arXiv:2305.01577v1 [math.CO] 2 May 2023

外平面图中的独立集与 4-支配集

Dmitrii Taletskii[1,2,3]

[1] 国立高等经济大学，俄罗斯下诺夫哥罗德603155，大佩乔尔斯卡亚街25/12[2]洛巴切夫斯基下诺夫哥罗德国立大学，俄罗斯下诺夫哥罗德603950，加加林街23号[3]圣彼得堡大学，俄罗斯圣彼得堡199034，大学滨河路7/9 电子邮件：dmitalmail@gmail.com

摘要

我们证明，每个外平面图的独立集数量都大于其 4-支配集的数量。

Key关键词——独立集、支配集、 k-支配集、外平面图

1 引言

本文中我们只考虑简单有限图。设 G 为一个图，其顶点集为 V（G），边集为 E（G）。独立集是 V（G）的两两不相邻子集。对于$k \geq 1$， k-支配集 D_k 是 V（G）的一个子集，使得所有不属于 D_k 的顶点都至少与 D_k中的 k 个顶点相邻。我们分别用缩写“IS”和“k-DS”表示术语“独立集”和“k-支配集”。设 i（G）（分别为 k-DS）表示图 G的所有IS（分别为 k-DS）的数量。用 $\mathfrak{D}_k$（G）表示图 G的所有 k-DS构成的族。

如果一个平面图在平面上有一种嵌入，使得所有顶点都属于其外面的边界，则称该图为外平面图。若外平面图 G 对任意两个不相邻顶点 u、 $v \in V$（G），添加边 $G + uv$后都不再是外平面图，则称其为极大外平面图（或MOP）。众所周知，极大外平面图的每个内面都是一个三角形，并且每个至少有3个顶点的极大外平面图至少有2个度为2的顶点。分别用 $\mathcal{OP}$ 和 $\mathcal{MOP}$ 表示所有外平面图和极大外平面图构成的类。

k支配集的定义意味着，对于任意图 G、任意两个不相邻的顶点$u, v \in V$(G)以及任意整数 $k \geq 1$，都有 ∂_k(G) $\leq \partial_k$($G + uv$)。因此，在所有具有 n 个顶点的图中，完全图 K_n拥有最多的 k-独立集。文献 [1] 针对 $k = 1$ 、文献 [2] 针对 $k \geq 2$，分别描述了具有极值数 k 支配集的树。在文献 [3] 和 [4] 中，对于每个 $k \geq 2$，都给出了具有 n 个顶点的图中 k 支配独立集数量的新上界。

空图 nK_1 在所有具有 n 个顶点的图中拥有最多的独立集。Moon 和 Moser [5] 描述了具有 n 个顶点且极大独立集（即独立的 1- 支配集）数量达到最大可能值的图。在文献 [6] 中，针对所有 $n \geq 5$，描述了在所有具有 n 个顶点的极大外平面图中，独立集数量达到最大值和最小值的图 $H_n \in \mathcal{MOP}$ 和$H'_n \in \mathcal{MOP}$。

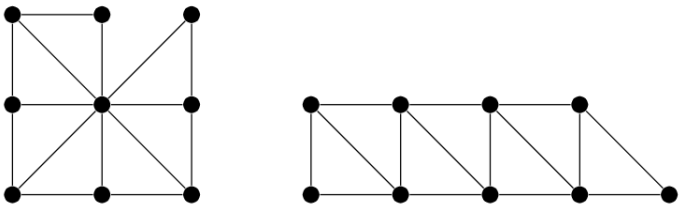

图 1：图 H'_9 和 H_9

本文的主要结果如下:

定理 1. 对于每个外平面图 G，我们有 $i(G) > \partial_4(G)$。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍一些图论术语，并给出一个极大外平面图划分。第 3 节证明定理 1。第 4 节探讨定理 1 的一种可能推广，并为树类得到一个类似结果。

2 预备知识

2.1 基本术语

树是连通无环图，叶是树中度为 1 的顶点。树中的支撑顶点是至少与一个叶相邻的顶点。连通图的直径是其顶点之间可能的最大距离。长度等于图的直径的简单路径称为直径路径。显然，树中任一直径路径的端点都是叶。

对于图 $G \in \mathcal{OP}$，我们考虑弱对偶图 $T(G)$，其中 $T(G)$ 的顶点与 G 的内部面相对应，且当且仅当相应的面有一条公共边时，两个顶点相邻。众所周知，如果 $G \in \mathcal{MOP}$，那么 $T(G)$ 是一棵次三次树。

设 G 是一个图，$U \subset V(G)$ 是其顶点子集。设 $G \setminus U$ 是 G 的导出子图，其顶点集为 $V(G) \setminus U$。

如果极大外平面图的一个内面含有一个度为 2 的顶点，则称该内面为端面。注意，极大外平面图 G 的面 f 是端面，当且仅当 T（G）中的对应顶点的度至多为 1。若图 G 中包含面 f 的所有顶点和边均属于 G，则称图 G 包含面 f。

设 G 的两个相邻内面 f 和 f' 有一条公共边 uv。记 $G[f;\ f']$ 为 G 的按包含关系极大的子图，它包含 f，不包含 f'，且 uv 是其外边。容易看出，若 $G \in \mathcal{MOP}$，则 $G[f;\ f'] \in \mathcal{MOP}$。

2.2 独立集与4-支配集

设 G 为一个图，且 $u, v \in V(G)$。令 $i(G, u^+)$（分别地，$i(G, u^-)$）表示 G 的独立集中包含（分别地，不包含）u 的独立集数。我们用 $i(G, u^+, v^+)$ 表示 G 中满足 $u, v \in I$ 的独立集数

并以类似方式表示 $i(G,u^+,v^-)$、 $i(G,u^-,v^+)$ 和 $i(G,u^-,v^-)$ 的值。显然，对于任意顶点 $u,v\in V(G)$，有

$$i(G)=i(G,u^+,v^+)+i(G,u^+,v^-)+i(G,u^-,v^+)+i(G,u^-,v^-).$$

此外， $i(G,u^+,v^+)=0$，当且仅当 $uv\in E(G)$。

设 $\partial_4(G,u^+)$（分别地， $\partial_4(G,u^-)$）表示图 G 中包含（分别地，不包含） u的 4-支配集的数量。类似地，我们用 $\partial_4(G,u^+,v^+)$、 $\partial_4(G,u^+,v^-)$、 $\partial_4(G,u^-,v^+)$ 和 $\partial_4(G,u^-,v^-)$ 表示相应的值。同样，对于任意顶点 $u,v\in V(G)$，有

$$\partial_4(G)=\partial_4(G,u^+,v^+)+\partial_4(G,u^+,v^-)+\partial_4(G,u^-,v^+)+\partial_4(G,u^-,v^-).$$

注意，对于任意图 G， $\partial_4(G,u^+,v^+)>0$。容易看出， $\partial_4(G,u^-,v^+)>0$，当且仅当 $deg(u)\geq 4$。此外， $\partial_4(G,u^-,v^-)>0$，当且仅当 $\min(deg(u)\ deg(v))\geq 5$，或者 $uv\notin E(G)$ 且 $\min(deg(u)\ deg(v))\geq 4$。

2.3 MOP-划分

考虑图 $G\in\mathcal{MOP}$ 及其边 $uv\in E(G)$。令 G_L、$G_R\in\mathcal{MOP}$ 为 G 中按包含关系极大的两个子图，使得 $E(G_L)\cap E(G_R)=uv$，且 uv 同时是 G_L和 G_R中的外边。显然，如果 uv 不是 G 中的外边，那么 G_L 和 G_R 都至少有 3 个顶点（否则其中一个有 2 个顶点，而另一个与 G 重合）。称三元组 $(G_L,\ G_R,\ uv)$为 G 的 MOP-划分。对于给定的 MOP-划分 $(G_L,\ G_R,\ uv)$，我们采用以下记号

$$\mathcal{I}_{00}=i(G_R,u^-,v^-),\ \mathcal{I}_{01}=i(G_R,u^-,v^+),\ \mathcal{I}_{10}=i(G_R,u^+,v^-).$$

由于 $i(G_R,\ u^+,\ v^+)=0$，我们有 $i(G_R)=\mathcal{I}_{00}+\mathcal{I}_{01}+\mathcal{I}_{10}$。此外，如果 G_R 至少有 3 个顶点，那么 $\mathcal{I}_{00}>\max(\mathcal{I}_{01},\ \mathcal{I}_{10})$。

现在我们为 4-支配集引入一个类似的概念。对于图 G 的给定 MOP-划分 $(G_L,\ G_R,\ uv)$，令 $\mathcal{D}_{11}=\partial_4(G_R,\ u^+,\ v^+)$。记 $\mathcal{D}^k_{01}$ 为图 $G_R\setminus u$ 的 4-支配集 D' 的数量，其中 $v\in D'$，且顶点 u 在 G 中有至少 $\max(0,\ 4-k)$ 个邻点来自 $D'\setminus v$。换言之，$\mathcal{D}^k_{01}$ 是相对于顶点 u 而言， G_R 的“几乎 4-支配”集 D' 的数量。以与 $\mathcal{D}^k_{01}$ 相同的方式定义 $\mathcal{D}^k_{10}$。最后，令 $\mathcal{D}^{kl}_{00}$ 为图 $G_R\setminus\{u,v\}$ 的 4-支配集 D'' 的数量，使得在图 G_R 中，顶点 u 和 v 分别有至少 $\max(0,\ 4-k)$ 个和 $\max(0,\ 4-l)$ 个邻点来自 D''。

根据 $\mathcal{D}^k_{01}$、 $\mathcal{D}^k_{10}$ 和 $\mathcal{D}^{kl}_{00}$ 的定义，可立即得出，对于所有 $1\leq k'\leq k$ 和$1\leq l'\leq l$，均有 $\mathcal{D}^{k'}_{01}\leq\mathcal{D}^k_{01}$、 $\mathcal{D}^{l'}_{10}\leq\mathcal{D}^l_{10}$ 和 $\mathcal{D}^{k'l'}_{00}\leq\mathcal{D}^{kl}_{00}$。现在我们再证明几个类似的性质。

引理 1. 设 $G\in\mathcal{MOP}$。对于给定的 MOP-划分 (G_L,G_R,uv)，以下结论成立：

1. 对所有 k、$l\geq 0$，我们有 $\mathcal{D}_{11}\geq\max(\mathcal{D}^k_{10},\mathcal{D}^k_{01})$，且 $\min(\mathcal{D}^k_{10},\mathcal{D}^k_{01})\geq\mathcal{D}^{kl}_{00}$.2。2. 如果 $deg_{G_R}(u)\geq 2$，那么 $2\cdot\mathcal{D}^3_{10}\geq\mathcal{D}^4_{10}$ 且 $2\cdot\mathcal{D}^3_{01}\geq\mathcal{D}^4_{01}$。3. 如果 $deg_{G_R}(u)=3$，那么 $3\cdot\mathcal{D}^2_{01}\geq\mathcal{D}^3_{01}$。

此外，如果 $deg_{G_R}(u)\geq 4$，那么 $2\cdot\mathcal{D}^2_{01}\geq\mathcal{D}^3_{01}$。

证明。命题 1。我们证明，对于所有 $k\geq 0$，不等式 $\mathcal{D}_{11}\geq\mathcal{D}^k_{10}$ 均成立。考虑函数

$$F:\mathfrak{D}_4(G_R\setminus v)\longrightarrow\mathfrak{D}_4(G_R),$$

它将 D $G_R\setminus v$ 的一个 4-支配集映射为 $D\cup\{v\}$ G_R的一个 4-支配集。显然， F是单射的，因此$\partial_4(G_R\setminus v)\leq\partial_4(G)$，这就得到了该不等式。使用相同的方法，很容易证明不等式 $\mathcal{D}_{11}\geq\mathcal{D}^k_{01}$以及 $\min(\mathcal{D}^k_{10},\mathcal{D}^k_{01})\geq\mathcal{D}^{kl}_{00}$。

陈述 2。不等式 $deg_{G_R}(u) \geq 2$ 意味着子图 G_R 至少有 3 个顶点，因此 $deg_{G_R}(v) \geq 2$。我们将 w 记作 u 和 v 的公共邻点，使得 $w \in V(G_R)$（由于 uv 是 $G_R \in \mathcal{MOP}$ 的外边，因此恰好存在这样一个顶点）。我们的目标是证明$\mathcal{D}_{10}^4 - \mathcal{D}_{10}^3 \leq \mathcal{D}_{10}^3$。左侧等于图 $G_R \setminus v$ 的 4-支配集数量，其中不包含来自 $N_{G_R}[u] \setminus v$的顶点。右侧等于同一图的 4-支配集数量，其中至少包含集合 $N_{G_R}[u] \setminus v$中的 1 个顶点，因此该不等式成立。使用相同的方法，很容易证明 $2\mathcal{D}_{10}^3 \geq \mathcal{D}_{10}^4$。

陈述 3。根据定义， $\mathcal{D}_{01}^2$ 是 $G_R \setminus u$ 的 4-支配集数量，其中至少包含集合 $N_{G_R}[u] \setminus v$ 中的两个顶点。因此，差值 $\mathcal{D}_{01}^3 - \mathcal{D}_{01}^2$ 等于图 $G_R \setminus u$ 的 4-支配集数量，其中恰好包含集合 $N_{G_R}[u] \setminus v$ 中的一个顶点。令 $N_{G_R}[u] \setminus v = \{w_1, \dots w_s\}$，其中 $s \geq 2$。若 $s = 2$，则同时包含顶点 w_1 和 w_2 的 4-支配集数量至少是包含一个固定顶点的 4-支配集数量的一半，由此得到不等式 $\mathcal{D}_{01}^3 - \mathcal{D}_{01}^2 \geq 2 \cdot \mathcal{D}_{01}^2$。若 $s \geq 3$，则容易看出，恰好包含集合 $N_{G_R}[u] \setminus v$ 中一个顶点的 4-支配集数量小于至少包含两个顶点的 4-支配集数量，因此 $\mathcal{D}_{01}^3 - \mathcal{D}_{01}^2 \geq \mathcal{D}_{01}^2$，证毕。 □

3 定理 1 的证明

若图 $G \in \mathcal{MOP}$ 满足 $i(G) \leq \partial_4(G)$，且对于任意满足 $|V(G')| < |V(G)|$ 的外平面图 G'，都有 $i(G') > \partial_4(G')$，则称图 $G \in \mathcal{MOP}$ 为临界图。本节将证明不存在临界图，因此定理 1 成立。只需考虑极大外平面图，因为对于每个图 $G_0 \in \mathcal{OP}$，都存在一个图 $G \in \mathcal{MOP}$，使得 G_0 是 G 的生成子图，并且满足不等式 $i(G_0) > i(G)$ 和 $\partial_4(G_0) \leq \partial_4(G)$。

因此，我们考虑一个图 $G \in \mathcal{MOP}$ 及其弱对偶图 $T(G)$（提醒一下， $T(G)$ 是一棵次三次树）。设 $x_1x_2 \dots x_k$ 是 $T(G)$ 中某条直径路径。若 $k \leq 3$，则在同构意义下只有 3 种可能的极大外平面图，很容易验证它们都不是临界图。因此，我们假设 $k \geq 4$。

引理2. 若图 $G \in \mathcal{MOP}$ 有一条边 uv，使得 $deg(u) = 2$ 且 $deg(v) = 3$，则 G 不是临界的。

证明. 由于 $G \in \mathcal{MOP}$，顶点 u 和 v 的唯一公共邻点是 a，而顶点 v 和 a 的唯一公共邻点是 b，而非 u。令 $G_1 = G \setminus u$ 和 $G_3 = G \setminus \{u, a, v\}$。那么

$$i(G) = i(G, u^-) + i(G, u^+) = i(G_1) + i(G_3).$$

现在我们证明

$$\partial_4(G) - \partial_4(G_1) \leq \partial_4(G_3).$$

差值 $\partial_4(G) - \partial_4(G_1)$ 等于图 G 的 4-支配集 D 的数量，其中 $D \setminus u$ 不是图 G_1 的 4-支配集。由于 v 属于 G 和 G_1 的每个 4-支配集，当且仅当 $a \notin D$ 且集合 $N(a) \setminus \{u, v\}$ 中恰有两个顶点属于 D 时，这种情况才可能发生。令 $\mathfrak{D}'_4(G_1)$ 表示 G 的 4-支配集 D' 所成的族，其中 $D' \setminus u$ 是图 G_1 的 4-支配集。考虑函数

$$F : (\mathfrak{D}_4(G) \setminus \mathfrak{D}'_4(G_1)) \longrightarrow \mathfrak{D}_4(G_3),$$

使得 $F(D) = (D \cup \{b\}) \setminus \{u, v\}$。容易看出 F 是单射的，因为如果 $D', D'' \in \mathfrak{D}_4(G) \setminus \mathfrak{D}'_4(G_1)$ 是 $\mathfrak{D}_4(G)$ 的两个不同的 4- 支配集，那么集合 $D' \setminus \{u, v, b\}$ 和 $D'' \setminus \{u, v, b\}$ 也不同。因此，

$$\partial_4(G) \leq \partial_4(G_1) + \partial_4(G_3) < i(G_1) + i(G_3) = i(G)$$

且 G 不是临界的。 □

引理2意味着， $T(G)$的每个支撑顶点的度为 3。特别地， $deg(x_2) = 3$和 f_2 与某些端面 f_1 和 f_1'相邻。在本章余下部分中，我们分别用 $a_1a_2b_1$、 $a_2a_3b_2$、 $b_1b_2a_2$ 和 $b_1b_2c_1$ 表示这些面 f_1、f_1'、 f_2 和 f_3 。

引理3. 如果 $deg(x_2) = deg(x_3) = deg(x_2') = 3$，那么 G 不是临界的。

证明. 假设 b_2c_1 是面 f_3 和 f_4的公共边。令 $G_L = G[f_3; f_4]$。考虑 G的 (G_L, G_R, b_2c_1)-划分。由于 G 是临界的，我们有 $i(G_R) > \partial_4(G_R)$。我们的目标是找到一个常数 $c > 0$，使得 $i(G) \geq c \cdot i(G_R)$ 且 $\partial_4(G) \leq c \cdot \partial_4(G_R)$。容易验证以下结论成立：

$$i(G) = i(G_L) \cdot \mathcal{I}_{00} + i(G_L, c_1^+) \cdot \mathcal{I}_{01} + i(G_L, b_2^+) \cdot \mathcal{I}_{10} = 29 \cdot \mathcal{I}_{00} + 10 \cdot \mathcal{I}_{01} + 10 \cdot \mathcal{I}_{10}.$$

由于 $\mathcal{I}_{00} \geq \max(\mathcal{I}_{01}, \mathcal{I}_{10})$，我们有

$$i(G) > 16 \cdot (\mathcal{I}_{00} + \mathcal{I}_{01} + \mathcal{I}_{10}) = 16 \cdot i(G_R).$$

此外，

$$\begin{aligned}\partial_4(G) &= \partial_4(G, b_2^+, c_1^+) + \partial_4(G, b_2^+, c_1^-) + \partial_4(G, b_2^-, c_1^+) + \partial_4(G, b_2^-, c_1^-) \\ &= 5 \cdot \mathcal{D}_{11} + (2 \cdot \mathcal{D}_{10}^4 + \mathcal{D}_{10}^3) + (2 \cdot \mathcal{D}_{01}^4 + \mathcal{D}_{01}^3) + (\mathcal{D}_{00}^{44} + \mathcal{D}_{00}^{33}).\end{aligned}$$

由引理 1，我们有 $\partial_4(G) \leq 13 \cdot \mathcal{D}_{11} < 16 \cdot \partial_4(G_R)$。因此， G 不是临界的。 □

引理4. 如果 $deg(x_3) = 3$，且 f_3 与某个端面 f_2'相邻，那么 G 不是临界的。

证明。将面 f_4 记为 $c_1b_2c_2$，并令 $G_L = G[f_3; f_4]$。考虑图 G 的 (G_L, G_R, b_2c_1)-划分和图 $G_2 = \{a_1, a_3\}$ 的 (G_L', G_R, b_2c_1)-划分，其中 $G_L' = G_L \setminus \{a_1, a_3\}$。同样，我们的目标是找到一个常数 $c > 0$，使得 $i(G) \geq c \cdot i(G_2)$ 且 $\partial_4(G) \leq c \cdot \partial_4(G_2)$。我们有

$$i(G) = i(G_L) \cdot \mathcal{I}_{00} + i(G_L, c_1^+) \cdot \mathcal{I}_{01} + i(G_L, b_2^+) \cdot \mathcal{I}_{10} = 12 \cdot \mathcal{I}_{00} + 5 \cdot \mathcal{I}_{01} + 4 \cdot \mathcal{I}_{10};$$

$$i(G_2) = i(G_L') \cdot \mathcal{I}_{00} + i(G_L', c_1^+) \cdot \mathcal{I}_{01} + i(G_L', b_2^+) \cdot \mathcal{I}_{10} = 5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}.$$

由于 $\mathcal{I}_{00} \geq \max(\mathcal{I}_{01}, \mathcal{I}_{10})$，因此有 $i(G) > \frac{16}{7} \cdot i(G_2)$。此外，

$$\partial_4(G) = 3 \cdot \mathcal{D}_{11} + (2 \cdot \mathcal{D}_{10}^3 + \mathcal{D}_{10}^2) + (\mathcal{D}_{01}^4 + \mathcal{D}_{01}^3) + \mathcal{D}_{00}^{32};$$

$$\partial_4(G_2) = 2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{10}^3 + \mathcal{D}_{01}^3 + \mathcal{D}_{00}^{22}.$$

现在我们证明

$$3 \cdot \mathcal{D}_{11} + (2 \cdot \mathcal{D}_{10}^3 + \mathcal{D}_{10}^2) + (\mathcal{D}_{01}^4 + \mathcal{D}_{01}^3) + \mathcal{D}_{00}^{32} \leq \frac{16}{7} \cdot (2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{10}^3 + \mathcal{D}_{01}^3 + \mathcal{D}_{00}^{22}).$$

只需证明不等式

$$\mathcal{D}_{10}^2 + \mathcal{D}_{01}^4 + \mathcal{D}_{00}^{32} \leq \frac{11}{7} \cdot \mathcal{D}_{11} + \frac{2}{7} \cdot \mathcal{D}_{10}^3 + \frac{9}{7} \cdot \mathcal{D}_{01}^3.$$

若 $|V(G_R)| = 2$，则 $\mathcal{D}_{10}^2 = \mathcal{D}_{00}^{32} = 0$，结论得证。否则，根据引理 1，我们有 $2 \cdot \mathcal{D}_{01}^3 \geq \mathcal{D}_{01}^4$ 和 $\mathcal{D}_{01}^3 \geq \mathcal{D}_{00}^{32}$，因此

$$\mathcal{D}_{10}^2 + \frac{6}{7} \cdot \mathcal{D}_{01}^4 \leq \frac{11}{7} \cdot \mathcal{D}_{11} + \frac{2}{7} \cdot \mathcal{D}_{10}^3.$$

至此，证明完成。 □

在本章其余部分中，我们假设 $deg(x_3) = 2$ ，并将面 f_4 记为 $b_2c_1c_2$。

引理 5. 如果 $deg(x_4) = 3$，那么 G 不是临界的。

证明。令 $G_L = G[f_4;\ f_5]$。并且 f_3' 是与 f_4 相邻的面，除去 f_3 和 f_5。根据 f_3' 的位置，我们分为两种情形。

C情形 1. f_3' 包含边 b_2c_2。我们考虑 G 的 (G_L, G_R, c_1c_2)-划分 .

子情形 1. $deg(x_3') = 1$。令 $G_3 = G \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$。考虑 G_3 的 (G_L', G_R, c_1c_2)-划分，其中 $G_L' = G_L \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$。我们有

$$i(G) = 16 \cdot \mathcal{I}_{00} + 7 \cdot \mathcal{I}_{01} + 10 \cdot \mathcal{I}_{10} > 3 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 3 \cdot i(G_3);$$

$$\partial_4(G) = 4 \cdot \mathcal{D}_{11} + (2 \cdot \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^2_{10}) + (3 \cdot \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^2_{01}) + (2 \cdot \mathcal{D}^{22}_{00} + \mathcal{D}^{11}_{00});$$

$$\partial_4(G_3) = 2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^{22}_{00}.$$

显然，$\partial_4(G) \leq 3 \cdot \partial_4(G_3) < 3 \cdot i(G_3) \leq i(G)$，如所需。

子情形 2. $deg(x_3') = 3$。根据前一个引理，f_3' 与某些端面 f_2' 和 f_2'' 相邻。我们有

$$i(G) = 39 \cdot \mathcal{I}_{00} + 14 \cdot \mathcal{I}_{01} + 25 \cdot \mathcal{I}_{10} \geq 26 \cdot (\mathcal{I}_{00} + \mathcal{I}_{01} + \mathcal{I}_{10}) = 26 \cdot i(G_R);$$

$$\partial_4(G) = 7 \cdot \mathcal{D}_{11} + (3 \cdot \mathcal{D}^4_{10} + \mathcal{D}^3_{10}) + (4 \cdot \mathcal{D}^4_{01} + \mathcal{D}^3_{01}) + (2 \cdot \mathcal{D}^{12}_{00} + \mathcal{D}^{01}_{00}).$$

由引理 1，我们有 $\partial_4(G) \leq 19 \cdot \mathcal{D}_{11} < 26 \cdot \partial_4(G_R)$。

子情形 3. $deg(x_3') = 2$ 和 $deg(b_2) = 6$。在此情形下，f_3' 与一个面 f_2' 相邻，而该面与端面 f_1' 和 f_1''相邻。因此，

$$i(G) = 59 \cdot \mathcal{I}_{00} + 14 \cdot \mathcal{I}_{01} + 35 \cdot \mathcal{I}_{10} \geq 36 \cdot (\mathcal{I}_{00} + \mathcal{I}_{01} + \mathcal{I}_{10}) = 36 \cdot i(G_R);$$

$$\begin{aligned}\partial_4(G) &= 11 \cdot \mathcal{D}_{11} + (6 \cdot \mathcal{D}^3_{01} + 2 \cdot \mathcal{D}^2_{01}) + (3 \cdot \mathcal{D}^4_{10} + \mathcal{D}^3_{10}) + 2 \cdot (\mathcal{D}^{24}_{00} + \mathcal{D}^{13}_{00}) \\ &\leq 26 \cdot \mathcal{D}_{11} = 26 \cdot \partial_4(G_R).\end{aligned}$$

子情形 4. $deg(x_3') = 2$ 和 $deg(b_2) = 8$。同样，f_3' 与一个面 f_2' 相邻，而该面与端面 f_1'和 f_1''相邻。因此，

$$i(G) = 53 \cdot \mathcal{I}_{00} + 35 \cdot \mathcal{I}_{01} + 35 \cdot \mathcal{I}_{10} \geq 41 \cdot (\mathcal{I}_{00} + \mathcal{I}_{01} + \mathcal{I}_{10}) = 41 \cdot i(G_R);$$

$$\partial_4(G) \leq 4 \cdot \partial_4(G, b_2^+, c_2^+) = 4 \cdot 10 \cdot \mathcal{D}_{11} \leq 40 \cdot i(G_R).$$

情形 2。面 f_3' 包含边 c_1c_2。考虑 G 的 (G_L, G_R, b_2c_2)-划分。

子情形 1. $deg(x_3') = 1$。设 $G_3 = G \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$。考虑$G_3$的 (G_L', G_R, b_2c_2)-划分，其中 $G_L' = G_L \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$。我们有

$$i(G) = 19 \cdot \mathcal{I}_{00} + 7 \cdot \mathcal{I}_{01} + 4 \cdot \mathcal{I}_{10} > 3 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 3 \cdot i(G_3);$$

$$\partial_4(G) = 5 \cdot \mathcal{D}_{11} + 3 \cdot \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^4_{01} + \mathcal{D}^{42}_{00} \leq 3 \cdot (2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^{22}_{00}) = 3 \cdot \partial_4(G_3).$$

根据引理 1，我们有 $\mathcal{D}_{11} + 3 \cdot \mathcal{D}^3_{01} > \mathcal{D}^{42}_{00} + \mathcal{D}^4_{01}$，证毕。

子情形 2. $deg(x_3') = 3$。根据前面的引理，f_3'与端面 f_2'和 f_2''相邻。我们有

$$i(G) = 45 \cdot \mathcal{I}_{00} + 14 \cdot \mathcal{I}_{01} + 10 \cdot \mathcal{I}_{10} \geq 23 \cdot (\mathcal{I}_{00} + \mathcal{I}_{01} + \mathcal{I}_{10}) = 23 \cdot i(G_R);$$

$$\partial_4(G) = 8 \cdot \mathcal{D}_{11} + (3 \cdot \mathcal{D}^4_{10} + 2 \cdot \mathcal{D}^3_{10}) + 3 \cdot \mathcal{D}^4_{01} + \mathcal{D}^{43}_{00} \leq 17 \cdot \mathcal{D}_{11} < 23 \cdot \partial_4(G_R).$$

子情形 3. $deg(x_3')=2$和 $deg(c_1)=4$。 f_3'与面 f_2'相邻，而面 f_2'与端面 f_1'和 f_1''相邻。我们有

$$i(G)=74\cdot\mathcal{I}_{00}+14\cdot\mathcal{I}_{01}+14\cdot\mathcal{I}_{10}\geq 34\cdot(\mathcal{I}_{00}+\mathcal{I}_{01}+\mathcal{I}_{10})=34\cdot i(G_R);$$

$$\partial_4(G)=13\cdot\mathcal{D}_{11}+3\cdot\mathcal{D}_{10}^4+3\cdot\mathcal{D}_{01}^4+\mathcal{D}_{00}^{44}\leq 20\cdot\mathcal{D}_{11}<34\cdot\partial_4(G_R).$$

子情形 4. $deg(x_3')=2$和 $deg(c_1)=6$。 f_3'与一个面 f_2'相邻，而该面与端面 f_1'和 f_1''相邻。我们有

$$i(G)=59\cdot\mathcal{I}_{00}+35\cdot\mathcal{I}_{01}+14\cdot\mathcal{I}_{10}>36\cdot(\mathcal{I}_{00}+\mathcal{I}_{01}+\mathcal{I}_{10})=36\cdot i(G_R);$$

$$\partial_4(G)\leq 3\cdot\partial_4(G,b_2^+,c_2^+)+\partial_4(G,b_2^-,c_2^-)=3\cdot 11\cdot\mathcal{D}_{11}+(2\cdot\mathcal{D}_{00}^{42}+\mathcal{D}_{00}^{31})$$

根据引理 1，我们有 $\partial_4(G)\leq 36\cdot\mathcal{D}_{11}\leq 36\cdot\partial_4(G_R)$。 □

引理6. 若 $deg(x_3)=deg(x_4)=2$ 且 $deg(c_1)=3$，则 G 不是临界的。

证明。若 $deg(x_3)=deg(x_4)=2$ 且 $deg(c_1)=3$，则 f_5 包含 b_2c_2。令 $G_L=G[f_3;\ f_4]$。对于 G 的 (G_L,G_R,b_2c_1)-划分，我们有

$$i(G)=7\cdot\mathcal{I}_{00}+5\cdot\mathcal{I}_{01}+2\cdot\mathcal{I}_{10}>4\cdot(\mathcal{I}_{00}+\mathcal{I}_{01}+\mathcal{I}_{10})=4\cdot i(G_R);$$

$$\partial_4(G)=\partial_4(G,b_2^+,c_1^+)+\partial_4(G,b_2^-,c_1^+)=3\cdot\mathcal{D}_{11}+\mathcal{D}_{01}^4\leq 4\cdot\mathcal{D}_{11}\leq\partial_4(G_R).$$

因此， G 不是临界的。 □

引理7. 若 $deg(x_3)=deg(x_4)=2$ 且 $deg(x_5)=3$，则 G 不是临界的 .

证明。我们分别将面 f_2、f_3、f_4 记为 $a_2b_1b_2$、$b_1b_2c_1$、$b_2c_1c_2$。根据前一个引理，$deg(c_1)\geq 4$，且面 f_5 对应于三角形 $c_1c_2d_1$。设 f_4' 为与 f_5 相邻、但不同于 f_4 和 f_6 的面。令 $G_L=G[f_5;\ f_6]$。根据 f_4' 在 G 中的位置，有两种可能的情形。

情形 1。面 f_4' 包含边 c_1d_1。设 d_0 为 f_4' 的第三个顶点。考虑 G 的 (G_L,G_R,c_2d_1)-划分。

子情形 1a。 $deg(x_4')=1$，且 $\min(deg_G(c_2)\ deg_G(d_1))\geq 5$。考虑图 $G_6=G\setminus\{a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,d_0\}$ 以及 G_6 的 $(G_L\cap V(G_6)\ G_R,c_2d_1)$-划分。我们有

$$i(G)=23\cdot\mathcal{I}_{00}+9\cdot\mathcal{I}_{01}+14\cdot\mathcal{I}_{10}>10\cdot(2\cdot\mathcal{I}_{00}+\mathcal{I}_{01}+\mathcal{I}_{10})=10\cdot i(G_6).$$

现在我们证明

$$\partial_4(G)=7\cdot\mathcal{D}_{11}+(4\cdot\mathcal{D}_{10}^3+2\cdot\mathcal{D}_{10}^2)+(3\cdot\mathcal{D}_{01}^3+3\cdot\mathcal{D}_{01}^2)+(3\cdot\mathcal{D}_{00}^{22}+\mathcal{D}_{00}^{12})\leq$$

$$10\cdot(\mathcal{D}_{11}+\mathcal{D}_{10}^2+\mathcal{D}_{01}^2+\mathcal{D}_{00}^{11})=10\cdot\partial_4(G_6).$$

还需证明

$$3\cdot\mathcal{D}_{11}+8\cdot\mathcal{D}_{10}^2+7\cdot\mathcal{D}_{01}^2\geq 4\cdot\mathcal{D}_{10}^3+3\cdot\mathcal{D}_{01}^3+3\cdot\mathcal{D}_{00}^{22}+\mathcal{D}_{00}^{12}.$$

由于 $\min(deg(a)\ deg(c))\geq 5$，根据引理 1，我们有 $3\cdot\mathcal{D}_{10}^2\geq\mathcal{D}_{10}^3$ 和 $3\cdot\mathcal{D}_{01}^2\geq\mathcal{D}_{01}^3$。此外，$\min(\mathcal{D}_{01}^2,\mathcal{D}_{10}^2)\geq\mathcal{D}_{00}^{22}$。若 $deg(a)=5$，则 $\mathcal{D}_{00}^{12}=0$，问题得证。若 $deg(a)\geq 6$，则 $2\cdot\mathcal{D}_{01}^2\geq\mathcal{D}_{01}^3$，问题得证。

子情形 1b. $deg(x_4')=1$ 且 $\min(deg(a),deg(c))=4$。考虑图 $G_4=G\setminus\{a_1,a_2,a_3,b_1\}$ 以及 G_4 的 $(G_L\cap V(G_4),G_R,c_2d_1)$-划分。我们有

$$i(G)=23\cdot\mathcal{I}_{00}+9\cdot\mathcal{I}_{01}+14\cdot\mathcal{I}_{10}\geq\frac{9}{2}\cdot(5\cdot\mathcal{I}_{00}+2\cdot\mathcal{I}_{01}+2\cdot\mathcal{I}_{10})=\frac{9}{2}\cdot i(G_4).$$

我们现在证明:

$$\partial_4(G)=7\cdot\mathcal{D}_{11}+(4\cdot\mathcal{D}_{10}^3+2\cdot\mathcal{D}_{10}^2)+(3\cdot\mathcal{D}_{01}^3+3\cdot\mathcal{D}_{01}^2)+(3\cdot\mathcal{D}_{00}^{22}+\mathcal{D}_{00}^{11})\leq$$

$$\frac{9}{2}\cdot(2\cdot\mathcal{D}_{11}+\mathcal{D}_{10}^3+\mathcal{D}_{01}^3+\mathcal{D}_{00}^{22})=\frac{9}{2}\cdot\partial_4(G_4).$$

只需证明的是,

$$2\cdot\mathcal{D}_{11}+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{D}_{10}^3+\frac{3}{2}\cdot\mathcal{D}_{01}^3\geq2\cdot\mathcal{D}_{10}^2+3\cdot\mathcal{D}_{01}^2.$$

由于 $\min(deg(a),deg(c))=4$，我们有 $\min(\mathcal{D}_{10}^2,\mathcal{D}_{01}^2)=0$，因此不等式成立。

子情形 2。 $deg(x_4')=3$。面 f_4' 与某些面 f_3' 和 f_3'' 相邻。根据前面的引理， f_3' 和 f_3'' 都是端面。因此,

$$i(G)=55\cdot\mathcal{I}_{00}+18\cdot\mathcal{I}_{01}+35\cdot\mathcal{I}_{10}\geq36\cdot(\mathcal{I}_{00}+\mathcal{I}_{01}+\mathcal{I}_{10})=36\cdot i(G_R);$$

$$\partial_4(G)\leq2\cdot\partial_4(G,c_2^+,d_2^+)+2\cdot\partial_4(G,c_2^+,d_2^-)=2\cdot(11\cdot\mathcal{D}_{11}+4\cdot\mathcal{D}_{10}^4+2\cdot\mathcal{D}_{10}^3)$$
$$\leq34\cdot\mathcal{D}_{11}<36\cdot\partial_4(G_R).$$

在其余子情形中，我们考虑 G 的导出子图 G'，其顶点集为 $(V(G)\setminus V(G_L))\cup\{b_2,c_2,d_2\}$，以及 G 的 (G_L',G_R,c_1d_1)-划分，其中 G_L' 是 G_L 的导出子图，其顶点集为 $\{b_2,c_1,c_2,d_0,d_1\}$。

子情形 3. $deg(x_4')=deg(x_3')=2$。面 f_3' 与某个面 f_2' 相邻。根据引理， 3 f_2' 与端面 f_1' 和 f_1'' 相邻。此外，根据前面的引理，面 f_3' 和 f_4' 不包含任何度为 3 的顶点。

子情形 3a. $deg(c_1)\geq6$。如果 $deg(c_1)\geq7$，那么 $deg(d_0)=3$，矛盾。假设$deg(c_1)=6$。

$$i(G)=106\cdot\mathcal{I}_{00}+63\cdot\mathcal{I}_{01}+63\cdot\mathcal{I}_{10}>20\cdot(5\cdot\mathcal{I}_{00}+2\cdot\mathcal{I}_{01}+2\cdot\mathcal{I}_{10})=20\cdot i(G');$$
$$\partial_4(G)\leq25\cdot\mathcal{D}_{11}+(12\cdot\mathcal{D}_{10}^3+10\cdot\mathcal{D}_{10}^2)+(12\cdot\mathcal{D}_{01}^3+10\cdot\mathcal{D}_{01}^2)$$
$$+9\cdot\mathcal{D}_{00}^{22}+3\cdot\mathcal{D}_{00}^{21}+3\cdot\mathcal{D}_{00}^{12}+4\cdot\mathcal{D}_{00}^{11}$$
$$\leq25\cdot\mathcal{D}_{11}+22\cdot\mathcal{D}_{10}^3+22\cdot\mathcal{D}_{01}^3+19\cdot\mathcal{D}_{00}^{22}$$
$$<20\cdot(2\cdot\mathcal{D}_{11}+\mathcal{D}_{10}^3+\mathcal{D}_{01}^3+\mathcal{D}_{00}^{22})=20\cdot\partial_4(G').$$

子情形 3b. $deg(c_1)=5$. 如果 $deg_{G_L}(d_1)\geq5$，那么 $deg(d_0)=3$，我们使用引理6。假设 $deg_{G_L}(d_1)=4$且 $deg_{G_L}(d_0)=5$。我们有

$$i(G)=116\cdot\mathcal{I}_{00}+45\cdot\mathcal{I}_{01}+63\cdot\mathcal{I}_{10}>23\cdot(5\cdot\mathcal{I}_{00}+2\cdot\mathcal{I}_{01}+2\cdot\mathcal{I}_{10})=23\cdot i(G');$$

$$\partial_4(G)=28\cdot\mathcal{D}_{11}+(8\cdot\mathcal{D}_{10}^4+14\cdot\mathcal{D}_{10}^3+2\cdot\mathcal{D}_{10}^2)+(12\cdot\mathcal{D}_{01}^3+10\cdot\mathcal{D}_{01}^2)$$
$$+(6\cdot D_{00}^{23}+3\cdot D_{00}^{22}+2\cdot D_{00}^{13}+1\cdot D_{00}^{12})\leq$$
$$\leq28\cdot\mathcal{D}_{11}+8\cdot\mathcal{D}_{11}+16\cdot\mathcal{D}_{10}^3+22\cdot\mathcal{D}_{01}^3+8\cdot\mathcal{D}_{11}+4\cdot\mathcal{D}_{00}^{22}$$

$$\leq 23 \cdot (2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^{22}_{00}) \leq 23 \cdot \partial_4(G').$$

子情形 4. $deg(x'_4) = 2$, $deg(x'_3) = 3$。只有当 f'_3 与端面相邻时，这种情况才可能发生；否则我们使用引理 5。

子情形 4a. $deg(c_1) = 7$. 根据引理 3 和引理 6，面 f'_3 与两个端面相邻。我们有

$$i(G) = 73 \cdot \mathcal{I}_{00} + 45 \cdot \mathcal{I}_{01} + 49 \cdot \mathcal{I}_{10} > 14 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 14 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) \leq 15 \cdot \mathcal{D}_{11} + 15 \cdot \mathcal{D}^3_{10} + 15 \cdot \mathcal{D}^3_{01} + 15 \cdot \mathcal{D}^{22}_{00}$$
$$< 14 \cdot (2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^{22}_{00}) \leq 14 \cdot \partial_4(G').$$

子情形 4b. $deg(c_1) = 5$, $deg(x'_4) = 2$, $deg(x'_3) = 2$. 根据引理 3 和引理 6，面 f'_3 与两个端面相邻。我们有

$$i(G) = 88 \cdot \mathcal{I}_{00} + 18 \cdot \mathcal{I}_{01} + 49 \cdot \mathcal{I}_{10} > 15 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 15 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) \leq 18 \cdot \mathcal{D}_{11} + 6 \cdot \mathcal{D}^4_{10} + (9 \cdot \mathcal{D}^3_{01} + 9 \cdot \mathcal{D}^2_{01}) + (3 \cdot \mathcal{D}^{23}_{00} + \mathcal{D}^{13}_{00})$$
$$< 15 \cdot (2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^{22}_{00}) \leq 14 \cdot \partial_4(G').$$

情形 2. 面 f'_4 对应于三角形 $c_2d_1d_2$。我们考虑 G的 (G_L, G_R, c_1d_1)-划分。

子情形 1. $deg(x'_4) = 1$. 考虑图 $G_4 = G \setminus \{a_1, a_2, a_3, b_1\}$ 以及 G_4的 $(G_L \cap V(G_4)\ G_R, c_2d_1)$-划分。我们有

$$i(G) = 25 \cdot \mathcal{I}_{00} + 9 \cdot \mathcal{I}_{01} + 10 \cdot \mathcal{I}_{10} \geq \frac{34}{7} \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = \frac{34}{7} \cdot i(G_4).$$

此外，

$$\partial_4(G) = 7 \cdot \mathcal{D}_{11} + 4 \cdot \mathcal{D}^3_{10} + (2 \cdot \mathcal{D}^4_{01} + \mathcal{D}^3_{01}) + (2 \cdot \mathcal{D}^{32}_{00} + \mathcal{D}^{22}_{00}) \leq$$
$$\frac{34}{7} \cdot (2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^{22}_{00}) = \frac{34}{7} \cdot \partial_4(G_4).$$

只需证明

$$\frac{19}{7} \cdot \mathcal{D}_{11} + \frac{6}{7} \cdot \mathcal{D}^3_{10} + \frac{27}{7} \cdot \mathcal{D}^3_{01} \geq 2 \cdot \mathcal{D}^4_{01} + 2 \cdot \mathcal{D}^{32}_{00}.$$

根据引理 1，我们有 $\mathcal{D}_{11} > \mathcal{D}^4_{01}$ 和 $\mathcal{D}^3_{01} > \mathcal{D}^{32}_{00}$，因此不等式成立。

子情形 2. $deg(x'_4) = 3$. 我们假设 f'_4与端面 f'_3和 f''_3相邻（前面的情形已证明其他构型不可能）。因此，

$$i(G) = 59 \cdot \mathcal{I}_{00} + 18 \cdot \mathcal{I}_{01} + 25 \cdot \mathcal{I}_{10} \geq 34 \cdot (\mathcal{I}_{00} + \mathcal{I}_{01} + \mathcal{I}_{10}) = 34 \cdot i(G_R);$$

$$\partial_4(G) = 12 \cdot \mathcal{D}_{11} + (4 \cdot \mathcal{D}^4_{10} + 3 \cdot \mathcal{D}^3_{10}) + (4 \cdot \mathcal{D}^4_{01} + 4 \cdot \mathcal{D}^4_{01}) + 2 \cdot \mathcal{D}^{33}_{00} + \mathcal{D}^{23}_{00}$$
$$\leq 30 \cdot \mathcal{D}_{11} < 34 \cdot \partial_4(G_R).$$

在其余子情形中，我们考虑 G 的导出子图 G''，其顶点集为 $(V(G) \setminus V(G_L)) \cup \{b_2, c_2, d_2\}$，以及 G的 (G'_L, G_R, c_1d_1)-划分，其中 G'_L是 G_L的导出子图，其顶点集为 $\{b_2, c_2, d_2, c_1, d_1\}$。

子情形 3。 $deg(x'_4) = deg(x'_3) = 2$。与前一种情形一样， f'_3与某个面 f'_2相邻，而该面与端面 f'_1和 f''_1相邻。同样，我们假设面 f'_3和 f'_4不包含度为 3 的顶点。

子情形 3a。 $deg(c_2) \geq 5$。如果 $deg(c_2) = 7$，那么 $deg(d_2) = 3$，这就产生矛盾。因此，我们假设 $deg(c_2) = 5$和 d_2属于 f_2'和 f_3'。因此，

$$i(G) = 116 \cdot \mathcal{I}_{00} + 63 \cdot \mathcal{I}_{01} + 45 \cdot \mathcal{I}_{10} \geq 23 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 20 \cdot i(G'');$$

$$\begin{aligned}\partial_4(G) &\leq 24 \cdot \mathcal{D}_{11} + 12 \cdot (\mathcal{D}_{10}^4 + \mathcal{D}_{10}^3) + 8 \cdot (\mathcal{D}_{01}^4 + \mathcal{D}_{01}^3) + 12 \cdot \mathcal{D}_{00}^{32} \\ &< 20 \cdot (2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{10}^3 + \mathcal{D}_{01}^3 + \mathcal{D}_{00}^{22}) = 20 \cdot \partial_4(G'').\end{aligned}$$

子情形 3b. $deg(c_2) = 4$. 如果 $deg(d_2) = 3$，那么我们应用引理。假设 $deg(d_2) = 5$。因此，

$$i(G) = 130 \cdot \mathcal{I}_{00} + 45 \cdot \mathcal{I}_{01} + 45 \cdot \mathcal{I}_{10} > 24 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 24 \cdot i(G'');$$

$$\partial_4(G) = 25 \cdot \mathcal{D}_{11} + (8 \cdot \mathcal{D}_{10}^4 + 4 \cdot \mathcal{D}_{10}^3) + (8 \cdot \mathcal{D}_{01}^4 + 4 \cdot \mathcal{D}_{01}^3) + (4 \cdot \mathcal{D}_{00}^{22} + 2 \cdot \mathcal{D}_{00}^{32} + 2 \cdot \mathcal{D}_{00}^{23} + \mathcal{D}_{00}^{22});$$

$$\partial_4(G) \leq 24 \cdot (2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{10}^3 + \mathcal{D}_{01}^3 + \mathcal{D}_{00}^{22}) = 24 \cdot \partial_4(G'').$$

子情形 4. $deg(x_4') = 2$, $deg(x_3') = 3$。与前一种情况一样，这只有在 f_3' 与两个端面相邻时才可能。

子情形 4a. $deg(c_2) = 6$。我们有

$$i(G) = 77 \cdot \mathcal{I}_{00} + 45 \cdot \mathcal{I}_{01} + 35 \cdot \mathcal{I}_{10} > 15 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 15 \cdot i(G'');$$

$$\begin{aligned}\partial_4(G) &\leq 16 \cdot \mathcal{D}_{11} + (8 \cdot \mathcal{D}_{10}^3 + 3 \cdot \mathcal{D}_{10}^2) + (6 \cdot \mathcal{D}_{01}^4 + 6 \cdot \mathcal{D}_{01}^3 + \mathcal{D}_{01}^2) + (4 \cdot \mathcal{D}_{00}^{32} + 2 \cdot \mathcal{D}_{00}^{22} + 2 \cdot \mathcal{D}_{00}^{21} + \mathcal{D}_{00}^{11}) \\ &\leq 16 \cdot \mathcal{D}_{11} + 11 \cdot \mathcal{D}_{10}^3 + 13 \cdot \mathcal{D}_{01}^4 + 9 \cdot \mathcal{D}_{00}^{32} \leq 15 \cdot (2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{10}^3 + \mathcal{D}_{01}^3 + \mathcal{D}_{00}^{22}) \leq 15 \cdot \partial_4(G'').\end{aligned}$$

子情形 4b. $deg(c_2) = 4$。我们有

$$i(G) = 98 \cdot \mathcal{I}_{00} + 18 \cdot \mathcal{I}_{01} + 35 \cdot \mathcal{I}_{10} > 16 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 16 \cdot i(G'');$$

$$\begin{aligned}\partial_4(G) &\leq 18 \cdot \mathcal{D}_{11} + 4 \cdot \mathcal{D}_{10}^4 + (6 \cdot \mathcal{D}_{01}^4 + 3 \cdot \mathcal{D}_{01}^3) + 2 \cdot (\mathcal{D}_{00}^{34} + \mathcal{D}_{00}^{24}) \\ &\leq 18 \cdot \mathcal{D}_{11} + 4 \cdot \mathcal{D}_{10}^4 + 9 \cdot \mathcal{D}_{01}^4 + 3 \cdot \mathcal{D}_{00}^{34} \\ &< 16 \cdot (2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{10}^3 + \mathcal{D}_{01}^3 + \mathcal{D}_{00}^{22}) \leq 16 \cdot \partial_4(G'').\end{aligned}$$

□

引理 8. 如果 $deg(x_3) = deg(x_4) = deg(x_5) = deg(x_6) = 2$，那么 G 不是临界的。

证明。我们分别将面 f_2、f_3、f_4 记为 $a_2b_1b_2$、$b_1b_2c_1$、$b_2c_1c_2$。由引理6可得$deg(c_1) \geq 4$。共有三种可能的情况。

情况 1. $deg(c_1) \geq 5$。在这种情况下， $deg(c_2) = 3$，面 f_5 包含 c_1c_2，且 c_1 属于 f_6。令 $G_L = G[f_4; f_5]$。考虑 G 的 (G_L, G_R, c_1c_2)-划分。

$$i(G) = 9 \cdot \mathcal{I}_{00} + 7 \cdot \mathcal{I}_{01} + 5 \cdot \mathcal{I}_{10} \geq 7 \cdot (\mathcal{I}_{00} + \mathcal{I}_{01} + \mathcal{I}_{10}) = 7 \cdot i(G_R);$$

$$\partial_4(G) = 4 \cdot \mathcal{D}_{11} + (2 \cdot \mathcal{D}_{01}^3 + \mathcal{D}_{01}^2) \leq 7 \cdot \mathcal{D}_{11} \leq 7 \cdot \partial_4(G_R).$$

在 r　　在剩余的情形中，我们分别将面 f_5 和面 f_6 记为 $c_1c_2d_1$ 和 $c_2d_1d_2$。　　.

情形 2. $deg(c_2) \geq 5$. 在这种情况下， $deg(d_1) = 3$。令 $G_L = G[f_5; f_6]$。考虑 G 的 (G_L, G_R, c_2d_1)-划分。

$$i(G) = 14 \cdot \mathcal{I}_{00} + 9 \cdot \mathcal{I}_{01} + 7 \cdot \mathcal{I}_{10} > 10 \cdot (\mathcal{I}_{00} + \mathcal{I}_{01} + \mathcal{I}_{10}) = 10 \cdot i(G_R);$$

$$\partial_4(G) = \partial_4(G, c_2^+, d_1^+) + \partial_4(G, c_2^-, d_1^+) = 6 \cdot \mathcal{D}_{11} + 3 \cdot \mathcal{D}_{01}^3 + \mathcal{D}_{01}^2 \le \partial_4(G_R).$$

情况 3。 $deg(c_1) = deg(c_2) = 4$。令 $G_L = G[f_4; f_5]$。考虑 G 的 (G_L, G_R, c_1c_2)-划分以及图 $G_3 = G \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ 的 (G'_L, G_R, c_1c_2)-划分，其中 $G'_L = G_L \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$。

首先，我们证明 $\mathcal{I}_{00} \le \mathcal{I}_{01} + \mathcal{I}_{10}$。记 G'_R 为 G_R 的顶点集为 $V(G_R) \setminus \{c_1, c_2\}$的导出子图。显然，

$$\mathcal{I}_{00} = i(G'_R),\ \mathcal{I}_{10} = i(G'_R, d_1^-),\ \mathcal{I}_{01} = i(G'_R, d_1^-, d_2^-).$$

因此， $\mathcal{I}_{10} > \mathcal{I}_{01}$ 和 $\mathcal{I}_{00} - \mathcal{I}_{10} = i(G'_R, d_1^+) \le \mathcal{I}_{01}$。我们有

$$i(G) = 9 \cdot \mathcal{I}_{00} + 7 \cdot \mathcal{I}_{01} + 5 \cdot \mathcal{I}_{10} \ge \frac{10}{3} \cdot (3 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 1 \cdot \mathcal{I}_{10}) = \frac{10}{3} \cdot i(G_1).$$

此外，

$$\partial_4(G) = 4 \cdot \mathcal{D}_{11} + 3 \cdot \mathcal{D}_{10}^2 + 2 \cdot D_{01}^3,\ \partial_4(G') = \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{10}^2 + D_{01}^3.$$

剩下需要证明 $\partial_4(G) \le \frac{10}{3} \cdot \partial_4(G')$ 或 $\mathcal{D}_{11} \le 2 \cdot \mathcal{D}_{01}^3$。事实上， $\mathcal{D}_{11} - \mathcal{D}_{01}^3$ 等于包含 c_1 且 c_2、不包含 d_1 且 $\mathcal{D}_{01}^3$ 的 G_R 的 4-支配集数量，也等于包含 c_1、c_2 和 d_1的 4-支配集数量。对于 G_R 的每个满足 $d_1 \notin D$的 4-支配集 D，集合$D \cup \{d_1\}$ 也是 G_R的一个 4-支配集，因此该不等式成立。

□

引理 9. 若 $deg(x_3) = deg(x_4) = deg(x_5) = 2$ 且 $deg(x_6) = 3$，则 G 不是临界的 .

证明。分别将面 f_5 和 f_6 记为 $c_1c_2d_1$ 和 $c_2d_1d_2$。设 f'_5 是与 f_6 相邻且不同于 f_5 和 f_7的面。由引理 8， $deg(c_1) = 4$ 且 $deg(c_2) \ge 5$。令 $G_L = G[f_4; f_5]$。我们假设 G_L 除与两个端面相邻的 f_2外，至多包含一个度为 3 的面。由前面的引理可知， G_L 不含度为 3 的顶点。根据 f'_5 在 G 中的位置，有两种可能的情形。

情形 1。 f'_5包含边 c_2d_2。将 f'_5的第三个顶点记为 c_3。在以下每个子情形中，我们考虑图 G 的划分 (G_L, G_R, d_1d_2)，以及图 G'的划分 (G'_L, G_R, d_1d_2)，其中 G' 是 G 的生成子图，其顶点集为 $(V(G) \setminus V(G_L)) \cup \{c_1, c_2, c_3, d_1, d_2\}$。显然，

$$\partial_4(G') = 2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{10}^3 + \mathcal{D}_{01}^3 + \mathcal{D}_{00}^{22}.$$

利用引理 1 不难检查，在下面的所有子情形中，我们都有 $i(G) > \partial_4(G)$，因此G不是临界的。

子情形 1。 $deg(x'_5) = 1$。

$$i(G) = 35 \cdot \mathcal{I}_{00} + 14 \cdot \mathcal{I}_{01} + 18 \cdot \mathcal{I}_{10} > 7 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 7 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) = 10 \cdot \mathcal{D}_{11} + (6 \cdot \mathcal{D}_{10}^3 + 3 \cdot \mathcal{D}_{10}^2) + (4 \cdot \mathcal{D}_{01}^3 + 4 \cdot \mathcal{D}_{01}^2) + 4 \cdot \mathcal{D}_{00}^{22}.$$

子情形 2。 $deg(x'_5) = 3$，且 f'_5与某些面 f'_4和 f'_4相邻。根据前面的引理， f'_4和 f'_4都是端面。因此，

$$i(G) = 70 \cdot \mathcal{I}_{00} + 28 \cdot \mathcal{I}_{01} + 45 \cdot \mathcal{I}_{10} > 14 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 7 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) = 22 \cdot \mathcal{D}_{11} + (6 \cdot \mathcal{D}_{10}^4 + 4 \cdot \mathcal{D}_{10}^3) + (8 \cdot \mathcal{D}_{01}^3 + 4 \cdot \mathcal{D}_{01}^2) + (4 \cdot \mathcal{D}_{00}^{23} + 4 \cdot \mathcal{D}_{00}^{12}).$$

子情形 3。 $deg(x'_5) = 2$和 f'_4与端面 f'_3和 f''_3相邻。可能有两种构型:

子情形 3a。 $deg(c_2) = 7$ 和 c_2 属于 f'_4。

$$i(G) = 98 \cdot \mathcal{I}_{00} + 70 \cdot \mathcal{I}_{01} + 63 \cdot \mathcal{I}_{10} > 19 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 19 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) \leq 22 \cdot (\mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^{22}_{00}) \leq 19 \cdot (2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^{22}_{00}).$$

子情形 3b. $deg(c_2) = 5$，且 c_2 不属于 f'_4。

$$i(G) = 98 \cdot \mathcal{I}_{00} + 28 \cdot \mathcal{I}_{01} + 63 \cdot \mathcal{I}_{10} > 18 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 7 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) = 26 \cdot \mathcal{D}_{11} + 10 \cdot \mathcal{D}^4_{10} + (12 \cdot \mathcal{D}^3_{01} + 8 \cdot \mathcal{D}^2_{01}) + 4 \cdot \mathcal{D}^{24}_{00};$$

子情形 4. $deg(x'_5) = deg(x'_4) = 2$，且 f'_3 与端面 f'_2 和 f''_2 相邻。由于 G_L 在 G 中没有度为 3 的顶点，因此只有两种构型：

子情形 4a. $deg(c_2) = 6$。

$$i(G) = 161 \cdot \mathcal{I}_{00} + 98 \cdot \mathcal{I}_{01} + 81 \cdot \mathcal{I}_{10} > 32 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 32 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) \leq 36 \cdot (\mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^{22}_{00}) \leq 36 \cdot (2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^{22}_{00}).$$

子情形 4b. $deg(c_2) = 5$。

$$i(G) = 175 \cdot \mathcal{I}_{00} + 70 \cdot \mathcal{I}_{01} + 81 \cdot \mathcal{I}_{10} > 35 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 35 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) = 39 \cdot \mathcal{D}_{11} + (12 \cdot \mathcal{D}^4_{10} + 14 \cdot \mathcal{D}^3_{10}) + (16 \cdot \mathcal{D}^3_{01} + 16 \cdot \mathcal{D}^2_{01}) + 8 \cdot \mathcal{D}^{33}_{00} + 4 \cdot \mathcal{D}^{23}_{00};$$

$$\partial_4(G') = 2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^{22}_{00}.$$

子情形 5. $deg(x'_5) = deg(x'_4) = deg(x'_3) = 2$，且 f'_2 与端面 f'_1 和 f''_1 相邻。同样，由于 G_L 在 G 中没有度为 3 的顶点，因此只有两种构型：

子情形 5a. $deg(c_2) = 6$。

$$i(G) = 245 \cdot \mathcal{I}_{00} + 126 \cdot \mathcal{I}_{01} + 126 \cdot \mathcal{I}_{10} > 49 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 49 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) \leq 52 \cdot (\mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^{22}_{00}) \leq 52 \cdot (2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^{22}_{00}).$$

子情形 5b. $deg(c_2) = 5$.

$$i(G) = 259 \cdot \mathcal{I}_{00} + 98 \cdot \mathcal{I}_{01} + 126 \cdot \mathcal{I}_{10} > 51 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 52 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) = 52 \cdot \mathcal{D}_{11} + (18 \cdot \mathcal{D}^4_{10} + 18 \cdot \mathcal{D}^3_{10} + 3 \cdot \mathcal{D}^2_{10}) + (24 \cdot \mathcal{D}^3_{01} + 16 \cdot \mathcal{D}^2_{01}) + 12 \cdot \mathcal{D}^{23}_{00} + 4 \cdot \mathcal{D}^{22}_{00}.$$

情形 2. f'_5 包含边 d_1d_2。设 d_3 为 f'_5 的第三个顶点。在以下每个子情形中，我们考虑图 G 的划分 (G_L, G_R, d_1d_2)，以及图 G' 的划分 (G'_L, G_R, d_1d_2)，其中 G' 是 G 的一个生成子图，其顶点集为 $(V(G) \setminus V(G_L)) \cup \{c_1, c_2, d_1, d_2, d_3\}$。显然，我们有

$$\partial_4(G') = 2 \cdot \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}^3_{10} + \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^{22}_{00}.$$

利用引理 1 不难验证，以下所有子情形中都有 $i(G) > \partial_4(G)$。子情形 1。 $deg(x'_5) = 1$。

$$i(G) = 37 \cdot \mathcal{I}_{00} + 14 \cdot \mathcal{I}_{01} + 14 \cdot \mathcal{I}_{10} > 7 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 7 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) = 10 \cdot \mathcal{D}_{11} + 6 \cdot \mathcal{D}^3_{10} + (3 \cdot \mathcal{D}^4_{01} + \mathcal{D}^3_{01}) + (3 \cdot \mathcal{D}^{32}_{00} + \mathcal{D}^{22}_{00}).$$

子情形 2。 $deg(x'_5) = 3$, f'_5 与端面 f'_4 和 f''_4 相邻。

$$i(G) = 70 \cdot \mathcal{I}_{00} + 28 \cdot \mathcal{I}_{01} + 45 \cdot \mathcal{I}_{10} > 14 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 7 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) = 16 \cdot \mathcal{D}_{11} + (6 \cdot \mathcal{D}^4_{10} + 4 \cdot \mathcal{D}^3_{10}) + (6 \cdot \mathcal{D}^4_{01} + 5 \cdot \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^2_{01}) + (3 \cdot \mathcal{D}^{23}_{00} + \mathcal{D}^{12}_{00}).$$

子情形 3. $deg(x'_5) = 2$和 f'_4与端面 f'_3和 f''_3相邻。有两种构型:

子情形 3a. $deg(d_1) = 6$, d_1 属于 f'_4。

$$i(G) = 116 \cdot \mathcal{I}_{00} + 70 \cdot \mathcal{I}_{01} + 49 \cdot \mathcal{I}_{10} > 23 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 23 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) = 22 \cdot \mathcal{D}_{11} + 12 \cdot \mathcal{D}^3_{10} + 4 \cdot \mathcal{D}^3_{10} + (9 \cdot \mathcal{D}^4_{01} + 6 \cdot \mathcal{D}^3_{01} + \mathcal{D}^2_{01}) + 4 \cdot (6 \cdot \mathcal{D}^{32}_{00} + 2 \cdot \mathcal{D}^{22}_{00}).$$

子情形 3b. $deg(d_1) = 4$, d_1 不属于 f'_4。

$$i(G) = 98 \cdot \mathcal{I}_{00} + 28 \cdot \mathcal{I}_{01} + 49 \cdot \mathcal{I}_{10} > 18 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 7 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) = 26 \cdot \mathcal{D}_{11} + 6 \cdot \mathcal{D}^4_{10} + (3 \cdot \mathcal{D}^3_{01} + 2 \cdot \mathcal{D}^2_{01}) + 3 \cdot \mathcal{D}^{34}_{00} + 2 \cdot \mathcal{D}^{24}_{00}.$$

子情形 4. $deg(x'_5) = deg(x'_4) = 2$和 f'_3与两个端面 f'_2和 f''_2相邻。子情形 4a. $deg(d_1) = 5$。

$$i(G) = 171 \cdot \mathcal{I}_{00} + 98 \cdot \mathcal{I}_{01} + 63 \cdot \mathcal{I}_{10} > 33 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 25 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) = 36 \cdot \mathcal{D}_{11} + (18 \cdot \mathcal{D}^3_{10} + 14 \cdot \mathcal{D}^2_{10}) + (12 \cdot \mathcal{D}^4_{01} + 10 \cdot \mathcal{D}^3_{01} + 2 \cdot \mathcal{D}^2_{01}) + 9 \cdot \mathcal{D}^{32}_{00} + 3 \cdot \mathcal{D}^{22}_{00}.$$

子情形 4b. $deg(d_1) = 4$。

$$i(G) = 189 \cdot \mathcal{I}_{00} + 70 \cdot \mathcal{I}_{01} + 63 \cdot \mathcal{I}_{10} > 35 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 35 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) = 36 \cdot \mathcal{D}_{11} + (12 \cdot \mathcal{D}^4_{10} + 6 \cdot \mathcal{D}^3_{10}) + (12 \cdot \mathcal{D}^4_{01} + 4 \cdot \mathcal{D}^3_{01}) + 12 \cdot \mathcal{D}^{33}_{00}.$$

子情形 5. $deg(x'_5) = deg(x'_4) = deg(x'_3) = 2$ 且 x'_2 与两个端面 x'_1 和 x''_1相邻。子情形 5a. $deg(d_1) = 5$.

$$i(G) = 259 \cdot \mathcal{I}_{00} + 126 \cdot \mathcal{I}_{01} + 98 \cdot \mathcal{I}_{10} > 51 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 51 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) = 52 \cdot \mathcal{D}_{11} + (24 \cdot \mathcal{D}^3_{10} + 16 \cdot \mathcal{D}^2_{10}) + (18 \cdot \mathcal{D}^4_{01} + 5 \cdot \mathcal{D}^3_{01} + 4 \cdot \mathcal{D}^2_{01}) + 12 \cdot \mathcal{D}^{32}_{00} + 4 \cdot \mathcal{D}^{22}_{00}.$$

子情形 5b. $deg(d_1) = 4$.

$$i(G) = 277 \cdot \mathcal{I}_{00} + 98 \cdot \mathcal{I}_{01} + 98 \cdot \mathcal{I}_{10} > 52 \cdot (5 \cdot \mathcal{I}_{00} + 2 \cdot \mathcal{I}_{01} + 2 \cdot \mathcal{I}_{10}) = 52 \cdot i(G');$$

$$\partial_4(G) = 52 \cdot \mathcal{D}_{11} + (18 \cdot \mathcal{D}^4_{10} + 6 \cdot \mathcal{D}^3_{10}) + (18 \cdot \mathcal{D}^4_{01} + 6 \cdot \mathcal{D}^3_{01}) + 16 \cdot \mathcal{D}^{33}_{00}.$$

□

引理 2–9 推出本文的主要结果。

定理 1. 对于每个外平面图 G，我们有 $i(G) > \partial_4(G)$.

4 结语

以下对定理 1 的推广似乎成立。

猜想 1. 对于每个平均顶点度至多为 $k \geq 1$ 的图 G，不等式$i(G) \geq \partial_k(G)$成立。此外，当且仅当 G 是 k-正则图时，等号成立。

尽管我们甚至无法证明这一结论对于 $k = 4$ 成立，但很容易为树这一类图得到类似结果。

定理 2. 对于每棵树 T，都有 $i(T) > \partial_2(T)$。

证明。显然，对于顶点数不超过 3 的每棵树，不等式都成立。设 T 是一棵 n-顶点树，满足 $i(T) \leq \partial_2(T)$，且对于每棵满足 $|V(T')| < |V(T)|$ 的树 T'，都有 $i(T') > \partial_2(T')$。考虑 T 中的一条直径路径 $X = x_1x_2x_3 \dots x_k$。若 $k \leq 3$，则 $\partial_2(T) \leq 2$ 且 $i(G) \geq 5$，因此我们假设 $k \geq 4$。令 T_2（分别为 T_3）是 T 中按包含关系极大的子树，满足x_2、$x_3 \in V(T_2)$ 且 $deg(x_2) = 1$（分别为 x_3、$x_4 \in V(T_3)$ 且 $deg(x_3) = 1$）。由于 x_2 的所有邻点（可能的 x_3 除外）都属于 T 的每个 2-支配集，因此我们有

$$\partial_2(T) = \partial_2(T, x_2^+) + \partial_2(T, x_2^-) \leq \partial_2(T_2) + \partial_2(T_3).$$

另一方面，

$$i(T) = i(T, x_1^-) + i(T, x_1^+) \geq i(T_2) + i(T_3).$$

由于 $i(T_2) > \partial_2(T_2)$ 且 $i(T_3) > \partial_2(T_3)$，因此有 $i(T) > \partial_2(T)$。

□

5 致谢

本研究在圣彼得堡莱昂哈德·欧拉国际数学研究所开展，并得到俄罗斯联邦科学和高等教育部的资助（协议编号：075–15–2022–287）。

参考文献

[1] D. Br´od，Z. Skupien，具有支配集极值数的树。《澳大拉西亚组合学杂志》，35，273–290，2006年。

[2] D. S. Taletskii，具有 k-支配集极值数的树。《离散数学》，345，112656，2022年。

[3] Z. L. Nagy，关于 k-支配独立集的数量。Journal of Graph Theory，84(4)，566–580，2015。

[4] D. Gerbner、B. Keszegh、A. Methuku、B. Patk'os、M. Vizer。关于 k-支配独立集最大数量的一项改进。Journal of Graph Theory，91(4)，88–97，2017。

[5] J. W. Moon, L. Moser, 关于图中的团。Israel Journal of Mathematics，3，23–28，1965。

[6] A. F. Alameddine，《极大外平面图的斐波那契数的界》，The Fibonacci Quarterly，36.3，206–210，1998。