取在顶点 0 处，对于边 e_j，令 $x_j\in[0;\ l_j]$。希尔伯特空间定义如下：

$$\mathbf{L_2}(G) := \bigoplus_{j=1}^{3} L_2([0;l_j]), \tag{9}$$

绝对连续函数空间定义如下：

$$\mathbf{AC}(G) := \bigoplus_{j=1}^{3} AC([0;l_j]). \tag{10}$$

我们用简写记号 $\psi_j(x)$ 表示 $\psi_j(x_j)$，其中 x 是边 j 上的坐标，分量ψ_j 对应于该边。$\mathbf{L_2}(G)$ 中的内积定义如下：

$$\langle\varphi,\psi\rangle := \sum_{j=1}^{3}\int_{e_j}\varphi_j(x)\cdot\psi_j^{*}(x)dx. \tag{11}$$

我们考虑以下阶数为 α 的分数阶算子

$$A_0 := (A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, A_0^{(3)}), \tag{12}$$

其定义域为 $D_0 := \{\varphi |\, \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in AC(G)\ \ \varphi_j(0) = \varphi_j(l_j) = 0,\ j = 1, 2, 3\} \subseteq AC(G) \subseteq L_2(G)$，其中 $A_0^{(j)} := D_{0+}^{\alpha} + D_{l_j-}^{\alpha} (0 < \alpha < 1)$。

引理1：算子 A_0 是对称算子。

证明。取 $\varphi \in D_0$ 和

$$\langle A_0\varphi, \psi\rangle = \sum_{j=1}^{3}\langle A_0^{(j)}\varphi_j, \psi_j\rangle = \sum_{j=1}^{3}\int_0^{l_j}\left(D_{0+}^{\alpha} + D_{l_j-}^{\alpha}\right)\varphi_j(x)\cdot\psi_j^*(x)dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\int_0^{l_j}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\varphi_j(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt - \frac{d}{dx}\int_x^{l_j}\frac{\varphi_j(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right)\psi_j^* =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\left[\psi_j^*(l_j)\cdot\left(I_{0+}^{1-\alpha}\varphi_j\right)(l_j - 0) - \psi_j^*(0)\cdot\left(I_{0+}^{1-\alpha}\varphi_j\right)(+0) -\right.$$

$$\left. - \psi_j^*(l_j)\cdot\left(I_{l_j-}^{1-\alpha}\varphi_j\right)(l_j - 0) + \psi_j^*(0)\cdot\left(I_{l_j-}^{1-\alpha}\varphi_j\right)(+0)\right] -$$

$$-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{l_j}\varphi_j(t)\cdot\left[\int_t^{l_j}\frac{\psi_j^{*'}(x)}{(x-t)^{\alpha}}dx - \int_0^t\frac{\psi_j^{*'}(x)}{(t-x)^{\alpha}}dx\right]dt =$$

$$= -\sum_{j=1}^{3}\left[\psi_j^*(0)\cdot\left(I_{0+}^{1-\alpha}\varphi_j\right)(+0) + \psi_j^*(l_j)\cdot\left(I_{l_j-}^{1-\alpha}\varphi_j\right)(l_j - 0)\right] +$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\int_0^{l_j}\varphi_j(t)\cdot\left(\left(D_{0+}^{\alpha} + D_{l_j-}^{\alpha}\right)\psi_j(t)\right)^* dt = \langle\varphi, A_0^*\psi\rangle, \tag{13}$$

其中 $A_0 \subset A_0^*$。引理1得证。

对于算子 A_0 的自伴扩张（定义域为 D_0），我们考虑以下双线性形式（斜厄米）

$$\Omega(\varphi, \psi) = \langle A\varphi, \psi\rangle - \langle\varphi, A\psi\rangle \tag{14}$$

带有微分表达式 $A := (D_{0+}^{\alpha} + D_{l_1-}^{\alpha}, D_{0+}^{\alpha} + D_{l_2-}^{\alpha}, D_{0+}^{\alpha} + D_{l_3-}^{\alpha})$ 在 $AC(G) \subseteq L_2(G)$ $(0 < \alpha < 1)$

由 $\Omega(\varphi, \psi) = 0$ 我们可以得到图的顶点处的边界条件，从而给出算子 A_0的自伴扩张。

定理1：以下边界条件给出了算子 A_0 在 $AC(G) \subseteq L_2(G)$上的自伴扩张

$$\alpha_1\varphi_1|_{x=0} = \alpha_2\varphi|_{x=0} = \alpha_3\varphi|_{x=0},$$

$$\frac{1}{\alpha_1}\left(I_{+0}^{1-\alpha}\varphi_1\right)(+0) + \frac{1}{\alpha_2}\left(I_{+0}^{1-\alpha}\varphi_2\right)(+0) + \frac{1}{\alpha_3}\left(I_{+0}^{1-\alpha}\varphi_3\right)(+0) = 0,$$

$$\varphi_j(l_j) = 0,\ j = 1, 2, 3, \tag{15}$$

其中 α_j、$j = 1$、2、3 为非零实常数。

定理1的证明。

$$\Omega(\varphi, \psi) = \langle A\varphi, \psi\rangle - \langle\varphi, A\psi\rangle =$$

$$= -\sum_{j=1}^{3}\left[\psi_j^*(l_j)\cdot\left(I_{l_j-}^{1-\alpha}\varphi_j\right)(l_j - 0) + \psi_j^*(0)\cdot\left(I_{0+}^{1-\alpha}\psi_j^*\right)(+0)\right] = 0. \tag{16}$$

定理得证。

定理2：分数阶常微分方程

$$A_j\varphi_j = k_j\varphi_j \tag{17}$$

满足边界条件 (15) 的方程有一个解。

证明。由式（17）可推导出以下伏尔泰拉积分方程

$$\varphi_j(x) = \frac{b_j}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{-k_j\varphi_j(s) + \left(D_{l_j-}^{\alpha}\varphi_j\right)(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds, \tag{18}$$

with

$$\frac{b_1}{\alpha_1}+\frac{b_2}{\alpha_2}+\frac{b_3}{\alpha_3}=0. \tag{19}$$

将最后一个方程代入 $\varphi_j(l_j)=0$，可得

$$\frac{b_j\cdot l_j^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{l_j}\frac{-k_j\varphi_j(s)+\left(D_{l_j-}^{\alpha}\varphi_j\right)(s)}{(l_j-s)^{1-\alpha}}ds=0,$$

or

$$\int_0^{l_j}\frac{b_j\cdot l_j^{\alpha-1}(l_j-s)^{1-\alpha}+k_j\varphi_j(s)-\left(D_{l_j-}^{\alpha}\varphi_j\right)(s)}{(l_j-s)^{1-\alpha}}ds=0.$$

由最后一个方程可得

$$\left(D_{l_j-}^{\alpha}\varphi_j\right)(s)-k_j\varphi_j(s)=b_j\cdot l_j^{\alpha-2}(l_j-s)^{1-\alpha}. \tag{20}$$

该方程的一个解如下

$$\varphi_j(s)=c_j\cdot(l_j-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[k_j(l_j-s)^{\alpha}\right]+b_jl_j^{\alpha-2}\int_s^{l_j}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[k_j(t-s)^{\alpha}\right](l_j-t)^{1-\alpha}dt, \tag{21}$$

其中 c_j 为实常数，$E_{\alpha,\ \beta}(x)$ 是 Mittag-Leffler函数。利用顶点处的边界条件（15），可得以下约束条件

$$\frac{\alpha_{2,3}}{\alpha_1}=\frac{b_1}{b_{2,3}}\cdot\left(\frac{l_1}{l_{2,3}}\right)^{\alpha-1},\ \alpha_1\cdot c_1l_1^{\alpha-1}=\alpha_2\cdot c_2l_2^{\alpha-1}=\alpha_3\cdot c_3l_3^{\alpha-1},\ k_1l_1^{\alpha}=k_2l_2^{\alpha}=k_3l_3^{\alpha}. \tag{22}$$

由这些约束条件（19）和（22）可得

$$\frac{b_1}{l_1k_1}+\frac{b_2}{l_2k_2}+\frac{b_3}{l_3k_3}=0. \tag{23}$$

定理2得证。

此外，星形图 G 上含有 N 条边 e_j、$j=1$、2、.....、N 时，算子 $A_0:=(A_0^{(1)},A_0^{(2)},...,A_0^{(N)})$ 的自伴扩张（其定义域为 $D_0:=\{\varphi|\,\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_N)\in AC(G)\ \varphi_j(0)=\varphi_j(l_j)=0,\ j=1,2,...,N\}\subseteq AC(G)\subseteq L_2(G)$，其中 $A_0^{(j)}:=D_{0+}^{\alpha}+D_{l_j-}^{\alpha}\ (0<\alpha<1)$）的顶点边界条件如下

$$\begin{aligned}\alpha_1\psi_1|_{x=0}=\alpha_2\psi_2|_{x=0}=...=\alpha_N\psi_N|_{x=0},\\ \frac{1}{\alpha_1}\left(I_{+0}^{1-\alpha}\psi_1\right)(+0)+\frac{1}{\alpha_2}\left(I_{+0}^{1-\alpha}\psi_2\right)(+0)+...+\frac{1}{\alpha_N}\left(I_{+0}^{1-\alpha}\psi_N\right)(+0)=0,\\ \psi_j(l_j)=0,\ j=1,2,...,N.\end{aligned} \tag{24}$$

IV. 对其他拓扑的推广

我们考虑一棵树图，其边为 $e_1\sim[0;\ l_1]$、$e_{1i}\sim[0;\ l_{1i}]$、$e_{1ij}\sim[0;\ l_{1ij}]$、i、$j=1$，如图2所示。

定理3. 对算子 $A_0:=(A_0^{(1)},A_0^{(11)},A_0^{(12)},A_0^{(111)},A_0^{(112)},A_0^{(121)},A_0^{(122)})$ 的自伴扩张，其顶点处的边界条件为（定义域为 $D_0:=\{\varphi|\,\varphi=(\varphi_1,\varphi_{11},\varphi_{12},\varphi_{111},\varphi_{112},\varphi_{121},\varphi_{122})\in AC(G)\ \varphi_1(0)=\varphi_1(l_1)=\varphi_{1i}(0)=\varphi_{1i}(l_{1i})=\varphi_{1ij}(0)=\varphi_{1ij}(l_{1ij})=0,$

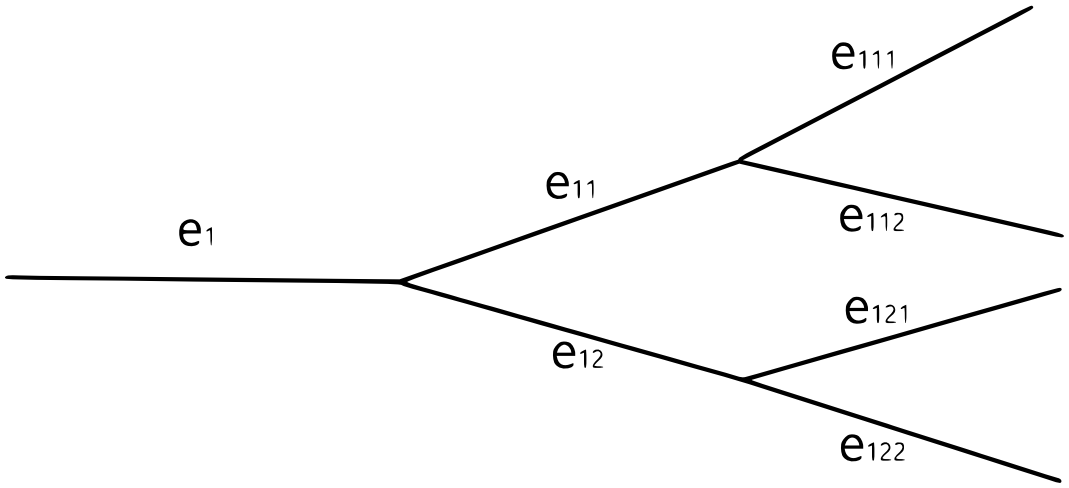

图2：度量树图

$i,j=1,2\}\subseteq AC(G)\subseteq \mathbf{L_2}(G)$，其中 $A_0^{(1)}:=D_{0+}^{\alpha}+D_{l_1-}^{\alpha}$, $A_0^{(1i)}:=D_{0+}^{\alpha}+D_{l_{1i}-}^{\alpha}$, $A_0^{(1ij)}:=D_{0+}^{\alpha}+D_{l_{1ij}-}^{\alpha}$, $i,j=1,2$ ($0<\alpha<1$)) 在具有边 e_1, e_{1i}, e_{1ij}, $i,j=1,2$ 的树图 G 上的边界条件如下

$$\begin{aligned}
\alpha_1\psi_1|_{x=l_1}=\alpha_{11}\psi_{11}|_{x=0}=\alpha_{12}\psi_{12}|_{x=0},\\
\frac{1}{\alpha_1}\left(I_{l_1-}^{1-\alpha}\psi_1\right)(l_1-)+\frac{1}{\alpha_{11}}\left(I_{+0}^{1-\alpha}\psi_{11}\right)(+0)+\frac{1}{\alpha_{12}}\left(I_{+0}^{1-\alpha}\psi_{12}\right)(+0)=0,\\
\alpha_{1i}'\psi_{1i}|_{x=l_{1i}}=\alpha_{1i1}\psi_{1i1}|_{x=0}=\alpha_{1i2}\psi_{1i2}|_{x=0},\ i=1,2,\\
\frac{1}{\alpha_{1i}'}\left(I_{l_{1i}-}^{1-\alpha}\psi_{1i}\right)(l_{1i}-)+\frac{1}{\alpha_{1i1}}\left(I_{+0}^{1-\alpha}\psi_{1i1}\right)(+0)+\frac{1}{\alpha_{1i2}}\left(I_{+0}^{1-\alpha}\psi_{1i2}\right)(+0)=0,\ i=1,2,\\
\psi_1(0)=\psi_{1ij}(l_{1ij})=0,\ i,j=1,2.
\end{aligned}\tag{25}$$

现在考虑一个环图，其边为 $e_j\sim[0;\ l_j]$, $j=1,2,3,4$，如图3所示。

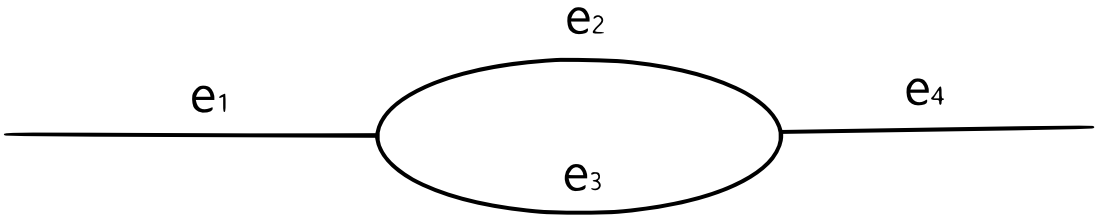

图3：度量环图

定理4. 在树图 G 上，边为 e_j, $j=1,2,3,4$ 的自伴算子 $A_0:=(A_0^{(1)},A_0^{(2)},A_0^{(3)},A_0^{(4)})$（其定义域为 $D_0:=\{\varphi|\ \varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)\in \mathrm{AC}(G)\ \varphi_j(0)=\varphi_j(l_j)=0,\ j=1,2,3,4\}\subseteq AC(G)\subseteq \mathbf{L_2}(G)$，其中 $A_0^{(j)}:=D_{0+}^{\alpha}+D_{l_j-}^{\alpha}$, $j=1,2,3,4$ ($0<\alpha<1$)）在顶点处的边界条件如下

$$\begin{aligned}
\alpha_1\psi_1|_{x=l_1}=\alpha_2\psi_2|_{x=0}=\alpha_3\psi_3|_{x=0},\\
\frac{1}{\alpha_1}\left(I_{l_1-}^{1-\alpha}\psi_1\right)(l_1-)+\frac{1}{\alpha_2}\left(I_{+0}^{1-\alpha}\psi_2\right)(+0)+\frac{1}{\alpha_3}\left(I_{+0}^{1-\alpha}\psi_3\right)(+0)=0,\\
\alpha_2'\psi_2|_{x=l_2}=\alpha_3'\psi_3|_{x=l_3}=\alpha_4\psi_4|_{x=0},\ i=1,2,\\
\frac{1}{\alpha_2'}\left(I_{l_2-}^{1-\alpha}\psi_2\right)(l_2-)+\frac{1}{\alpha_3'}\left(I_{l_3-}^{1-\alpha}\psi_3\right)(l_3-)+\frac{1}{\alpha_4}\left(I_{+0}^{1-\alpha}\psi_4\right)(+0)=0,\ i=1,2,\\
\psi_1(0)=\psi_4(l_4)=0.
\end{aligned}\tag{26}$$

定理3和定理4的证明与定理1的证明类似。

V. 结论

本文研究了度量星形图上阶数为 $0 < \alpha < 1$ 的分数阶微分算子的谱分析。我们得到了分支点处的自伴边界条件。所得结果已推广到度量树和环图等其他拓扑结构。

---

[1] R. Hilfer，《分数阶微积分在物理学中的应用》，德国斯图加特，2000年。[2] Anatoly A. Kilbas、Hari M. Srivastava、Juan J. Trujillo，《分数阶微分方程理论与应用》，荷兰阿姆斯特丹，2006年。[3] S. Umarov，《奇异符号分数阶与伪微分方程导论》，Springer，2015年。[4] V. Kostrykin、R. Schrader，量子线的基尔霍夫定律，《物理学杂志A：数学与通用》32（1999年），595–630。[5] J. Bolte、J. Harrison，图上狄拉克算子的谱统计，《物理学杂志A：数学与通用》36（2003年），2747–2769。[6] J. M. Harrison、T. Weyand、K. Kirsten，量子图上狄拉克算子的ζ函数，《数学物理学杂志》57（2016年），102301。[7] K. Sabirov、D. Jumanazarov、J. Yusupov、D. Matrasulov，度量图上的博戈留博夫–德热纳方程，《物理快报A》382（2018年），2856–2860。[8] T. S. Aleroev，关于米塔格–莱夫勒函数的零点及分数阶微分算子的谱问题，《微分方程》36，9（2000年），第1414–1415页。[9] T. S. Aleroev、Kh. T. Aleroeva，关于与微分方程相关的一类分数阶非自伴算子，《俄罗斯数学》（高等院校学报）58，10（2014年），第1–9页。[10] T. S. Aleroev、H. T. Aleroeva，关于与分数阶微分方程相关的一类非自伴算子，《数学科学杂志》214，2（2016年）。