arXiv:2305.01563v1 [math-ph] 2 May 2023

引力介电介质中的普罗卡方程柯西问题*

F. Steininger[1,2] 和 P. T. Chruściel[2]

[1]维也纳大学物理系，维也纳物理学博士生院，Boltzmanngasse 5，1090 奥地利维也纳[2]维也纳大学物理系及 TURIS 研究平台，Boltzmanngasse 5，1090 奥地利维也纳

2023年5月3日

摘要

我们分析引力介电介质中普罗卡方程的柯西问题。

1 引言

物理学界一直对光子可能具有质量这一问题抱有兴趣，相关的生成机制已在 [1, 3] 中提出。最近的一篇短文 [6] 中，我们证明，普罗卡方程与同轴电缆中麦克斯韦场传播的实验证据不相容，只要普罗卡质量非零，无论其数值多么小。这一结论采用了对应于理想导体介质的边界条件，而这种情形可能被视为过于理想化。因此，我们自然会进一步探讨在不存在此类边界条件的情况下，普罗卡方程具有怎样的性质。

鉴于近期有关波导中引力效应的研究 [2, 5], ，有必要考虑引力介电介质中普罗卡方程的推广形式。本文旨在分析以下三种情形下普罗卡方程的柯西问题：a）引力场中的真空内普罗卡场（见下文命题 3.1 ，其中 $n = 1$）；b）引力介电介质中一种看似自然的普罗卡方程推广形式（参见下文命题 3.1 ，其中 $n \neq 1$）；c）闵可夫斯基时空中介电介质的一种看似自然的普罗卡方程推广形式（见下文命题 4.1 ，其中 $n \neq 1$）。

2 模型

现在，在没有电流的情况下，通过向麦克斯韦拉格朗日量中添加质量项，可以得到用于有质量光子的弯曲时空模型，即

$$\mathcal{L} = \Big(-\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} F_{\alpha\rho} F_{\beta\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\mu_{\mathrm{P}}^2 c^2}{\hbar^2} g^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta \Big) \sqrt{|\det g|}\,, \tag{2.1}$$

with

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\,. \tag{2.2}$$

这里， A_σ 是光子势， $g_{\alpha\beta}$ 是一般时空度规，而 ∇_α 是相对于 $g_{\alpha\beta}$的协变导数。此后，我们将采用使 $\hbar = c = 1$ 成立的单位制。

如前所述，将普罗卡方程推广到引力作用下的介电介质中，存在两种显而易见且自然的方式，它们均源自拉格朗日量。

$$\mathcal{L} = \Big(-\frac{1}{4\mu} \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\rho\sigma} F_{\alpha\rho} F_{\beta\sigma} - \frac{1}{2} \mu_{\mathrm{P}}^2 \mathfrak{m}^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta \Big) \sqrt{|\det g|}\,, \tag{2.3}$$

其中 $\mathfrak{m}^{\alpha\beta} \in \{g^{\alpha\beta}, \gamma^{\alpha\beta}\}$ 位于质量项中。这里 $\gamma^{\alpha\beta}$ 是戈登光学度规 [4],

$$\gamma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + (1 - n^2) u^\alpha u^\beta\,, \tag{2.4}$$

*预印本 UWThPh-2023-17

其中 u^β 是归一化为 $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$的介电介质四速度，且 $n \equiv \sqrt{\varepsilon\mu} > 0$是折射率，介电常数为 ε，磁导率为 μ，并假设其是时空上的光滑函数。（2.3）-（2.4）的物理解释是，该介质是线性的、局部各向同性且非导电的。此外，我们假设该材料为非磁性，即 $\mu = 1$，以避免不必要的繁琐。

另一种可能性（我们也将对此进行探讨），且不会在方程中引入缺乏物理依据的场，是取

$$\mathfrak{m}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + \lambda u^\alpha u^\beta\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{2.5}$$

使得情形 $\mathfrak{m}^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta}$ 成为（ $\lambda = 1 - n^2$ 2.5）的特例，而 $\mathfrak{m}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$ 则成为带有 2.5）的形式，其中 $\lambda = 0$。

欧拉–拉格朗日方程为

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} - \mu_{\rm P}^2 \mathfrak{m}^{\alpha\beta} A_\alpha = 0\,, \tag{2.6}$$

其中 $G^{\alpha\beta} := \gamma^{\alpha\rho}\gamma^{\beta\sigma}F_{\rho\sigma}$。由于

$$\det g_{\alpha\beta} = n^2 \det \gamma_{\alpha\beta}\,, \tag{2.7}$$

将（2.6）改写为如下形式更为方便

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} - \mu_{\rm P}^2 \mathfrak{m}^{\alpha\beta} A_\alpha & (2.8)\\ &= \frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\partial_\alpha(\sqrt{|\det g|}G^{\alpha\beta}) - \mu_{\rm P}^2 \mathfrak{m}^{\alpha\beta} A_\alpha \\ &= \frac{1}{n}\tilde{\nabla}_\alpha(nG^{\alpha\beta}) - \mu_{\rm P}^2 \mathfrak{m}^{\alpha\beta} A_\alpha\,, & (2.9) \end{aligned}$$

其中，∇ 是关于度量 γ 的协变导数。

假设 $\mu_{\rm P}^2 \neq 0$，将“光学协变导数” $\tilde{\nabla}$ 应用于（2.9）得到

$$0 = \tilde{\nabla}_\beta\left(n\mathfrak{m}^{\alpha\beta}A_\alpha\right) = n\nabla_\beta\left(\mathfrak{m}^{\alpha\beta}A_\alpha\right)\,, \tag{2.10}$$

其中用到了里奇张量的对称性。

我们希望证明上述方程具有适定的柯西问题。为此，令 $\mathscr{S}$ 是由方程 $\mathscr{S} = \{x^0 = 0\}$给出的类空超曲面。由于（2.9）中的 $\beta = 0$ 不包含 $G^{\mu\nu}$的时间导数，因此会产生一个高斯型约束：

$$n\mu_{\rm P}^2 \mathfrak{m}^{\alpha 0} A_\alpha = \tilde{\nabla}_i(nG^{i0}) \tag{2.11}$$

（如果 $\mu_{\rm P}^2 = 0$ 当然，这就是高斯约束方程，同时要记住，在所研究的模型中不存在外部电流或电荷）。

继续推导，(2.9) 可以改写为关于 A_α 的波动方程。定义

$$\tilde{A}_\alpha := nA_\alpha\,, \tag{2.12}$$

并利用

$$F_{\alpha\beta} = 2\partial_{[\alpha}A_{\beta]} = 2\tilde{\nabla}_{[\alpha}A_{\beta]}\,, \tag{2.13}$$

可得到

$$\begin{aligned} 0 &= 2\gamma^{\alpha\sigma}\tilde{\nabla}_\alpha(\tilde{\nabla}_{[\sigma}(nA_{\nu]}) + A_{[\sigma}\tilde{\nabla}_{\nu]}n) - \mu_{\rm P}^2\mathfrak{m}^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\nu}\tilde{A}_\alpha \\ &= \tilde{\Box}_\gamma\tilde{A}_\nu - \gamma^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\alpha\nu}\tilde{A}_\beta - \tilde{\nabla}_\nu(\gamma^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{A}_\beta) + 2\gamma^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha(\tilde{A}_{[\beta}\tfrac{1}{n}\tilde{\nabla}_{\nu]}n) - \mu_{\rm P}^2\mathfrak{m}^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\nu}\tilde{A}_\alpha\,, \end{aligned} \tag{2.14}$$

其中，$\tilde{\Box}_\gamma = \gamma^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{\nabla}_\beta$，而 $\tilde{R}_{\alpha\beta}$ 是度量 $\gamma_{\alpha\beta}$ 的里奇张量。

3 $\mathfrak{m}=\gamma$ 的情形

施加约束 (2.10)，注意到 (2.14) 现在写作

$$0=\tilde{\Box}_\gamma\tilde{A}_\nu-\gamma^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\alpha\nu}\tilde{A}_\beta-\gamma^{\alpha\beta}(\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{A}_\nu)\tfrac{1}{n}\tilde{\nabla}_\beta n+2\gamma^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha(\tfrac{1}{n}\tilde{\nabla}_{[\nu}n)\tilde{A}_{\beta]}-\mu_{\mathrm{P}}^2\tilde{A}_\nu\,. \tag{3.1}$$

（2.6）的任一解都必须同时满足该方程和（2.10）。此外，任何满足（2.10）的该方程解，也都是（2.6）的解。因此，策略是将（3.1）用作关于˜的演化方程 A_ν，并从（3.1）的解中筛选出满足（2.6）的解。

现在，方程 (3.1) 的解由其柯西数据 $(\tilde{A}_\alpha,T^\nu\tilde{\nabla}_\nu\tilde{A}_\alpha)\big|_{\mathscr{S}}$ 参数化，其中 T^ν 例如是与 $\mathscr{S}$ 正交的类时单位法向量场。若要得到满足 (2.6) 的解，这些柯西数据并非任意选取。事实上，在度量 $\gamma_{\alpha\beta}$ 的 $\mathscr{S}$ 附近的高斯坐标中（因此$\gamma_{0i}\equiv 0$），方程 (2.10) 和 (2.11) 可改写为

$$\gamma^{00}\tilde{\nabla}_0\tilde{A}_0\big|_{\mathscr{S}} = -\gamma^{ij}\tilde{\nabla}_i\tilde{A}_j\,, \tag{3.2}$$

$$\gamma^{ij}\tilde{\nabla}_i\tilde{\nabla}_0\tilde{A}_j\big|_{\mathscr{S}} = \big(\gamma^{ij}\tilde{\nabla}_i\tilde{\nabla}_j-\mu_{\mathrm{P}}^2\big)\tilde{A}_0+2\gamma^{ij}\tilde{\nabla}_i(\tilde{A}_{[j}\tfrac{1}{n}\tilde{\nabla}_{0]}n)\,, \tag{3.3}$$

其中，第二个方程也可以改写为

$$\tilde{\nabla}_0(\gamma^{ij}\tilde{\nabla}_i\tilde{A}_j)\big|_{\mathscr{S}} = \big(\gamma^{ij}\tilde{\nabla}_i\tilde{\nabla}_j-\mu_{\mathrm{P}}^2\big)\tilde{A}_0-\gamma^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu0}\tilde{A}_\nu+2\gamma^{ij}\tilde{\nabla}_i(\tilde{A}_{[j}\tfrac{1}{n}\tilde{\nabla}_{0]}n)\,. \tag{3.4}$$

这些方程确定了 $\tilde{\nabla}_0\tilde{A}_0\big|_{\mathscr{S}}$ 和 $\tilde{\nabla}_0(\gamma^{ij}\nabla_i\tilde{A}_j)\big|_{\mathscr{S}}$，并将其表示为其余数据的函数。

因此，考虑方程（3.1）的一个解，其柯西数据在如上所述的适配坐标中满足（3.2）-（3.3）。显然，函数 $\tilde{\nabla}_\alpha\left(\gamma^{\alpha\beta}\tilde{A}_\beta\right)$ 满足 $\tilde{\nabla}_\alpha\left(\gamma^{\alpha\beta}\tilde{A}_\beta\right)\Big|_{\mathscr{S}}=0$，根据（3.2）。接下来，简单计算可得

$$\tilde{\nabla}_0\tilde{\nabla}_\alpha\left(\gamma^{\alpha\beta}\tilde{A}_\beta\right)\Big|_{\mathscr{S}} = \gamma^{00}\tilde{\nabla}_0\tilde{\nabla}_0\tilde{A}_0+\gamma^{ij}\tilde{\nabla}_0\tilde{\nabla}_i\tilde{A}_j \underbrace{=}_{\text{by (3.1), (3.2) and (3.4)}} 0\,. \tag{3.5}$$

˜ ˜对易 $\gamma^{\alpha\nu}\nabla_\alpha$ 于 $\Box_\gamma$ 并利用（3.1）可得

$$\Box_\gamma(\gamma^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{A}_\beta)=\mu_{\mathrm{P}}^2\gamma^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{A}_\beta+\gamma^{\rho\sigma}\tilde{\nabla}_\rho((\gamma^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{A}_\beta)\tfrac{1}{n}\tilde{\nabla}_\sigma n)\,. \tag{3.6}$$

˜ ˜因此 $\nabla^\alpha A_\alpha$ 满足波动方程（3.6），且柯西数据为零，由解的唯一性可得（2.10）。

总之，我们已经证明：

命题 3.1。场 A_α 满足 (2.6) 且满足 $\mathfrak{m}^{\alpha\beta}=\gamma^{\alpha\beta}$，当且仅当柯西数据受方程组约束 (3.2) 和 (3.4) 于 $\mathscr{S}$，此时可通过求解波动方程 (3.1)得到。

4 情形 $\mathfrak{m}=g+\lambda u\otimes u$

情形 $\mathfrak{m}\neq\gamma$ 在计算上要复杂得多，而且对于一般时空，是否能够得到一个自洽的柯西问题尚不明确。由此产生的困难强烈暗示，情形 $\mathfrak{m}=\gamma$ 为当前问题提供了更好的模型。作为对适定性问题的部分探讨，我们分析 g 为平直时空、介质做惯性运动且 $\partial_\mu u^\alpha=0$、折射率 n 为常数的情形。

如引言中所述，由于 Proca 质量项从真空到介电介质不存在唯一的延拓，我们考虑更一般的情形

$$\mathfrak{m}^{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}+\lambda\,u^\alpha u^\beta\,, \tag{4.1}$$

，其中 $\lambda\in\mathbb{R}$。结果表明，满足 A_0 的方程仅在 $\lambda<1$（参见下文（4.8）-（4.11）。因此，我们将分析限制在 $\lambda<1$。

总体策略与上一节相同：推导一个波动方程组，用于演化 A_μ，见下文的（4.8）-（4.10），并证明对柯西数据施加适当的约束可得到当前问题的解。

我们首先指出，在当前设定下，方程（2.14）可简化为

$$\Box_\gamma A_\beta - \gamma^{\sigma\rho}\nabla_\beta\nabla_\sigma A_\rho - \mu_{\mathrm{P}}^2 A_\sigma \mathfrak{m}^{\sigma\rho}\gamma_{\rho\beta} = 0\,, \tag{4.2}$$

其中 $\Box_\gamma \equiv \gamma^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta$。方程（2.10）现在写作

$$\nabla_\alpha\left(\mathfrak{m}^{\alpha\beta}A_\beta\right) = 0\,, \tag{4.3}$$

当（2.11）变为

$$\mu_{\mathrm{P}}^2\mathfrak{m}^{\alpha 0}A_\alpha = \nabla_i G^{i0}\,. \tag{4.4}$$

通过收缩 $\mathfrak{m}^{\beta\alpha}\nabla_\alpha$ 与（4.2）并使用（4.3），还可得到另一个方程：

$$\Box_{\mathfrak{m}}\nabla_\alpha\left(\gamma^{\alpha\beta}A_\beta\right) + \mu_{\mathrm{P}}^2\nabla_\alpha\left(\mathfrak{m}^{\alpha\sigma}\gamma_{\sigma\rho}\mathfrak{m}^{\rho\beta}A_\beta\right) = 0\,. \tag{4.5}$$

在 $\mathfrak{m} = \gamma$ 的情形下（等价地，$\lambda = 1 - n^2$），场方程的解显然满足这一条件；但当 $\lambda \neq 1 - n^2$时则不再如此。下文将假设最后一个条件成立。利用（4.1）和戈登度规的定义（2.4），方程（4.5）可改写为

$$\Box_{\mathfrak{m}}\partial_0 A_0 - \mu_{\mathrm{P}}^2 n^{-2}(1-\lambda)\partial_0 A_0 = 0\,. \tag{4.6}$$

定义

$$\varphi := \partial_0 A_0\,, \tag{4.7}$$

因此，我们需要分析以下方程组：

$$\begin{aligned}
(\Box_{\mathfrak{m}} - \mu_{\mathrm{P}}^2 n^{-2}(1-\lambda))A_0 &= 0\,, &(4.8)\\
(\Box_\gamma - \mu_{\mathrm{P}}^2)A_i &= (1-\lambda-n^2)\partial_i\varphi\,, &(4.9)\\
\Box_{\mathfrak{m}}\varphi &= \mu_{\mathrm{P}}^2 n^{-2}(1-\lambda)\varphi\,. &(4.10)
\end{aligned}$$

注意，当 $\Box_{\mathfrak{m}}$ 在 $\lambda \neq 1$ 时为双曲型，在 $\lambda = 1$ 时为椭圆型，而在 $\lambda > 1$ 时为 $4d$-椭圆型：

$$\Box_{\mathfrak{m}} = (\lambda-1)\partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2\,. \tag{4.11}$$

因此，我们将仅考虑 $\lambda < 1$；并回顾一下，$\lambda = 1 - n^2$ 已由命题 3.1讨论过。

命题 4.1。式 (4.2) 在 $\lambda < 1,\ \lambda \neq 1 - n^2$条件下的解，可由两个任意场 $\vec{A}|_{t=0}$ 和 $\dot{\vec{A}}|_{t=0}$唯一参数化。事实上，场 A_α 满足 (4.2) 当且仅当 (4.3)-(4.4) 在$t = 0$处成立，并且可通过求解波动方程组 (4.8)-(4.10)得到。

证明。约束（4.4）表明，对每个 t 场 $A_0(t,\cdot)$ 都必须满足椭圆方程

$$(\Delta - (1-\lambda)n^{-2}\mu_{\mathrm{P}}^2)A_0|_{t=0} = \partial_i\dot{A}^i|_{t=0}\,, \tag{4.12}$$

其中点号表示时间导数。

因此令 $A_0|_{t=0}$ 为（4.12）的解（可借助亥姆霍兹方程的通常格林函数求得），并令

$$\partial_0 A_0|_{t=0} := \frac{1}{1-\lambda}\partial_i A_i|_{t=0}, \tag{4.13}$$

这是（2.10）所必需的。

φ 的初始数据设为

$$\varphi|_{t=0} = \frac{1}{1-\lambda}\partial_i A_i|_{t=0}\,, \tag{4.14}$$

$$\dot{\varphi}|_{t=0} = \frac{1}{1-\lambda}\partial_i \dot{A}_i|_{t=0}\,. \tag{4.15}$$

接下来需要证明，演化方程组（4.8）-（4.10能够从初始数据传播约束（4.13）。

首先，条件 $\varphi|_{t=0} = \partial_0 A_0|_{t=0}$ 显然成立。此外，

$$\begin{aligned}\partial_0(\varphi - \partial_0 A_0)|_{t=0} &= \frac{1}{1-\lambda}(\partial_i \dot{A}_i)|_{t=0} - \partial_0^2 A_0|_{t=0} \\ &= \frac{1}{1-\lambda}\left[(\Delta - (1-\lambda)n^{-2}\mu_{\mathrm{P}}^2)A_0 - (1-\lambda)\partial_0^2 A_0\right]|_{t=0} \\ &= \frac{1}{1-\lambda}(\Box_{\mathfrak{m}} - (1-\lambda)n^{-2}\mu_{\mathrm{P}}^2)A_0|_{t=0} \\ &= 0\,, \end{aligned} \tag{4.16}$$

and

$$\Box_{\mathfrak{m}}(\varphi - \partial_0 A_0) = \mu_{\mathrm{P}}^2 n^{-2}(1-\lambda)(\varphi - \partial_0 A_0)\,, \tag{4.17}$$

因此，由于初始数据为零

$$\varphi \equiv \partial_0 A_0\,. \tag{4.18}$$

接下来注意到

$$\Box_\gamma = \Box_{\mathfrak{m}} + (1-\lambda-n^2)\partial_0^2\,. \tag{4.19}$$

这与（4.18）以及（4.8）的时间导数结合起来，意味着

$$\Box_\gamma \partial_0 A_0 = n^{-2}(1-\lambda)\mu_{\mathrm{P}}^2 \partial_0 A_0 + (1-\lambda-n^2)\partial_0^2 \varphi\,. \tag{4.20}$$

对（4.9）取散度可得

$$\Box_\gamma \partial_i A^i = \mu_{\mathrm{P}}^2 \partial_i A^i + (1-\lambda-n^2)\Delta\varphi\,. \tag{4.21}$$

将（4.20）从（4.21）中相减，并利用（4.10）以及（4.18），可得

$$\Box_\gamma(-(1-\lambda)\partial_0 A_0 + \partial_i A^i) = \mu_{\mathrm{P}}^2(-(1-\lambda)\partial_0 A_0 + \partial_i A^i)\,. \tag{4.22}$$

与之前一样，这个波动方程的柯西数据为零。事实上，（4.13）明确指出

$$((1-\lambda)\partial_0 A_0 - \partial_i A^i)|_{t=0} = 0\,. \tag{4.23}$$

接下来，利用（4.8）和（4.12）可得

$$\partial_0((1-\lambda)\partial_0 A_0 - \partial_i A^i)|_{t=0} = 0\,. \tag{4.24}$$

(4.22) 的柯西问题4.23)4.24) 解的唯一性表明，我们有

$$\partial_0 A_0 \equiv \varphi \equiv \frac{1}{1-\lambda}\partial_i A_i \tag{4.25}$$

处处。

Since $\varphi = (1-\lambda-n^2)^{-1}\gamma^{\sigma\rho}\partial_\sigma A_\rho$ 由于（4.25），（4.8）-（4.10）与（4.2）的等价性是显然的 e. □

致谢

感谢 Thomas Mieling 提供的诸多有益讨论。研究工作部分得到了奥地利科学基金（FWF）项目 P34274 以及欧盟（欧洲研究委员会，GRAVITES，项目编号 101071779）的资助。然而，本文所表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会执行机构的立场。欧盟和资助机构均不对这些观点和意见承担责任。

参考文献

[1]E. Adelberger、G. Dvali 和 A. Gruzinov，《涡旋破坏光子质量上限》，《物理评论快报》**98** (2007)，010402，arXiv:hep-ph/0306245。[2] R. Beig、P.T. Chruściel、C. Hilweg、P. Kornreich 和 P. Walther，《弱引力各向同性波导》，《经典与量子引力》**35** (2018)，244001，arXiv:1807。04156 [gr-qc]。[3] L. Bonetti、L.R. dos Santos Filho、J.A. Helayël-Neto 和 A.D.A.M. Spallicci，《超对称与洛伦兹对称性破缺导致的有效光子质量》，《物理快报 B》**764** (2017)，203–206，arXiv:1607。08786 [hep-ph]。[4] W. Gordon，《论相对论中的光传播》，《物理学年鉴》**377**(1923)，421–456。[5] C. Hilweg、F. Massa、D. Martynov、N. Mavalvala、P.T. Chruściel 和 P. Walther，《引力诱导的单光子相移》，《新物理学杂志》**19** (2017)，033028，arXiv:1612.03612[quant-ph]。[6] F. Steininger、T. Mieling 和 P.T. Chruściel，《不存在 Proca 光子》，《物理评论 D》**107** (2023)，056013，arXiv:2212。12408 [physics.class-ph]。