振荡流中球形颗粒的图案形成

T.J.J.M. van Overveld,[1] H.J.H. Clercx,[1] 和 M. Duran-Matute[1, a)]埃因霍温理工大学流体与流动研究组、
J.M. Burgers 流体力学中心及应用物理系，邮政信箱 *513*，*5600MB* 埃因霍温，荷兰

（日期：2023年5月3日）

我们通过在振荡箱内进行实验，研究振荡流中球形颗粒的自组织。颗粒之间以及颗粒与时间平均流（稳态流）之间的相互作用，会根据振荡条件形成单粒子厚链或多颗粒宽带状结构。链和带状结构均垂直于振荡方向排列，彼此之间的间距规则。在我们的所有实验中，该间距仅取决于相对颗粒-流体位移长度与颗粒直径之比 A_r/D，这表明它是仅由流体动力学决定的内禀量。相比之下，带状结构的宽度同时取决于 A_r/D 和限域，后者由颗粒覆盖率 ϕ 表征。利用链间距关系，我们准确预测了单粒子厚链向较宽带状结构转变的条件，该条件取决于 ϕ 和 A_r/D。我们还通过数值模拟补充实验结果，其中对颗粒周围的流动进行了完整解析。模拟表明，链间距规则形成的原因是长程吸引和短程排斥流体动力相互作用之间的平衡，而这些相互作用由稳态流中的涡旋引起。我们进一步表明，当 $A_r/D \gtrsim 0.7$ 时，这些涡旋会在极短距离处诱发额外的吸引相互作用，从而稳定多颗粒宽带状结构。最后，我们全面概述了参数空间，并利用实验数据展示其中的不同区域。

arXiv:2305.01564v1 [physics.flu-dyn] 2 May 2023

I. 引言

颗粒系统广泛存在于自然界中，并且常常表现出自组织形成图案的现象。理解这些图案对于许多工业过程至关重要[20,25]。当颗粒材料浸没在流体中时，会观察到更加丰富多样的图案形成行为[17]。这是由于流体动力学相互作用能够为颗粒动力学引入（额外的）非线性[30]，，并可能由此产生宏观效应[18,19]。由于现象丰富，浸没于流体中的图案与海事环境[27]以及含有胶体[12,26] 或活性物质[24]的系统相关。

一个具体的现象是球形颗粒在振荡流中的自组织。在实验室实验中，Wunenburger、Carrier 和 Garrabos [1]发现，浸没在黏性流体中并受到水平振荡作用的球形颗粒，会形成单颗粒厚、垂直于振荡方向排列的链。他们认为，这些链的形成归因于一种非零残余流，即“稳态流”；这种流在对完整振荡周期求平均后仍然存在[29]。此外，他们发现颗粒链会形成具有规则间距的周期性图案，其成因被认为是链间远距离处的吸引力与近距离处的排斥力达到平衡。他们使用一个经验函数来描述这种间距，该函数取决于颗粒直径、颗粒相对于流体的往复运动距离以及颗粒雷诺数。然而，实验中无法充分分辨亚毫米尺寸的颗粒，因此人们尚未完全理解支配颗粒尺度图案的潜在物理机制。因此，颗粒链之间吸引力的起源及经验标度关系均无法确定。

为更好地理解单粒子厚链形成背后的物理机制，Klotsa 等人 [10] 研究了振荡箱中的一对颗粒（即可能的最短链）。他们发现，两颗粒垂直于振荡方向排列，这是由稳态流导致的。他们还确定了颗粒间的间隙，并将其描述为流体黏度和振荡参数的函数。随后，Van Overveld 等人 [3] 通过数值模拟扩展了这项研究，覆盖了更广泛的参数空间。他们发现，当颗粒与底部之间的摩擦可以忽略时，间隙宽度仅取决于两个无量纲参数：颗粒相对于流体的运动行程长度，以及典型的黏性长度尺度（斯托克斯边界层厚度）；二者均以颗粒直径归一化。

Klotsa 等人 [9],进一步研究了稳态流在链形成过程中的作用。他们将平均流描述为一组涡环，其中两个“内”涡旋位于各颗粒附近，两个“外”涡旋则环绕整个构型。内外涡旋的相互作用会在颗粒旁形成驻点。其他颗粒往往大致沿着稳态流的流线运动，并被引向其中一个驻点。此外，

a)电子邮件：m.duran.matute@tue.nl

Klotsa 等人[9] 证明，对于孤立颗粒、成对颗粒以及由短链颗粒组成的结构，稳态流的结构及其相关有序化机制相似。然而，他们的研究并未探讨图案形成后的特征，例如链间距如何随控制参数变化。此外，Wunenburger、Carrier 和 Garrabos[1] 所假设的长程吸引力并未在 Klotsa 等人[9], 的数值模拟中观察到，因此，决定颗粒间距的潜在物理机制仍不明确。

在本研究中，我们详细表征了振荡流中的颗粒链，并阐述了其背后的物理机制。我们设计了一套尺寸远大于先前研究所用装置的实验装置，从而能够在颗粒尺度上详细考察图案。通过涵盖参数空间广阔区域的实验，我们详细揭示了链间距如何随控制参数变化。此外，实验表明，除了形成链之外，颗粒还可以自组织成宽度达多个颗粒的带状结构。我们量化了这些带状结构的宽度，并展示了限域对其形成及特征的影响。事实上，限域在引导自组织过程中的作用，目前是许多科学领域关注的重要议题[31]。

接下来，我们采用直接数值模拟，全面解析颗粒周围的流动，并深入了解时间平均流。我们使用了一个数值代码[14]，该代码此前已通过验证，并用于研究颗粒对的自组织与动力学[3,4]。通过模拟，我们确定了导致链间长程吸引力和短程排斥力的物理机制。我们展示了流动条件如何影响这些相互作用，并说明实验中观察到的宽颗粒带状结构，也是由同样的物理机制形成的。

本文安排如下：第 II 节介绍实验装置和测量方法。第 III 节展示关于图案的实验结果，第 IV 节则通过数值模拟阐释驱动链之间吸引和排斥相互作用的物理机制。第V节全面概述参数空间。最后，第 VI 节给出结论。

II. 实验方法

A. 实验装置

实验装置的示意图如图 1 所示。所有实验均使用内尺寸为 $L_x \times L_y \times H$ =500 × 250 × 55mm 的透明有机玻璃箱。箱体放置在一个平台上该平台安装在直线轴承和导轨上，而导轨则固定在光学平台上。箱体内放置了一块厚度为 5.0 mm 的玻璃板，以确保底面平整光滑。因此，箱体的有效高度为 50 mm。通过调节支撑结构的高度，将玻璃板调平至精度为 0.02°，调节精度为 0.1 mm。

箱体内装有自来水，其运动黏度为 $\nu = (1.05 \pm 0.05) \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$，密度为 $\rho_f = (0.999 \pm 0.001) \times 10^3 \mathrm{kg/m^3}$,；随后盖上箱盖，以消除水-空气界面。颗粒为无磁性的球形不锈钢滚珠，密度为 $\rho_s = (7.69 \pm 0.01) \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$。实验使用了两种不同尺寸的颗粒，直径分别为 $D = 5$ 和 10 mm。这些颗粒为 40级，意味着其直径、圆度和平滑度的精度约为 1 μm。

PID 控制直线电机（LinMot P01-37x120F/100x180-HP）沿导轨移动箱体和平台，并按照用户定义的正弦曲线运动，该曲线以 1 ms 为间隔离散化。在振荡运动过程中，用户定义的曲线与箱体位置之间的差异通常小于 1.0 mm。电机驱动箱体振荡时会产生反作用力，使整个装置安装其上的光学平台发生晃动。这种次级运动的振幅通常为几毫米，但在平台共振频率附近（约 4.3 Hz）可增至 1 cm。箱体在实验室参考系中的净运动同样是正弦振荡；我们通过跟踪箱体旁平台上的参考点（直径为 10 mm，间距为 30 mm）来测量该运动，见图 1(b) 中的 (7)。这些测得的位置是确定箱体在实验室参考系中位置的依据。

如图 1 所示，我们定义一个坐标系，其中 x 轴平行于振荡方向，y 轴沿另一水平方向，z 轴竖直向上。在静止的实验室参考系中，箱体的 x 位置为

$$x_{\mathrm{box}} = A \sin(2\pi f t + \phi_0) + x_0, \tag{1}$$

其中，A 是实验室参考系中的行程长度，f 是频率，t 是时间，ϕ_0 是箱体的任意相位，x_0 是相对于参考位置的偏移量。

实验采用配备 SONY 16 mm f/1.8镜头的 RedLake MegaPlus II相机进行记录，相机安装在箱体上方约 1 m 处。值得注意的是，相机未连接到光学平台，并且相对于实验室参考系保持静止。记录的典型分辨率为每毫米 2.2 个像素。相机以可调帧率 f_{cam} 触发，从而实现两种记录方式。第一种是频闪记录，$f_{\mathrm{cam}} = f$，用于观察图案经过多个周期的演化。另一种记录采用更高的帧率，且 f_{cam} 不是 f的整数倍。这种记录能够捕捉处于不同相位的颗粒，

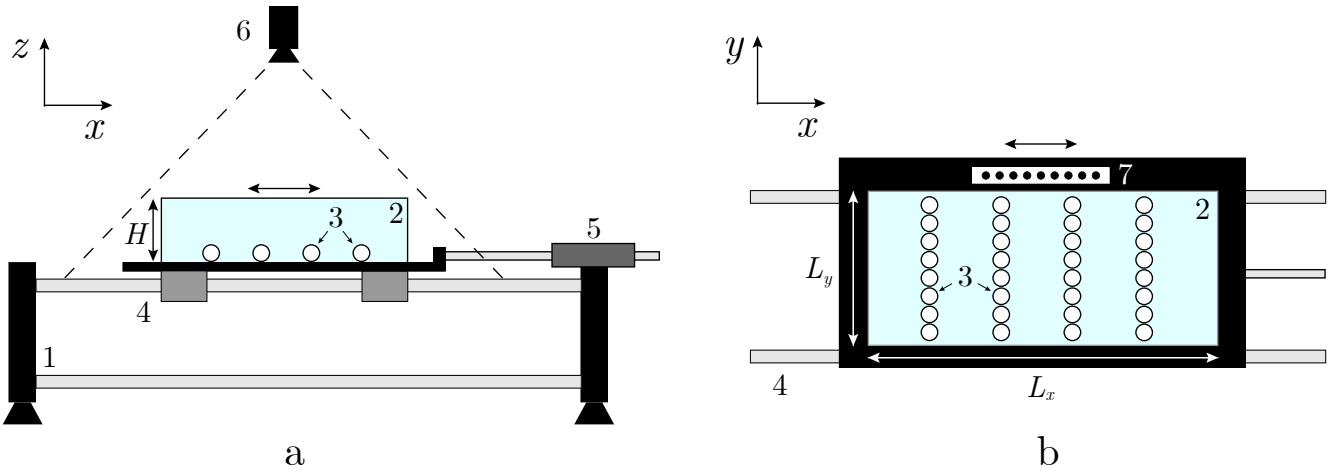

图 1：实验装置的示意图：(a) 侧视图；(b) 相机视图。数字依次表示安装框架 (1)、装满水的有机玻璃水槽 (2)、不锈钢颗粒 (3)、导轨 (4)、PID 控制直线电机 (5)、相机 (6) 和位置参考点 (7)。双向箭头表示沿 x 轴的振荡方向。

从而重构振荡运动中的颗粒流向运动[1,2]。在我们的第二种记录实验中，我们将 $f_{\mathrm{cam}} = 20.55$设置为 Hz，因为它不是实验中所采用的任何 f 值的整数倍。

B. 测量方法

在实验中，我们通过改变 A、 f、 D 以及箱体 N 内的颗粒数量来探索参数空间。实验分为五组，如表 I 所示。对于每组实验， D 和 N 保持不变，而通过改变 A 和 f 来调整振荡条件。 N 的取值经过选择，使颗粒覆盖率

$$\phi = \frac{\pi N D^2}{4 L_x L_y} \tag{2}$$

为所考虑的最低值 ($\phi = 0.173$) 的 1、1.5 或 2 倍。

我们在这些实验中的主要关注点是颗粒在稳态流作用下的自组织。我们并不关注颗粒与底面之间摩擦变化的影响。因此，我们保持颗粒-底面摩擦相对于驱动力的相对强度不变。在升力可以忽略的假设下[3,4], ，这两种力之比与 $(s-1)\mu_c/\Gamma$ 成正比，其中 $s = \rho_s/\rho_f$， μ_c 是库仑摩擦系数（$\mu_c \approx 0.3$ 玻璃与不锈钢之间界面的[5]），而

$$\Gamma = \frac{A\,(2\pi f)^2}{g} \tag{3}$$

是最大振荡加速度与重力加速度 $g = 9.81\mathrm{m^2/s}$ 之比。在我们的实验中， $\Gamma \approx 0.75$ 为了使不同流动条件下颗粒-底面摩擦的相对重要性相近。由于固定了 Γ，我们必须同时改变振幅和频率。我们采用范围为 $2.0 - 5.7$ Hz 的频率，这些频率对应的振幅在 $5.74 - 46.6$mm 之间。然而，由于光学平台的晃动，实验室参考系中的 A 数值通常略大于用户设定的电机振幅，因此 Γ 的数值范围为 0.75 至 0.93。我们在第 III B 节和附录 A 中表明，这种 Γ 的增加不会对颗粒运动产生显著影响。

基于控制参数，我们定义了两个无量纲量，它们对振荡流中的颗粒动力学至关重要：归一化位移长度 A/D 和归一化黏性长度尺度

$$\frac{\delta}{D} = \frac{\sqrt{\nu/(\pi f)}}{D}, \tag{4}$$

其中， δ 通常称为斯托克斯边界层厚度。对于振荡流中的一对颗粒，在颗粒-流体位移长度较小的情况下，δ/D 决定了颗粒间的间隙宽度[3]。固定 Γ 并同时改变 A 和 f 的一个结果是， A/D 和 δ/D 也会随之改变（$Af^2 =$ 常数 $\implies (\delta/D) \propto (A/D)^{1/4}$）。

颗粒的位置通过 TrackPy[6], 识别。TrackPy 是一款开源软件包，其核心功能是 Crocker 和 Grier [7]提出的特征查找与连接算法。每组实验开始前，都会使用一块厚度为 2.5 毫米、带有直径为 2.5 毫米圆点的校准板进行校准，这些圆点间距为 5 毫米，排列成 9×19 网格。校准板放置在水槽底部，

表 I：实验系列之间变化参数的概览。每个系列包括多个实验，其中振荡的频率和振幅有所变化。

实验系列	符号	颗粒直径 D [毫米]	颗粒数量 N	颗粒覆盖率 ϕ	用户定义频率 f [Hz]	测量振幅 实验室参考系中 A [mm]
A1	△	10	275	0.173	2.0-5.6	6.15-47.9
A2	▽	10	413	0.259	2.0-5.5	6.51-48.2
A3	□	10	550	0.346	2.0-5.6	6.15-48.0
A4	◇	10	688	0.432	2.0-5.2	7.14-48.3
A5	○	10	825	0.518	2.0-5.1	7.41-48.4
B1	▲	5	1100	0.173	2.0-5.7	6.08-48.0
B2	■	5	2200	0.346	2.0-5.7	5.96-47.9

使校准在 5 毫米颗粒的中部高度进行。10 毫米颗粒的中部高度比校准高度高 2.5 毫米，因此误差不超过 0.5 毫米。在箱体处于不同已知位置时拍摄校准图像，这些位置对应于振荡运动期间的典型位置。使用 TrackPy 获取圆点的像素坐标（$x_{\mathrm{pixel}}, y_{\mathrm{pixel}}$）。圆点在实验室参考系中的位置（$x_{\mathrm{real}}, y_{\mathrm{real}}$）也是已知的。随后，计算三阶多项式的系数 $P_{\alpha\beta}$ 和 $Q_{\alpha\beta}$

$$x_{\mathrm{real}} = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} P_{\alpha\beta} x_{\mathrm{pixel}}^{\alpha} y_{\mathrm{pixel}}^{\beta}, \tag{5}$$

$$y_{\mathrm{real}} = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} Q_{\alpha\beta} x_{\mathrm{pixel}}^{\alpha} y_{\mathrm{pixel}}^{\beta} \tag{6}$$

使用最小二乘拟合程序确定。请注意，索引 α 和 β 在此处也用作指数。该转换还校正了图像畸变，以及水-有机玻璃和有机玻璃-空气界面处的光折射。在使用颗粒的实验中，我们将 TrackPy 得到的像素坐标与公式 (5) 和 (6) 的系数相结合，以确定颗粒在实验室参考系中的位置。这些位置的误差小于 1 mm，通常约为 0.2 mm。该误差明显小于用于描述图案的各项量的变化，例如相对颗粒-流体位移长度（见第 III B 节）和链间距（见第 III C 2 节）。这些相关量的变化通常处于厘米尺度。

III. 图案形成与特征

A. 图案的形成

我们在图2中展示了链形成的一个典型示例，该示例对应于A1系列实验（见表 I），实验参数为 $f = 5.0$Hz 和 $A \approx 7.48$mm。此外，还提供了一段视频作为补充材料[8]。实验开始时，颗粒聚集在箱壁附近 [图2(a)]。经过几个振荡周期后，团簇边缘形成短链，并迅速自组织成垂直于振荡方向的长链，其位于团簇边缘，并迅速自组织成垂直于振荡方向的长链[图2(a-c)]。链形成后彼此排斥，导致链间距增大，图案填充区域的大部分空间 [图2(c-e)]。膨胀之后，链的流向运动发生反转，链间距减小 [图2(e-f)]。经过约80个周期后，系统达到平衡态，此时链间距随时间保持不变。在这种情况下，链图案仅覆盖区域的一部分。动态行为主要出现在颗粒层面，例如缺陷的传播。

图2中链的演变表明，链与链之间在距离较小时存在排斥相互作用，而在距离较大时存在吸引相互作用。如果不存在吸引相互作用，排斥作用会使链均匀地散布在整个区域内，这与图2(f)中的观察结果相矛盾。这些观察结果支持先前研究[1,9] 提出的假设：链之间在距离较大时存在吸引力。在第IV节中，我们将探讨驱动排斥和吸引相互作用的潜在物理机制；但在本节余下部分，我们首先着重描述达到平衡后的图案特征。

B. 颗粒相对于流体的流向运动

颗粒的流向运动可根据其相对于箱体[1,3,10]的相对位移长度来描述。如果作用于颗粒的力作简谐振荡，那么颗粒流向运动呈正弦变化[4], ，其相对颗粒-流体位移长度为

$$A_r = \sqrt{A^2 + A_s^2 - 2AA_s\cos(\phi_s - \phi_0)}, \tag{7}$$

其中， A和 ϕ_0 描述箱体的运动（见公式 (1)）， A_s 是颗粒在实验室参考系中的位移长度， ϕ_s 是颗粒振荡的相对相位。如果可以忽略颗粒-底面摩擦，那么 A_r 与 A [4]成正比。当颗粒-底面摩擦遵循简谐振荡时，这种正比关系同样成立；实际上，我们的所有

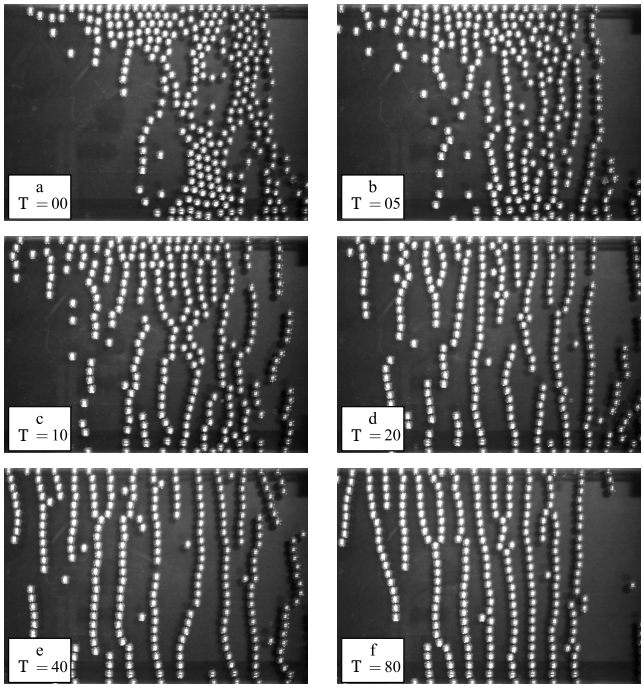

图2：这些图像展示了 A1 系列实验（$f = 5.0$Hz，$A \approx 7.48$mm）中振荡箱一部分区域内图案的形成过程。每帧显示经过 T 个周期后形成的图案。可以区分出形成过程中的不同阶段，即 (a-c) 链的初始形成、(c-e) 图案扩展，以及 (e-f) 向平衡间距收缩。补充材料[8]中提供了频闪视频。

实验都是如此，正如本小节余下部分和附录 A 所示。

A_r 的值通过同时测量箱体的运动来获得 A 和 ϕ_0，并测量颗粒的运动来获得 A_s 和相位 ϕ_s。为避免在计算中纳入颗粒-壁面相互作用（例如碰撞），后两个量仅对距离箱体侧壁至少两个直径的颗粒取平均值。这两个量的平均值的不确定性通常小于 1%。

我们计算了所有实验中的 A_r/D，并在图 3(a) 中展示了其随 A/D 变化的数值。图中的数据汇聚成一条直线，表明 A_r/D 与 A/D之间存在唯一的线性关系。我们对数据进行线性最小二乘拟合，得到

$$\frac{A_r}{D} \approx (0.552 \pm 0.001) \times \frac{A}{D} + (0.009 \pm 0.003), \qquad (8)$$

其相关系数较高，为 $R^2 = 0.999$。该方程的最后一项很小，因此可近似认为 $A_r/D \propto A/D$。此外，图 3(b) 显示 A_r/A 近似为常数，这进一步证实了这一点。

为验证我们的结果，我们将其与单个孤立颗粒流向运动的 Basset-Boussinesq-Oseen（BBO）方程[11]的解进行比较。根据 BBO方程，比值 A_r/A 取决于颗粒-流体密度比 s 和归一化黏性长度尺度 δ/D。无颗粒-底面摩擦情况下的解此前已由 Van Overveld 等人[4] 确定，表示为

$$\frac{A_r}{A} = \frac{2(s-1)}{\sqrt{(9\delta/D)^2(2\delta/D+1)^2 + (9\delta/D+2s+1)^2}}. \quad (9)$$

对于 $0.024 < \delta/D <$0.082 和 $s = 7.7$ 的实验条件，该解预测的 A_r/A取值范围为 $0.78 - 0.81$。图 3 中的红色带状结构表示这一预测，与我们的实验数据并不十分吻合。

接下来，我们考虑颗粒-底面摩擦足够大、使颗粒能够滚动而不发生滑动的情况，此时将摩擦力 $\boldsymbol{F}_c$ 加入BBO方程。在附录 A 中，我们进一步探讨颗粒-底面摩擦对颗粒流向运动的影响。假设颗粒旋转仅由颗粒-底面摩擦引起，则颗粒的角动量可表示为

$$\frac{\rho_s \pi D^5}{60} \frac{d\boldsymbol{\omega}_s}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_c, \qquad (10)$$

其中角速度由下式给出

$$\boldsymbol{\omega}_s = \frac{2}{D}(\boldsymbol{u_s} - \boldsymbol{u}), \qquad (11)$$

其中，$\boldsymbol{u_s}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 分别为颗粒速度和底面速度。公式 (11) 的定义确保颗粒与底面接触点处的速度始终等于底面速度。遵循 Van Overveld 等人[4] 的方法，并考虑颗粒-底面摩擦，BBO 方程的解为

$$\frac{A_r}{A} = \frac{2(s-1)}{\sqrt{(9\delta/D)^2(2\delta/D+1)^2 + (9\delta/D+14s/5+1)^2}}. \qquad (12)$$

该解预测 A_r/A 的取值范围为 0.57–0.59，在图 3 中以蓝色带状结构表示。这些带状结构与我们的实验数据吻合良好，并且与公式 (8) 中给出的线性拟合一致。

根据方程（12），δ/D 增大将导致 A_r/A减小。然而，当 $\delta/D \ll s$时，这种影响很小，这一点从图3(b)中狭窄的蓝色带状结构可以看出。我们的实验数据与这一预测一致：图3(b)中的实心符号对应的 A_r/A 值略低于空心符号。实验数据的离散幅度仅为几个百分点，与蓝色带状结构的宽度相符。因此，我们得出结论，在参数空间的这一部分，δ/D 的变化不会显著影响A_r/A 的值。

BBO方程的解表明，我们实验中的颗粒在滚动时没有滑动，这与我们的目视观察一致。此外，图3(a)中的数据塌缩到一条直线，以及 A_r/A 的恒定值，表明颗粒-底面摩擦相对于驱动力的重要性保持不变。总而言之，结果证实，我们在实验中观察到的 Γ 小幅变化，对颗粒沿流向的运动没有显著影响。

图3中 A/D 的数值沿横轴并非均匀分布。在接近光学平台共振频率（约4.3 Hz）的数据点附近，间隔较大，对应于 $A \approx 10\,\mathrm{mm}$，如图3(b)中的灰色阴影区域所示。正如第II节所述，光学平台在这些频率下的振动会导致 A/D 的数值显著高于用户为电机设定的振幅。

C. 平均图案特征

1. 定性比较

箱体开始振荡运动后，颗粒会根据 A_r/D的数值排列成不同类型的图案。我们首先考虑单一覆盖率 ϕ ，并描述各种振荡条件下的图案特征。参数空间的全面概述，包括 ϕ的变化，见第V节。A3实验系列中这些图案的典型示例见图4，视频可参见补充材料[8]。当 A_r/D较低时，颗粒会形成单粒子厚链，链的方向与振荡方向垂直，如图4(a)所示，图2中的先前示例也展示了这种情况。Wunenburger、Carrier 和 Garrabos [1] 以及 Klotsa等人[9]在先前研究中描述过这种图案。当 A_r/D略微增大时，图案由颗粒链构成，这些链更加弯曲、缺陷更多，且部分区段宽达两个颗粒，如图4(b)所示。随着A_r/D 进一步增大，单粒子厚链逐渐减少，宽度为两个和三个颗粒的带状结构开始占据主导，如图4(c)所示。随着 A_r/D 增大，这一趋势仍在持续，颗粒形成更宽的带状结构，如图4(d)所示。此外，在参数空间的这一区域，不同宽度的带状结构经常共存。例如，在图4(d)中，可以同时观察到大约七行、六行和三行宽的带状结构。

由于多颗粒系统具有混沌特性，我们不可能精确复现实验中的图案。初始条件的微小变化会导致颗粒轨迹出现显著差异。然而，如果在相同条件下重复实验，我们会得到统计上等效的图案。值得注意的是，图案达到平衡态后的平均特征相似。

此外，我们经常观察到颗粒与垂直于振荡方向的壁面之间发生碰撞，这一点在补充材料[8]所提供的视频中清晰可见。由于与运动壁面发生此类碰撞，颗粒会以显著增大的速度向箱体中心反弹。随后，这些孤立颗粒经常与颗粒链或带状结构发生碰撞，从而导致这些壁面附近的图案出现缺陷。然而，为了保持恒定的颗粒覆盖率并避免任意截断点，我们在平均图案特征的分析中将箱体内的所有颗粒都纳入其中。

我们使用径向对关联函数（RPCF） g_r来表征系统的平均态，该函数通常用于胶体系统[12]。RPCF 描述了参考粒子周围的粒子数密度与其中心距离之间的关系。其定义为

$$g_r = \frac{1}{2\pi r \Delta r N \phi} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \delta_r^{ij}, \tag{13}$$

with

$$\delta_r^{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } r - \dfrac{\Delta r}{2} < r_{ij} < r + \dfrac{\Delta r}{2}, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{14}$$

其中， r 是相对于参考粒子的径向坐标， Δr 是分箱宽度， r_{ij} 是颗粒 i 与 j的中心之间的距离。

这种方法最适用于各向同性系统中的图案，因为它没有考虑方向性。为了更好地分析实验中的各向异性图案，我们使用一种经过修正的二维对关联函数（2DPCF）， g_{xy}，其定义为

$$g_{xy} = \frac{1}{\Delta x \Delta y N \phi} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \delta_x^{ij} \delta_y^{ij}, \tag{15}$$

其中， δ_x^{ij} 和 δ_y^{ij} 的定义与式（14）中的 δ_r^{ij} 相同。这里，x 和 y 分别是平行于和垂直于振荡方向的笛卡尔坐标。沿这两个方向， Δx 和 Δy 是分箱宽度， x_{ij} 和 y_{ij} 分别是颗粒 i 和 j 的中心在 x方向和 y方向上的距离。我们使用式（15）分析图4所示的四种情况。每个实验取振荡不同相位下的100帧，并对结果取平均。结果以对数尺度显示于图5中。我们仅在每个分箱的中心处计算函数 g_{xy}，分箱宽度为 $\Delta x = \Delta y = 0.1D$，以避免对颗粒重复计数。

对于所有四种情况，图5所示的二维对关联函数呈现出明显的结构，其定性特征与实验中观察到的图案相似。红色区域

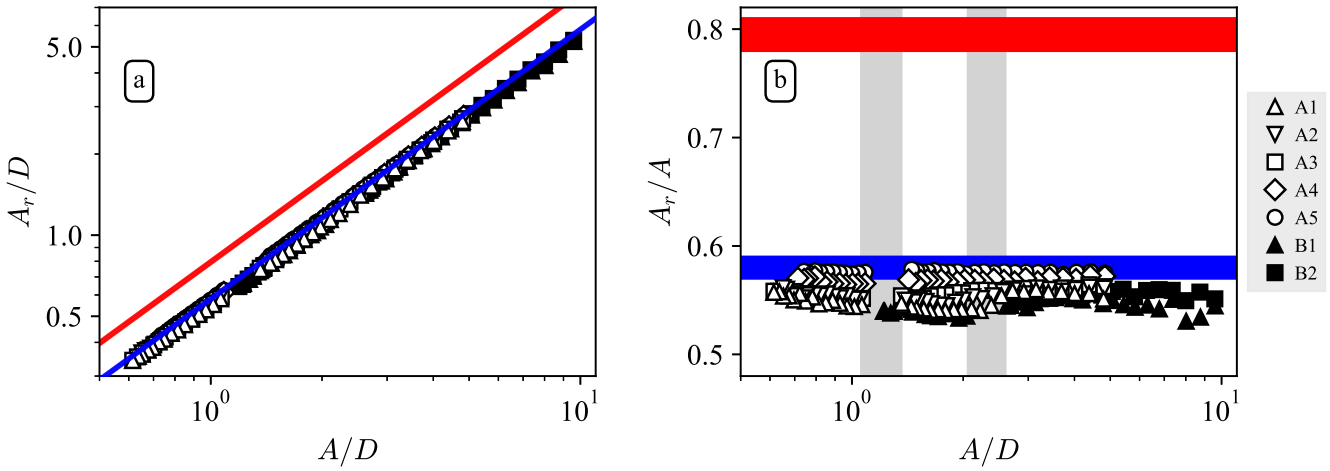

图3：（a）无量纲相对颗粒-流体位移长度 A_r/D 随无量纲箱体运动行程 A/D 的变化。不同符号代表不同的实验系列，定义见表I。红色和蓝色区域（两个图中均有）分别对应公式（9）和（12），它们分别是不考虑和考虑颗粒-底面摩擦时的解析预测。（b）对于所有实验系列和 A/D 的取值，比值 A_r/A 近似为常数（$A_r/A \approx 0.55$）。灰色阴影区域表示数据缺失区间（对应 $D = 10$ mm 和 5 mm），这是光学平台共振振动所致。

表示颗粒数量高于平均水平。原点周围的圆形区域代表参考颗粒，它不会与其他颗粒重叠，因此 $g_{xy} = 0$。对于较低的 A_r/D值，如图5(a)所示，二维对关联函数中的红色区域代表单粒子厚链，每条链中的颗粒出现在 $y/D = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$。由于链的曲折度，红色区域沿 x 方向伸长。在图5(a)的 $x/D \approx \pm 2$ 和 ± 4 处、图5(b)的 $x/D \approx \pm 3$处以及图5(c)的 $x/D \approx \pm 5$ 处，可以区分出相邻链（或带状结构）。因此，相邻链或带状结构之间的间距显然会随 A_r/D增大；我们将在第 III C 2 节对此作更详细的讨论。

此外，图 5(a) 和 (b) 中相邻的行在 $y/D = \pm 1$、± 2、.....处也出现了峰，与中央行相似，这表明相邻链中的颗粒彼此对齐。这很可能是限域造成的：当两条相邻链都接触侧壁时，最靠近壁面的颗粒必然会彼此对齐。由于曲折度和缺陷等因素，这种对齐可能会随着远离壁面而减弱。然而，我们的区域尺寸不足以排除侧壁的影响。随着 A_r/D增大，带状结构的宽度增加，中央行周围出现更多具有 $g_{xy} > 1$ 的区域。由于 g_{xy} 关于原点呈中心对称，这些区域分布在中央行两侧，对应于六方堆积，这在图 5(c) 和 (d) 中最为明显。总体而言，由于区域尺寸有限，g_{xy} 的峰值随距原点的距离增加而降低。此外，二维对关联函数中的图案可能略有倾斜，例如图 5(b) 所示。这种倾斜是由于链并未与振荡方向完全垂直，这可能是底板的水平度和平滑度略有差异所致。

2. 链间距

图5中的二维表示有助于识别平均图案的定性差异，但难以直接从中提取定量信息。为此，我们分别使用沿 x 和 y 方向的一维对关联函数 g_x 和 g_y，从图案中获得特征长度尺度。对于 g_x，我们将 Δy 设为较大的值（$\Delta y = 10D$），同时保持 Δx 较小（$\Delta x = 0.01D$），以获得 x 方向的高空间分辨率。类似地，对于 g_y，我们设定 $\Delta x = 10D$ 和 $\Delta y = 0.01D$。这些操作等同于分别沿 y 或 x 方向对 g_{xy} 进行平均。结果如图6所示，展示了图4和图5中所示 A3系列的相同四种情况。

对于 A_r/D ($A_r/D = 0.51, 1.00$) 的较低取值（图6中以实线和虚线表示），g_x 中的峰对应相邻链。这些峰的宽度约为一个直径，主要是由链的变化造成的，例如缺陷和曲折度。峰宽通常比测量不确定度大一个数量级以上，而测量不确定度处于亚毫米级（见第 II 节）。在各峰之间，g_x的值明显小于 1，表明在该区域找到颗粒的概率低于平均水平

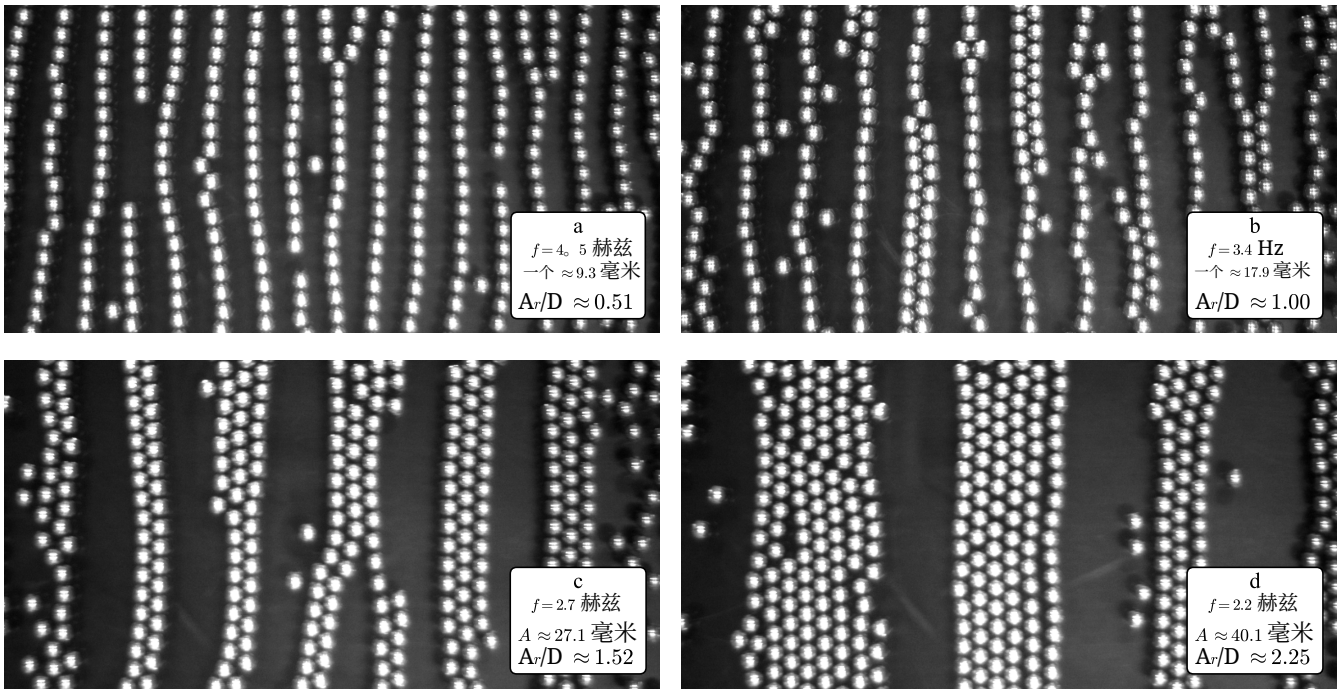

图4：振荡条件不同时，A3实验系列（$D = 10\text{mm}$， $\phi \approx 0.346$）中图案的典型示例。在 A_r/D较低时，颗粒自组织成单粒子厚链，其排列方向垂直于振荡方向（a）。随着 A_r/D 增加，可观察到链与双颗粒宽带状结构的组合（b）。进一步增大 A_r/D ，会形成更宽的带状结构，其宽度为三个（c）或更多（d）颗粒。视频可在补充材料[8]中查看。

。相反，在 g_y中，我们观察到位于 y/D 整数值处的尖锐峰，这些峰对应链内的颗粒。如图6(b)中的红色包络线所示，随着与参考粒子之间的距离增加，峰逐渐衰减。观察到的代数衰减是晶体结构中准长程平移有序的典型特征[12]。此外，在我们的系统中，盒子的有限尺寸也会导致较大距离处的颗粒出现频率较低。

在较高的 A_r/D 值（$A_r/D = 1.52$，2.25）下，图6中的点划线曲线和虚线曲线所示的 g_x 和 g_y中均可见额外的峰。对于 g_x，这些峰大约出现在 $(1/2)\sqrt{3}$、$\sqrt{3}$和 $(3/2)\sqrt{3}$处，对应于六方堆积中球体沿 x方向的间距。峰值略向较大值偏移，这可能是因为带状结构最外侧的颗粒行并非总是紧密堆积，正如图4(d)所示。范围为 $4 < x/D < 6$（点划线）或 $7 < x/D < 10$ （虚线）的宽峰对应于相邻带状结构。此外，调制宽峰的较小峰对应于这些带状结构中的单独行。在 g_y中，整数值处的峰随着 A_r/D增加而减弱。在半整数值处（$0.5, 1.5, 2.5$ ...）会出现额外的峰，对应于六角形排列中的间距。

为了量化链间距，我们计算每个实验系列中所有实验里各个峰的（归一化）链间距 λ/D 及其半峰全宽（FWHM）。结果以 A_r/D 为函数绘制于图7中，误差棒表示半峰全宽值。不同实验系列的数据无需重新标度，便汇聚到几条曲线上。最低曲线上的数据从 $\lambda/D \approx 2$开始，对应相邻链或带状结构；而 λ/D 值较大的数据则对应非相邻链或带状结构。

在计算 g_x 时，我们排除了振荡箱的一部分，针对的是带有$A_r/D < 0.7$的A5系列实验。这样做是必要的，因为在这些实验中，尤其是在侧壁附近，往往会形成形状不规则的团簇。与这些团簇相关的 g_x 峰会掩盖由链间距产生的数据，使结果难以准确分析。我们在第V节讨论参数空间这一部分中这些团簇的起源。

根据图7中最低曲线的数据，我们观察到相邻链中心之间的距离遵循

$$\frac{\lambda}{D} \approx 2 + \left(\frac{A_r}{D}\right)^2 . \tag{16}$$

图中的红色曲线表示 λ/D 的值

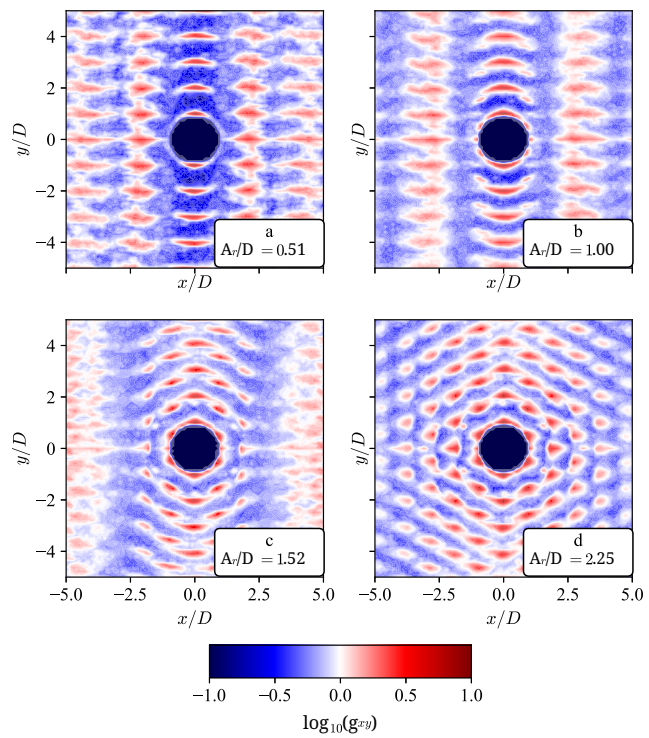

图5：（在线彩色）根据式（15）定义的二维对关联函数（2DPCF） g_{xy}，采用分箱宽度 $\Delta x = \Delta y = 0.1D$，绘出了图4中四个示例（a–d）的结果。二维对关联函数对振荡不同相位下记录的100帧进行时间平均。正相关（$\log_{10}(g_{xy}) > 0$）以红色表示，负相关（$\log_{10}(g_{xy}) < 0$）以蓝色表示，无相关（$\log_{10}(g_{xy}) = 0$）以白色表示。

及其整数倍（即 $2\lambda/D$、$3\lambda/D$ 和 $4\lambda/D$），如公式 (16) 所示。该公式还表明，当 A_r/D 趋近于零时，相邻链之间的最小间距等于一个颗粒直径（$\lambda = 2D$）。此外，当 $A_r/D = 1$ 时，相邻链之间的间距等于两个颗粒直径（$\lambda = 3D$）。

图7中的实验数据与所提出的链间距关系（最低的红色曲线，对应式（16））在所有粒子覆盖率 ϕ 下均吻合良好。即使在 ϕ 较低、图案未完全覆盖箱体时，数据也符合该曲线。因此，链间距主要由链之间的流体动力相互作用决定，其特征由 A_r/D 表示。式（16）还表明，间距由短程排斥与长程吸引之间的平衡决定。相反，如果链之间只有相互排斥，图案就会扩散至整个箱体，间距则由限域决定，即由 ϕ 决定。

然而，我们注意到，对于图7中的 $A_r/D \lesssim 0.6$，λ/D 的值会随着 ϕ 的增加而系统性地减小。

具体而言，ϕ 取值较小时的数据点（例如三角形）略高于红色曲线，而 ϕ 取值较大时的数据点（例如菱形和圆形）则略低于红色曲线。这一结果表明，限域确实会对参数空间的这一区域产生影响，我们将在第V节结合相互作用势进一步讨论这一点。

我们的结果进一步与 Wunenburger、Carrier 和 Garrabos [1]，的研究结果一致；他们指出，对于较低的颗粒覆盖率 ϕ（约为 $\phi \approx 0.07$），链间距与颗粒覆盖率无关。我们证实了这一发现，并将其拓展到了更高的 ϕ，范围几乎扩大了一个数量级。然而，Wunenburger、Carrier 和 Garrabos [1] 提出的标度关系与我们的结果存在显著差异，因为他们认为 $\lambda/D \sim (A_r/D)^{0.5}$（$A_r(2\pi f)D/\nu)^{-0.21}$。这可以改写为 $\lambda/D \sim (A_r/D)^{0.29}(\delta/D)^{0.42}$，这意味着间距同时取决于 A_r/D 和 δ/D。然而，对于我们的实验，我们没有发现其对 δ/D 的这种依赖性，并且可以证明，Wunenburger、Carrier 和 Garrabos [1] 提出的关系并不适用于我们的结果。对于 Γ 和A_r/D保持不变的情况，比值 δ/D 是颗粒尺寸的函数：$\delta/D \sim \left(gD^3/\nu^2\right)^{-1/4}$，其中方括号内的项通常称为伽利略数。因此，具有相同 Γ 和 A_r/D、但颗粒直径不同的实验，会得到不同的 δ/D值。在图7中，我们观察到，不同符号在 A_r/D的恒定值处重合，而 δ/D会因不同的频率和颗粒尺寸而发生变化。由此我们得出结论：在所探究的参数空间范围内，A_r/D 是影响链间距的相关参数，而 δ/D 则不是。

在图7右下角，对于较大的 A_r/D，数据表示具有六方堆积的同一带状结构内颗粒之间的间距。该区域的 FWHM 较小，这表明带状结构内单独各行之间的间距与峰的位置偏差很小。对于 $D = 10$mm（空心符号），这些数值是 $\sqrt{3}/2$ 的整数倍（蓝色水平线所示），这与图6中的峰位置相符。然而，对于 $D = 5$mm（实心符号），一些峰位于蓝色水平线之间，间隔为 $1/2$ 的整数倍。为理解这些差异，我们比较不同颗粒尺寸对应的图案。

每个带状结构内的六角形排列具有两种不同的取向，如图8所示，二者之间旋转了 $30°$。靠近侧壁处，颗粒排成与壁面平行且相接触的行。这表明颗粒受到壁面的吸引，而且这种吸引力强于其对另一侧相邻颗粒的吸引力。同样，Klotsa 等人 [9] 观察到，单粒子厚链会受到侧壁的吸引。离边界较远处，每个带状结构则由交错排列的颗粒链组成，每条链的取向均垂直于振荡方向。在取向不同的两个区域之间，有一片宽度为

几个颗粒的区域，其中存在许多缺陷。与 $D = 5$毫米颗粒相比，10毫米颗粒中沿壁取向的颗粒区域明显更窄；在图8(a)和(b)所示的具体情形中，该区域的宽度分别约为4个和13个颗粒。因此，较小颗粒中沿壁取向区域的颗粒明显更多，这导致图7中 g_x 内 $1/2$ 的整数倍处出现峰。

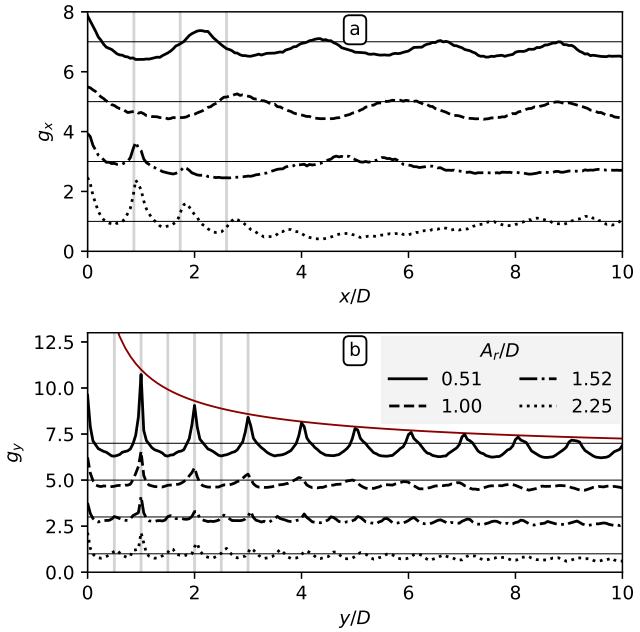

图6：对于图4所示的四种情况，分别计算了一维对关联函数 (a) g_x 和 (b) g_y。对于 g_x和 g_y，我们分别使用了带有 ($\Delta x = 0.01$，$\Delta y = 10$) 和 ($\Delta x = 10$，$\Delta y = 0.01$) 的方程 (15)。为使图示更清晰，各曲线已按 2 的倍数进行了平移。水平线为无相关时的参考值（ g_x 或 g_y 等于 1）。(a) 中的竖线对应于 $\sqrt{3}/2$的倍数，而 (b) 中的竖线对应于 $1/2$的倍数。(b) 中的红色曲线表示包络线 $g_y \sim (y/D)^{-0.6}$。

3. 链宽度

为描述链宽度，我们使用以下比例

$$F_n = \frac{M_n}{N}, \tag{17}$$

其中， M_n 是具有 n 个最近邻的颗粒数量， N 是颗粒总数。如果两个颗粒的中心间距离小于截断值： $r_{ij}/D < 1.3$，则认为它们互为最近邻。该截断值根据先前关于周期图案的研究选取；这些研究表明，该值应选在堆积中最近和次近颗粒距离之间

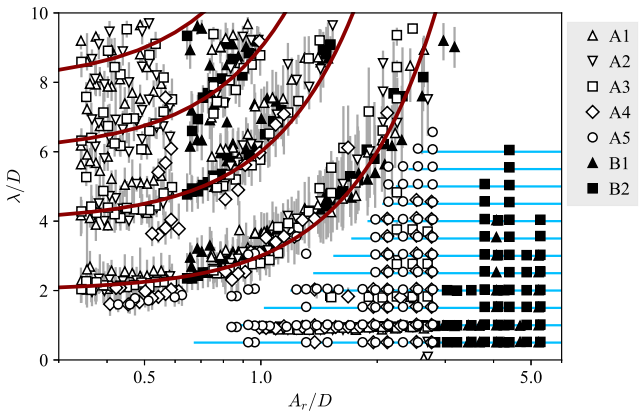

图7：（在线彩色版）所有实验系列中， g_x的峰的位置随 A_r/D的变化关系（见表 I）。误差棒表示这些峰的半峰全宽（FWHM）。红色曲线为方程 (16) 的整数倍。蓝色水平线对应于$\sqrt{3}/2$的整数倍。

（正方形堆积中介于 1 和 $\sqrt{2}$ 之间，六方堆积中介于 1 和 $\sqrt{3}$ 之间）[12,13]。

图 9(a) 展示了具有 2、4 和 6 个最近邻的颗粒所占比例随 A_r/D 的变化。在所有实验系列中，我们都观察到相似的趋势，这与实验中的观察结果一致，例如图 4 所示。在较低的 A_r/D 下， $F_2 \approx 0.75$，这意味着约 70–80% 的颗粒属于单粒子厚链，其中每个颗粒都有两个最近邻。随着 A_r/D 增加， F_2 减少，而 F_4 增加，这表明颗粒形成了两行宽的带状结构。在 A_r/D 取更高值时， F_6 的增加表明带状结构变得更宽，至少有三行。此外， ϕ 值相同的实验系列中的符号彼此重合。例如，空心方块与实心方块重合，空心上三角形与实心上三角形重合。相反，当 ϕ 增大时， F_2 到 F_4 以及 F_4 到 F_6 的转变会在较低的 A_r/D 值处发生。未计入的颗粒是那些具有零个、一个、三个和五个邻居的颗粒，它们与孤立颗粒以及链和带状结构中的缺陷有关。对于每次实验， $\sum_{n=0}^{6} F_n = 1$。

对于 ϕ 较大（空心圆和空心菱形）且 $A_r/D \lesssim 0.6$ 的情况，约有 20% 的粒子有四个或六个最近邻。这些粒子属于不规则形状的团簇；当 ϕ 足够大时，这些团簇便会出现。在第V节中，我们将解释为何这些团簇只出现在这些特定的实验系列中。

图 9(a) 中的灰色符号表示总和$F_2 + F_4 + F_6$，即既不属于缺陷也不是孤立颗粒的颗粒所占的比例。在A_r/D较低时，约有 20% 的颗粒属于缺陷或孤立颗粒；对于较大的A_r/D，这一比例增加到 $40 - 60$%

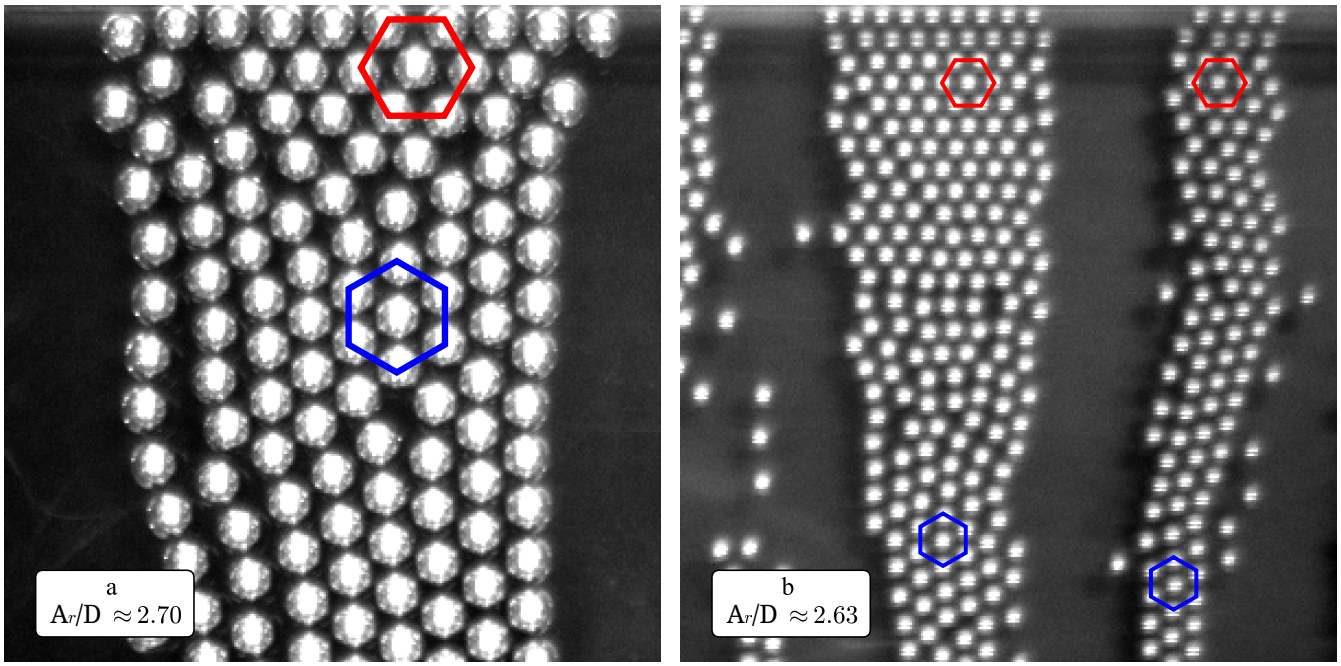

图 8：（在线彩色）两个实验的图像，(a) $D = 10\text{mm}$ 和 (b) $D = 5\,\text{mm}$，具有相近的A_r/D 值，且以相同的比例绘制。每条带状结构中的颗粒紧密排列成六角形，在区域的不同部分具有不同的取向。靠近侧壁（上方）时，颗粒的取向与侧壁对齐；而远离边界（下方）时，取向旋转了 30°。图中添加了六角形，以便说明靠近壁面处（红色）和体相中（蓝色）的取向。

A_r/D较大的值。值得注意的是，颗粒覆盖率较低的情况在A_r/D较大时往往具有更多缺陷。例如，图 9(a) 中的向上三角形表明，在约为 $A_r/D \approx 2$ 时，只有 30–40% 的颗粒具有两个、四个或六个最近邻。此外，我们观察到，在这些情况下， F_4中没有出现峰，这与 ϕ 值略高时（方形、菱形和圆形所示）清晰定义的峰形成对比。

我们提出一个模型，通过将链宽度的变化与早先对链间距的观察联系起来，解释所观测到的链宽度变化。我们首先假设，所有颗粒都排列成跨越两侧侧壁的链，即其长度 L_y 等于区域的宽度。每条链包含 L_y/D 个颗粒，系统中共有 ND/L_y 条链。接下来，我们假设由公式 (16) 给出的链间距是一种独立于限域的内禀长度尺度。随后，链的集合跨越一个距离

$$L_c = \frac{ND^2}{L_y}\left[2 + \left(\frac{A_r}{D}\right)^2\right] \tag{18}$$

沿 x方向，此处忽略了边缘效应。当 $L_c < L_x$时，这组颗粒可容纳在区域内，其中L_x 为区域的长度。因此，双粒子宽条带当 $L_c > L_x$ 时应形成带状结构，换言之，当

$$\phi\left[2 + \left(\frac{A_r}{D}\right)^2\right] > \frac{\pi}{4}, \tag{19}$$

其中，我们采用了式（2）($\phi = \pi N D^2/(4L_xL_y)$) 中颗粒覆盖率的定义。当 $\phi > \pi/8 \approx 0.39$ 时，式（19）的条件对 A_r/D 的所有取值均成立。高于这一临界颗粒覆盖率后，单粒子厚链之间的间距始终与区域尺寸不相容，因此颗粒总会形成带状结构，以满足其偏好的间距。

对于双粒子宽带的情况，可以重复上述分析，其中每条带包含$2L_y/D$ 个颗粒，而间距的表达式保持不变。分析结果表明，当满足以下条件时，应形成三粒子宽带：

$$\phi\left[2 + \left(\frac{A_r}{D}\right)^2\right] > \frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

值得注意的是，方程 (19) 和 (20) 取决于 ϕ，而不显式依赖于区域尺寸。因此，尽管该模型是针对有界区域推导的，但它对于周期性区域和无限大的区域同样有效；在这些区域中，链间的本征间距也可能与覆盖率不相容。

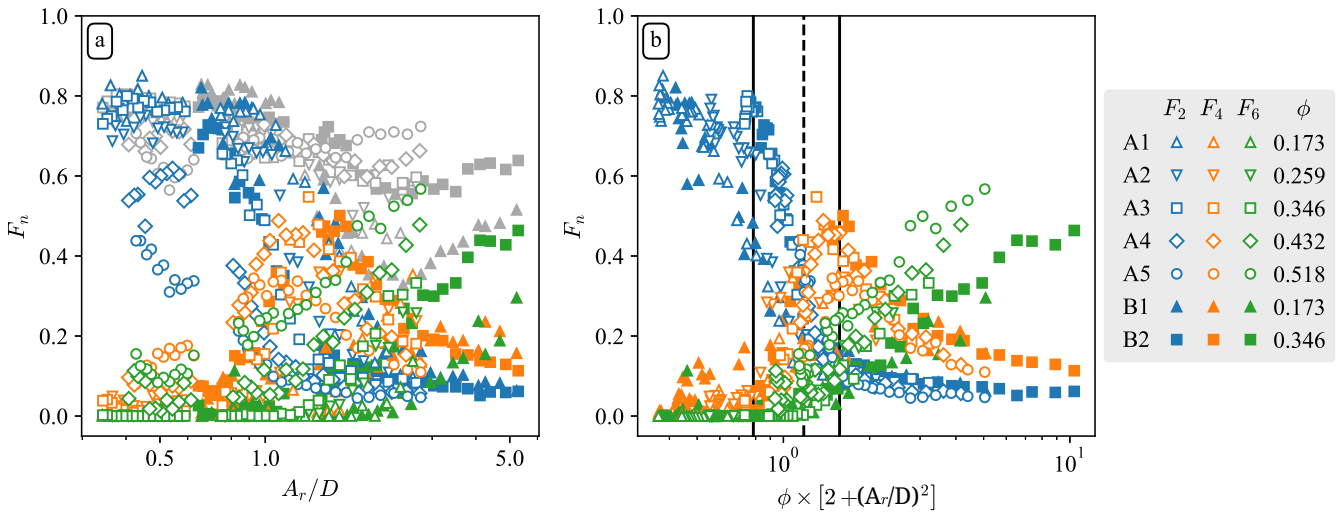

图 9: （在线彩色版）具有 F_n 个 n 最近邻（见式（17））的颗粒所占比例随 (a) A_r/D 和 (b) $\phi \times \left[2+(A_r/D)^2\right]$ 的变化情况，涵盖所有实验系列（见表 I）。(a) 中的灰色符号表示 $F_2+F_4+F_6$，即非缺陷颗粒所占的比例。(b) 中的竖线对应于根据式（19）和式（20）得到的临界值 $\pi/4$ 和 $\pi/2$。位于 $\phi[2+(A_r/D)^2]=3\pi/8$ 处的虚线正好处于两个临界值的中间。

我们通过在图 9(b) 中绘制具有 n 个最近邻的颗粒所占的比例 F_n 随方程（19）左侧的变化，来验证我们的模型。在这里，我们观察到来自图 9(a) 中不同 ϕ 值的数据发生塌缩。此外，在临界值 $\pi/4$ 处，F_2 减少而 F_4 增加，标志着从单粒子厚链到双粒子宽条带的转变。对于较高的覆盖率，即圆形、菱形和方形标记，转变比覆盖率较低的三角形标记更加陡峭。此外，由方程（20）得到的临界值 $\pi/2$ 标志着 F_4 的最大值以及 F_6 开始增加。这两个 F_n 的变化对应着从双颗粒宽带到三颗粒宽带的转变。最后，注意图 9(b) 中的蓝色和橙色符号在两个转变之间的大约中点处相交，即虚线上。

IV. 链间吸引与排斥的物理机制

A. 数值方法

我们通过数值模拟揭示链间吸引与排斥背后的物理机制。我们采用二阶精度的有限体积法，对球形颗粒周围的流动进行完全解析。颗粒通过浸入边界法进行模拟，该方法由 Breugem [14] 实现。这套代码最近被 Van Overveld 等人[3,4]用于研究振荡流中的稳态流及颗粒对的动力学。关于数值方法及其针对振荡流的改进的详细说明，请读者参阅上述文献。

在我们的数值模拟中，我们主要关注不同构型和流动条件下链周围的时间平均流。为便于比较，颗粒固定在空间中，而流动和底面以用户设定的振幅振荡。请注意，在这些情况下，A_r 和 A 相等。具体而言，我们模拟了以下情形：一条或两条由十个球体组成的完全笔直的链置于双周期盒内，盒子的横向尺寸为 20×10，高度为5个直径。流动在均匀的笛卡尔网格上求解，网格间距为 $D/24$。我们还将黏性长度尺度与颗粒直径之比设为 $\delta/D=1/30$。对于直径为10 mm的颗粒，这对应于2.86 Hz的频率；又由于 $\Gamma=0.75$，振幅与直径之比为 $A/D\approx2.3$。瞬态过程充分衰减后，我们对单个周期内的流场取平均，通常是在20个周期后。此外，时间平均流场还沿 y轴取平均，从而得到 xz平面内的平均流场。

B. 稳态流及其产生的力

图 10 展示了在三个不同的 $A_r/D(=A/D)$ 值下，颗粒单链周围的流场。数值模拟揭示，颗粒附近存在小型“内”涡旋，而较大的“外”涡旋则占据了区域的大部分空间，并贯穿整个高度。在

在这种二维表示中，内涡似乎与颗粒部分重叠，尤其是在 $A_r/D = 0.5$ 时。实际上，涡旋位于相邻颗粒之间，即其 y 位置与颗粒中心不同。此外，结合垂直速度和流线，我们推断，链上方的向下流（蓝色）表示颗粒高度中平面内的水平 xy 平面存在发散流。相反，链上方的向上流（红色）表示该平面内存在汇聚流。

内涡的半径大致与 A_r/D 成正比，如图中的洋红色圆弧所示。这些涡旋的尺寸差异导致了链周围流动的定性差异。对于$A_r/D = 0.5$，内涡的尺寸小于一个颗粒直径，因此链上方形成向下流，而在颗粒高度的中部，流动方向则远离链。相比之下，对于较大的 A_r/D 值（1.0 和 2.0），内涡的尺寸远大于一个颗粒直径，且主要分布在链的投影旁边。这使得颗粒高度中部的流动方向指向颗粒，而链上方的流动则向上。在这些情况下，内涡与滚动颗粒波纹[15] 以及波状壁面上方的振荡流[16]中观察到的内涡相似。

在图 11 中，我们展示了具有两条固定链的模拟结果，两条链之间的间距不同，使得 $\lambda/D = [4, 2, 1]$。此外，我们计算了每个颗粒上的平均水平力 F_x，该力通过 $\rho_f(\pi D^3/6)A\omega^2$ 进行无量纲化，并在一个完整的振荡周期内取平均值。 λ/D 更多数值的全面概览见补充材料[8]。模拟的其他参数与图 10 中的相同。两条链之间涡旋的尺寸和强度高度依赖于链之间的距离。对于 $A_r/D = 0.5$ 和相对较大的间距（$\lambda/D = 4$），如图 11(a) 所示，外涡在链之间诱导向上流，并在颗粒高度中间的水平面内形成汇聚流。这种流动导致链之间产生吸引力。然而，随着间距减小（$\lambda/D = 2$以及图 11(d) 和 (g) 中的 1），链之间的大尺度外部涡旋和向上流都消失了。这导致链之间产生（较弱的）排斥力。

当 $A_r/D = 1.0$ 且链间距相对较大（$\lambda/D = 4$）时，如图 11(b)所示，存在四个外涡，以及链间微弱的向上流。然而，两个外涡未能延伸至颗粒之间的底部。随着链间距减小至 $\lambda/D = 2$，链间的两个外涡显著减弱，导致链间出现向下流。相应地，水平颗粒中平面上出现发散流，且链间存在强烈排斥。然而，当间距足够小时，即如图 11(h)中的 $\lambda/D = 1$ ，两条链周围的流动在性质上变得与单链周围的流动相似，如图 10(b)所示。此外，链间的力变为强烈吸引，表明在这些流动条件下，两颗粒宽的带状结构是稳定的。

对于 $A_r/D = 2.0$ 且间距足够小（λ/D =1）的情况，如图 11(i) 所示，两条链周围的流场与单链周围的流场相似，链间的力表现为强烈的吸引力。然而，当间距相对较大时（图 11(c) 中的 $\lambda/D = 4$），内涡会充满两条链之间的整个区域，因此该区域内没有外涡。内涡会在两条链之间诱发强烈的排斥，与图 11(e) 所示的情况相似。

总之，内涡与外涡的相互作用会在链间诱发吸引和排斥的流体动力相互作用。当间距较大时，外涡会在水平中间粒子平面上产生汇聚流，从而形成吸引力。然而，当间距减小至中等值时，外涡无法容纳于两条链之间，导致流动发散并产生强烈排斥。最后，当间距较小且 A_r/D 足够大时，两条链会强烈吸引彼此，其周围的流动类似于单链周围的流动。

两条链相互接触的构型（$\lambda/D = 1$）并不总是稳定的。当 A_r/D的值足够低时，两条链会相互排斥，例如图 11(g)所示。该图表明， A_r/D 的临界值介于0.5和1.0之间；在此临界值处，两条链之间的合力会由排斥转为吸引。低于该临界值时，两条链总是相互排斥；高于该临界值时，若两条链足够接近，则会相互吸引。

为了进一步了解两条链之间的合力，我们使用两行颗粒进行了额外的数值模拟。颗粒的位置固定，并计算了 A_r/D 取值在0.5至1.0之间时的平均流向力。这些模拟的结果如图12所示。根据实验中的观察，我们采用了三种不同的构型，每种构型均由两行颗粒组成。

红色构型表示一种采用六方堆积的双颗粒宽带。紫色构型表示两条彼此接触、沿展向排列的链，其排列方式与相邻链中颗粒的排列方式相似。棕色构型表示一种采用六方堆积的带状结构，其取向与我们在实验中于侧壁附近观察到的相同。对于这三种构型，流向力随 A_r/D 变化时表现出相似的行为：在 A_r/D 较低时呈排斥，在较高时呈吸引。从排斥到吸引的转变，即图12中的零交叉，对于红色和紫色构型发生在 $A_r/D \approx 0.7$ 处，对于棕色构型则发生在 $A_r/D \approx 0.8$ 处。

对于棕色构型，我们还根据内侧颗粒和外侧颗粒到中心线的距离对其进行了区分。我们计算了

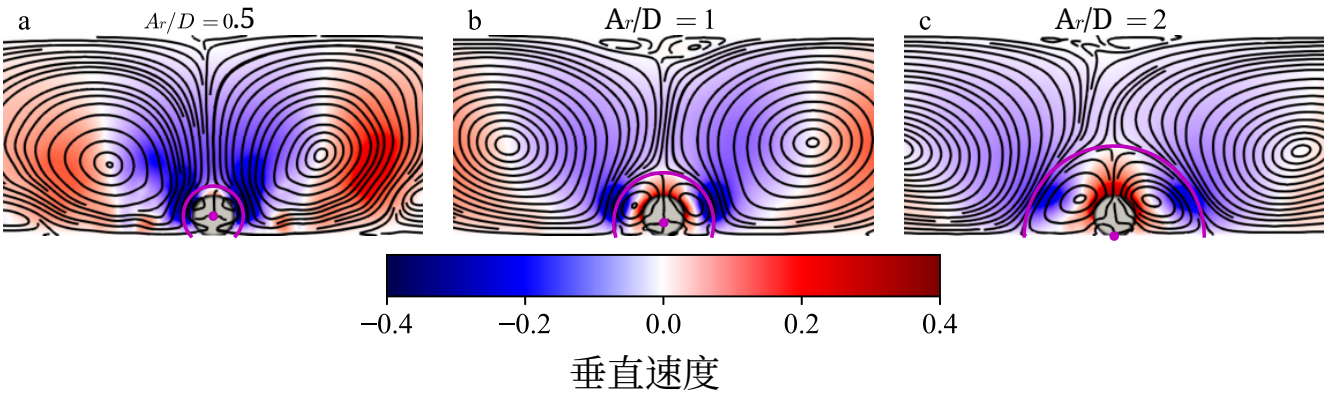

图 10：（在线彩色版）数值模拟中，单条颗粒链周围流场的侧视图，展示了 A_r/D 的三种不同取值。流场在整个振荡周期内以及沿 y 方向取平均。黑色曲线为平均速度场的流线，颜色表示垂直速度，并按速度振幅 $2\pi Af$ 归一化。颗粒链附近涡旋的尺寸大致与 A_r/D 成正比，如半径分别为 $[0.75, 1.25, 2.25]$ 的洋红色圆圈所示。请注意，不同图像中的圆心位置并不相同；随着 A_r/D 增大，圆心会垂直向下移动。

作用于这些颗粒的平均力，其中正值表示力指向中心线，而负值表示力背离中心线。外侧颗粒所受的力（点线）始终指向中心线。相反，内侧颗粒所受的力（虚线）始终背离中心线。因此，棕色构型中颗粒所受的力往往会使带状结构变直，从而形成紫色构型。

尽管我们预期棕色构型总是趋于变直，但在实验中我们经常观察到这种构型，尤其是在侧壁附近，如图 8 所示。然而，从棕色构型向紫色构型转变时，六方堆积应变为正方形堆积，这要求颗粒沿 y 方向（平行于带状结构）移动。因此，重组过程中必须有足够的空间让颗粒移动并重新定向。墙壁或其他颗粒团簇的存在可能会阻碍这种重组。

V. 参数空间概述

根据我们的实验，我们确定了两种转变：从链转变为双粒子宽条带，以及从双粒子宽条带转变为多颗粒宽带状结构。这些转变如方程 (19) 和 (20) 所述，取决于链间的本征间距。此外，我们的数值模拟表明，对于 $A_r/D \lesssim 0.7$，双粒子宽条带是不稳定的。这些条件将参数空间划分为不同区域，如 $(A_r/D,\ \phi)$ 平面所示，见图 13。在该图中，我们标出了参数空间内所有实验的位置，每次实验均根据最近邻的最常见数量（2、4 或 6）着色，对应图 9。

图 13 中从单粒子厚链（蓝色）到双粒子宽条带（橙色）的转变大致发生在虚线曲线上，该曲线大致位于黑色实线曲线之间的中间位置。这一转变对应于 F_2 和 F_4 的交点，该交点位于两条曲线之间的中点，如图 9(b) 所示。此外，值得注意的是，当 $A_r/D < 0.7$ 时，不会出现双粒子宽条带。

现在，我们利用图 13 中红点标示的实验，详细阐述参数空间内的不同区域。这些实验的快照见图 14。每幅图像都展示了参数空间相应区域中典型的图案。

在图 14 的第一列（对应于$A_r/D \approx 0.5$）中，双粒子宽条带不稳定，因此不会出现。即使在 ϕ取值较高时，颗粒也不会形成双粒子宽条带，而是聚集成不规则形状。其中一些团簇呈六方堆积，但缺乏统一的取向；而双粒子宽条带的取向则与振荡方向垂直。

在第二列（对应于 $A_r/D \approx 1.0$）中，双粒子宽条带始终稳定，但如果 ϕ足够小，则并不总是需要它们来拟合图案。然而，根据初始条件和局部粒子数密度，可能会形成并保持某些双粒子宽条带的稳定性，如图 14(h)所示。对于更高的 ϕ 值，这些带状结构越来越常见，因为需要它们在区域内以其优选间距拟合图案。 ϕ 值越大，产生的带状结构就越

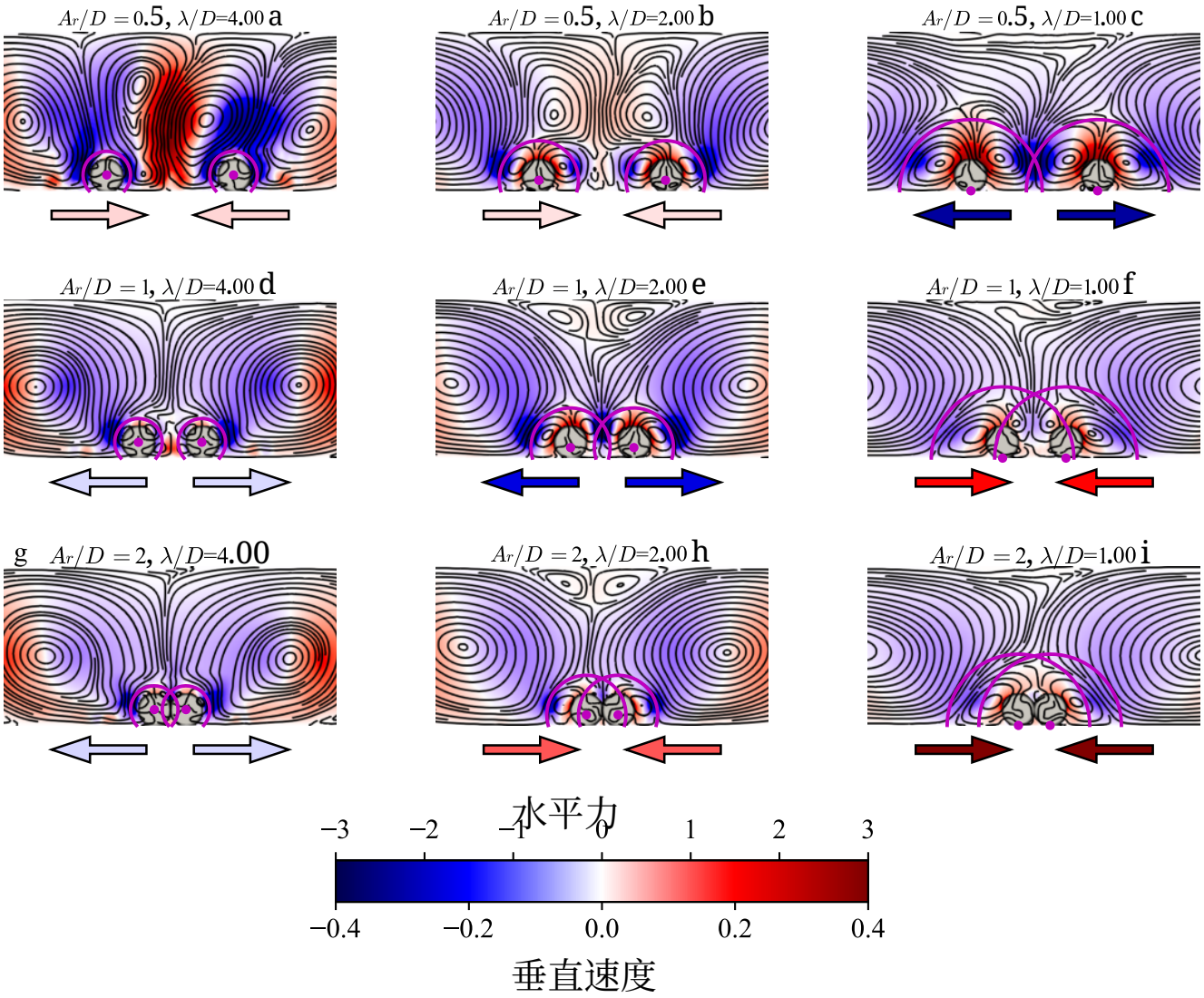

图 11：（彩色在线版）数值模拟所得平均流场的侧视图，与图 10 类似，此处展示两条颗粒链。链间距 λ/D 和相对位移长度 A_r/D 均有所变化。箭头表示作用于颗粒的（无量纲）水平流体动力的方向，箭头颜色与这些力的大小成正比。补充材料[8]中提供了更全面的概览，其中包含 λ/D 的其他取值。

宽，当 $A_r/D \gtrsim 0.7$ 时。

在第三列（对应 $A_r/D \approx 2.0$）中，对于此处考虑的 ϕ 取值，双粒子宽条带始终稳定，并且总是需要以其优选间距形成图案。条带的典型宽度随 ϕ 增大。然而，对于较小的ϕ取值，例如图 14(i)所示的情况，我们预计会出现单粒子厚链与双粒子宽带的组合。实际观察到的却是带状结构与高迁移率孤立颗粒的组合。因此，缺陷比例较高，正如图 9(a)中该参数空间范围所示。

我们可以根据两个孤立颗粒之间的相互作用来理解单粒子厚链的缺失——

颗粒。当这种相互作用足够强时，它们会形成一对，彼此之间留有小间隙，并垂直于振荡方向排列。这样的颗粒对是较长链的构成单元[3,9]。对于 $A_r/D \lesssim 1$，颗粒之间的平衡距离通常较小（$\propto (\delta/D)^{1.5}$）。然而，随着 $A_r/D \gtrsim 2$，间距会迅速增大（$\propto (A_r/D)^3$），这是由于涡量平流使涡量远离颗粒对。这会减弱颗粒之间的瞬时相互作用，并使成对构型变得不稳定[3]。这一机制在图 13 的参数空间中为 $1 < A_r/D < 2$之间增添了一个平滑的过渡区域。在此过渡区域之上，颗粒对之间的相互作用过弱，无法维持单粒子厚链的稳定。

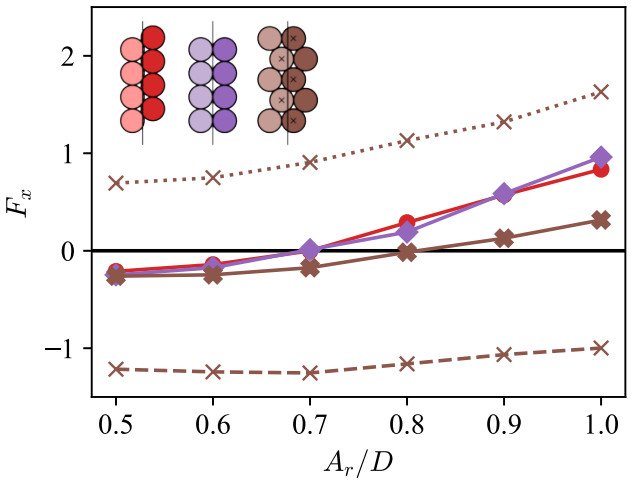

图12：（在线彩色）不同构型（以不同颜色表示）和不同 A_r/D 值下，每个颗粒沿振荡方向所受流体动力的平均值 F_x（以 $\rho_f\,(\pi D^3/6)\,A\omega^2$ 无量纲化）。黑色竖线表示各构型的中心线。正值对应指向构型中心线的（吸引）力，因此对应稳定构型。负值对应远离构型中心线的（排斥）力，因此对应不稳定构型。请注意，棕色构型中的颗粒还分为内侧粒子（带叉号）和外侧粒子（无标记），这些颗粒所受的平均力分别以虚线和点线表示。

需要指出的是，当 A_r/D 进一步增大，超过图 13 中上方的黑色实线（方程（20））时，上述机制便不再适用。在该区域内，不存在单粒子厚链，因为按照其优选间距排列时，它们无法容纳在区域内。相反，为了使图案能够适应区域，多颗粒宽带状结构会形成，并且这些带状结构是稳定的。

图 13 进一步展示了先前研究中不同数据点在参数空间中的位置。我们的结果与文献中的现有数据吻合良好。下方实线黑色曲线以下的所有黑色符号都对应单粒子厚链，这与参数空间中的区域以及我们自己的实验观察一致。对于位于 $\phi \approx 0.1$ 的两个朝右黑色三角形，Mazzuoli 等 [15] 报告了多颗粒宽带状结构，这再次与我们对参数空间的预测一致。

尽管我们在图 13 中提出的参数空间区域得到了先前研究的支持，但由于其他方面的差异，我们无法与实验数据进行一一对比。这些差异包括颗粒-流体密度比、颗粒-底面摩擦的相对重要性以及底面的光滑程度。

例如，最右侧的黑色符号对应于 Mazzuoli 等人 [15] 进行的一项数值模拟，其中颗粒在一层其他颗粒的顶部移动。

VI. 结论

本文介绍了密集球形颗粒在振荡流中的自组织过程：颗粒形成单粒子厚链或多颗粒宽带状结构，且排列方向垂直于振荡方向。我们通过振荡箱实验展示了图案形成的不同阶段，包括图案沿振荡方向的膨胀与收缩。这些现象分别归因于链之间的排斥相互作用和吸引相互作用。

我们进一步表明，平衡链间距是由流体动力相互作用决定的本征量，其特征由 A_r/D刻画。相反，颗粒覆盖率 ϕ 决定了链或带状结构的宽度。利用链间本征间距和限域特性，我们准确预测了链到条带的转变。

直接数值模拟完整解析了颗粒周围的流动，结果表明，时间平均流中的内涡与外涡相互作用，决定了链之间的相互作用。平衡间距源于长程吸引力与短程排斥力之间的平衡，这两种力均归因于稳态流中的涡旋。当 $A_r/D \gtrsim 0.7$时，我们的模拟还揭示了带状结构得以稳定的物理机制。当链彼此足够接近时，链间的内涡会完全受到抑制，因此双带周围的平均流场与单链周围的流场相似。

总之，我们的研究深入阐明了球形颗粒在振荡流中的自组织成图案过程。结合实验和数值模拟的结果，我们确定了控制系统平衡态的关键无量纲参数。我们的分析全面概述了参数空间，划分出不同区域，并解释了它们之间的转变。本研究所得见解为理解流体浸没图案的特征及其背后的物理过程提供了有价值的信息。此外，这些发现可用于开发新方法，通过外部强迫条件或限域来控制和操纵含颗粒流。此外，观察到的多种图案展现了流体动力相互作用通过长程吸引力为颗粒集合施加软限域边界的潜力。

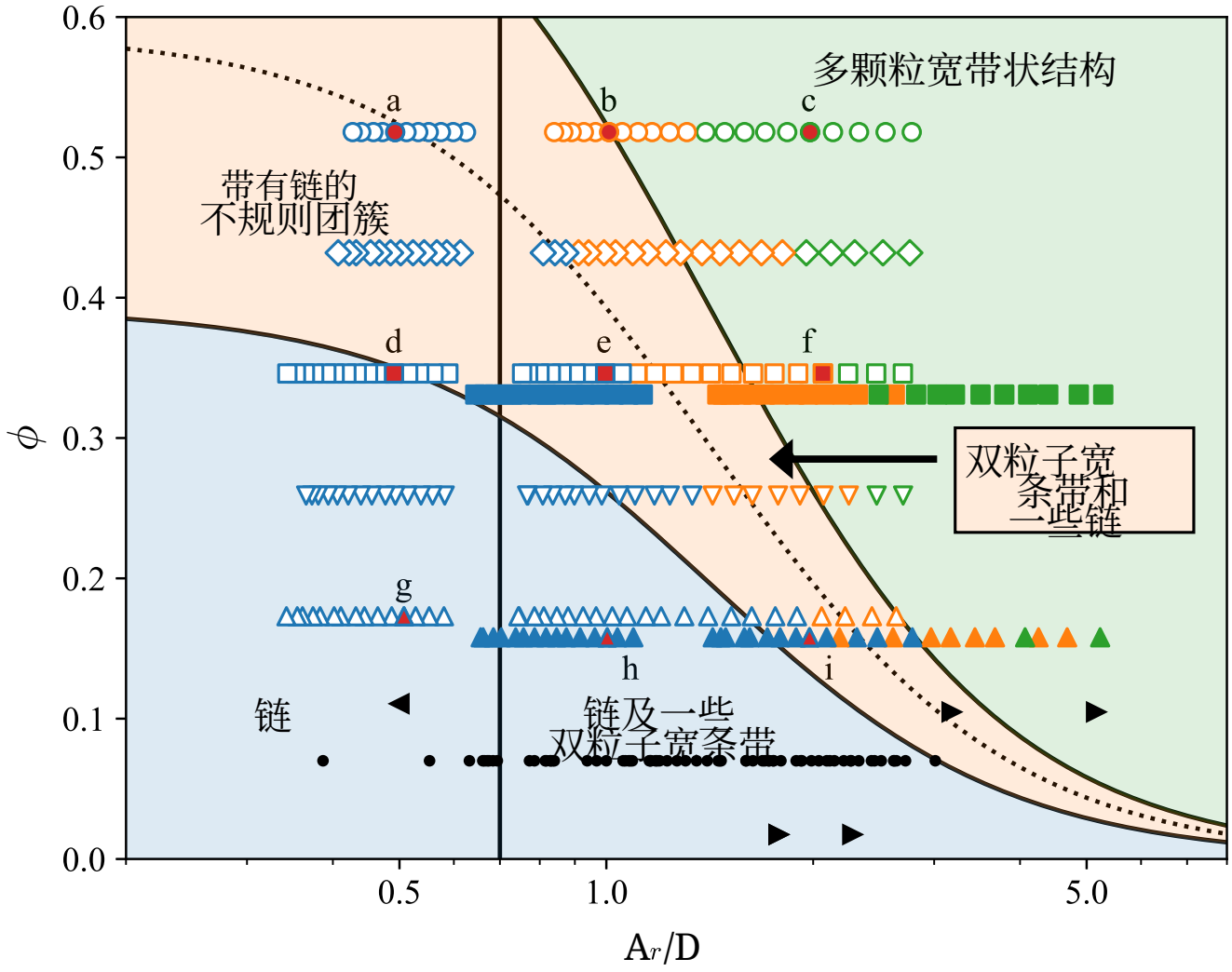

图 13：（网络版为彩色）所有实验数据在 $(A_r/D,\ \phi)$ 参数空间中的位置。根据占比最大的部分对数据进行着色：F_2（蓝色）、F_4（橙色）或 F_6（绿色）。竖直黑线对应 $A_r/D = 0.7$，黑色实线曲线对应 $\phi[2 + (A_r/D)^2] = [\pi/4, \pi/2]$（见方程（19）和（20））。黑色虚线位于两个转变之间的中点。为便于辨认，ϕ 的两个最低取值（B1 和 B2，实心符号）对应的数据略微向较低的 ϕ 值偏移。黑色符号表示先前研究中的数据：Wunenburger、Carrier 和 Garrabos[1]（圆点），Klotsa 等[9]（左指三角形），以及 Mazzuoli 等[15]（右指三角形）。红色符号（标记为 a-i）表示图 14 所示的情况。

致谢

我们感谢 NWO 提供 Snellius 上的计算资源（资助编号 EINF-2132）。我们还感谢 Wim-Paul Breugem（代尔夫特理工大学）提供数值代码供我们使用。最后，我们感谢 Janne-Mieke Meijer 和 Wouter Ellenbroek（均来自埃因霍温理工大学）就我们的实验结果和分析方法进行了富有成效的讨论。

数据可用性声明

支持本研究结论的数据（即将）在 4TU.ResearchData 上公开开放，网址为 http://doi.org/10.4121/9c7664af-4684-43cf-95cc-a3fba6951e23

附录 A：颗粒-底面摩擦的作用

我们使用 Breugem 数值代码研究颗粒-底面摩擦对充满黏性流体的振荡箱中单个颗粒流向运动的影响

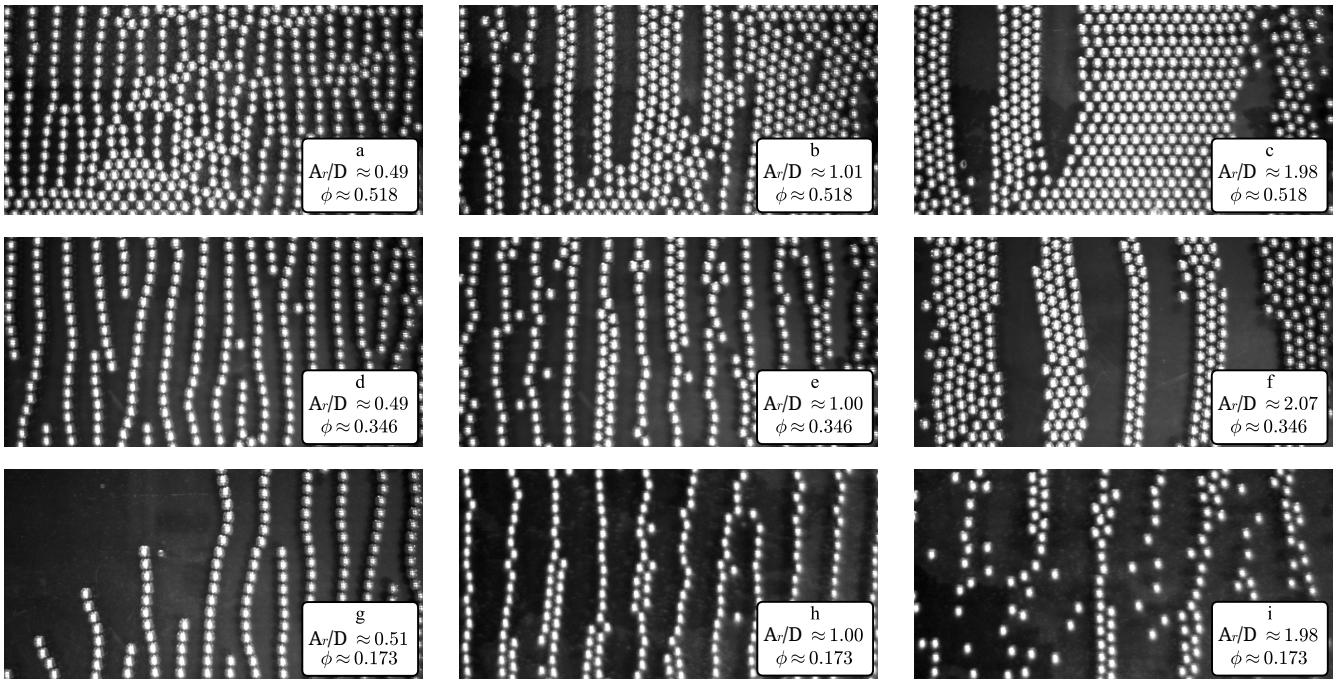

图 14：概述了我们的实验中图 13 红点所示九种情形下的图案。

该代码也用于揭示链状相互作用背后的物理机制，详见第 IV 节。本节中，将一个球形颗粒置于横向尺寸为 20×10 、高度为 5 个直径的双周期盒内。流动在均匀笛卡尔网格上求解，网格间距为 $D/24$ ，颗粒则采用浸入边界法进行模拟。我们还设定 $A/D=0.909$、$\delta/D\approx0.0265$、 $\Gamma=0.75$ 和 $s=7.5$，即尽可能贴近满足 $A_r/D=0.5$ 的实验条件。库仑摩擦系数 μ_c 的取值在 0.0 至 0.5 之间变化。

图 15 展示了 μ_c 取三个不同值时，系统达到准稳态且瞬态过程消失后，第 20 个振荡周期内速度随时间的变化。速度以箱体的速度振幅 $2\pi Af$ 归一化，时间以振荡频率 f 归一化，因此一个时间单位对应一个振荡周期。

在不存在颗粒-底面摩擦的情况下（$\mu_c=0.0$，见图 15(a)），以点划线曲线表示的颗粒旋转几乎为零。流体动力学相互作用会使颗粒轻微旋转，但这些影响足够小，对整体运动而言可以忽略不计（按图15所用的尺度约为 0.01）。

当库仑摩擦系数略大时，例如图15(b)中的 $\mu_c=0.10$ ，颗粒与底面之间的摩擦会同时影响平动和转动。颗粒在整个振荡运动过程中持续转动，如点划线曲线的非零值所示。然而，转动速度不足以与底面速度相匹配，后者由实线曲线表示。当底面速度超过颗粒与底面接触部分的速度时，库仑摩擦会使颗粒产生正加速度。该力与 μ_c 成正比，但与颗粒和底面之间的速度差无关。因此，点划线曲线的斜率（即加速度）保持不变，直到点划线曲线与实线曲线相交、两者速度相匹配。此后，过程反向。这种颗粒运动通常称为滑移滚动。

当库仑系数足够大时，例如 $\mu_c=0.2$ 在图15(c)中的情况，颗粒在整个振荡运动过程中均无滑动地滚动，因此点划线曲线与实线曲线重合。请注意，我们的实验属于这一状态。进一步增大 μ_c 不会增加摩擦力，也不会影响颗粒运动。最后值得指出的是，随着摩擦作用变得更加显著，颗粒-流体相对速度（虚线曲线）的振幅会减小。

图16展示了我们的数值模拟结果，其中 A_r/A 是 μ_c/Γ 的函数； μ_c/Γ决定了颗粒-底面摩擦[3]的相对重要性。当 μ_c/Γ 从0.0增至0.27时，颗粒的运动会平滑地从 $A_r/A\approx0.778$（颗粒在底面上滑动）过渡到 $A_r/A\approx0.565$（颗粒无滑动地滚动）。在中间取值下，颗粒会发生滑动滚动。

颗粒要无滑动滚动，库仑

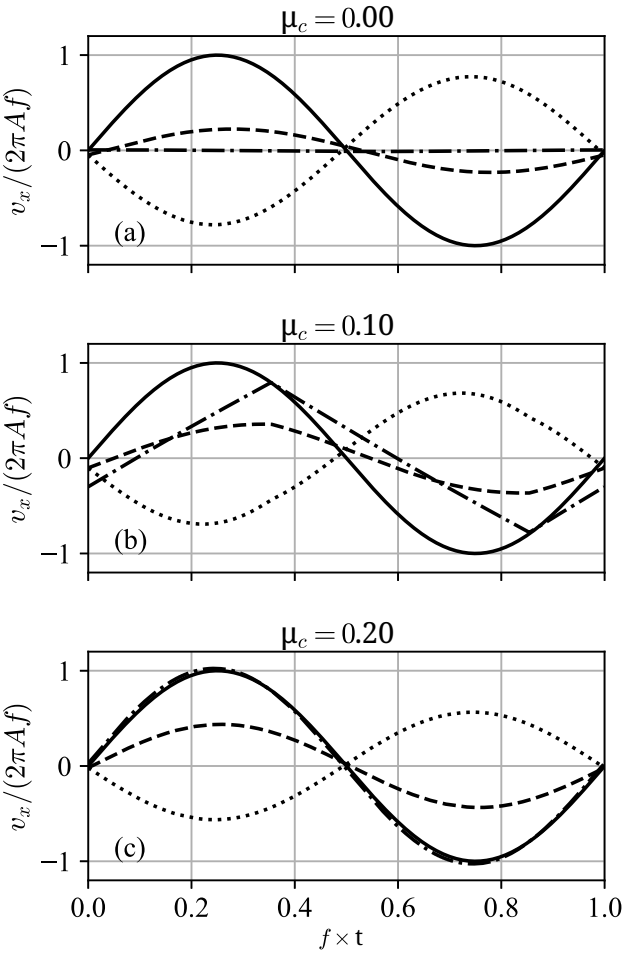

图15：通过对振荡箱内单个球形颗粒进行数值模拟得到的速度随时间变化情况。数据以箱体的速度振幅归一化，并展示了库仑摩擦系数 μ_c取三个不同值时的结果。不同线条分别表示箱体的速度（实线）、实验室参考系中的颗粒速度（虚线）、颗粒相对于箱体的速度（点线），以及颗粒与底部接触点的速度（点划线）。模拟采用 $A/D = 0.909$、 $\delta/D \approx 0.0265$、 $\Gamma = 0.75$和$s = 7.5$进行。

力必须始终大于基于颗粒惯性的力 $\boldsymbol{F}_c$ （见式（10））。这里我们假设颗粒旋转完全由颗粒-底面摩擦引起。因此，无滑动滚动的条件为

$$\frac{\mu_c}{\Gamma} \geq \frac{2}{5}\frac{s}{s-1}\frac{A_r}{A}, \gtrsim \frac{4s/5}{\sqrt{(9\delta/D)^2(2\delta/D+1)^2 + (9\delta/D+14s/5+1)^2}}, \tag{A1}$$

这里使用了 BBO 方程的解（方程（12））。对于本附录中讨论的模拟，当 $\delta/D \approx 0.0265$时，我们得到 $\mu_c/\Gamma \gtrsim 0.270$，如图16所示。方程（A1）中的条件进一步证实，比值 μ_c/Γ 决定了颗粒-底面摩擦的大小，进而决定颗粒旋转。

最后，我们在图16中对涵盖所有实验数据的区域进行了阴影标示。我们估计，玻璃底面与不锈钢颗粒之间界面的 $\mu_c \approx 0.3$ [5]。尽管实验中的 μ_c 值可能略大于0.3，但我们的结果仍然不变，因为它不会影响颗粒-流体运动的相对状态。 A_r/A 的值在高于 $\mu_c/\Gamma \approx 0.27$后保持恒定。尽管如此，图16强调了在实验中保持 Γ （近似）恒定的重要性。如果改变 Γ ，使得 $\mu_c/\Gamma \lesssim 0.27$，颗粒运动将从无滑动滚动转变为滑动滚动或滑动，具体取决于 μ_c/Γ的值。

根据图16中的阴影区域，我们可以得出结论：在我们的实验中，颗粒-底面摩擦的相对重要性保持不变，颗粒始终滚动而不滑动。因此，保持 μ_c/Γ 不变会使 A_r/A 保持恒定。

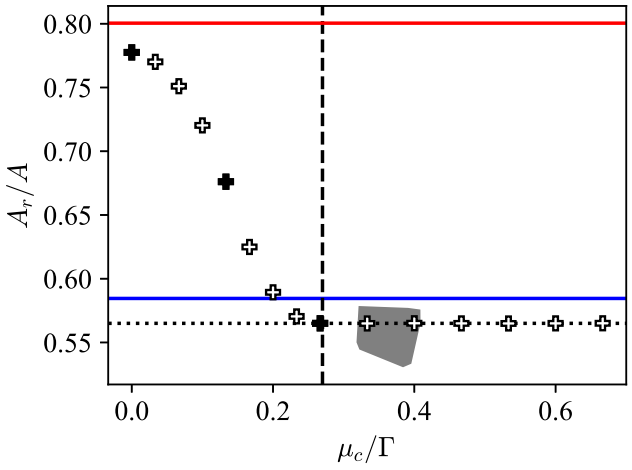

图16：在振荡箱中单个球形颗粒的数值模拟所得比值 A_r/A 。三个实心符号对应图15所示的情况。我们的实验数据落在灰色区域内，其中假设 $\mu_c \approx 0.3$。 $A_r/A = 0.565$ 处的点线表示常数值

A_r/A 在 $\mu_c/\Gamma > 0.27$条件下的取值。$A_r/A \approx 0.80$ 和 $A_r/A \approx 0.58$ 处的红线和蓝线分别表示 Basset-Boussinesq-Oseen（BBO）方程的解，见方程（9）和（12）。竖直虚线对应 $\mu_c/\Gamma = 0.27$ （见方程（A1））；超过该值后，颗粒在整个振荡运动过程中都会滚动。

[1]R.Wunenburger、V. Carrier 和 Y.Garrabos，“周期性阶

由水中的重珠二维组装体经水平振动诱发，”《流体物理学》**14**，2350–2359（2002）。[2]O. Dangles、T. Steinmann、D. Pierre、F. Vannier 和 J. Casas，“器官形状和受体排列对蟋蟀尾须系统设计的相对贡献”，《比较生理学杂志A辑》**194**，653–663（2008）。[3]T. J. J. M. Van Overveld、M. T. Shajahan、W.-P. Breugem、H. J. H. Clercx 和 M. Duran-Matute，“充满黏性流体的振荡箱中一对球体的数值研究”，《物理评论：流体》**7**，014308（2022）。[4]T. J. J. M. Van Overveld、W.-P. Breugem、H. J. H. Clercx 和 M. Duran-Matute，“斯托克斯边界层对振荡流中颗粒对动力学的影响”，《流体物理学》**34**，113306（2022）。[5]“摩擦——摩擦系数及计算器”，https://www. engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d_778. html（2004），[访问日期：3月 2023]。[6]D. B. Allan、T. Caswell、N. C. Keim 和 C. M. van der Wel，“soft-matter/trackpy：Trackpy v0.4.2”，（2019）。[7]J. C. Crocker 和 D. G. Grier，“胶体研究的数字视频显微成像方法”，《胶体与界面科学杂志》**179**，298–310（1996）。[8]“参见链接中的补充材料，观看图4的视频；图2的视频请见此链接。”。[9]D. Klotsa、M. R. Swift、R. M. Bowley 和 P. J. King，“振荡流体流动中球体的链形成”，《物理评论E》**79**，021302（2009）。[10]D. Klotsa、M. R. Swift、R. M. Bowley 和 P. J. King，“振荡流体流动中球体的相互作用”，《物理评论E》**76**，056314 2007( )。[11]S. Corrsin 和 J. Lumley，“关于湍流流体中颗粒的运动方程”，《应用科学研究》A辑**6**，114–116（1956）。[12]V. Lotito 和 T. Zambelli，“胶体组装体中的图案检测：分析技术的集合”，《胶体与界面科学进展》**284**，102252（2020）。[13]T. Besseling、M. Hermes、A. Fortini、M. Dijkstra、A. Imhof 和 A. Van Blaaderen，“胶体硬球流体中振荡剪切诱导的三维晶体有序结构”，《软物质》**8**，6931–6939（2012）。[14]W.-P. Breugem，“一种用于含颗粒流完全解析模拟的二阶精度浸入边界法”，《计算物理学杂志》**231**，4469–4498（2012）。[15]M. Mazzuoli、A. G. Kidanemariam、P. Blondeaux、G. Vittori 和 M. Uhlmann，“振荡边界层中沉积物链的形成”，《流体力学杂志》**789**，461–480（2016）。[16]W. Lyne，“波状壁面上的非定常黏性流动”，《流体力学杂志》**50**，33–48（1971）。[17]I. S. Aranson 和 L. S. Tsimring，“颗粒介质中的图案与集体行为：理论概念”，现代物理评论**78**，641（2006）。[18]C. C. Thomas 和 J. P. Gollub，“振动流体层中颗粒团簇的结构与混沌涨落”，《物理评论E》**70**，061305（2004）。[19]G. A. Voth、B. Bigger、M. R. Buckley、W. Losert、M. P. Brenner、H. A. Stone 和 J. P. Gollub，“振动流体中颗粒的有序团簇与动力学状态”，《物理评论快报》**88**，234301（2002）。[20]H. M. Jaeger、S. R. Nagel 和 R. P. Behringer，“颗粒固体、液体与气体”，现代物理评论**68**，1259（1996）。[21]L. Petit 和 B. Noetinger，“宏观分散体系中的剪切诱导结构”，《流变学学报》**27**，437–441（1988）。[22]L. Petit 和 P. Gondret，“交变流动的整流”，《物理学杂志II》**2**，2115–2144（1992）。[23]L. Ouyang、Z. Wu、J. Wang、X. Qi、Q. Li、J. Wang 和 S. Lu，“固含量对锂离子电池正极浆料流变性质和微观结构的影响”，《RSC进展》**10**，19360–19370（2020）。[24]B. Zhang、A. Snezhko 和 A. Sokolov，“通过对活性的时间调制引导活性胶体自组装”，《物理评论快报》**128**，018004（2022）。[25]P. Sánchez、M. R. Swift 和 P. J. King，“阻力的差异影响导致颗粒混合物中形成条纹”，《物理评论快报》**93**，184302（2004）。[26]Z. Xu、L. Wang、F. Fang、Y. Fu 和 Z. Yin，“胶体自组装及其应用综述”，《当代纳米科学》**12**，725–746（2016）。[27]P. Blondeaux，“海浪作用下的沙纹：第一部分——沙纹形成”，《流体力学杂志》**218**，1–17（1990）。[28]D. Zablotsky、E. Blums 和 H. J. Herrmann，“利用多粒子碰撞动力学研究简单剪切下偶极胶体的自组装与流变学”，《软物质》**13**，6474–6489（2017）。[29]N. Riley，“黏性流体中振荡球体的研究”，《力学与应用数学季刊》**19**，461–472（1966）。[30]A. F. Fortes、D. D. Joseph 和 T. S. Lundgren，“球形颗粒床流化的非线性力学”，《流体力学杂志》**177**，467–483（1987）。[31]N. A. Araújo、L. Janssen、T. Barois、G. Boffetta、I. Cohen、A. Corbetta、O. Dauchot、M. Dijkstra、W. Durham、A. Dussutour，等，“通过限域引导自组织”，《软物质》（2023）。