arXiv:2305.01581v1 [cs.FL] 2 May 2023

重新审视 VASS 中的可覆盖性：改进 Rackoff 界以实现条件最优性

MarvinKünnemann 凯撒斯
劳滕-兰道理工大学
FilipMazowiecki 华
沙大学，波兰
LiaSchütze ！
马克斯·普朗克软件系统研究所 (MPI-SWS)
Henry Sinclair-Banks ！ ˇ
离散数学及其应用中心（DIMAP）与华威大学计算机科学系，考文垂，英国

Karol Węgrzycki
萨尔大学与马克斯·普朗克信息学研究所，萨尔布吕肯，德国

摘要

奠基性结果表明，带状态的向量加法系统（VASS）的可覆盖性问题属于指数空间（Rackoff，'78），且即使采用一元编码，该问题仍是指数空间困难的（Lipton，'76）。更准确地说，Rosier 和 Yen 后来利用 Rackoff 的界定技术证明，若可覆盖性成立，则存在长度至多为 $n^{2^{\mathcal{O}(d \log d)}}$ 的运行，其中 d 是维度， n 是给定一元向量加法系统的大小。更早之前，Lipton 证明，对于 d 维的一元向量加法系统中的某些可覆盖性实例，只有长度至少为 $n^{2^{\Omega(d)}}$ 的运行才能见证可覆盖性。我们的第一个结果弥合了这一差距。我们通过去除两次取指数的 $\log(d)$ 因子改进了上界，从而匹配 Lipton 下界。这也弥合了判定可覆盖性所需精确空间复杂度方面的相应差距。此外，我们还得到一个用于可覆盖性的确定性 $n^{2^{\mathcal{O}(d)}}$ 时间算法。我们的第二个结果给出了匹配的下界：在指数时间假设成立的条件下，不存在确定性 $n^{2^{o(d)}}$ 时间算法。

在分析可覆盖性时，一种标准的证明技巧是考虑计数器有界的向量加法系统。由于与定时自动机有着紧密联系，有界向量加法系统是一种有趣且广受欢迎的模型。此外，我们研究一种自然情形，其中计数器上界与向量加法系统的大小呈线性关系。在这种情况下，平凡的穷举搜索算法可在$\mathcal{O}(n^{d+1})$时间内运行。我们提出证据表明，这已接近最优。在一维情形下，我们证明该平凡算法在条件意义上是最优的：在 k-循环假设下，所需时间为 $n^{2-o(1)}$。对于一般的固定维度 d，我们证明在3-一致超团假设下，所需时间为 $n^{d-2-o(1)}$。

2012年 ACM 学科分类计算理论 → 计算模型

关键词与短语 向量加法系统、可覆盖性、可达性、精细复杂性——性、指数时间假设、 k-循环假设、超团假设

资助*Marvin Künnemann*：研究部分由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助，项目编号为462679611。*Filip Mazowiecki*：由欧洲研究委员会（ERC）INFSYS 项目资助，协议编号 950398。*Henry Sinclair-Banks*：由英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）标准研究生奖学金（博士培训伙伴关系）资助，项目编号 EP/T5179X/1。*Karol Węgrzycki*：由 TIPEA 项目资助。该项目获得欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号 850979）下欧洲研究委员会（ERC）的资助。

致谢 我们谨向匿名评审致谢，感谢他们提出的意见、付出的时间，尤其感谢他们指出了一项相关工作 [30]。

1 引言

带状态的向量加法系统（VASS）是一种广受欢迎的并发模型，在数据库理论 [9], 、业务流程 [48], 等领域有诸多应用（参见综述 [46]）。一个 d 维向量加法系统（d-VASS）由一个有限自动机和 d 个非负值计数器组成，计数器可通过转移进行更新。d-VASS 中的配置由一个状态和一个取值于自然数的 d 维向量组成。VASS 的一个核心判定问题是可覆盖性问题，即判断是否存在一条运行，能从给定的初始配置到达某个配置，使其计数器值至少达到给定目标配置中的相应计数器值。可覆盖性问题可用于验证安全性条件；这类条件通常归结为判断能否到达某个特定状态，而不要求计数器值精确到某个数值 [13, 24]。粗略来说，VASS 可作为并发系统的一种简化模型，其中维度对应于进程可处于的位置数，而每个计数器值对应于处在某一特定位置的进程数 [21, 25]。

1978年，Rackoff [44] 通过证明如果可覆盖性成立，则存在一个长度为双指数级的运行，表明可覆盖性属于指数空间。随后，Rosier 和 Yen [45] 对 Rackoff 的思想进行了更为详细的分析和讨论，并指出，如果可覆盖性成立，则必然存在一个长度至多为 $n^{2^{\mathcal{O}(d \log d)}}$ 的运行作为见证，其中 n 是给定的一元编码 d-向量加法系统的大小。此外，这还得到了一个用于可覆盖性的 $2^{\mathcal{O}(d \log d)} \cdot \log(n)$-空间算法。早在1976年，Lipton [36] 就通过构造一个可覆盖性实例证明，即使向量加法系统采用一元编码，可覆盖性仍然是指数空间困难的；该实例只能由一个长度为双指数级的运行 $n^{2^{\Omega(d)}}$作为见证。Rosier 和 Yen [45] 还给出了一项证明，将 Lipton 的构造推广，从而表明可覆盖性需要 $2^{\Omega(d)} \cdot \log(n)$-空间。尽管从经典复杂性的角度来看，该问题是指数空间完全的，但可覆盖性所需的精确空间复杂度仍存在一个尚未解决的差距 [45,Section 1]。通过采用一种类似于 Rackoff 论证的方法，我们弥合了这一持续三十八年的差距，将上界改进至与 Lipton 下界相匹配。

结果 1： 如果可覆盖性成立，那么存在一个长度至多为 $n^{2^{\mathcal{O}(d)}}$ 的运行（定理 3.3）。因此，我们得到一个最优的 $2^{\mathcal{O}(d)} \cdot \log(n)$空间算法来判定可覆盖性（推论 3.4）。

我们的界还意味着存在一个用于判定可覆盖性的确定性 $n^{2^{\mathcal{O}(d)}}$ 时间算法。作为补充，在指数时间假设（ETH）成立的条件下，我们给出了确定性运行时间的匹配下界。

结果 2： 在 ETH 下，不存在确定性的 $n^{2^{o(d)}}$时间算法能够判定一元编码 d-VASS 中的可覆盖性（定理 4.2）。

尽管我们的结果为可覆盖性问题的时间复杂度中的 $2^{\Theta(d)}$ 给出了一个增长极快且条件最优的指数，但这些结果依赖于精心设计的构造，以确保能够观察到较大的计数器值。然而，在某些情况下，自然的做法是考虑受限版本的可覆盖性问题，其中所有计数器值都保持有界。由此得到最简单的模型之一——固定维度有界一元向量加法系统，我们也为其获得了更紧的结果。对于 B 有界向量加法系统的判定问题，因其与定时自动机 [27, 22, 40]有着紧密联系而受到研究，其中 B 是输入的一部分。我们研究线性有界一元向量加法系统，即最大计数器值被限制为不超过向量加法系统规模的常数倍。有趣的是，在线性有界一元向量加法系统中，可覆盖性与可达性等价。平凡算法

通过对配置空间进行深度优先搜索来运行，在可覆盖性和可达性问题上均可在 $\mathcal{O}(n^{d+1})$ 时间内完成。我们给出了证据，表明该平凡算法是最优的。

结果 3： 线性有界一元一维向量加法系统中的可达性至少需要 $n^{2-o(1)}$ 时间，前提是 k-循环假设成立（定理 5.4）。

这实际上证明了，在一维情形下，平凡算法是最优的。对于高维情形，我们证明，平凡算法与最优确定性时间算法的差距至多为一个 $n^{3+o(1)}$ 时间因子。

结果 4： 线性有界一元 d维向量加法系统中的可达性至少需要 $n^{d-2-o(1)}$ 时间，前提是 3-均匀 k-超团假设成立（定理 5.8）。

概括而言，这些结果从时间复杂度的角度补充了已有的空间复杂度结果：对于任意固定维度 d，一元 d 维向量加法系统中的可覆盖性是 NL 完全的 [44]。

组织与概述 第 3 节给出了我们的第一个主要结果，即改进可覆盖性所需空间的上界。最值得注意的是，在定理 3.3 中，我们证明了如果可覆盖性成立，则存在一个长度至多为 $n^{2^{\mathcal{O}(d)}}$ 的运行。随后，在推论 3.4 中，我们得到了一个非确定性的 $2^{\mathcal{O}(d)} \cdot \log(n)$ 空间算法，以及一个用于判定可覆盖性的确定性 $n^{2^{\mathcal{O}(d)}}$ 时间算法。与 Rackoff 的方法大体相同，我们对维度进行归纳。区别在于归纳步骤；Rackoff 的归纳假设处理的是所有计数器都受同一个经过精心选择的值所界定的情形。直观地说，这些配置被限制在一个 d 维超立方体内。事实证明，这并非最优。这是因为，边长为 ℓ 的 d 维超立方体的体积为 ℓ^d；展开归纳步骤后，得到的上界大约为 $n^{d\cdot(d-1)\cdot\ldots\cdot 1} = n^{d!} = n^{2^{\mathcal{O}(d \log d)}}$，因此会出现 $\log(d)$ 的二次指数因子。我们证明中的关键要素，是用一组体积大幅减小的对象替代 d 维超立方体，从而减少见证可覆盖性的运行中的配置数量。

第4节给出了我们的第二个主要结果：在指数时间假设成立的条件下，可覆盖性所需时间的匹配下界。在引理 4.3 中，我们首先将图中寻找一个k团的问题归约为带零测试的有界一元二维向量加法系统中的一个可覆盖性实例。随后，通过引理 4.4，我们实现了 Rosier 和 Yen 提出的技术：在给定计数器上界时，以将维度增加到 d 维一元向量加法系统为代价，移除零测试。接着，在定理 4.2 中，通过令 $k = 2^d$，我们得出结论：若指数时间假设成立，则不存在用于一元 d-向量加法系统可覆盖性问题的确定性 $n^{2^{o(d)}}$ 时间算法。这是因为指数时间假设意味着，不存在用于在具有 n 个顶点的图中寻找 k团的 $f(k) \cdot n^{o(k)}$ 时间算法（定理 4.1）。

第 5 节包含我们关于有界固定维度一元 VASS 的其他结果。首先，定理 5.4 指出，在 k-循环假设（假设 5.2）下，不存在一个确定性 $n^{2-o(1)}$ 时间算法来判定线性有界一维向量加法系统中的可达性。此外，我们在推论 5.5 中得出：若假设 k-循环假设成立，则不存在一个确定性 $n^{2-o(1)}$ 时间算法来判定（非有界）一元二维向量加法系统的可覆盖性。接下来，我们证明定理 5.8，该定理声称，在 3-均匀 k-超团假设（假设 5.7）下，不存在一个确定性 $n^{d-o(1)}$ 时间算法来判定线性有界一元（$d+2$）- 向量加法系统中的可达性。我们通过两个部分实现这一点。首先，在引理 5.9 中，我们将寻找一个 $4d$-超团的问题归约为一个有界一元（$d+1$）-向量加法系统中带有固定数量零测试的可达性实例。其次，通过引理 5.10，我们实现了新提出的控制计数器技术

arXiv

Czerwiński 和 Orlikowski [16] ，以移除固定数量的零测试，代价是将维度增加一。

相关工作 VASS 的可覆盖性问题具有丰富的结构，至今仍受到广泛关注。能够覆盖目标配置的配置集合是向上闭的，这意味着增大初始计数器值后，可覆盖性仍然成立。可覆盖性的另一种方法是反向算法，它利用了这一性质。从目标配置出发，计算能够覆盖它的配置集合 [1]。得益于向上闭性质，只需维护极小配置集合。反向算法依据狄克逊引理终止；不过，利用 Rackoff 界可以证明其运行时间为双指数时间 [10]。这一技术已在 VASS 可覆盖性及其若干扩展问题中得到深入分析 [23, 31]。尽管复杂性很高，许多基于反向算法的可覆盖性实现仍能在实践中取得良好效果。直观而言，其思路是利用能够在 SMT 求解器中高效实现的松弛方法，对配置集合进行剪枝 [21, 7, 8]。

VASS 的另一个核心判定问题是可达性问题，它要判断是否存在一条运行，能从给定的初始配置到达给定的目标配置。可证明，可达性是一个更难的问题。从本质上说，可达性与可覆盖性的区别在于，可达性允许对每个计数器进行一次零测试。计数器机众所周知与图灵机等价， [42], 可以看作能够任意对计数器进行零测试的 VASS；在这种情况下，可覆盖性与可达性等价，且不可判定。1981年，Mayr 证明了 VASS 中的可达性是可判定的, [38], 这使 VASS 成为计数器机中最丰富的可判定变体之一。经过数十年的研究，直到最近，人们才确定 VASS 中可达性问题的复杂性为阿克曼完备。 [34, 16, 33]在 VASS 中，为可覆盖性与可达性问题证明下界的一种常见方法，是在一定限制下模拟计数器机。我们用于证明下界的总体方法也遵循这一思路：首先，将在图中寻找团、在图中寻找环，以及在超图中寻找超团，归约为若干具有额外性质的 VASS 可覆盖性中间实例，例如计数器有界或零测试次数固定。随后，再用标准的高维 VASS 模拟这些以某种方式受限的计数器机。此类模拟借助了此前提出的两种技术实现。Rosier 和 Yen 利用 Lipton 构造，得到能够模拟具有有界计数器的计数器机的 VASS。 [45]Czerwiński 和 Orlikowski 已证明，在 VASS 中加入一个额外计数器，并精心选择转移效应和可达性条件，可以隐式地执行有限次零测试。 [16]

近年来，一些研究致力于低维向量加法系统 [3, 41]的可覆盖性问题。此外，低维向量加法系统的可达性也受到了广泛关注，尤其是一维向量加法系统 [47, 26]和二维向量加法系统 [28, 6]。对于受限类别扁平向量加法系统，其他固定维度的情况也已有研究 [15, 17]。

另一种已研究的变体——双向向量加法系统，具有这样的性质：对于每个转移 $(p, \mathbf{x}\ q)$，其逆转移 $(q, -\mathbf{x}\ p)$ 也存在。双向向量加法系统中的可达性问题等价于交换半群中的一致字问题；二者均为指数空间完全 [39]。这不要与一般向量加法系统中的可逆可达性问题混淆，后者同样为指数空间完全 [32]。1982年，Meyer 和 Mayr 以交换半群的术语提出了一项开放问题：一般向量加法系统中可覆盖性的已知最佳上界 [44], 、双向向量加法系统中可覆盖性的已知最佳下界 [36], ，并询问能否改进这些界 [39, Section 8, Problem3]。随后，Rosier 和 Yen 改进了一般向量加法系统中可覆盖性的上界

达到 $2^{\mathcal{O}(d \log d)} \cdot \log(n)$ 空间 [45]。最后，Koppenhagen 和 Mayr 证明，双向向量加法系统中的可覆盖性问题可在 $2^{\mathcal{O}(n)}$ 空间内判定 [30], ，从而与下界相匹配。

2 预备知识

我们用粗体字体表示向量。通过写作 $\mathbf{v}[i]$，表示向量 $\mathbf{v}$ 的第 i 个分量。给定两个向量 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$，若对每个 $1 \leq i \leq d$ 都有 $\mathbf{u}[i] \leq \mathbf{v}[i]$，则写作 $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$。对于每个$1 \leq i \leq d$，我们用 $\mathbf{e}_i \in \mathbb{Z}^d$ 表示第 i 个标准基向量，它满足 $\mathbf{e}_i[i] = 1$，且对所有 $j \neq i$ 都有 $\mathbf{e}_i[j] = 0$。给定向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$，我们定义 $\|\mathbf{v}\| = \max\{1, |\mathbf{v}[1]|, \ldots, |\mathbf{v}[d]|\}$。全文中，我们假设 log 以 2 为底。我们用 $\mathrm{poly}(n)$ 表示 $n^{\mathcal{O}(1)}$。

一个 d 维的带状态的向量加法系统（d-向量加法系统）$V = (Q, T)$ 由一个非空有限状态集合 Q 和一个非空转移集合 $T \subseteq Q \times \mathbb{Z}^d \times Q$ 组成。d-向量加法系统的配置是一个对 $(q, \mathbf{v}) \in Q \times \mathbb{N}^d$，由当前状态 q 和当前计数器值 $\mathbf{v}$ 组成，记作 $q(\mathbf{v})$。给定两个配置 $p(\mathbf{u})$、$q(\mathbf{v})$，若存在 $t = (p, \mathbf{x}, q) \in T$，其中 $\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$，则我们写作$p(\mathbf{u}) \to q(\mathbf{v})$。我们可以将 $\mathbf{x}$ 称为转移的更新，也可以写作 $p(\mathbf{v}) \xrightarrow{t} q(\mathbf{w})$，以强调所执行的转移 t。

向量加法系统中的路径是一个（可能为空的）转移序列 $((p_1, \mathbf{x}1, q_1) \ldots, (p_\ell, \mathbf{x}_\ell, q_\ell))$，其中 $(p_i, \mathbf{x}_i, q_i) \in T$对所有 $1 \leq i \leq \ell$均成立，并且连续转移的起始状态和结束状态相匹配 $q_i = p_{i+1}$ 对所有 $1 \leq i \leq \ell - 1$均成立。向量加法系统中的运行 π 是一个配置序列 $\pi = (q_0(\mathbf{v}_0) \ldots, q_\ell(\mathbf{v}_\ell))$，满足 $q_i(\mathbf{v}_i) \to q_{i+1}(\mathbf{v}_{i+1})$ 对所有 $1 \leq i \leq \ell - 1$均成立。我们用 $\mathrm{len}(\pi) = \ell + 1$表示运行的长度。如果存在这样的运行 π，我们可以写作$q_0(\mathbf{v}_0) \xrightarrow{\pi} q_\ell(\mathbf{v}_\ell)$。如果存在一条从 $p(\mathbf{u})$ 到 $q(\mathbf{v})$ 的运行，我们也可以写作 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v})$。运行 π 的底层路径是各配置之间经过的转移序列 $(t_1, \ldots, t_\ell)$，因此 $q_i(\mathbf{v}_i) \xrightarrow{t_{i+1}} q_{i+1}(\mathbf{v}_{i+1})$ 对所有 $0 \leq i \leq \ell - 1$ 均成立。

一个 B有界 d-VASS，简写为（B，d）-VASS，是指对计数器值 $B \in \mathbb{N}$ 以及 d-VASS $\mathcal{V}$给出的整数上界。一个（B，d）-VASS 中的配置是一个对$q(\mathbf{v}) \in Q \times \{0, \ldots, B\}^d$。有界 VASS 中路径和运行的概念与 VASS 中相同，但会相应地针对适当的有界配置进行调整。需要注意的是，应当将 B 视为问题描述的一部分，而非输入，因为它将由一个依赖于 VASS 大小的函数隐式给出。例如，我们稍后会讨论线性有界 d-VASS，它表示 $B = \mathcal{O}(\|\mathcal{V}\|)$ 的情形。

我们也允许零维 VASS，即不含计数器的 VASS，这类 VASS 可以看作有向图。超图是图的一种推广。形式化地说，超图是一个元组 $H = (V, E)$，其中 V是顶点集合，E 是由 V 的非空子集组成的集合，称为超边。对于一个整数 μ，如果每条超边的基数均为 μ，则称该超图为 μ-均匀超图。注意，2-均匀超图就是标准图。

我们研究可覆盖性问题的复杂性。可覆盖性问题的一个实例（$\mathcal{V}$ $p(\mathbf{u})$ $q(\mathbf{v})$）询问：给定的向量加法系统$\mathcal{V}$中，是否存在一条运行，从给定的初始配置$p(\mathbf{u})$到某个配置 $q(\mathbf{v}')$，使其计数器值至少达到给定目标配置 $q(\mathbf{v})$中的计数器值$\mathbf{v}' \geq \mathbf{v}$。有时我们也考虑可达性问题，它还要求$\mathbf{v}' = \mathbf{v}$，以便目标配置被精确到达。

为了衡量这些问题的复杂性，我们需要讨论所使用的编码方式。在一元编码中，一个 d-向量加法系统 $V = (Q, T)$ 的大小为 $\|V\| = |Q| + \sum_{(p,\mathbf{x},q) \in T} \|\mathbf{x}\|$。我们定义一个一元 d-向量加法系统 $U = (Q', T')$，其转移受到限制，满足 $T' \subseteq Q' \times \{-1, 0, 1\}^d \times Q'$，因此其大小为 $\|U\| = |Q'| + |T'|$。对于任意采用一元编码的 d-向量加法系统 V，都存在一个等价的一元 d-向量加法系统 U，使得 $\|U\| = \|V\|$。一个可覆盖性实例 $(V, p(\mathbf{u}), q(\mathbf{v}))$ 的大小为$n = \|V\| + \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$。存在一个大小相同且等价的可覆盖性实例 $(V', p'(\mathbf{0}), q'(\mathbf{0}))$；考虑添加一个初始转移 $(p', \mathbf{s}, p)$ 和一个最终转移 $(q, -\mathbf{t}, q')$。

arXiv

6 重新探讨向量加法系统中的可覆盖性

众所周知，对于 d-向量加法系统，可覆盖性问题可以归约为可达性问题。确实，对于可覆盖性问题的一个实例 $(\mathcal{V}, p(\mathbf{u}), q(\mathbf{v}))$，定义 $\mathcal{V}' = (Q, T')$，它在目标状态 $T' = T \cup \{(q, \mathbf{e}_i, q) : 1 \leq i \leq d\}$ 处具有额外的递减转移。显然，若存在某个 $\mathbf{v}' \geq \mathbf{v}$，使得 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v}')$ 在 $\mathcal{V}$ 中成立，当且仅当 $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v})$ 在 $\mathcal{V}'$ 中成立。

▶**引理 2.1**（众所周知）。设 $(V, p(\mathbf{u}), q(\mathbf{v}))$ 是一个可覆盖性实例。它可以归约为一个可达性实例 $(V', p(\mathbf{u}), q(\mathbf{v}))$，使得 $\|V'\| = O(\|V\|)$。

一个 d维向量加法系统（d-VAS）$\mathcal{V}$ 是一个没有状态的系统，仅由一个非空的转移集合 $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{Z}^d$ 组成。除为简便起见，我们一概省略状态外，所有定义、记号和问题都可以沿用于 VAS。例如，VAS 中的一个配置就是一个向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^d$。Hopcroft 和 Pansiot 在七十年代提出的另一个著名结果表明，可以通过在 VAS 中额外增加三个维度来模拟向量加法系统中的状态 [28]。为清晰起见，所得 VAS 在配置之间具有等价的可达关系；原向量加法系统中的配置 $q(\mathbf{x})$ 对应于 VAS 中的配置 $(\mathbf{x}, a, b, c)$，其中 a、b 和 c 代表状态 q。

▶ **引理 2.2** ([28, 引理 2.1])。一个 d-向量加法系统 $VASS$ 可以由 $(d+3)$-向量加法系统 V' 模拟，使得 $\|V'\| = poly(\|V\|)$。

3 最大计数器值的改进上界

本节致力于改进 Rackoff 的开创性结果。全文中，我们关注可覆盖性问题的任意实例 $(\mathcal{V}, p(\mathbf{s}), q(\mathbf{t}))$，其中 V 是一个 d-向量加法系统 $\mathcal{V} = (Q, T)$，从初始配置 $p(\mathbf{s})$ 出发，到达配置 $q(\mathbf{t}')$，且其计数器值至少达到目标配置 $q(\mathbf{t})$ 的计数器值。我们记作 $n = \|\mathcal{V}\| + \|\mathbf{s}\| + \|\mathbf{t}\|$。直观地说，$n$ 也可以取状态数加上任意转移上最大更新值的绝对值，因为这些差异可以由下文上界中的第二个指数吸收。以下两个定理源自 Rackoff 技术及 Rosier 和 Yen 后续的工作，具体参见 [44,引理 3.4 和定理 3.5]以及 [45,定理 2.1 和引理 2.2]。

▶ 定理 *3.1*（由 [44, 引理 *3.4*] 和 [45, 定理 *2.1*]推得的推论）。设 $p(s) \xrightarrow{*} q(t')$，其中某个 $t' \geq t$。则存在一个运行 π，使得 $p(s) \xrightarrow{\pi} q(t'')$，其中某个 $t'' \geq t$，且 $len(\pi) \leq n^{2^{\mathcal{O}(d)}} log_d$。

▶ 定理 *3.2*（参见 [44, 定理 *3.5*]）。给定一个 d-向量加法系统 V、整数 ℓ，以及两个构型 $p(s)$ 和 $q(t)$，存在一个算法，用于判定是否存在长度 $len(\pi) \leq \ell$ 的运行 π，能够证明可覆盖性，即对于某个 $t' \geq t$，有 $p(s) \xrightarrow{\pi} q(t')$。该算法可实现为使用非确定性 $O(d \log(n \cdot \ell))$ 空间运行，或在确定性 $2^{\mathcal{O}(d \log(n \cdot \ell))}$ 时间内运行。

证明。在长度不超过 ℓ 的运行中，观测到的计数器值显然不超过 $n \cdot \ell$。注意，每个配置都可以用 $\mathcal{O}(d \log(n \cdot \ell))$ 空间表示。因此，非确定性算法只需维护当前配置，即可通过即时猜测一条路径来判定可覆盖性。当且仅当最终配置覆盖了$\mathbf{t}$ 时，该算法才接受。

第二部分由标准构造得出：如果一个问题可在 $S(n)$ 非确定性空间内求解，那么它就可在 $2^{\mathcal{O}(S(n))}$ 确定性时间内求解。事实上，可以构造所有配置组成的图，并检查是否存在一条从初始配置到最终配置的路径。由于配置数量至多为 $2^{\mathcal{O}(d \log(n \cdot \ell))}$，因此可在 $2^{\mathcal{O}(d \log(n \cdot \ell))}$-时间内完成。◀

请注意，定理 3.1 与定理 3.2 结合后，可得到用于可覆盖性的非确定性 $2^{\mathcal{O}(d \log d)}$-空间算法和确定性 $n^{2^{\mathcal{O}(d \log(d))}}$-时间算法。我们的结果将第二个指数中的界提高了$\mathcal{O}(\log(d))$ 倍。

▶ **定理 3.3**。 假设 $p(\mathbf{s}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{t}')$ 对某个 $\mathbf{t}' \geq \mathbf{t}$成立。那么存在一个运行 π 使得 $p(\mathbf{s}) \xrightarrow{\pi} q(\mathbf{t}'')$ 对某个 $\mathbf{t}'' \geq \mathbf{t}$ 成立，且 $\text{len}(\pi) \leq n^{2^{\mathcal{O}(d)}}$。

结合定理 3.2 可得以下推论。

▶ **推论 3.4**。 d-向量加法系统的可覆盖性可通过非确定性 $2^{\mathcal{O}(d)} \cdot \log(n)$ 空间算法以及确定性 $n^{2^{\mathcal{O}(d)}}$-时间算法判定。

注意，根据引理 2.2，我们可以处理向量加法系统，而非向量加法系统。回顾一下，由于没有状态， d-向量加法系统仅由一组位于 $\mathbb{Z}^d$ 中的向量组成，我们仍将它们称为转移。配置就是一个位于 $\mathbb{N}^d$中的向量。因此，我们可以将注意力集中在 d-维向量加法系统 $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ 中的可覆盖性问题实例 $(\mathcal{V}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$：从初始配置$\mathbf{s}$ 出发，运行至一个$\mathbf{t}'$ 至少与目标配置$\mathbf{t}$一样大的配置。本节余下部分将用于证明定理 3.3。仿照 Rackoff 的证明，我们对维度 d进行归纳。具体而言，我们证明一个更强的命题；定理 3.3 是以下引理的直接推论。

▶ **引理 3.5**。 定义 $L_i := n^{4^i}$，并令 $\mathbf{t} \in \mathbb{N}^d$ 满足 $\|\mathbf{t}\| \leq n$。对于任意 $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d$，若$\mathbf{s} \xrightarrow{*} \mathbf{t}'$ 对某个 $\mathbf{t}' \geq \mathbf{t}$ 成立，则存在一个运行 π，使得 $\mathbf{s} \xrightarrow{\pi} \mathbf{t}''$ 对某个 $\mathbf{t}'' \geq \mathbf{t}$ 成立，且$\text{len}(\pi) \leq L_d$。

基例为 $d = 0$。在零维向量加法系统中，唯一可能的配置是空向量 ε，因此只有平凡运行 $\varepsilon \xrightarrow{*} \varepsilon$。这显然满足该引理。

对于归纳步骤，当 $d \geq 1$时，我们假设引理 3.5 对所有更低维度 0、.....、$d-1$均成立。令 $\pi = (\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \ldots\ldots, \mathbf{c}_\ell)$ 为一个长度最短的运行，使得$\mathbf{s} \xrightarrow{\pi} \mathbf{t}'$ 对某个 $\mathbf{t}' \geq \mathbf{t}$成立，因此特别有$\mathbf{c}_0 = \mathbf{s}$ 且$\mathbf{c}_n = \mathbf{t}'$。我们的目标是证明 $\text{len}(\pi) = \ell + 1 \leq L_d$。注意，配置$\mathbf{c}_i$ 必须彼此不同，否则可以轻易缩短 π。我们引入薄配置的概念。

▶**定义 3.6** (薄配置)。在 d-向量加法系统中，若存在 $\{1, \ldots, d\}$ 的一个排列 σ，使得对于每个 $i \in \{1, \ldots, d\}$，都有 $\mathbf{c} \in \mathbb{N}^d$ 薄$\mathbf{c}[\sigma(i)] < M_i$，其中 $M_0 := n$，且对于 $i \geq 1$，$M_i := L_{i-1} \cdot n$，则称配置 $\mathbf{c} \in \mathbb{N}^d$ 是薄的。

回顾上文的运行 $\pi = (\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_\ell)$。令 $t \in \{0, \ldots, \ell\}$ 为 $\mathbf{c}_t$ 不薄时的首个索引；如果 π 中的每个配置都是薄配置，则令 $t = \ell + 1$。我们在第 t 个配置 $\pi = \pi_{\text{thin}} \cdot \pi_{\text{tail}}$ 处分解该运行，其中 $\pi_{\text{thin}} := (\mathbf{c}_0, \ldots, \mathbf{c}_{t-1})$，而 $\pi_{\text{tail}} := (\mathbf{c}_t, \ldots, \mathbf{c}_\ell)$。注意， π_{thin} 或 π_{tail} 可能为空。接下来，我们分别分析 π_{thin} 和 π_{tail} 的长度（见图 1）。我们还将 $\mathbf{m} = \mathbf{c}_t$ 记作首个非薄配置。

▷ 断言 3.7. $\text{len}(\pi_{\text{thin}}) \leq d! \cdot n^d \cdot L_{d-1} \cdot \ldots \cdot L_0$.

证明。根据定义， π_{thin} 中的每个配置都是薄配置。此外，由于 π 的长度最小， π 中没有重复的配置，更不用说 π_{thin}中没有重复配置了。现在我们来计算可能的薄配置数量。$\{1, \ldots, d\}$ 有 $d!$ 种排列。对于给定的排列 σ 和索引 $i \in \{1, \ldots, d\}$，我们知道，对于一个薄配置 $\mathbf{c}$， $0 \leq \mathbf{c}[\sigma(i)] < M_i$，因此第 $\sigma(i)$个计数器的可能取值至多有 $M_i = L_{i-1} \cdot n$ 个。因此，薄配置总数至多为 $d! \cdot \prod_{i=1}^{d} (L_{i-1} \cdot n) = d! \cdot n^d \cdot L_{d-1} \cdot \ldots \cdot L_0$。◀

arXiv

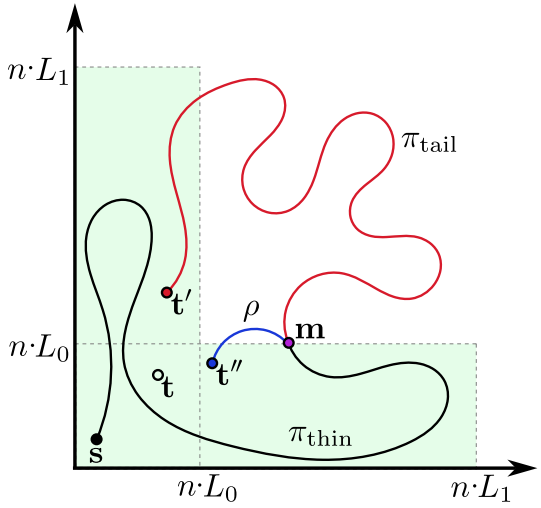


图 1 断言 3.7 和断言 3.8 的证明示意图，仅限于二维情形。注意，$\mathbf{s}$ 是初始配置，$\mathbf{t}$ 是目标配置。绿色阴影多边形内的每个配置都是薄的，其中绿色阴影多边形的每个矩形分量都对应一种索引排列。注意，$\mathbf{m}$ 是绿色阴影多边形外侧紧邻的第一个非薄配置。断言 3.7 将 π_{thin} 及其最大长度界定为绿色多边形的体积。断言 3.8 论证存在一条从 $\mathbf{m}$ 到 $\mathbf{t}'' \geq \mathbf{t}$ 的可执行运行 ρ（蓝色线条所示），其长度至多为 L_{d-1}，可用来替代从 $\mathbf{m}$ 到 $\mathbf{t}' \geq \mathbf{t}$的运行 π_{tail}（红色线条所示）。

▷ 断言 3.8。$\text{len}(\pi_{\text{tail}}) \leq L_{d-1}$.

证明。设 $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$ 为 π_{tail} 的第一个配置。令 σ 为一个排列，使得 $\mathbf{m}[\sigma(1)] \leq \mathbf{m}[\sigma(2)] \leq \ldots \leq \mathbf{m}[\sigma(d)]$。由于 $\mathbf{m}$ 不是瘦的，对于每个排列 σ'，都存在一个 $i \in \{1, \ldots, d\}$，使得 $\mathbf{m}[\sigma'(i)] \geq M_i$；特别地，这对 σ 也成立。注意，这也意味着 $M_i \leq \mathbf{m}[\sigma(i+1)] \leq \ldots \leq \mathbf{m}[\sigma(d)]$。

我们通过忽略计数器 $\sigma(i) \ldots, \sigma(d)$，从 $\mathcal{V}$ 构造一个 $(i-1)$-向量加法系统 $\mathcal{U}$。形式化地说，若存在 $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$，使得对每个 $1 \leq j \leq i-1$ 都有 $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ 且 $\mathbf{u}[j] = \mathbf{v}[\sigma(j)]$，则 $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$。在这种情况下，我们称 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{v}$ 经由 σ 的投影。我们将使用归纳假设证明，存在一条短路径 ρ'，它在 $\mathcal{U}$ 中从 $\mathbf{m}$（的投影）出发，并覆盖 $\mathbf{t}$（的投影）。随后我们将证明，$\mathbf{m}$ 的其余分量足够大，因此将 ρ' 嵌入 $\mathcal{V}$ 后仍能保持其可覆盖性。

回顾一下，$\mathbf{t}'$ 是运行 π 的最终配置。注意，运行 π_{tail} 通过对每个配置进行置换和投影，在 U 中诱导出一次运行 π'_{tail}。更准确地说，$(\mathbf{m}[\sigma(1)], \ldots, \mathbf{m}[\sigma(i-1)]) \xrightarrow{\pi' \text{ tail}} (\mathbf{t}'[\sigma(1)], \ldots, \mathbf{t}'[\sigma(i-1)])$。根据归纳假设，存在 U 中的一次运行 ρ'，使得 $(\mathbf{m}[\sigma(1)], \ldots, \mathbf{m}[\sigma(i-1)]) \xrightarrow{\rho'} (\mathbf{t}''[\sigma(1)], \ldots, \mathbf{t}''[\sigma(i-1)])$，并且 $(\mathbf{t}''[\sigma(1)], \ldots, \mathbf{t}''[\sigma(i-1)]) \geq (\mathbf{t}[\sigma(1)], \ldots, \mathbf{t}[\sigma(i-1)])$，且 $\text{len}(\rho') \leq L_{i-1}$。

令 $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{\text{len}(\rho')})$ 为运行 ρ' 的底层路径，即在 $\mathcal{U}$ 中依次添加以构成运行 ρ' 的转换序列。根据构造，每个转换向量 $\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ 都有一个对应的转换向量 $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$，其中 $\mathbf{u}_i$ 是 $\mathbf{v}_i$ 经由 σ 得到的投影。现在我们将证明，以下运行见证了 $\mathbf{t}$ 的可覆盖性。

$$\rho = \left(\mathbf{m},\ \mathbf{m} + \mathbf{v}_1,\ \mathbf{m} + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{m} + \sum_{j=1}^{\text{len}(\rho')} \mathbf{v}_j \right)$$

为此，我们验证 (i) ρ 是一个运行，也就是说，所有配置都属于 $\mathbb{N}^d$；以及 (ii) 最终配置确实覆盖 $\mathbf{t}$。对于分量 $\sigma(1)$、. . .、 $\sigma(i-1)$，这直接由归纳假设得出。对于所有其他分量，我们将证明 ρ 的所有配置在这些分量上都覆盖 $\mathbf{t}$ 。这同时满足 (i) 和 (ii)。

令 j 为剩余分量中的任意一个。回忆一下，根据 $\mathbf{m}$ 的选取，$\mathbf{m}[j] \geq M_i = n \cdot L_{i-1}$。由于对于每个 $1 \leq j \leq \mathsf{len}(\rho')$， $n > \|\mathcal{V}\| \geq \|\mathbf{v}_j\|$，这意味着在单步中，某个计数器的值最多变化 n。鉴于 $\mathsf{len}(\rho) = \mathsf{len}(\rho') \leq L_{i-1}$，对于 ρ 中的每个配置，其余各分量上的值都必须至少为 n 。特别地，注意到 $\|\mathbf{t}\| \leq n$， ρ 的最终配置满足

$$\mathbf{m} + \sum_{j=1}^{\mathsf{len}(\rho')} \mathbf{v}_j \geq \mathbf{t}.$$

最后，注意到 $\mathsf{len}(\rho) = \mathsf{len}(\rho') \leq L_{i-1} \leq L_{d-1}$。 ◀

为结束本节，我们证明引理 3.5 可由断言 3.7 和断言 3.8 推出。

引理 3.5 的证明。 由断言 3.7 和断言 3.8 可得，

$$\begin{aligned}\mathsf{len}(\pi) \leq \mathsf{len}(\pi_{\text{thin}}) + \mathsf{len}(\pi_{\text{tail}}) &\leq d! \cdot n^d \cdot L_{d-1} \cdot \ldots \cdot L_0 + L_{d-1} \\ &\leq 2 \cdot d! \cdot n^d \cdot L_{d-1} \cdot \ldots \cdot L_0.\end{aligned}$$

回想一下 $n \geq 2$，并注意到 $2 \cdot d! \cdot n^d \leq n^{2^d}$。因此，

$$\mathsf{len}(\pi) \leq n^{2^d} \cdot L_{d-1} \cdot \ldots \cdot L_0.$$

接下来，我们利用 $L_i := n^{4^i}$ 的定义来证明

$$\mathsf{len}(\pi) \leq n^{2^d} \cdot \prod_{i=0}^{d-1} n^{4^i} \leq n^{\left(2^d + \sum_{i=0}^{d-1} 4^i\right)}.$$

最后，当 $d \geq 1$, $2^d + \sum_{i=0}^{d-1} 4^i \leq 4^d$ 成立时，因此

$$\mathsf{len}(\pi) \leq n^{4^d} = L_d.$$ ◀

4 可覆盖性的条件时间下界

本节中，我们基于指数时间假设 （ETH） [29]给出一个条件下界。粗略地说，ETH 是一个猜想，认为一个含有 n 个变量的 3-SAT 实例无法由确定性 $2^{o(n)}$ 时间算法求解（现代综述见 [37]） 。在我们的归约中，使用 k-团问题会更方便。在 k-团问题中，给定一个图 $G = (V, E)$ 作为输入，任务是判断 V 中是否存在一个包含 k 个两两相邻顶点的集合。求解k-团问题的朴素算法需要 $\mathcal{O}(n^k)$ 时间。尽管关于 k 的依赖中确切的常数可以改进，但 [43],指数时间假设意味着指数必须线性依赖于 k。

▶ **定理 4.1** ([11, 定理 4.2], [12, 定理 4.5], 和 [14, 定理 14.21])。 假设指数时间假设成立，则对于任意可计算函数 f，不存在运行时间为 $f(k) \cdot n^{o(k)}$ 的算法来解决 k-团问题。此外，可以假设 G 是k-部的，即 $G = (V_1 \cup \ldots \cup V_k, E)$，且边对于 $i \neq j \in \{1, \ldots, k\}$均属于 $V_i \times V_j$。

10 重新审视向量加法系统的可覆盖性

我们将使用定理 4.1 来证明以下关于一元 d-向量加法系统中可覆盖性的条件下界，该结论将在本节末尾证明。

▶**定理 4.2**。 假设指数时间假设成立，则不存在一个$n^{2^{o(d)}}$时间算法，能够判定具有 n 个状态的一元 d向量加法系统中的可覆盖性。

我们首先将 k-团问题归约为有界二维向量加法系统中的可覆盖性问题，并允许执行固定次数的零测试。然后，我们将利用 Rosier 和 Yen 的一项结果，构造一个在可覆盖性方面等价的、无需零测试的（$\mathcal{O}(\log k)$）维向量加法系统。

▶ **引理 4.3**。 给定一个具有 n 个顶点的 k-部图 $G = (V_1 \cup \cdots \cup V_k, E)$，存在一个一元($O(n^{2k})$,2)-向量加法系统 T，包含 $O(k^2)$ 个零测试，当且仅当存在从 $q_I(\mathbf{0})$ 到 $q_F(\mathbf{v})$ 的运行时，其中某个$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$，图 G 中存在一个 k-团。此外，$kT\,k \leq poly(n+k)$，且 T 可在 $poly(n+k)$ 时间内构造。

证明。 不失一般性，我们可以假设图中的每个 k 顶点子集大小都相同，均为 $|V_1| = \ldots = |V_k| = \ell$。因此 $n = k \cdot \ell$。为方便起见，我们记$V = \{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, \ell\}$。

在具体实现归约之前，我们先概述其背后的主要思路。首先找出前 $n = k \cdot \ell$ 个素数，并为每个顶点分配一个不同的素数 $p_{i,\,j}$ （$i,\ j$） $\in V$。注意，不同素数的乘积唯一对应于选取k 个顶点。因此，我们的思路是猜测这样一个乘积，并检验相应的顶点是否构成一个 k-团。为简化说明，我们也将向量加法系统表示为计数器程序，这一做法借鉴了 Esparza 对 Lipton 下界的阐述 [20, 第 7] 节。

我们在算法 1 中概述了构造。注意，计数器 y 仅供子过程使用。与可覆盖性实例的初始配置一样，两个计数器的初始值均为 0。该程序是非确定性的，我们关注某个特定运行是否存在。可以这样理解：当且仅当存在一条执行代码而不会陷入停滞的运行时，可覆盖性才成立。在这个例子中，运行只可能在 `Edge`$[e]$ 子过程中陷入停滞，该过程将在后文解释。最终的具体计数器值并不重要，因为我们的目标只是覆盖目标计数器值 0。变量 i （在第一个循环中）以及变量 i 和 j （在第二个循环中）只是语法糖，用于复制相似代码多次。变量 j （在第一个循环中）和 e （在第二个循环中）则让我们能够简洁地表示向量加法系统中的非确定性。

输入： x $= 0$, y $= 0$x $+= 1$**对于** $i \leftarrow 1$ **到** k**，执行猜测** $j \in \{1,\ \ldots\ldots,\ \ell\}$`Multiply`$[x\,p_{i,\,j}]$**结束循环** $(i,\ j) \in \{1,\ \ldots\ldots,\ k\}^2$, $i \neq j$**执行猜测** $e \in E \cap (V_i \times V_j)$ `Edge`$[e]$**结束**

算法 1 一个带零测试的向量加法系统的计数器程序，包含两个计数器 x 和 y。

算法 1 使用 `Multiply`$[$x $p]$ 和 `Edge`$[e]$ 子过程。这两个子过程将在后文实现。注意，`Multiply`$[$x $p]$ 将计数器 x 作为输入，因为之后当有多个计数器需要相乘时，我们会重用这个子过程。

`Multiply`[x p] 的预期行为是：当且仅当最终得到 x $=$ x $\cdot p$ 时，才能执行该子过程，尽管向量加法系统只能对计数器进行加法增减。仅当边 e 的两个顶点都编码在计数器 x 的值中时，才能执行子过程 `Edge`$[e]$。总的来说，算法 1 的设计使得第一部分将变量 x 乘以 $p_{i,j}$，其中对每个 i，都会猜测一个 j。这相当于从每个 V_i 中选择一个顶点。接着，算法的第二部分会检查从 V_i 和 V_j 中选出的每一对顶点之间是否都有一条边。显然，当且仅当 G 中存在 k-团时，程序才存在一条不会卡住的运行路径。

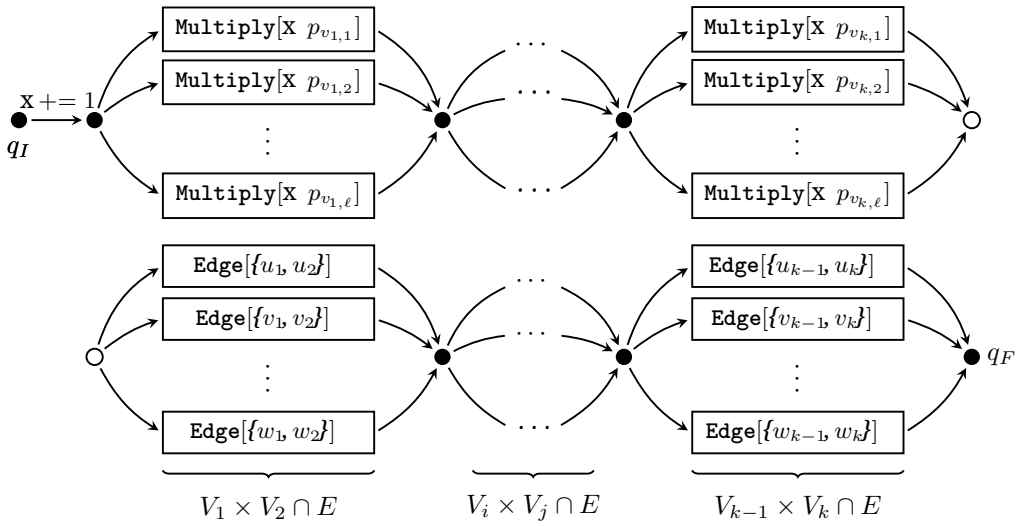


图 2 向量加法系统的上半部分实现了算法 1 的第一行和第一个循环。变量 x 被乘以 k 以非确定性方式选取的素数$p_{i,\ j}$，每个素数对应于 V_i中的一个顶点。向量加法系统的下半部分实现了算法 1 的第二个循环。对于每一对 $i \neq j$，向量加法系统都会以非确定性方式选择 $e \in V_i \cap V_j$ 并调用子过程 `Edge`$[e]$。

在图 2 中，我们给出了一个实现算法 1 的带零测试的向量加法系统。该构造保证了当且仅当 G 中存在一个 k-团时，可以从 $q_I(\mathbf{0})$ 覆盖 $q_F(\mathbf{0})$。

剩下的工作是定义这些子过程。可以将每次对子过程的调用视为对应向量加法系统中的一个独立部分，有点像一个小组件。要进入和离开子过程，需要添加不会改变计数器值的平凡转移。所有子过程都依赖于在开始时满足不变量 y $= 0$，并且在结束时保持该不变量。

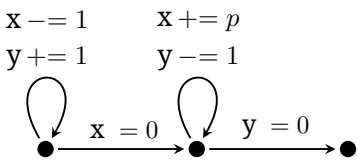
我们从 `Multiply`[x p] 和 `Divide`[x p] 开始，它们确实分别将 x 乘以和除以 p。计数器程序和向量加法系统的实现见算法 2。注意，repeat 循环对应于向量加法系统中的自环。在 `Multiply`[x p] 小工具中，很容易看出，当且仅当计数器 x 乘以 p 时，一次运行才会经过该过程。类似地，在 `Divide`[x p] 小工具中，很容易看出，当且仅当计数器 x 被整除以 p 时，一次运行才会经过该过程。实际上，如果 $p \nmid$x，该除法过程就会卡住，因为不可能退出第一个循环。

arXiv

输入： $\mathtt{x} = v,\ \mathtt{y} = 0$
输出： $\mathtt{x} = v \cdot p,\ \mathtt{y} = 0$

重复
  $\mathtt{x} \mathrel{-}= 1;\ \mathtt{y} \mathrel{+}= 1$
直到 $\mathtt{x} = 0$

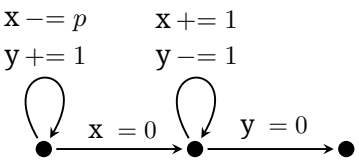
重复
  $\mathtt{x} \mathrel{+}= p;\ \mathtt{y} \mathrel{-}= 1$
直到 $\mathtt{y} = 0$



输入： $\mathtt{x} = v \cdot p,\ \mathtt{y} = 0$
输出： $\mathtt{x} = v,\ \mathtt{y} = 0$

重复
  $\mathtt{x} \mathrel{-}= p;\ \mathtt{y} \mathrel{+}= 1$
直到 $\mathtt{x} = 0$

重复
  $\mathtt{x} \mathrel{+}= 1;\ \mathtt{y} \mathrel{-}= 1$
直到 $\mathtt{y} = 0$



算法 2 `Multiply`[x p] 上方的计数器程序及其向量加法系统实现（左），以及 `Divide`[x p] 上方的计数器程序及其向量加法系统实现（右）。

过程 `Edge`$[\{u,\ v\}]$ 非常简单，由四个子过程依次组成，见算法 3。实际上，要检查边 e 中的顶点是否编码在 x 中，我们只需检查 x 是否能被相应的素数整除。之后，我们再用相同的素数乘以 x，使其值保持不变，并为后续的边检查做好准备。

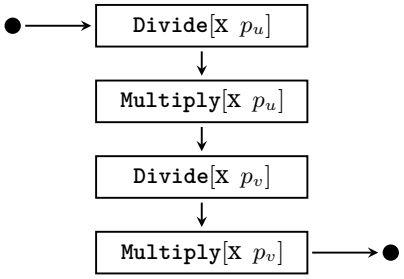
输入： $\mathtt{x} = v,\ \mathtt{y} = 0$
输出： $\mathtt{x} = v,\ \mathtt{y} = 0$

`Divide`[x p_u]

`Multiply`[x p_u]

`Divide`[x p_v]

`Multiply`[x p_v]



算法 3 `Edge`[的计数器程序$\{u, v\}$] 及其向量加法系统实现。

还需要分析该归约中向量加法系统的规模及其构造时间。对于从 $q_I(\mathbf{0})$到 $q_F(\mathbf{v})$的每次运行，其中某个$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$，可观察到的最大计数器值可以上界为 p^k，其中 p 是第 n个素数。根据素数定理（例如，参见 [50]），我们知道 $p^k \leq \mathcal{O}((n\log(n))^k) \leq \mathcal{O}(n^{2k})$是所观察到的计数器值的上界。因此，$\mathcal{T}$是一个以$\mathcal{O}(n^{2k})$为界的一元 2-VASS。

现在，我们计算从 $q_I(\mathbf{0})$ 到 $q_F(\mathbf{v})$ 的每次运行中所执行的零测试数量，其中 $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$。零测试仅发生在 `Multiply` 和 `Divide`子过程的实例中，每个实例执行两次零测试。在 $\mathcal{T}$的第一部分中，一次运行将遇到k 个 `Multiply` 子过程，从而贡献 $2k$ 次零测试。在 $\mathcal{T}$ 的第二部分中，一次运行将遇到 $\binom{k}{2}$ 个 `Edge` 子过程，其中每个包含两个 `Multiply` 子过程和两个 `Divide` 子过程，总共贡献 $8\binom{k}{2}$ 次零测试。综上，每次运行恰好遇到 $2k + 8\binom{k}{2} = 2k(2k-1)$ 次零测试。因此，$\mathcal{T}$是一个具有 $2k(2k-1)$ 次零测试、n^{2k}有界的一元 2-VASS。

最后， `Multiply` 和 `Divide` 子过程包含三个状态和五个转移。由于第 n个素数的上界为$\mathcal{O}(n\log(n))$，我们也得到$\|\mathcal{T}\| = \mathcal{O}(n\log(n))$，因此

我们的向量加法系统可以用一元编码表示。分析算法 1 可知，状态总数关于 n是多项式级的。最后，前 n 个素数可以在$\mathcal{O}(n^{1+o(1)})$时间内找到 [2]。因此，总体而言，$\mathcal{T}$的大小为$\|\mathcal{T}\| = \text{poly}(n+k)$，并且可以在$\text{poly}(n+k)$时间内构造。◀

为了获得可覆盖性的条件下界，我们必须替换零测试。我们采用 Rosier 和 Yen [45] 的一种技术，该技术基于 Lipton [36]的构造。他们证明，具有有限状态控制的 $(2n)^{2^k}$-有界计数器机可以由一个一元 $(\mathcal{O}(k))$-向量加法系统模拟，该系统有 n 个状态。正如 Rosier 和 Yen 在证明之后详细说明的那样，这种技术可以同时应用于多个带零测试的计数器 [45]。因此，向量加法系统的计数器数量会增加，不过我们这里只用两个计数器来实例化该技术。值得注意的是，引理 4.3 中构造的向量加法系统是结构有界的，因此对于任意初始配置，可观测到的最大计数器值都有上限，Lipton 构造的向量加法系统也是如此。

▶ 引理 *4.4*（ [45, 引理 *4.3*]的推论）。设 *T* 是一个具有 n个状态的一元 $(n^{\mathcal{O}(k)}, 2)$-带零测试的向量加法系统，其中参数为 k。那么存在一个具有 $O(n)$ 个状态的 $(O(\log k))$-向量加法系统 V，使得在 T 中存在一条从 $q_I(0)$ 到 $q_F(v)$（其中 $v \geq 0$）的运行，当且仅当在 V 中存在一条从 $q'_I(0)$ 到 $q'_F(w)$（其中 $w \geq 0$）的运行。此外，V 的大小为 $O(|T|)$，且可在相同时间内构造。

据此，我们可以完成本节主定理的证明。

定理 4.2 的证明。令 $k = 2^d$。我们将引理 4.3 应用于 k部图 G，其n 个顶点。因此，我们得到一个一元$(n^{2^{\mathcal{O}(d)}}, 2)$-向量加法系统（带零测试）$\mathcal{T}$，使得 G包含一个 k-团，当且仅当在 $q_I(\mathbf{0})$ 到 $q_F(\mathbf{v})$之间存在一条运行，其中某个$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$，且该运行位于$\mathcal{T}$中。

根据计数器取值的上界，我们可以将引理 4.4 应用于$\mathcal{T}$。由此得到一个$\mathcal{O}(n)$-状态的（$\mathcal{O}(d)$）-向量加法系统$\mathcal{V}$，使得 G 包含一个 k-团，当且仅当在 $q'_I(\mathbf{0})$到 $q'_F(\mathbf{w})$之间存在一条运行，其中某个$\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$，且该运行位于$\mathcal{V}$中。

根据定理 4.1，我们得出结论：在指数时间假设成立的条件下，不存在一个能够判定一元 d-向量加法系统可覆盖性的 $n^{2^{o(d)}}$ 时间算法。◀

5 有界一元向量加法系统中的可覆盖性与可达性

本节将给出有界固定维度一元向量加法系统中可覆盖性的更紧上界。具体而言，对于时间可构造函数 $B(n)$，在 $(B(n)\ d)$-向量加法系统中的可覆盖性问题是：给定一个大小为 n 的 $(B(n)\ d)$-向量加法系统$\mathcal{V} = (Q, T)$，以及配置$p(\mathbf{u})$、$q(\mathbf{v})$，判断是否存在一条从$\mathbf{u}$对应的 p到$\mathbf{v}'$对应的 q 的$\mathcal{V}$ 运行，使得存在某个$\mathbf{v}' \geq$，令每个计数器值在整个运行过程中始终处于$\{0, \ldots, B(n)\}$ 内。我们想澄清一点：这个界并非输入参数。我们关注的是线性有界固定维度向量加法系统这一自然情形，即 $(\mathcal{O}(n)\ d)$-向量加法系统。证明中的观察 5.1 给出了一个简单算法，可立即得到判定可覆盖性问题所需时间的$\mathcal{O}(n^{d+1})$ 上界。我们还为此观察给出了紧密匹配的下界，概览请见表 1。

▶ **观察 5.1**。 **</style}规模的一元$(B(n)\ d)$**-向量加法系统的可覆盖性可在 $O(n(B(n)+1)^d)$ 时间内求解。

证明。 由于一个 $(B(n)\ d)$-向量加法系统中的所有配置都属于有限集合 $Q \times \{0, \ldots, B(n)\}^d$，我们可以通过直接的深度优先搜索穷举所有从 $p(\mathbf{v})$ 可达的配置。每个状态 $q \in Q$ 和每个转移 $t \in T$ 至多会被考虑

arXiv

d	下界	上界
0	$\Omega(n)$（平凡）	$\mathcal{O}(n)$
1	$n^{2-o(1)}$（定理 5.4）	$\mathcal{O}(n^2)$
2	$n^{2-o(1)}$（由上文可知）	$\mathcal{O}(n^3)$
3	$n^{2-o(1)}$（由上文可知）	$\mathcal{O}(n^4)$
$d \geq 4$	$n^{d-2-o(1)}$（定理 5.8）	$\mathcal{O}(n^{d+1})$

表 1 一元（$\mathcal{O}(n)$ d）向量加法系统中的可覆盖性与可达性时间复杂度的条件下界和上界。为清楚起见，我们指出，定理 5.4 以假设 5.2 为前提，定理 5.8 以假设 5.7 为前提。请注意，维度为 $d = 2$ 和 $d = 3$ 时的下界可由定理 5.4 通过添加仅包含零的分量直接得到。所有上界均由观察 5.1 得出。

针对每个可容许向量一次。所需时间为 $\mathcal{O}(n(B(n) + 1)^d)$，因为$|Q|, |T| \leq n$。当且仅当我们曾观察到某个配置 $q(\mathbf{v}')$，其中 $\mathbf{v}' \geq \mathbf{v}$，才接受该实例。◀

线性有界向量加法系统中的可覆盖性下界

现在，我们研究线性有界固定维度一元 VASS 中可覆盖性问题的下界。首先，在维度为一时，我们证明，在 k-环假设下，二次运行时间是条件最优的。其次，在维度为四及以上时，在 3-一致超团假设下，运行时间至少需要达到 $n^{d-2-o(1)}$。综合来看，这为以下结论提供了佐证：用于 ($\mathcal{O}(n)$ d)-VASS 可覆盖性的简单 $\mathcal{O}(n^{d+1})$ 算法已接近最优，概述见表 1。

▶ **假设 5.2** (k-环假设)。对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在某个 k，使得不存在能在 $O(m^{2-\varepsilon})$ 时间内，在具有 m 条边的有向图中寻找 k-环的算法。

k-环假设源于当前最先进的 $\mathcal{O}(m^{2-\frac{c}{k}+o(1)})$ 时间算法，其中 c 是某个常数 [4, 49, 19]。此前已有研究将其用作计算困难性结果的假设，例如参见 [35, 5, 18]。根据颜色编码论证，这是一个标准观察：不失一般性，我们可以假设给定的图是一个 k-圆形分层图 [35, 引理 2.2]。具体而言，可以假设输入图$G = (V, E)$具有顶点划分 $V = V_0 \cup \cdots \cup V_{k-1}$，使得每条边 $\{u, v\} \in E$都属于$V_i \times V_{i+1 \pmod k}$，其中 $0 \leq i < k$。此外，我们还可以假设 $|V| \leq |E|$。

▶ **引理 5.3.** 给定一个含有 m 条边的 k-圆层次图 $G = (V_0 \cup \cdots \cup V_{k-1}, E)$，存在一个一元 ($O(n)$,1)- 向量加法系统 V，使得当且仅当 G 中存在一个 k- 环时，V 中存在一条从 $p(0)$ 到 $q(0)$ 的运行。此外，V 的大小为 $n \leq O(m)$，并且可以在 $O(m)$时间内构造出来。

证明. 考虑一元 $(\mathcal{O}(m), 1)$-向量加法系统 $\mathcal{V} = (Q, T)$，其定义如下；另请参阅图3。为便于构造，我们给 V_0中的顶点编号，因此假设 $V_0 = \{v_1, \ldots, v_\ell\}$.

我们来定义状态集合 Q。顶点子集 V_0有两份副本，分别是$P_0 = \{p_{v_1}, \ldots, p_{v_\ell}\}$ 和 $Q_0 = \{q_{v_1}, \ldots, q_{v_\ell}\}$。此外，每个顶点子集 $V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}$ 也都有副本，即对每个 $1 \leq i \leq k-1$，都有 $S_i = \{s_v \colon v \in V_i\}$。

$$Q = P_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_{k-1} \cup Q_0$$

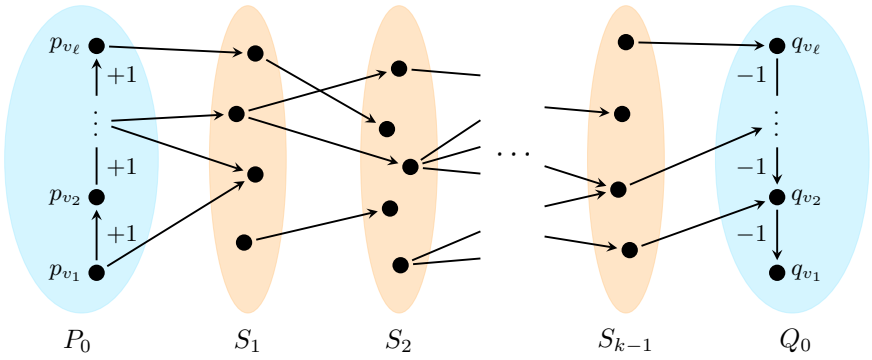


图3 用于在具有 m 条边的 k 圈分层图中寻找 k-环的、大小为 $n \leq \mathcal{O}(m)$ 的 $(\mathcal{O}(n),1)$-向量加法系统 $\mathcal{V}$。请注意，无标记转移的效果为零。可以看到，该图大部分被复制到了线性有界一维向量加法系统的状态和转移中。值得注意的是，V_0 被创建了两个副本。从第一个副本中的 $p_{v_1}(0)$ 出发，可以通过将唯一的计数器加载为与某个顶点对应的值，选取属于 k-环的 V_0 中的一个顶点。随后，在第二个副本中，只有当最初到达的状态对应于一开始选取的顶点时，才能到达 $q_{v_1}(0)$。因此，当且仅当存在 k-环时，才存在一条从 $p_{v_1}(0)$ 到 $q_{v_1}(0)$ 的运行，因为该运行底层路径中访问的状态对应于 k-环的顶点。

现在，我们定义转移集合 T。转移分为三类：初始顶点选择转移 T_I、中间转移 T_E 和最终的顶点检查转移 T_F。

$$T = T_I \cup T_E \cup T_F$$

初始转移依次连接 P_0 中的状态。每个转移都会递增计数器。直观地说，计数器的取值对应于 V_0 中将属于 k-环的顶点，而该环位于 G 中。

$$T_I = \{(p_{v_i}, 1, p_{v_{i+1}}) : 1 \leq i < \ell\}$$

中间转移是原图中各边的有向副本。唯一的区别是，V_0 和 V_1 之间的边现在对应于从 P_0 到 S_1 的转移，而 V_{k-1} 和 V_0 之间的边则变为从 S_{k-1} 到 Q_0 的转移。

$$\begin{aligned} T_E = &\{(p_u, 0, s_v) : \{u, v\} \in V_0 \times V_1\} \cup \{(s_u, 0, q_v) : \{u, v\} \in V_{k-1} \times V_0\} \cup \\ &\{(s_u, 0, s_v) : \{u, v\} \in V_i \times V_{i+1} \text{ for some } 1 \leq i < k-1\} \end{aligned}$$

最终转移依次连接 Q_0 中的状态。每个这样的转移都会递减计数器。直观地说，如果在 Q_0 中到达的状态与计数器相匹配，且该计数器的取值对应于 V_0 中的顶点，那么就可以在计数器值为零时到达最终状态 q_{v_1}。

$$T_F = \{(q_{v_{i+1}}, -1, q_{v_i}) : 1 \leq i < \ell\}$$

重要的是，从初始配置 $p_{v_1}(0)$ 到目标配置$q_{v_1}(0)$ 的运行存在，当且仅当 k-圆分层图 G 中存在一个 k- 环。最后，注意到 $|Q| \leq 2|V|$ 和 $|T| \leq 2|V| + |E|$。因此，$\mathcal{V}$的大小为 $\mathcal{O}(m)$。我们指出，可能出现的最大计数器值显然不超过 $|Q|$，因此 $\mathcal{V}$ 是一个大小为 $\mathcal{O}(m)$ 的一元（$\mathcal{O}(m)$,1）-向量加法系统。

◀

▶**定理 5.4**。假设 k-环假设成立，则不存在一个运行时间为 $O(n^{2-o(1)})$ 的算法，能够判定大小为 n 的一元$(O(n),1)$-向量加法系统的可覆盖性或可达性。

证明。反设，对于某个 $\varepsilon > 0$，大小为 n 的一元 (O(n), 1)-向量加法系统中的可达性问题可以在 O($n^{2-\varepsilon}$) 时间内解决。根据 k-环假设（假设 5.2），存在一个 k，使得在具有 m 个顶点的 k-圆形分层图中寻找 k-环的问题无法在 O($m^{2-\varepsilon}$) 时间内解决。通过上文引理 5.3 中给出的归约，我们构造出一个大小为 $n \leq$ O(m) 的 (O(n), 1)-向量加法系统 V，以及一个初始配置 p(0) 和一个目标配置 q(0)，使得判定 V 中从 p(0) 到 q(0) 的可达性，即可确定 G 中是否存在 k-环。因此，这个 O($n^{2-\varepsilon}$) 时间的可达性算法将给出一个 O($m^{2-\varepsilon}$) 时间的 k-环查找算法，这与 k-环假设矛盾。

根据引理 5.6 中一元（$\mathcal{O}(n)$,1）向量加法系统中可覆盖性与可达性的等价性，同一下界也适用于可覆盖性。◀

▶**推论 5.5.** 假设 k-环假设成立，则不存在一个运行时间为 $O(n^{2-o(1)})$ 的算法，能够解决规模为 n 的一元二维向量加法系统中的可覆盖性问题。

证明。考虑对引理 5.3 中所述归约进行一种标准修改，即通过添加一个类型相反的计数器，将 V $=(Q,T)$ 的维度增加一，从而得到二维向量加法系统 W $=(Q,T')$。对于每个转移 $(p,t,q) \in T$，再创建一个同时修改相反计数器的转移 $(p,(t,-t)\ q) \in T'$。现在，当且仅当可达性实例 (V p(0) q(0)) 成立时，可覆盖性实例 (W $p(0,n)$ $q(0,n)$) 才成立。其余部分由定理 5.4 得出。◀

在 ($\mathcal{O}(n)$ d)-向量加法系统中，可达性可在 $\mathcal{O}(n(B(n)+1)^d)$ 时间内判定，所用的是观察 5.1 中的简单算法，只需对接受条件作简单修改。事实证明，一元 ($\mathcal{O}(n)$ d)- 向量加法系统中的可覆盖性与可达性等价。从这样的意义上说，这一结论成立：例如，$(100n,d)$-向量加法系统中的可覆盖性，可能在线性时间内归约为 $(3n,d)$-向量加法系统中的可达性。反过来，某些线性有界 d-向量加法系统中的可达性，也可以在线性时间内归约为相应的线性有界 d-向量加法系统可覆盖性实例。值得注意的是，颇为反常的是，$(100n,d)$-向量加法系统中的可覆盖性实例实际上似乎比 $(3n,d)$-向量加法系统中的实例更容易求解。

▶ 引理 *5.6.* 对于一个 *($B(n)$ d)*-向量加法系统，令 $C^{B(n)}(n)$ 和 $R^{B(n)}(n)$ 分别表示可覆盖性与可达性的最优运行时间。对于任意 $\gamma > 0$，存在某个 $\delta > 0$，使得 $C^{\gamma \cdot n}(n) \leq O(R^{\delta \cdot n}(n))$。反过来，对于任意 $\gamma > 0$，存在某个 $\delta > 0$，使得 $R^{\gamma \cdot n}(n) \leq O(C^{\delta \cdot n}(n))$。

证明。给定一个大小为 n 的可覆盖性实例 (V p(u) p(v))，它属于 $B(n)$-有界向量加法系统 V。我们通过为每个$1 \leq i \leq d$添加转移 $(q,-\mathbf{e}_i,q)$，从 V 构造一个 $B(n)$-有界向量加法系统 V′。不难看出，当且仅当 V′ 中存在一条从 p(u) 到 q(v) 的运行时，V 中存在一条从 p(u) 到 q(v′) 的运行，其中 v′ ≥ v。由于 kV′k = O(n)，对于$B(n) = \gamma \cdot n$，我们可以通过适当选择 δ，确保 $B(n) = \delta \cdot$ kV′k。因此，$C^{\gamma n}(n) \leq$ O($R^{\delta n}$(O(n))) ≤ O($R^{\delta n}$(n))。

反过来，考虑一个大小为 n 的实例 (V p(u) p(v))，其问题是在 $B(n)$-有界向量加法系统 V 中的可达性，再次记 $n =$ kVk。我们通过从 q 到一个新状态 r 添加一条路径来构造向量加法系统 $B(n)$-有界向量加法系统 V′，该路径上的转移将计数器更新为 –v。这很容易通过一条长度至多为 $B(n)$ 的路径实现，因为若 kvk > $B(n)$，则该实例显然为假。接着，我们添加一条从 r 到一个新状态 s 的路径，其上的转移将 $B(n)$ 加到每个计数器上。容易看出，在 V′ 中存在一条从 p(u) 到 $s(B(n)\cdot 1)$ 的运行，当且仅当在 V 中存在一条从 p(u) 到 q(v) 的运行。由于 kV′k = O(n+$B(n)$)，对于 $B(n) = \gamma \cdot n$，我们可以确保对于某个 δ，有 B(kV′k) = δkV′k。因此，$R^{\gamma n}(n) \leq$ O($C^{\delta n}$(O(n))) ≤ O($C^{\delta n}$(n)). ◀

线性有界向量加法系统中可达性的下界

为了进一步证明 ($\mathcal{O}(n)$ d)-向量加法系统中的可覆盖性问题具有更强的下界，根据引理 5.6，我们可以等价地证明 ($\mathcal{O}(n)$ d)-向量加法系统中的可达性问题具有更强的下界。在定理 5.8 中，我们将采用一个广为接受的假设，该假设涉及在 3-均匀超图中寻找超团所需的时间。事实上，Lincoln、Vassilevska Williams 和 Williams 提出了并论证了一个更强的假设，即对每个 $\mu \geq 3$ [35, ， μ-均匀超图都满足假设 1.4]。我们将利用这一计算复杂性假设，给出线性有界固定维度一元向量加法系统中可达性的精确时间复杂度下界。

▶ **假设 5.7** (k-超团假设 [35, 假设 1。4])。 设 $k \geq 3$ 为整数。在字长为 $O(\log(n))$ 位的 *Word-RAM* 上，在一个有 n个顶点的3-均匀超图中寻找一个 k-超团需要 $n^{k-o(1)}$ 时间。

在本节余下部分，我们将重点证明以下定理。

▶ **定理 5.8.** 假设假设 *5.7*，大小为n 的一元($O(n)$ $d+2$)-向量加法系统的可达性需要 $n^{d-o(1)}$ 时间。

该下界通过从在 3-均匀超图中寻找超团进行归约而得到，因此该下界取决于 k-超团假设。我们分两步介绍归约。第一步是中间步骤：在引理 5.9 中，我们将其归约为一个零测试数量有限的一元向量加法系统可达性实例。第二步在第一步的基础上进行扩展：在引理 5.10 中，我们通过添加一个计数器来修改归约，从而消除零测试。这一扩展利用了 Czerwiński 和 Orlikowski [16] 最近提出的控制计数器技术 。该技术允许在存在专用计数器的情况下执行隐式零测试；该计数器的转移效应和可达性条件确保这些隐式零测试确实得到了正确执行。

对于k-超团假设，已证明我们可以假设超图是 ℓ -部的 [35, 定理 3.1]。因此，我们可以假设这些顶点能够划分为 ℓ 个互不相交的子集 $V = V_1 \cup \cdots \cup V_\ell$，并且每条超边都包含来自不同子集的三个顶点 $\{u, v, w\} \in V_i \times V_j \times V_k$，其中 $1 \leq i < j < k \leq \ell$。

▶**引理 5.9**。 令 $d \geq 1$ 为一个固定整数。给定一个有 n 个顶点的 $4d$ -部 3 -均匀超图 $H = (V_1 \cup \ldots \cup V_{4d}, E)$，存在一个一元 ($O(n^{4+o(1)})$ $d+1$) -向量加法系统，其中包含 $O(d^3)$ 个零测试 T，使得当且仅当 H 中存在一个 $4d$- 超团时，T 中存在一条从 $q_I(\mathbf{0})$ 到某个 $\geq \mathbf{0}$ 的 $q_F(\mathbf{v})$ 的运行。此外，T 可以在 $poly(d) \cdot n^{4+o(1)}$ 时间内构造出来。

证明。 我们将重新采用引理 4.3 证明中的构造已使用的一些思路。特别是，我们将使用 `Multiply` 和 `Divide` 子过程，见算法 2。我们将 $d+1$ 计数器记为 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d, \mathbf{y}$。$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d$ 共同负责维护构成该 $4d$-超团的 $4d$ 顶点的表示。$\mathbf{y}$ 的作用是确保乘法和除法正确完成。如前所述，在执行 `Multiply` 或 `Divide`之前，我们要求 $\mathbf{y} = 0$。我们将结合这些子过程，为带零测试的单目 ($d+1$)-向量加法系统构造新的子过程，用以验证与 3-均匀超图相关的性质。

我们先找到前 $4d \cdot \ell$ 个素数。为每个顶点 $v \in V$ 分配一个不同的素数 p_v。现在，我们通过在 d 个计数器上存储分别对应四个所选顶点的四个素数的乘积，来编码将构成 $4d$-团的所选 $4d$ 个顶点。因此，在初始猜测部分之后，计数器 $\mathbf{x}_i$ 的值将为 $p_t \cdot p_u \cdot p_v \cdot p_w$，对应于

arXiv

某些顶点 t, u, v, $w \in V$。粗略地说，我们在一个计数器上存储四个素数的乘积，使得可观测到的最大计数器值与所得带零测试的向量加法系统的大小相匹配。

输入： $\mathbf{x}1, \ldots, \mathbf{x}_d, \mathbf{y} = 0$ **for** $i \leftarrow 1$ **to** d **do** $\mathbf{x}_i \mathrel{+}= 1$ **for** $j \leftarrow 1$ **to** 4 **do guess** $k \in \{1, \ldots, n\}$ `Multiply`$[\mathbf{x}_i, p_k]$ **end end for** $(i, j, k) \in \{1, \ldots, 4d\}^3$, $i \neq j \neq k \neq i$ **do guess** $e \in E \cap (V_i \times V_j \times V_k)$ `HyperEdge`$[e]$ **end**

算法 4 一个表示带零测试的向量加法系统的计数器程序。如前所述，**for** 中的变量只是用于重复相似代码行的语法糖，对应于向量加法系统中的状态。同样，**guess** 中的变量表示向量加法系统中的非确定性分支转移。

猜测部分 算法 4 中给出的 VASS 实现了以下算法。猜测 $4d$ 个顶点，这些顶点不一定互不相同，并检查它们是否构成一个 $4d$-超团。请注意，该算法是正确的，因为猜测相同或属于同一 V_i 的顶点对我们没有帮助。与算法 1 相比，主要区别在于，猜测的顶点被编码为跨计数器 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d$ 的素数四元乘积。我们不显式存储 $4d$ 个素数的完整乘积，而只存储每个计数器的值。

检查部分在第二部分中，我们通过逐一检查每条 $\binom{4d}{3}$ 超边，验证所选顶点是否构成一个 $4d$-超团。这基本上以与算法 3 中实现 `Edge`$[e]$相同的方式完成。我们检查每组三个顶点子集之间是否存在一条超边，其包含第一部分中所选的所有顶点。我们实现用于检查单条超边的 `HyperEdge`子过程，见图 5。此子过程检查超边中三个顶点对应的三个素数是否能除尽存储在 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d$ 中的某个值。为便于说明，并如前所述，我们引入一个 `VertexSelected` 子过程，用于检查给定顶点是否已被选中，见图 4。

现在，我们使用上述子过程来构造$\mathcal{T}$的检查部分。该部分由一系列 $\binom{4d}{3}$ 非确定性分支段组成，每个顶点子集 $U \times V \times W$三元组对应一个分支段。在每个分支段中，对于超边$\{u, v, w\} \in U \times V \times W$中的每一条超边，都有一个 `HyperEdge`子过程实例。为了到达最终状态 q_F，$\mathcal{T}$第一部分中选出的每个 $4d$ 顶点之间都必须存在一条超边。因此，当且仅当 H中存在一个 $4d$-超团时，对于$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ in $\mathcal{T}$中的某个$\mathbf{0}$到 $q_F(\mathbf{v})$存在一次运行。

现在我们可以完成证明了。首先，我们将仔细分析任意一次运行中出现的最大计数器值，并统计任意一次运行中执行的零测试次数。然后，我们将评估$\mathcal{T}$的大小。

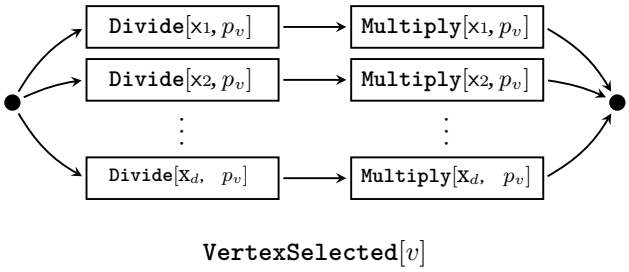


图 4 该 `VertexSelected` 子过程由带零测试的一元（$d+1$）向量加法系统实现。要实例化此子过程，需指定一个顶点 v，以便检查 d 计数器是否能被素数 p_v整除，从而判断顶点 v 是否已被选中。计数器 y 供 `Divide` 和 `Multiply` 子过程使用，以确保除法和乘法正确完成。

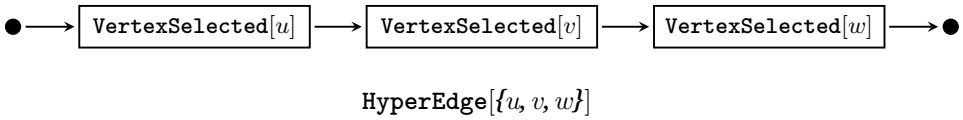


图 5 该 `HyperEdge` 子过程由带零测试的一元（$d+1$）向量加法系统实现。注意，给定超边的三个顶点可以存储在 d 个计数器 x1、.....、x$_d$中的任意位置。因此，我们使用 `VertexSelected` 子过程三次，以检查 u、 v和 w 是否确实已被选中。

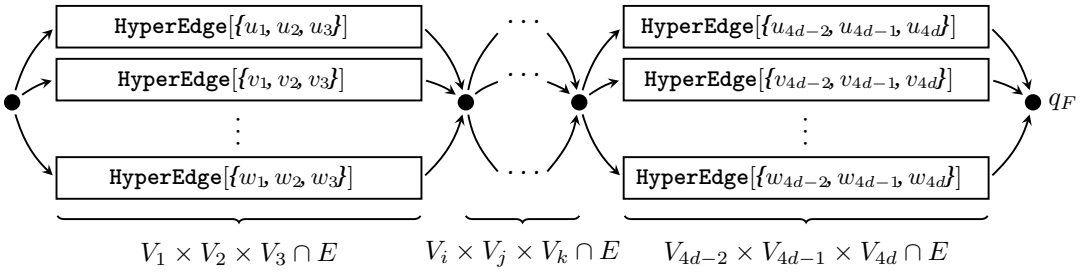


图 6 用于在 $4d$ 部分超图中寻找 $4d$-超团的带零测试的一元（$d+1$）-向量加法系统 $\mathcal{T}$的检查部分。

每个计数器 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d$ 出现的最大计数器值是四个素数的乘积。y出现的最大计数器值等于其他任一计数器 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d$出现的最大计数器值。因此，整体上观察到的最大值可约为 p^4，其中 p 是第 n个素数。根据素数定理（例如，参见 [50]），我们知道 $p \in \mathcal{O}(n \log(n))$。因此，对于某个$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$，在$\mathcal{T}$中，从 $q_I(\mathbf{0})$到 $q_F(\mathbf{v})$的每次运行都是$\mathcal{O}(n^{4+o(1)})$-有界的。

零测试仅由 `Multiply` 和 `Divide` 子过程执行，这些子过程的每个实例都包含两次零测试。接下来需要统计任意一次运行中执行的这类子过程数量。在猜测部分，为构成超团而选取的每个 $4d$ 顶点，都对应一个 `Multiply`子过程。在检查部分，有一个由 $\binom{4d}{3}$ 个 `HyperEdge` 子过程组成的序列。每个 `HyperEdge` 子过程都包含三个 `VertexSelected` 子过程实例；每个实例会执行一个 `Divide`子过程和一个 `Multiply` 子过程。总计会执行 $2(4d + 6\binom{4d}{3}) \in \mathcal{O}(d^3)$

arXiv

从 $q_I(\mathbf{0})$ 到 $q_F(\mathbf{v})$ 的任意一次运行中，都会执行许多零测试；对于某个 $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$，这些零测试均在 $\mathcal{T}$ 内进行。

最后， `Multiply` 和 `Divide` 子过程的每个实例大小为$\mathcal{O}(n\log\ n)$。注意，前 n 个素数可以在$\mathcal{O}(n^{1+o(1)})$时间内找到 [2]。在猜测部分中，有 $4dn$ 个 `Multiply` 子过程的实例。在检查部分中，超图中的每条边都对应一个 `HyperEdge` 子过程的实例。 `HyperEdge` 子过程本身出现在 $\binom{4d}{3}$ 个集合中，每个集合对应一个顶点子集三元组。每个`HyperEdge` 子过程包含三个 `VertexSelected` 子过程实例，而每个 `VertexSelected` 子过程又包含 d 个 `Multiply` 子过程实例和 d 个 `Divide`子过程实例。因此，总体而言，$\mathcal{T}$ 的规模是多项式级的，且可以在$\mathcal{O}(dn\cdot n\log\ n+m\cdot\binom{4d}{3}\cdot d\cdot n\log\ n)$时间内构造，其中 $m\in\mathcal{O}(n^3)$是超边总数。◀

回顾我们此前描述的证明定理 5.8 的两步方法：首先构造一个带零测试的一元（$d+1$）向量加法系统 $\mathcal{T}$，然后通过将维度增加一并移除零测试，构造一个一元（$d+2$）向量加法系统 $\mathcal{V}$。实际上，这两步是同时进行的，以证明定理 5.8。最终，$\mathcal{V}$ 的 $d+2$ 个计数器发挥如下作用。计数器 $\mathtt{x}_1,\ldots,\mathtt{x}_d$ 用于存储与超团顶点对应的素数的乘积。计数器 $\mathtt{y}$ 用于完成乘法和除法。在本节余下部分，我们添加第 $d+2$ 个计数器，用于确保（隐式的）零测试得到忠实执行。我们通过运用 Czerwiński 和 Orlikowski [16] 提出的控制计数器技术 来实现这一点。下面重述他们的技术；他们的引理已限定为适用于我们的情形，并改用本文的记号重新表述。

▶ 引理 *5.10*（[16, 引理 10]）。设 ρ 是一个 $(d+2)$-向量加法系统中的运行，满足 $q_I(0)\xrightarrow{\rho}q_F(0)$。此外，设 $q_0(v_0)\ q_1(v_1)\ldots,q_r(v_r)$ 是沿运行 ρ 观察到的一些特定配置，且 $q_0(v_0)=q_I(0)$ 和 $q_r(v_r)=q_F(0)$，并设 ρ_j 是 ρ 中介于 $q_{j-1}(v_{j-1})$ 和 $q_j(v_j)$ 之间的片段，那么 ρ 可以描述为

$$q_I(\mathbf{0})=q_0(\mathbf{v}_1)\xrightarrow{\rho_1}q_1(\mathbf{v}_1)\to\cdots\to q_{r-1}(\mathbf{v}_{r-1})\xrightarrow{\rho_r}q_r(\mathbf{v}_r)=q_F(\mathbf{0}).$$

设 $S_1,\ldots,S_d,S_{d+1}\subseteq\{0,1,\ldots,r\}$ 分别为特定配置的索引集合，在这些配置处可以对计数器 $\mathtt{x}_1,\ldots,\mathtt{x}_d,\mathtt{x}_{d+1}$ 执行零测试。令 $t_{j,i}=|\{s\geq j:\ \ s\in S_i\}|$ 表示运行剩余部分 $\rho_{j+1}\cdots\rho_r$ 中对计数器 $\mathtt{x}_i$ 执行零测试的次数。已知 $\mathbf{v}_0=\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{v}_r=\mathbf{0}$，若

$$\mathrm{eff}(\rho_j)[d+2]=\sum_{i=1}^{d+1}t_{j,i}\cdot\mathrm{eff}(\rho_j)[i],\tag{1}$$

那么对于每个 $i\in\{1,\ldots,d,d+1\}$ 和 $j\in S_i$，我们知道 $\mathbf{v}_j[i]=0$。

有了引理 5.10，我们便能确保每次零测试都能正确执行，并以定理 5.8 的证明结束本节。

定理 5.8 的证明。 考虑引理 5.9 中给出的归约：将判定 $4d$-部 3-均匀超图 H 中是否存在 a$4d$-超团的问题，归约到在具有$\mathcal{O}(n^{4+o(1)})$ $d+1$ 个维度并包含$\mathcal{O}(d^3)$ 次零测试的向量加法系统中判定可达性的问题。现在，根据引理 5.10，我们将在$\mathcal{T}$中加入一个控制计数器，使得对 $d+1$ 个计数器 $\mathtt{x}_1,\ldots,\mathtt{x}_d,\mathtt{y}$ 的零测试改为隐式执行。因此，我们再引入一个计数器 $\mathtt{z}$：每当其他计数器之一被更新时，$\mathtt{z}$ 就会按照方程 1 在相应转移上接受更新。请注意，为了简洁且一致地描述，计数器 $\mathtt{y}$ 和 $\mathtt{z}$ 分别被称为计数器

$\mathbf{x}_{d+1}$ 和 $\mathbf{x}_{d+2}$ （见引理 5.10 的陈述）。此外，请注意，$\mathbf{z}$ 的最大值有界于 $\mathrm{poly}(d) \cdot \left(\sum_{i=1}^{d+1} \mathbf{x}_i\right) \in \mathrm{poly}(d) \cdot n^{4+o(1)}$。

因此，我们构造了一个一元 $(\mathrm{poly}(d) \cdot n^{4+o(1)}, d+2)$-向量加法系统 V，它具有如下性质：当且仅当 V 中存在一条从 $q_I'(0)$ 到 $q_F'(0)$ 的运行时，其中才 H 包含一个 $4d$-超团。这样的 $(\mathrm{poly}(d) \cdot n^{4+o(1)}, d+2)$-向量加法系统 V 的大小为 $O(t \cdot |T|)$，其中 $t \in \mathrm{poly}(d)$ 是从 $q_I(0)$ 到 $q_F(0)$ 的运行 T 中执行的零测试次数。此外，V 可在 $\mathrm{poly}(d) \cdot n^{4+o(1)}$ 时间内构造。因此，如果大小为 n 的 $(O(n)\ d+2)$-向量加法系统上的可达性问题能够以快于 $n^{d-o(1)}$ 的时间解决，那么就能以快于 $n^{4d-o(1)}$ 的时间在 3-均匀超图中找到一个 $4d$-超团，这与假设 5.7 矛盾。◀

6 结论

总结 本文重新探讨了 d-向量加法系统中的一个经典可覆盖性问题。我们弥合了 Rosier 和 Yen [45] 在见证 d-向量加法系统中可覆盖性实例的运行长度方面留下的差距。我们将由 Rackoff 技术 [44]，给出的上界降低至 $n^{2^{\mathcal{O}(d)}}$ （定理 3.3），与 Lipton 构造 [36] 给出的 $n^{2^{\Omega(d)}}$ 下界相匹配。这由此弥合了可覆盖性问题所需精确空间复杂度方面的差距，并得出了一个用于求解d-向量加法系统可覆盖性的确定性 $n^{2^{\mathcal{O}(d)}}$-时间算法（推论 3.4）。此外，我们还给出了一个以指数时间假设为条件的匹配下界：不存在用于求解可覆盖性的确定性 $n^{2^{o(d)}}$-时间算法（定理 4.2）。总体而言，这确定了向量加法系统中可覆盖性的精确空间复杂度和时间复杂度。

此外，我们研究线性有界一元 d-向量加法系统。在此情形下，可覆盖性与可达性等价，而平凡的穷举搜索$\mathcal{O}(n^{d+1})$算法近乎最优。我们证明，在 k-循环假设下，线性有界一维向量加法系统中的可达性需要 $n^{2-o(1)}$ 时间（定理 5.4），这与平凡的上界相匹配。我们进一步证明，在 3-一致超团假设下，线性有界 $(d+2)$-向量加法系统中的可达性需要 $n^{d-o(1)}$ 时间（定理 5.8）。

开放问题与可覆盖性密切相关的有界性问题询问：从给定的初始配置出发，所有可达配置的集合是否有限。Lipton 随后由 Rackoff 也研究了这一问题，它是指数空间完全问题 [36, 44]。Rosier 和 Yen 进一步分析了有界性 [45, 定理 2.1]，而精确空间复杂度所需的界也存在同样的差距。我们将消除同样的二重指数对数(d)因子的改进留作开放问题。

对于 $d \geq 2$，我们给出的线性有界一元 d-向量加法系统中可覆盖性与可达性的时间复杂度下界，与上界之间最多相差 $n^{3+o(1)}$，见表 1。我们将以下问题留作开放问题：改进平凡算法给出的上界 $\mathcal{O}(n^{d+1})$，或提高我们的条件下界。

参考文献

1 Parosh Aziz Abdulla、Karlis Cerans、Bengt Jonsson 和 Yih-Kuen Tsay。对具有良拟序域的程序进行算法分析。 *Inf. Comput.*，160(1-2)：109–127，2000。 doi:10.1006/inco.1999.2843。
2 Manindra Agrawal、Neeraj Kayal 和 Nitin Saxena。素数判定属于 P。《数学年刊》，第 781–793 页，2004 年。3 Shaull Almagor、Nathann Cohen、Guillermo A. Pérez、Mahsa Shirmohammadi 和 James Worrell。一维向量加法系统中的可覆盖性与不等式测试。载于 Igor Konnov 和 Laura Kovács 编，第 *31* 届国际并发理论会议（*CONCUR 2020*），*2020* 年 *9* 月 *1*—*4* 日，

arXiv

22 重新审视向量加法系统中的可覆盖性

2020 年，奥地利维也纳（线上会议），LIPIcs 第 171 卷，第 38:1–38:20 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz 信息学中心，2020 年。 doi:10.4230/LIPIcs.CONCUR.2020.38。4 Noga Alon、Raphael Yuster 和 Uri Zwick。寻找并计数给定长度的环。Algorithmica，17(3)：209–223，1997 年。 doi:10.1007/BF02523189。5 Bertie Ancona、Monika Henzinger、Liam Roditty、Virginia Vassilevska Williams 和 Nicole Wein。动态图直径的算法与计算困难性。载于 Christel Baier、Ioannis Chatzigiannakis、Paola Flocchini 和 Stefano Leonardi 编，《自动机、语言与编程国际研讨会》第 46 届会议（ICALP 2019），2019 年 7 月 9—12 日，希腊帕特雷，LIPIcs 第 132 卷，第 13:1–13:14 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz 信息学中心，2019 年。 doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2019.13。6 Michael Blondin、Matthias Englert、Alain Finkel、Stefan Göller、Christoph Haase、Ranko Lazić、Pierre McKenzie 和 Patrick Totzke。二维带状态向量加法系统的可达性问题。《ACM期刊》，68(5)：34:1–34:43，2021年。 doi:10.1145/3464794。7 Michael Blondin、Alain Finkel、Christoph Haase 和 Serge Haddad。逐步逼近可覆盖性问题。载于 Marsha Chechik 和 Jean-François Raskin 编，《系统构造与分析工具和算法——第 22 届国际会议》，TACAS 2016，作为软件理论与实践欧洲联合会议 ETAPS 2016 的一部分举行，2016 年 4 月 2—8 日，荷兰埃因霍温，会议论文集，《计算机科学讲义》第 9636 卷，第 480–496 页。Springer，2016 年。 doi:10.1007/978-3-662-49674-9_28。8 Michael Blondin、Christoph Haase 和 Philip Offtermatt。无限状态系统的有向可达性。载于 Jan Friso Groote 和 Kim Guldstrand Larsen 编，《系统构造与分析工具和算法——第 27 届国际会议》，TACAS 2021，作为软件理论与实践欧洲联合会议 ETAPS 2021 的一部分举行，2021 年 3 月 27 日至 4 月 1 日，卢森堡卢森堡市，会议论文集，第二部分，《计算机科学讲义》第 12652 卷，第 3–23 页。Springer，2021 年。 doi:10.1007/978-3-030-72013-1_1。9 Mikołaj Bojańczyk、Claire David、Anca Muscholl、Thomas Schwentick 和 Luc Segoufin。数据词上的二变量逻辑。《ACM计算逻辑汇刊》，12(4)：27:1–27:26，2011 年。 doi:10.1145/1970398.1970403。10 Laura Bozzelli 和 Pierre Ganty。向量加法系统反向可覆盖性算法的复杂性分析。载于 Giorgio Delzanno 和 Igor Potapov 编，《可达性问题——第 5 届国际研讨会》，RP 2011，2011 年 9 月 28—30 日，意大利热那亚。会议论文集，《计算机科学讲义》第 6945 卷，第 96–109 页。Springer，2011 年。 doi:10.1007/978-3-642-24288-5_10。11 Jianer Chen、Benny Chor、Mike Fellows、Xiuzhen Huang、David W. Juedes、Iyad A. Kanj 和 Ge Xia。若干参数化 NP 困难问题的紧下界。Inf. Comput.，201(2)：216–231，2005 年。 doi:10.1016/j.ic.2005.05.001。12 Jianer Chen、Xiuzhen Huang、Iyad A. Kanj 和 Ge Xia。通过参数化复杂性获得强计算下界。《计算机与系统科学杂志》，72(8)：1346–1367，2006 年。 doi:10.1016/j.jcss.2006.04.007。13 Hubert Comon 和 Yan Jurski。多计数器自动机、安全性分析与 Presburger 算术。载于 Alan J. Hu 和 Moshe Y. Vardi 编，《计算机辅助验证》第 10 届国际会议 CAV '98，1998 年 6 月 28 日至 7 月 2 日，加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华，会议论文集，《计算机科学讲义》第 1427 卷，第 268–279 页。Springer，1998 年。doi:10.1007/BFb0028751。14 Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Łukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk、Michał Pilipczuk 和 Saket Saurabh。《参数化算法》。Springer，2015 年。doi:10.1007/978-3-319-21275-3。15 Wojciech Czerwiński、Slawomir Lasota、Ranko Lazic、Jérôme Leroux 和 Filip Mazowiecki。固定维度带状态向量加法系统中的可达性。载于 Igor Konnov 和 Laura Kovács 编，第 31 届国际并发理论会议（CONCUR 2020），

2020年9月1日至4日，奥地利维也纳（线上会议），LIPIcs 第171卷，第48:1–48:21页。Schloss Dagstuhl - Leibniz 信息学中心，2020年。 doi:10.4230/LIPIcs.CONCUR.2020.48。16 Wojciech Czerwiński 和 Łukasz Orlikowski。向量加法系统中的可达性是阿克曼完备的。载于第62届 IEEE 计算机科学基础年会 FOCS 2021，丹佛，美国科罗拉多州，2022年2月7日至10日，第1229–1240页。IEEE，2021年。doi:10.1109/FOCS52979.2021.00120。17 Wojciech Czerwiński 和 Łukasz Orlikowski。固定维数向量加法系统中可达性问题的下界。载于 Christel Baier 和 Dana Fisman 编，LICS '22：第37届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年会，以色列海法，2022年8月2日至5日，第40:1–40:12页。ACM，2022年。 doi:10.1145/3531130.3533357。18 Mina Dalirrooyfard、Ce Jin、Virginia Vassilevska Williams 和 Nicole Wein。n对最短路径与全节点最短环的近似算法及计算困难性。载于第63届 IEEE 计算机科学基础年会 FOCS 2022，美国科罗拉多州丹佛，2022年10月31日至11月3日，第290–300页。IEEE，2022年。 doi:10.1109/FOCS54457.2022.00034。19 Mina Dalirrooyfard、Thuy Duong Vuong 和 Virginia Vassilevska Williams。图模式检测：所有诱导模式的计算困难性及更快的非诱导环算法。《SIAM计算杂志》，50(5):1627–1662，2021年。 doi:10.1137/20M1335054。20 Javier Esparza。Petri网问题的可判定性与复杂性——导论。载于 Wolfgang Reisig 和 Grzegorz Rozenberg 编，《Petri网讲义 I：基本模型》，《Petri网进展》；该卷基于1996年9月在 Dagstuhl 举办的 Petri网高级课程，收入《计算机科学讲义》第1491卷，第374–428页。Springer，1996年。 doi:10.1007/3-540-65306-6_20。21 Javier Esparza、Ruslán Ledesma-Garza、Rupak Majumdar、Philipp J. Meyer 和 Filip Niksic。基于SMT的方法进行覆盖性分析。载于 Armin Biere 和 Roderick Bloem 编，《计算机辅助验证——第26届国际会议，CAV 2014》，作为维也纳逻辑夏季会议 VSL 2014 的一部分在奥地利维也纳举行，2014年7月18日至22日。会议论文集，《计算机科学讲义》第8559卷，第603–619页。Springer，2014年。 doi:10.1007/978-3-319-08867-9_40。22 John Fearnley 和 Marcin Jurdziński。双时钟定时自动机中的可达性是 PSPACE 完备的。载于 Fedor V. Fomin、Rusins Freivalds、Marta Z. Kwiatkowska 和 David Peleg 编，《自动机、语言与编程——第40届国际研讨会，ICALP 2013》，拉脱维亚里加，2013年7月8日至12日，会议论文集，第二部分，《计算机科学讲义》第7966卷，第212–223页。Springer，2013年。 doi:10.1007/978-3-642-39212-2_21。23 Diego Figueira、Santiago Figueira、Sylvain Schmitz 和 Philippe Schnoebelen。基于狄克逊引理的阿克曼型界与原始递归界。载于第26届 IEEE 计算机科学逻辑年会会议论文集，LICS 2011，2011年6月21日至24日，加拿大安大略省多伦多，第269–278页。IEEE计算机学会，2011年。 doi:10.1109/LICS.2011.39。24 Pierre Ganty 和 Rupak Majumdar。异步程序的算法验证。《ACM程序设计语言与系统汇刊》，34(1):6:1–6:48，2012年。 doi:10.1145/2160910.2160915。25 Steven M. German 和 A. Prasad Sistla。关于多进程系统的推理。《ACM期刊》，39(3):675–735，1992年。 doi:10.1145/146637.146681。26 Christoph Haase、Stephan Kreutzer、Joël Ouaknine 和 James Worrell。简洁参数化一元计数器自动机中的可达性。载于 Mario Bravetti 和 Gianluigi Zavattaro 编，CONCUR 2009——并发理论，第20届国际会议 CONCUR 2009，意大利博洛尼亚，2009年9月1日至4日。会议论文集，《计算机科学讲义》第5710卷，第369–383页。Springer，2009年。 doi:10.1007/978-3-642-04081-8_25。27 Christoph Haase、Joël Ouaknine 和 James Worrell。定时自动机与计数器自动机中的可达性问题之间的关系。载于 Alain Finkel、Jérôme Leroux 和 Igor Potapov 编，《可达性问题——第6届国际研讨会，RP 2012》，法国波尔多，

arXiv

24 重新审视向量加法系统中的可覆盖性

2012年9月17日至19日。会议论文集，《计算机科学讲义》第7550卷，第54–65页。Springer，2012年。 doi:10.1007/978-3-642-33512-9_6。28 John E. Hopcroft 和 Jean-Jacques Pansiot。关于五维向量加法系统的可达性问题。《理论计算机科学》，8:135–159，1979年。 doi:10.1016/0304-3975(79)90041-0。29 Russell Impagliazzo 和 Ramamohan Paturi。关于 k-SAT 的复杂性。《计算机与系统科学杂志》，62(2):367–375，2001年。 doi:10.1006/jcss.2000.1727。30 Ulla Koppenhagen 和 Ernst W. Mayr。交换半群的可覆盖性、子字、包含及等价问题的最优算法。《Inf. Comput.》，158(2):98–124，2000年。 doi:10.1006/inco.1999.2812。31 Ranko Lazic 和 Sylvain Schmitz。Rackoff 可覆盖性技术的理想视角。《Inf. Comput.》，277:104582，2021年。 doi:10.1016/j.ic.2020.104582。32 Jérôme Leroux。向量加法系统的可逆可达性问题。《计算机科学逻辑方法》，9(1)，2013年。 doi:10.2168/LMCS-9(1:5)2013。33 Jérôme Leroux。Petri网的可达性问题不是原始递归的。载于第62届 IEEE 计算机科学基础年会 FOCS 2021，美国科罗拉多州丹佛，2022年2月7日至10日，第1241–1252页。IEEE，2021年。 doi:10.1109/FOCS52979.2021.00121。34 Jérôme Leroux 和 Sylvain Schmitz。固定维数向量加法系统中的可达性问题可由原始递归算法解决。载于第34届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年会，LICS 2019，加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华，2019年6月24日至27日，第1–13页。IEEE，2019年。doi:10.1109/LICS.2019.8785796。35 Andrea Lincoln、Virginia Vassilevska Williams 和 R. Ryan Williams。稀疏图中最短环与最短路径的紧确计算困难性。载于 Artur Czumaj 编，第二十九届 ACM-SIAM 离散算法研讨会会议论文集，SODA 2018，美国路易斯安那州新奥尔良，2018年1月7日至10日，第1236–1252页。SIAM，2018年。 doi:10.1137/1.9781611975031.80。36 Richard Lipton。可达性问题需要指数空间。耶鲁大学计算机科学系，62，1976年。37 Daniel Lokshtanov、Dániel Marx 和 Saket Saurabh。基于指数时间假设的下界。《EATCS 通报》，3(105)，2013年。38 Ernst W. Mayr。一般佩特里网可达性问题的算法。《SIAM计算杂志》，13(3):441–460，1984年。 doi:10.1137/0213029。39 Ernst W. Mayr 和 Albert R. Meyer。交换半群字问题与多项式理想的复杂性。《数学进展》，46(3):305–329，1982年。URL:https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001870882900482, doi:https://doi.org/10.1016/0001-8708(82)90048-2。40 Filip Mazowiecki 和 Michał Pilipczuk。有界分支向量加法系统中的可达性。载于 Wan J. Fokkink 和 Rob van Glabbeek 编，第30届国际并发理论会议 CONCUR 2019，荷兰阿姆斯特丹，2019年8月27日至30日，LIPIcs 第140卷，第28:1–28:13页。Schloss Dagstuhl - Leibniz 信息学中心，2019年。 doi:10.4230/LIPIcs.CONCUR.2019.28。41 Filip Mazowiecki、Henry Sinclair-Banks 和 Karol Węgrzycki。带有一元计数器的二维向量加法系统中的可覆盖性属于非确定性多项式时间。载于 Orna Kupferman 和 Paweł Sobociński 编，《软件科学与计算结构基础》，第196–217页。Springer Nature 瑞士，2023年。 doi:10.1007/978-3-031-30829-1_10。42 Marvin L. Minsky。《计算：有限与无限机器》。普伦蒂斯霍尔出版社，1967年。43 Jaroslav Nešetřil 和 Svatopluk Poljak。关于子图问题的复杂性。《布拉格查理大学数学评论》，26(2):415–419，1985年。44 Charles Rackoff。向量加法系统的覆盖问题与有界性问题。《理论计算机科学》，6:223–231，1978年。 doi:10.1016/0304-3975(78)90036-1。45 Louis E. Rosier 和 Hsu-Chun Yen。向量加法系统有界性问题的多参数分析。《计算机与系统科学杂志》，32(1):105–135，1986年。 doi:10.1016/0022-0000(86)90006-1。

46 Sylvain Schmitz. 向量加法系统中的可达性复杂度。 *ACM SIGLOGNews*，3(1):4–21，2016年。网址： https://dl.acm.org/citation.cfm?id=2893585。47 Leslie G. Valiant 和 Mike Paterson。确定性单计数器自动机。《计算机与系统科学杂志》，10(3):340–350，1975年。 doi:10.1016/S0022-0000(75)80005-5。48 Wil M. P. van der Aalst。工作流网验证。载于 Pierre Azéma 和 Gianfranco Balbo 编，*1997*年佩特里网应用与理论，第*18*届国际会议，*ICATPN '97*，法国图卢兹，*1997*年*6*月*23*日至*27*日，会议论文集，卷1248，收录于《计算机科学讲义》，第407–426页。Springer，1997年。 doi:10.1007/3-540-63139-9_48。49 Raphael Yuster 和 Uri Zwick。使用矩形矩阵乘法和动态规划检测短有向环。载于 J. Ian Munro 编，第十五届 *ACM-SIAM* 离散算法年度研讨会论文集，*SODA 2004*，新奥尔良，路易斯安那州，美国，*2004*年*1*月*11*日至*14*日，第254–260页。SIAM，2004年。网址： http://dl.acm.org/citation.cfm?id=982792.982828。50 Don Zagier。纽曼的素数定理简短证明。《美国数学月刊》，104(8):705–708，1997年。

arXiv