arXiv:2305.01606v1 [math.RA] 2 May 2023

具有无限属的 A_2 型外型

SERGEY V. TIKHONOV

Abstract. 设 G 是域 K 上的一个绝对几乎简单代数群。G 的属 $\mathrm{gen}_K(G)$ 是一组 K 的 K-同构类，其中 K 是 G 的 G' 型，并且与 G 具有相同的极大 K-环面 K-同构类。我们构造了一个具有无限属的 A_2 型外型的例子。

设 K 是一个域，K^{sep} 是其可分闭包。若两个绝对几乎简单代数K-群 G_1 和 G_2 具有相同的极大 K-环面 K-同构类，则称它们满足这一性质：G_1 的每个极大 K-环面都与 G_2 的某个极大 K-环面 K-同构，反之亦然。若代数 K-群 G' 与代数群 G 在 K^{sep} 上同构，则称 K-群 G' 是代数 K-群G 的 K 型。

定义 1. [2,定义 6。1] 设 G 是域 K上的绝对几乎单代数群。G 的属 $\mathrm{gen}_K(G)$ 是满足以下条件的 K-型G' 的 K-同构类集合：它们与 G具有相同的极大 K-环面的 K-同构类。

在某些特殊情形下，属是平凡的；据推测，只要域 K 是具有“良好”特征的有限生成域，属就总是有限的（详情见 [6, §8]）。类似地，也可以定义除代数的属。

定义 2. 域 K 上的有限维中心除代数 $\mathcal{D}$的属 $\mathrm{gen}(\mathcal{D})$ 定义为类 $[\mathcal{D}'] \in \mathrm{Br}(K)$ 的集合，其中 $\mathcal{D}'$ 是与 $\mathcal{D}$具有相同极大子域的中心除 K-代数。

若 $\mathcal{D}$ 是有限维中心除 K-代数，则众所周知，相应代数群 $G = \mathrm{SL}_{1,\mathcal{D}}$ 的任一极大 K- 环面都具有形式 $\mathrm{R}_{E/K}(\mathbb{G}_m) \cap G$ （其中 $\mathrm{R}_{E/K}(\mathbb{G}_m)$ 是一维分裂环面 $\mathbb{G}_m$ 的韦伊限制），这里 $\mathcal{D}$的某个极大可分子域为 E 。因此，将文献 [4] 和 [9] 中关于除代数属的结果改用代数群的语言表述，即可知：对于任意素数 p，都存在一些域（其超越次数相对于素子域为无限），使得其上存在具有无限属的 A_{p-1} 型内型。文献 [1, 的注 3.6(b)]给出了具有无限属的 G_2 型群的一个例子。本文构造了一个具有无限属的 A_2型外型的例子。

设 F/K 是一个二次可分域扩张，σ 是 F的非平凡 K自同构。$\mathcal{R}$上的一个对合称为 F代数上的 F/K对合，若其在 F上的限制为 σ。带对合 f的 F代数之间的同构 $(\mathcal{R},\tau) \longrightarrow (\mathcal{R}',\tau')$，是一个 F代数同构 $f\colon \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'$，满足 $\tau' \circ f = f \circ \tau$。再设 E/F 是一个域扩张，使得 E 具有一个阶 2 自同构 ψ ，且满足$\psi|F = \sigma$（即 E 具有一个 F/K对合）。那么，τ_E 表示由公式 $\tau_E(r \otimes e) := \tau(r) \otimes \psi(e)$定义的 $\mathcal{R} \otimes_F E$上的对合，其中 $r \in \mathcal{R}, e \in E$。特别地，若$L/F$ 是一个域扩张，与 E 在 F 上线性不相交，并具有一个延拓 σ的二阶自同构 ϕ，则 ϕ_E 是域 $EL = L \otimes_F E$上延拓 ϕ的二阶自同构。

设 $\mathcal{A}$是一个次数为 n、带有 F/K对合 τ的 F中心除代数。设 L/F是一个次数为 n 的可分域扩张，且 $\phi\colon L \longrightarrow L$ 是一个阶 2 自同构，满足 $\phi|F = \sigma$。带对合的代数 $(L,\phi) \hookrightarrow (\mathcal{A},\tau)$之间的嵌入，按定义是一个单射 F同态 $f\colon L \longrightarrow \mathcal{A}$，满足 $\tau \circ f = f \circ \phi$。众所周知，特殊酉群 SU$(\mathcal{A},\tau)$中的极大环面嵌入，可以用带对合的域嵌入到带对合中心单代数 $(\mathcal{A},\tau)$中的方式来描述（命题 2.3]）。

本文中，我们构造一个域 E 及其子域 $T \subset E$，使得 $[E\colon T] = 2$；并存在一个无限集，其中包含两两不同构的、次数为 3 且带有 E/T-对合的除 E 代数。次数为 3 的域扩张 L/E 能够作为带对合的代数嵌入该集合中的一个代数，当且仅当它能够作为带对合的代数嵌入该集合中的所有其他代数。转向相应的特殊酉群，我们得到一个具有无限属的 A_2 型外型的例子。

下文采用以下记号： $Alg_3(F/K)$ 表示次数为 3 且带有 F/K 对合的中心除 F 代数的同构类集合； $Ext_3(F/K)$ 表示次数为 3 且带有 F/K-对合的 F 域扩张的同构类集合。布劳尔群 Br(F) 的 3-挠子群记为 ${}_3$Br(F)。对于域扩张E/F和中心单代数 F-代数 $\mathcal{A}$， $\mathcal{A}_E$ 表示张量积 $\mathcal{A} \otimes_F E$，而 res$^{E/F}$: Br$(F) \longrightarrow$ Br(E) 表示限制同态。res$^{E/F}$在子群 ${}_3$Br(F) 上的限制也记为 res$^{E/F}$。对于中心单 F-代数 $\mathcal{A}$， $\mathcal{A}^{op}$表示相反代数， $\mathcal{A}^m$表示 $\mathcal{A} \otimes_F \cdots \otimes_F \mathcal{A}$($m$次幂)。对于域 K 上的二次型 q 和域扩张 E/K， q_E 表示将 K 标量扩张至 E所得的二次型。回顾一下，若域扩张 E/F满足 E/F 可分且 F 在 E 中代数闭，则称其为正则扩张。

我们从以下内容开始

引理3. 设 n 为正整数， F 为特征不整除 $2n$的域， F/K为二次域扩张， σ 为 F的非平凡 K-自同构， $\mathcal{A}$ 为次数为 n的中心单纯F-代数，且 L/F 为次数为 n的循环域扩张。那么存在正则域扩张 M/F和子域 $T \subset M$，使得 $[M\colon T] = 2$ 并且

(1) $M = TF$以及 M的非平凡 T-自同构可扩张为 σ ;
(2) 复合体 ML分裂 $\mathcal{A}_M$; (3) 同态 res$^{M/F}$: Br$(F) \longrightarrow$Br(M) 是单射。

证明. 设 $F(x)$ 是 F 的超越次数为1的纯超越扩张。再设 ϕ 为伽罗瓦群 Gal$(L(x)/F(x))$ 的生成元，并且

$$\mathcal{C} := \mathcal{A}^{op}_{F(x)} \otimes_{F(x)} (L(x)/F(x), \phi, x),$$

其中 $(L(x)/F(x)\ \phi, x)$ 是次数为 n的循环 $F(x)$-代数。再设 E为 $\mathcal{C}$的塞韦里-布劳尔簇的函数域。注意，限制同态 res$^{E/F(x)}$: Br$(F(x)) \longrightarrow$Br(E) 的核由 $[\mathcal{C}]$ 生成（例如参见 $[8,$推论13.16]）。

设 $\mathcal{B}$ 是一个指数大于 1 的中心单纯 F-代数。假设 $\mathcal{B}$ 被 E 分裂，那么对某个 $1 \leq i \leq n$, 有 $[\mathcal{B}_{F(x)}] = [\mathcal{C}^i]$。若 $i < n$，则 $F(x)$-代数 $\mathcal{C}^i$ 在 $F(x)$ 上由多项式 x 定义的离散赋值处发生分歧（该赋值在 F 上平凡），但 $\mathcal{B}_{F(x)}$ 在此赋值处非分歧，因此$[\mathcal{B}_{F(x)}] \neq [\mathcal{C}^i]$。由于指数

$\mathcal{B}_{F(x)}$ 大于 1，因此 $[\mathcal{B}_{F(x)}] \neq [\mathcal{C}^n] = [F(x)]$。于是 $\mathcal{B}_{F(x)}$ 不被 E 分裂，即同态 $\mathrm{res}^{E/F}\colon \mathrm{Br}(F) \longrightarrow \mathrm{Br}(E)$ 是单射。由于 E 分裂 $\mathcal{C}$，因此

$$[\mathcal{A}_E] = [(L(x)/F(x), \phi, x)_E] = [(EL/E, \phi', x)],$$

其中 ϕ' 是 $\mathrm{Gal}(EL/E)$ 的生成元。因此，EL 分裂 $\mathcal{A}_E$。
注意，E/F 是 $F(x)$ 的正则扩张。关于正则域扩张的转移的以下构造，请参阅 [7, 第 220] 页）。

设 σ 也表示 $K(x)$-自同构，即将自同构 σ 延拓到 $F(x)$ 上的自同构。σ 在 $F(x)$ 上的自同构可以延拓为 E 与另一个记为 E_σ 的 $F(x)$ 的正则扩张之间的同构（我们也将其记为 σ）。因此，下图交换：

$$\begin{array}{ccccc} F & \hookrightarrow & F(x) & \hookrightarrow & E \\ \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ F & \hookrightarrow & F(x) & \hookrightarrow & E_\sigma\ . \end{array} \tag{1}$$

设 $M = EE_\sigma$ 是 E 与 E_σ 在 F 上的自由复合体。该自由复合体与 $E_\sigma(y)$-代数 $\mathcal{A}^{op}_{E_\sigma}(y) \otimes_{E_\sigma(y)} (E_\sigma L(y)/E_\sigma(y)\ \psi', y)$ 的塞韦里 - 布劳尔簇的函数域 F- 同构，其中 y 在 E_σ 上是超越的（由于复合体是自由的，我们用 y 替换 x），而 ψ' 是伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(E_\sigma L(y)/E_\sigma(y))$ 的生成元。域 M 是 F 的正则扩张。同构 $\sigma\colon E \longrightarrow E_\sigma$ 和 $\sigma^{-1}\colon E_\sigma \longrightarrow E$ 可唯一延拓为 M 的一个二阶自同构 $\bar{\sigma}$。令 $T := T_{F/K}(E)$ 表示关于基域下降 $F \supset K$ 的 E 的转移，即 T 是 M 中在 $\bar{\sigma}$ 的作用下保持不变的元素所组成的子域。注意，复合体 TF 与 M, $[M\colon T] = 2$ 重合，而 $\bar{\sigma}$ 延拓了 σ。

代数 $\mathcal{A}_M$ 可由 ML 分裂，因为 $\mathcal{A}_E$ 可由 EL 分裂。
最后，图 (1) 诱导出以下关于相应布劳尔群的交换图：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Br}(F) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Br}(F(x)) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Br}(E) \\ \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\ \mathrm{Br}(F) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Br}(F(x)) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Br}(E_\sigma) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{Br}(M)\ . \end{array}$$

$\mathrm{res}^{E/F}$ 的单射性蕴含了 $\mathrm{res}^{E_\sigma/F}$ 的单射性。此外，按照证明 $\mathrm{res}^{E/F}$ 单射性时所用的相同论证，$\mathrm{res}^{M/E_\sigma}$ 也是单射的，只需将基域 F 替换为 E_σ。因此，同态 $\mathrm{res}^{M/F}$ 也是单射的。

□

我们还需要以下结果

引理 4. 设 F 是特征为 $\neq 2$、3 的域；F/K 是一个二次域扩张，σ 是 F 的非平凡 K-自同构；L/F 是一个次数为 3 的域扩张，且具有一个二阶自同构 ϕ，满足 $\phi|F = \sigma$。则存在一个域扩张 $F(L)/F$ 和一个子域 $K(L) \subset F(L)$，使得 $[F(L)\colon K(L)] = 2$，并且

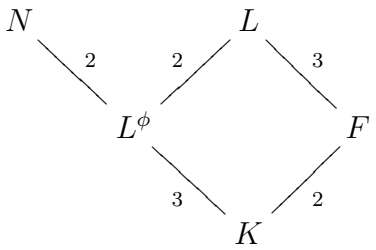
(1) $F(L) = K(L)F$ 以及 $F(L)$ 的非平凡 $K(L)$-自同构（记为 $\sigma_{F(L)}$）扩张了 σ；

(2) $[F(L)\colon F] \leq 2$;

(3) 复合体 $F(L)L$ 是 $F(L)$ 的 3 次循环扩张；(4) 同态 $\mathrm{res}^{F(L)/F}$: ${}_3\mathrm{Br}(F) \longrightarrow {}_3\mathrm{Br}(F(L))$ 是单射。

证明。若扩张 L/F 是循环的，则可取 $F(L) := F$, $K(L) := K$，以及$\sigma_{F(L)} := \sigma$。

假设扩张 L/F 不是循环的。令 N 为扩张 L^ϕ/K的正规闭包，其中 $L^\phi \subset L$ 是由 ϕ固定的元素所组成的子域。于是 $F \not\subset N$，而 NF是扩张 L/F的正规闭包。因此我们有如下域扩张图:



令 H为伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(N/K)$ 的 Sylow 3-子群。那么， N^H（即 H 的不动域）是 K 的 2 次扩张，而 N/N^H 是 3 次循环扩张。因此 NF 是 N^HF 的 3 次循环扩张，且 $[N^HF: F] = 2$。令 $K(L) := N^H$，且 $F(L) := K(L)F$。由于 $F \not\subset N$，所以 $[F(L) : K(L)] = 2$，并且域$F(L)$ 有一个将 σ 扩张的二阶 $K(L)$-自同构。注意， $F(L)L = NF$，因此 $F(L)$ $L/F(L)$ 是 3 次循环扩张。最后，由于 $[F(L) : F] = 2$，同态 $\mathrm{res}^{F(L)/F}$: ${}_3\mathrm{Br}(F) \longrightarrow {}_3$ $\mathrm{Br}(F(L))$ 是单射。□

注 5. 在引理 4 的记号下，对于任意次数为 3 的域扩张 L' ，$F(L)$ 与 L' 在 F 上线性不相交。此外，如果 L' 具有一个阶 2 的自同构 ϕ'，且该自同构扩张了 σ，那么复合体 $F(L)L'$ 具有自同构 $\phi'_{F(L)}$，该自同构扩张了自同构 ϕ' 和 $\sigma_{F(L)}$。

引理 6. 设 F 是特征为 $\neq 2$、3 的域； F/K 是一个二次域扩张，σ 是 F 的非平凡 K-自同构； $\mathcal{A}$ 是一个次数为 3 且带有 F/K-对合 τ 的中心单代数 F； L/F 是一个次数为 3 的域扩张，具有一个阶 2 的自同构 ϕ，满足 $\phi|F = \sigma$。则存在一个域扩张 $F_{(K,L,\mathcal{A})}/F$ 及其子域 $K_{(L,\mathcal{A})} \subset F_{(K,L,\mathcal{A})}$，使得 $[F_{(K,L,\mathcal{A})} : K_{(L,\mathcal{A})}] = 2$，并且

(1) $F_{(K,L,\mathcal{A})} = K_{(L,\mathcal{A})}F$ 且 $F_{(K,L,\mathcal{A})}$的非平凡 $K_{(L,\mathcal{A})}$-自同构（记作 $\sigma_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}$）扩张了 σ；

(2) 同态 $\mathrm{res}^{F_{(K,L,\mathcal{A})}/F}$: ${}_3\mathrm{Br}(F) \longrightarrow {}_3\mathrm{Br}(F_{(K,L,\mathcal{A})})$ 是单射 ;

(3) 对任意次数为 3 的 F 的域扩张 L'， $F_{(K,L,\mathcal{A})}$ 与 L' 在 F 上线性不相交；

(4) 存在一个带对合代数 $(F_{(K,L,\mathcal{A})}L, \phi_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}) \hookrightarrow (\mathcal{A}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}, \tau_{F_{(K,L,\mathcal{A})}})$ 的嵌入。

证明。令 $F(L)$、 $K(L)$ 和 $\sigma_{F(L)}$ 如引理 4 所述。再令 M 和 T 为应用引理3得到的域，对应于二次域扩张 $F(L)/K(L)$、 $F(L)$-代数 $\mathcal{A}_{F(L)}$，以及次数为 3 的循环域扩张 $F(L)L/F(L)$。由引理3和引理 4 可知，同态 $\mathrm{res}^{M/F}$: ${}_3\mathrm{Br}(F) \longrightarrow {}_3\mathrm{Br}(M)$ 是单射；对于 F 的任意 3 次域扩张 L'， M 与 L' 在 F 上线性不相交，且复合体 ML分裂 $\mathcal{A}_M$。因此存在一个 M-嵌入 ε: $ML \hookrightarrow \mathcal{A}_M$，它是 M-代数的嵌入。

注意， $\mathcal{A}_M$ 带有 M/T-对合 τ_M，它扩张了 τ；而 ML 带有一个二阶自同构 ϕ_M，它扩张了 ϕ。根据 [5, 命题 3.1], ，存在 $\mathcal{A}_M$ 上的一个 M/T-对合 δ，使得 ε: $(ML, \phi_M) \hookrightarrow (\mathcal{A}_M, \delta)$ 是带对合代数的嵌入。

设 $\pi(\delta)$ 和 $\pi(\tau_M)$ 分别为对合 δ 和 τ_M 的三重 Pfister 形式（见 [3, §19.B]）。设 $T(\pi(\delta))$ 和 $T(\pi(\tau_M))$ 分别为 $\pi(\delta)$ 和 $\pi(\tau_M)$ 的函数域。那么，二次型 $\pi(\delta)_{T(\pi(\delta))}$和 $\pi(\tau_M)_{T(\pi(\tau_M))}$是各向同性的，因此是双曲的，因为它们是 Pfister 形式。

令 $K_{(L,\mathcal{A})}$ 为域 $T(\pi(\delta))$ 和 $T(\pi(\tau_M))$ 在 T 上的自由复合。另设 $F_{(K,L,\mathcal{A})} := K_{(L,\mathcal{A})}F$。由于 $F \not\subset K_{(L,\mathcal{A})}$，因此 $[F_{(K,L,\mathcal{A})} : K_{(L,\mathcal{A})}] = 2$，且 $F_{(K,L,\mathcal{A})}$ 有一个阶为 2 的 $K_{(L,\mathcal{A})}$-自同构 $\sigma_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}$，它扩张了 σ。注意， F 在 $F_{(K,L,\mathcal{A})}$ 中的代数闭包是 $F(L)$，且 $[F(L) : F]$ 的次数为 1 或 2。因此，对于 F 的任意 3 次域扩张 L'， $F_{(K,L,\mathcal{A})}$ 和 L' 在 F 上线性不相交。

扩张 $T(\pi(\delta))/T$和 $T(\pi(\tau_M))/T$是纯超越扩张与二次扩张的复合，因此同态 $\mathrm{res}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}/M} : {}_3\mathrm{Br}(M) \longrightarrow {}_3\mathrm{Br}(F_{(K,L,\mathcal{A})})$ 是单射。因此，$\mathrm{res}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}/F} : {}_3\mathrm{Br}(F) \longrightarrow {}_3\mathrm{Br}(F_{(K,L,\mathcal{A})})$ 也是单射。

二次型 $\pi(\delta)_{K_{(L,\mathcal{A})}}$ 和 $\pi(\tau_M)_{K_{(L,\mathcal{A})}}$ 是双曲的。由 [3, 定理 19.6]， $\mathcal{A}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}$ 上的对合 $\delta_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}$ 和 $\tau_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}$ 共轭。这意味着存在一个带对合代数的同构 $\xi : (\mathcal{A}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}, \delta_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}) \longrightarrow (\mathcal{A}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}, \tau_{F_{(K,L,\mathcal{A})}})$。

此外，带对合代数的嵌入 $\varepsilon : (ML, \phi_M) \hookrightarrow (\mathcal{A}_M, \delta)$ 诱导出一个带对合代数的嵌入 $(F_{(K,L,\mathcal{A})}L, \phi_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}) \hookrightarrow (\mathcal{A}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}, \delta_{F_{(K,L,\mathcal{A})}})$。事实上， $F_{(K,L,\mathcal{A})}L = ML \otimes_M F_{(K,L,\mathcal{A})}$。令

$$\varepsilon_{F_{(K,L,\mathcal{A})}} : ML \otimes_M F_{(K,L,\mathcal{A})} \longrightarrow \mathcal{A}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}$$

为由公式 $\varepsilon_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}(m \otimes a) := \varepsilon(m) \otimes a$ 定义的一个 $F_{(K,L,\mathcal{A})}$-嵌入，其中$m \in ML$, $a \in F_{(K,L,\mathcal{A})}$。那么

$$\varepsilon_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}(\phi_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}(m \otimes a)) = \varepsilon_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}(\phi_M(m) \otimes \sigma_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}(a)) = \varepsilon(\phi_M(m)) \otimes \sigma_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}(a) =$$

$$\delta(\varepsilon(m)) \otimes \sigma_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}(a) = \delta_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}(\varepsilon(m) \otimes a) = \delta_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}(\varepsilon_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}(m \otimes a)).$$

因此，$\varepsilon_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}$ 是带对合代数的嵌入。于是，$\xi \circ \varepsilon_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}$ 是一个带对合代数的嵌入 $(F_{(K,L,\mathcal{A})}L, \phi_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}) \hookrightarrow (\mathcal{A}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}, \tau_{F_{(K,L,\mathcal{A})}})$。

□

以下关于域 $F_{(K,S,A)}$ 的构造，是对文献 [9] 中带对合代数构造方法的改编。为方便读者，下面给出详细内容。

命题 7. 设 F 是特征为 $\neq 2$、且不等于 3 的域； F/K 是一个二次域扩张， σ 是 F 的非平凡 K- 自同构， $A \subset Alg_3(F/K)$ 且 $S \subset Ext_3(F/K)$。那么存在一个域扩张 $F_{(K,S,A)}/F$ 和一个子域 $K_{(S,\mathcal{A})} \subset F_{(K,S,A)}$，使得 $[F_{(K,S,A)} : K_{(S,A)}] = 2$ 且

(1) $F_{(K,S,A)} = K_{(S,A)}F$ 和 $F_{(K,S,A)}$ 的非平凡 $K_{(S,A)}$-自同构（记为 $\sigma_{F_{(K,S,A)}}$）扩张了 σ；(2) 同态 $\mathrm{res}_{F_{(K,S,A)}/F} : {}_3\mathrm{Br}(F) \longrightarrow {}_3\mathrm{Br}(F_{(K,S,A)})$ 是单射；(3) 对任意次数为 3 的 F 的域扩张 L'， $F_{(K,L,\mathcal{A})}$ 与 L' 在F上线性不相交；

(4) 对任意带有 F/K-对合 τ 的 $\mathcal{A}\in A$，以及带有将 σ 扩张为阶 2 的 K-自同构 ϕ 的 $L\in S$，都存在一个带对合代数的嵌入 $(F_{(K,S,A)}L,\phi_{F_{(K,S,A)}})\hookrightarrow(\mathcal{A}_{F_{(K,S,A)}},\tau_{F_{(K,S,A)}})$。

证明。令 $\mathcal{P}:=\{(L,\mathcal{D})|L\in S$ 和 $\mathcal{D}\in A\}$ 为这些有序对的集合。再令 $<$ 为 $\mathcal{P}$ 上的一个良序，并令 $t_0=(L_0,\mathcal{D}_0)$表示其最小元素。设 $E_{t_0}:=F_{(K,L_0,\mathcal{D}_0)}$和 $T_0:=K_{(L_0,\mathcal{D}_0)}$，其中域 $F_{(K,L_0,\mathcal{D}_0)}$ 和 $K_{(L_0,\mathcal{D}_0)}$ 是在引理 6 中构造的。对于 $t=(L,\mathcal{D})\in\mathcal{P}$，令

$$E^{<t}:=\bigcup_{t'<t}E_{t'},T^{<t}:=\bigcup_{t'<t}T_{t'},T_t:=T^{<t}{}_{(E^{<t}L,\mathcal{D}_{E^{<t}})},\text{ and }E_t:=E^{<t}{}_{(T^{<t},E^{<t}L,\mathcal{D}_{E^{<t}})},$$

其中，域 E_t 和 T_t 是通过将引理 6 应用于二次域扩张 $E^{<t}/T^{<t}$、次数为 3 的域扩张 $E^{<t}L/E^{<t}$、扩张 ϕ 的自同构的 $E^{<t}L$ 的自同构 $\phi_{E^{<t}}$，以及 $E^{<t}$-代数 $\mathcal{D}_{E^{<t}}$而得到的。我们还定义$F_{(K,S,A)}:=\bigcup_{t\in\mathcal{P}}E_t$ 和 $K_{(S,A)}:=\bigcup_{t\in\mathcal{P}}T_t$。

由引理 6，$E_t=T_tF$ 和 $[E_t:$ 对任意 $t\in\mathcal{P}$，都有 $T_t]=2$。于是 $F_{(K,S,A)}=K_{(S,A)}F$，$[F_{(K,S,A)}:K_{(S,A)}]=2$，且 $F_{(K,S,A)}$ 的非平凡 $K_{(S,A)}$-自同构扩张了 σ。由引理 6 和超限归纳法，同态 $\mathrm{res}^{F_{(K,S,A)}/F}:{}_3\mathrm{Br}(F)\longrightarrow{}_3\mathrm{Br}(F_{(K,S,A)})$ 是单射；并且对 F 的任意 3 次域扩张 L'，$F_{(K,S,A)}$ 和 L' 在 F 上线性不相交。最后，设 $\mathcal{A}\in A$ 带有一个 F/K-对合 τ，$L\in S$ 带有一个阶 2 的自同构 ϕ，它扩张了 σ，且 $t=$（L，$\mathcal{A}$）。由引理 6，存在一个带对合代数的嵌入 $(E_tL,\phi_{E_t})\hookrightarrow(\mathcal{A}_{E_t},\tau_{E_t})$。此外，如引理 6 的证明中所示，这个嵌入诱导出嵌入

$$(F_{(K,S,A)}L,\phi_{F_{(K,S,A)}})\hookrightarrow(\mathcal{A}_{F_{(K,S,A)}},\tau_{F_{(K,S,A)}})$$

带对合代数的。 □

定理 8。设 F 是特征为 $\neq2$、3 的域，F/K 是二次域扩张，σ 是 F 的非平凡 K-自同构，$A\subset Alg_3(F/K)$。那么存在一个域扩张 F_A/F 和一个子域 $K_A\subset F_A$，使得 $[F_A:K_A]=2$ 并且

(1) $F_A=K_AF$ 和 F_A 的非平凡 K_A-自同构（记作 σ_{F_A}）可扩张到 σ；

(2) 同态 $\mathrm{res}^{F_A/F}:{}_3\mathrm{Br}(F)\longrightarrow{}_3\mathrm{Br}(F_A)$ 是单射；

(3) 对任意中心单 F 代数 $\mathcal{B}$，若其次数为 3 且带有 F/K-对合 θ，则代数 $\mathcal{B}_{F_A}$ 带有一个将 θ 扩张的 F_A/K_A-对合 θ_{F_A}；

(4) 若 $L\in Ext_3(F_A/K_A)$ 带有一个将 σ_{F_A} 扩张的阶 2 K_A-自同构 ϕ，则对任意带有 F/K-对合 τ 的 $\mathcal{A}\in A$，存在一个带对合代数的嵌入 $(L,\phi)\hookrightarrow(\mathcal{A}_{F_A},\tau_{F_A})$。

证明。令 $F_0:=F$ 和 $K_0:=K$。我们递归地定义 F_i 和 K_i、$i\in\mathbb{Z}_{>0}$，使其为通过将命题 7 应用于二次域扩张 F_{i-1}/K_{i-1}、集合 $\mathrm{res}^{F_{i-1}/F}(A)\subset Alg_3(F_{i-1}/K_{i-1})$ 以及集合 $Ext_3(F_{i-1}/K_{i-1})$ 而构造出的域 $F_{i-1(K_{i-1},Ext_3(F_{i-1}/K_{i-1}),\mathrm{res}^{F_{i-1}/F}(A))}$ 和 $K_{i-1(Ext_3(F_{i-1}/K_{i-1}),\mathrm{res}^{F_{i-1}/F}(A))}$。

令 $F_A:=\bigcup_{i\geq0}F_i$ 且 $K_A:=\bigcup_{i\geq0}K_i$。因此 $F_A=K_AF$，并且 F_A 的非平凡 K_A 自同构 σ_{F_A} 可延拓为 σ。因此，对于任意次数为 3 的中心单纯 F-代数 $\mathcal{B}$，若其带有一个 F/K对合 θ，则 F_A/K_A对合 θ_{F_A} 可延拓为 θ。

由归纳法和命题 7，$\mathrm{res}^{F_A/F}:{}_3\mathrm{Br}(F)\longrightarrow{}_3\mathrm{Br}(F_A)$ 是单射。

假设 $\mathcal{A} \in A$ 带有一个 F/K-对合 τ，且 $L \in Ext_3(F_A/K_A)$ 带有一个自同构 ϕ，其为二阶并扩张了 σ_{F_A}。那么存在 $i \geq 0$ 以及 F_i 的一个 3 次域扩张L'，使得 $L = F_A L'$，并且 $\phi_i := \phi_{|L'}$ 是一个二阶 K_i-自同构。这意味着 $L' \in Ext_3(F_i/K_i)$。根据命题 7，存在一个嵌入

$$(F_{i+1}L', \phi_{iF_{i+1}}) \hookrightarrow (\mathcal{A}_{F_{i+1}}, \tau_{F_{i+1}})$$

带对合代数。如引理 6 的证明中所示，该嵌入可扩张为带对合代数的嵌入 $(L, \phi) \hookrightarrow (\mathcal{A}_{F_A}, \tau_{F_A})$。

□

作为定理 8 的推论，我们得到如下

推论 9. 存在一个域 E 和一个子域 $T \subset E$，满足 $[E : T] = 2$，使得存在一个无限集 B，其中包含两两不同构的 E 除代数，它们的次数为 3，且带有 E/T-对合；并且对于任意一个次数为 3 的域扩张 L/E，若其具有一个阶 2 的自同构 ϕ，且该自同构扩张了 E 的非平凡 T-自同构，则对于任意带有 E/T-对合 τ 的 $\mathcal{A} \in B$，都存在带对合代数的嵌入 $(L, \phi) \hookrightarrow (\mathcal{A}, \tau)$。

证明。令 ξ_3 为一个本原 3 次单位根，$K = \mathbb{Q}(\xi_3)(x, y, z)$ 为域 $\mathbb{Q}(\xi_3)$ 和 $F = K(\sqrt{2})$ 的纯超越扩张。于是，对于 $i > 0$，次数为 3 的符号 F-代数 $(z, \frac{x+\sqrt{2}y^i}{x-\sqrt{2}y^i})_3$ 两两不同构（因为它们具有不同的分歧），并且具有 F/K-对合（因为这些代数到 K 的余限制是平凡的）。现在，我们对由这些代数组成的无限集合 $A \subset Alg_3(F/K)$ 应用定理 8，并令 $E := F_A$, $T := K_A$, $B := \mathrm{res}_{F_A/F}(A)$。

□

用代数群的语言重新表述前一个推论，我们得到如下结果

推论 10。存在一个域 T，使得其上存在无穷多个（两两不同构的）A_2 型外型，并且具有相同的无限属。

References

[1] C. Beli、P. Gille、T.-Y. Lee，《具有相同极大环面的 G_2 型代数群的例子》，Tr. Mat. Inst. Steklova 292 (2016), 16-25；以及 Proc. Steklov Inst. Math., 292 (2016), 10-19。[2] V.I. Chernousov、A.S. Rapinchuk、I.A. Rapinchuk，《具有相同极大子域的除代数》，Usp. Mat. Nauk. 70 (2015), no. 1, 89-122（俄文）。英文译本：Russ. Math. Surv. 70 (2015), 83-112。[3] M.-A. Knus、A.S. Merkurjev、M. Rost 和 J.-P. Tignol，《对合之书》，Colloquium Publications, vol. 44, Amer. Math. Soc., 1998。[4] J.S. Meyer，《具有无限属的除代数》，Bull. London Math. Soc. 46 (2014), no. 3, 463-468。[5] G. Prasadand A.S. Rapinchuk，《将带对合的域嵌入带对合的单代数的局部-整体原理》，Comment. Math. Helv. 85 (2010), 583-645。[6] A.S. Rapinchuk 和 I.A. Rapinchuk，《具有良约化的线性代数群》，Res. Math. Sci. 7 (2020), no. 3, paper no. 28。[7] P. Roquette，《单代数的泛分裂域的同构》，J. Reine Angew. Math. 214/215 (1964), 207-226。[8] D.J. Saltman，《除代数讲义》，Amer. Math. Soc., 普罗维登斯, RI, 1999。[9] S.V. Tikhonov，《具有无限属的素数次除代数》，Tr. Mat. Inst. Steklova 292 (2016), 264-267（俄文）。英文译本：Proc. Steklov Inst. Math., 292 (2016), 256-259。

Belarusian State University, Nezavisimosti Ave.,4, 220030, Minsk, Belarus电子邮箱地址：tikhonovsv@bsu.by