arXiv:2305.01609v1 [math.RA] 2 May 2023

《Weyl代数及其相关对象：综述》

JASON GADDIS

Abstract. 我们综述了 Weyl 代数的若干种推广形式，包括广义Weyl代数、扭曲广义Weyl代数、量子Weyl代数以及 Bell-Rogalski代数。重点关注环论性质、表示论和不变理论。

1. Introduction

Heisenberg李代数 H 由域上的 x、y、z生成，其李括号为 $[x,y]=z$ 和 $[z,x]=[z,y]=0$。在包络代数 $U(H)$ 中， z 的像是中心的，因此 $(z-1)$ 是一个双边理想。商 $U(H)/(z-1)$ 现在被称为 Weyl代数，这一术语最初由 Dixmier [28] 创造。但这一对象的代数理论可以追溯到 Born、Dirac、Heisenberg、Hirsch 和 Littlewood 等人。有关历史概述，请参阅 Coutinho [25] 的综述。关于 Weyl代数及其性质和表示论，已有大量著作。在这篇综述中，我们仅对这些成果略作提及，重点将放在它的推广上。

设 $\Bbbk$ 是特征零的代数闭域 [1]。现在及今后，环（及代数）均假定为结合的。非交换环 R 上的模是左模。若 R 是环且 $a,b\in R$，则交换子记作 $[a,b]=ab-ba$。我们用 $\mathcal{Z}(R)$ 表示 R 的中心。对于正整数 n，我们用 $[n]$ 表示集合 $\{1,2,\dots,n\}$。

定义 1.1. 设 R 是一个环。 R 上的第 n 个 Weyl 代数是由 p_1、q_1、.....、p_n、q_n 在 R 上生成的 $\Bbbk$-代数 $W_n(R)$，满足以下关系：

$$[q_i,p_i]=1,[p_i,r]=[q_i,r]=0 \qquad \text{对所有 } i\in[n],\ r\in R$$

$$[q_i,p_j]=[p_i,p_j]=[q_i,q_j]=0 \qquad \text{对于所有 } i,j\in[n],\ i\neq j。$$

我们将 $W_1(\Bbbk)$ 称为第一 Weyl 代数[2]，在此情形下记作 $p=p_1$ 和 $q=q_1$。这是无限维单环的典型例子。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16S32, 16S30, 16W50, 16W35, 16W22, 16W20.*Key words and phrases.* Weyl代数，广义 Weyl 代数，扭曲广义 Weyl 代数，单代数，权模，自同构群，不变理论。

[1]这些假设是讨论中某些部分所必需的，但并非全部。建议读者查阅所给参考文献（数量众多），以了解针对特定结果对域所需的最弱假设。

[2]某个时候，我们大胆地决定使用 $W_1(\Bbbk)$，而不是更常见的 $A_1(\Bbbk)$。这是为了避免后文出现冲突。我们主要将 A 保留用于泛指 $\Bbbk$-代数。

什么才算是对 Weyl代数的恰当“推广”？它是否应当是一个包含 Weyl代数，且其中各代数具有类似代数性质和同调性质的代数类？如果是这样，它应当保留哪些性质，又允许弱化哪些性质？还是说，它应当是通过形式变形或扭曲过程从 Weyl代数得到的某个代数类？

这个问题没有唯一正确的答案，但在这篇综述中，我们希望介绍一些由 Weyl代数激发出的不同研究分支。当然，我们不可能涉足每一个方向。例如，我们几乎没有提及 $\mathcal{D}$-模；有些人可能会认为这是极其严重的疏漏，以至于立刻戴上帽子，离开办公室[3]。作者已尽力全面列出参考文献，为此，参考文献目录的篇幅几乎与论文正文相当[4]。毫无疑问，总有一些内容或人物被遗忘，作者谨对这些疏漏表示诚挚歉意[5]。

致谢。谨向我的合作者 Daniele Rosso 和 Robert Won 致以谢意，感谢他们教会我下文所讨论理论中的关键方面。本文部分内容写于作者作为随行参与者参加 2022年 Spannocchia Writer's Conference 期间。作者感谢 Tenuta Di Spannocchia 的盛情款待，也感谢其他与会者进行的有趣讨论，尽管这些讨论大多与 Weyl代数无关。

2. Generalized and generalizeder Weyl algebras

在关于 Quillen引理 的 1977年 手稿中，[68], Joseph 引入了 $W_1(\Bbbk)$ 的一族子代数，现回顾如下[6]。给定 $a(u) \in \Bbbk[u]$，$\Bbbk$-代数 $J(a)$ 由 x、y、z 生成，并满足以下关系：

$$xz = (z-1)x, \quad yz = (z+1)y, \quad yx = a(z).$$

容易看出，$J(a) \cong W_1(\Bbbk)$ 当且仅当 $\deg a = 1$。现在，若 $\deg a > 1$，则对某个 $b \in \Bbbk[u]$，可写成 $a(u) = (u-\alpha)(u-\beta)b(u)$。作如下对应：

$$y = q, \quad z = qp + \alpha, \quad x = -p(-qp - \alpha + \beta)g(-qp - \alpha),$$

表明 $J(a)$ 同构于 $W_1(\Bbbk)$ 的一个子代数。这意味着 $xyx = xa(z) = a(z-1)x$，并且由于$W_1(\Bbbk)$ 是一个整环，我们有 $xy = a(z+1)$。Joseph 证明了，$J(a)$ 是单的，当且仅当 f 不存在满足 $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}^+$ [68, 的一对根 r_1、r_2（引理 3.1]）。我们称这样的一对根为同余根。注意，Weyl 代数本身显然满足这一条件。

[3]我们对此毫不抱歉。[4]这只是轻微的夸张。[5]相关人员已经被解雇。[6]Joseph 将这些代数记作 $A_{1,\ f}$。出于某些原因，我们对定义和记号作了些许变通。特别是，我们调整了各变量所扮演的角色。

这些代数以各种形式及其推广形式反复出现。一个一贯的联系是它们与李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 的包络代数及其本原商之间的联系。回顾一下， $U = U(\mathfrak{sl}_2)$ 是由 e、 f、 h 生成、满足以下关系的 $\Bbbk$-代数

$$[e, f] = h, \quad [e, h] = 2e, \quad [f, h] = -2f.$$

U 的卡西米尔元为 $\Omega = 4fe + h^2 + 2h$ ，而 U 的中心为 $\Bbbk[\Omega]$。本原因子具有如下形式：[7] $U_\lambda = U/(\Omega - (\lambda^2 - 1))$，其中 $\lambda \in \Bbbk$。这些代数的理论深受 Dixmier [30, 29], 、Smith [92], 、Stafford [97], 等人的研究成果影响。

固定 $\lambda \in \Bbbk$，并令 $a = \frac{1}{4}(\lambda^2 - 1) - z^2 - z$。于是存在一个映射 $\phi\colon U \longrightarrow J(a)$，其定义为 $e \mapsto -y$、 $f \mapsto -x$和 $h \mapsto -2z$。容易验证， ϕ是满同态，而且，$\ker \phi = (\Omega - (\lambda^2 - 1))$。由此可得[8] ， $U_\lambda \cong J(a)$。

在 1993年发表的论文[9], 中，Hodges 将代数 $J(a)$称为 A 克莱因奇点 [62]型形变。要理解这一术语，我们只需注意到，可以在 $J(a)$上定义一个滤过，令 $\deg z = 2$，且 $\deg x = \deg y = \deg_u a$。该滤过的关联分次环于是同构于 $\Bbbk[x, y, z]/(yx - z^{n+1})$，这是一个（交换）克莱因奇点。Hodges 还指出，这些代数可以看作 Smith [94]研究的一类代数的无限维本原因子。

但正如数学中的许多事物一样，关于这些代数及其推广，似乎也有某种“无形的氛围”[10]。在一篇未发表的 1989年预印本 [87], 中，Rosenberg 引入了一类称为双曲环的代数。这项工作显然没有广泛传播，但在哈佛大学[11]流传开来。后来，这一构造出现在一份 1995年手稿中，该手稿基于 1991 年至 1993 [88]期间的讲座。另一方面，Jordan 研究的是某些迭代 Ore 扩张类，称为双斜多项式环，以及它们的本原因子 [63]。代数 $J(a)$ 可以由这一构造得到。我们将在下文回到这一点。

2.1. 广义 Weyl 代数。不过，文献中广为采用的术语是“广义 Weyl 代数”，它最初见于 Bavula 的 1990年学位论文 [6]。介绍广义 Weyl 代数的经典文献是他的论文 [7], ，该文最初于 1992 年以俄文发表，随后于 1993年以英文发表。

定义 2.1. 设 R 是一个 $\Bbbk$-代数， $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ 是 R 的一组互相交换的自同构，且 $= \{a_1, \ldots, a_n\}$ 是 R 中的一组正则中心元。（秩为 n 的）广义 Weyl 代数 [12] （GWA）

[7]本原因子 U_λ 和 $U_{-\lambda}$ 同构。否则，这些代数两两不同。[8]这本质上就是 [62, 例 4。7]。[9]本文最初于 1990年 收到，这一点与接下来的讨论有关。[10]请读者记住，这一切都发生在互联网让公开发表自己的成果变得轻而易举之前。[11]这基本上只是根据引用该文的其他论文所作的推测。如果有人有这篇论文的副本，请转发至 gaddisj@miamioh.edu。[12]定义有一定的灵活性。有些定义要求 R 是交换的，甚至要求它是交换整环，但我们没有这样的要求。也可以去掉要求 a_i 是 R中的正则元这一条件。这类代数有时称为 *degenerate* 广义 Weyl 代数。若还打算去掉另外两个条件，那可就有苦头吃了。

$R(\boldsymbol{\sigma}, \mathsf{a})$ 是与这些数据相关联的 $\Bbbk$-代数，它在 R 上由 x_i、y_i、$i \in [n]$ 生成，并满足以下关系：

$$
\begin{aligned}
&x_i r = \sigma_i(r) x_i \quad y_i r = \sigma_i^{-1}(r) y_i && \text{for all } r \in R \text{ and } i \in [n] \\
&y_i x_i = a_i \quad x_i y_i = \sigma_i(a_i) && \text{for all } i \in [n] \\
&[x_i, y_j] = [x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0 && \text{for all } i, j \in [n],\ i \neq j.
\end{aligned}
$$

暂且只考虑秩一情形，因此令 $x = x_1$ 和 $y = y_1$。秩一广义 Weyl 代数$\Bbbk[z](\sigma, a)$称为经典的，若 $\sigma(z) = z - 1$；若存在某个 $q \in \Bbbk^\times$，使得 $\sigma(z) = qz$，则称为量子的[13]。经典广义 Weyl 代数是代数 $J(a)$。注意，任意定义在 $\Bbbk[z]$ 上的广义 Weyl 代数，在同构意义下要么是经典的，要么是量子的。

若 $a \in \Bbbk^\times$，则经典广义 Weyl 代数 $\Bbbk[z](\sigma, a)$ 同构于 $\Bbbk[z][x^{\pm 1};\ \sigma]$，一个扭 Laurent 环。当 a 为线性时，$\Bbbk[z](\sigma, a) \cong W_1(\Bbbk)$。建议读者明确写出这个同构；这样一来，就很容易看出如何根据定义 2.1 构造出 n阶 Weyl代数。根据上述讨论，当 a 为二次多项式时，经典广义 Weyl 代数同构于某个 U_λ。许多其他重要的环也可通过广义 Weyl 代数构造得到，其中包括 $U(\mathfrak{sl}_2)$ 本身、量子包络代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 及其本原因子，以及 Benkart 和 Roby 的 down-up 代数 [18]。

由于不要求 R 为交换的，我们可以递归地定义秩为 n 的广义 Weyl 代数 $R(\boldsymbol{\sigma},\mathsf{a})$。对于 $k \in [n]$，令 $\boldsymbol{\sigma}_k = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ 且 $\mathsf{a}_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$。则 $R(\boldsymbol{\sigma}_k,\mathsf{a}_k)$ 是由 x_i、y_i、$i \in [k]$ 生成的 $R(\boldsymbol{\sigma},\mathsf{a})$ 的 R-子代数。因此，$R(\boldsymbol{\sigma}_k,\mathsf{a}_k)$ 是秩为 k的广义 Weyl 代数，并且对于 $k \in \{2, \ldots, n\}$，有 $R(\boldsymbol{\sigma}_k,\mathsf{a}_k) = R(\boldsymbol{\sigma}_{k-1},\mathsf{a}_{k-1})(\sigma_k, a_k)$。于是，$R(\boldsymbol{\sigma}_n,\mathsf{a}_n) = R(\boldsymbol{\sigma},\mathsf{a})$。

设 $R(\boldsymbol{\sigma},\mathsf{a})$ 和 $R'(\boldsymbol{\sigma}',\mathsf{a}')$ 分别是秩为 m和 n的广义 Weyl 代数。令 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_{m+n})$ 且 $\mathsf{b} = (b_1, \ldots, b_{m+n})$，其中

$$
\tau_i = \begin{cases} \sigma_i \otimes 1 & i \leq m \\ 1 \otimes \sigma'_{i-m} & m < i \leq n, \end{cases} \qquad b_i = \begin{cases} a_i \otimes 1 & i \leq m \\ 1 \otimes a'_{i-m} & m < i \leq n. \end{cases}
$$

那么 $R(\boldsymbol{\sigma}, \mathsf{a}) \otimes R'(\boldsymbol{\sigma}', \mathsf{a}') \cong (R \otimes R')(\boldsymbol{\tau}, \mathsf{b})$ 是一个秩 $m + n$ 广义 Weyl 代数。因此，两个秩一广义 Weyl 代数的张量积是一个秩二广义 Weyl 代数，但并非每个秩二广义 Weyl 代数都是两个秩一广义 Weyl 代数的张量积。

2.2. 量子化。在这里，我们介绍 Giaquinto 和 Zhang 的量子 Weyl 代数 [4 7].

设 V 为一个 n维向量空间，并设 $\mathcal{R}: V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ 为一个线性变换。令$\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R} \otimes \mathrm{id}_V$和 $\mathcal{R}_{23} = \mathrm{id}_V \otimes \mathcal{R}$。那么，当

(1) $\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23}$ （辫子关系），且 (2) $(\mathcal{R} - q)(\mathcal{R} + q^{-1}) = 0$ 对某个 $q \in \Bbbk^\times$ 成立（Hecke 条件）时，

设定 $\mathcal{R}(x_i \otimes x_j) = \mathcal{R}_{ij}^{k\ell} x_k \otimes x_\ell$，其中 $\mathcal{R}_{ij}^{k\ell} \in \Bbbk$。

[13]有时也允许量子广义 Weyl 代数以 $\Bbbk[z^{\pm 1}]$ 为基环，不过这类代数的行为更像经典广义 Weyl 代数。

定义 2.2. 设 $\mathcal{R}$ 是一个 Hecke 对称性。与 $\mathcal{R}$ 相关联的量子 Weyl 代数是由 x_i、y_i、$i\in[n]$ 生成的 $\Bbbk$-代数，满足以下关系：

$$\sum_{k,\ell}\mathcal{R}_{ij}^{k\ell}x_kx_\ell-qx_ix_j=0,\quad \sum_{k,\ell}\mathcal{R}_{\ell k}^{ji}y_ky_\ell-qy_iy_j=0,\quad y_ix_j=\delta_{ij}+q\sum_{k,\ell}\mathcal{R}_{j\ell}^{ik}x_ky_\ell,\qquad \text{for all } i,j\in[n].$$

这一构造中最重要的例子之一是多参数量子 Weyl 代数。现在我们回顾这个定义，但请注意，我们采用的是 Alev 和 Dumas [1]（另见 [66]）的约定，因为这种约定在文献中更为常见。[47] 中出现的另一个有趣情形对应于 Jordan 对称。

定义 2.3。设 $\mathsf{q}=(q_i)\in(\Bbbk^\times)^n$，且 $\mathsf{p}=(p_{ij})\in M_n(\Bbbk^\times)$ 是乘法反对称的[14]。（秩 n）量子 Weyl 代数 $W^{q,}{}_n{}^{\mathsf{p}}(\Bbbk)$ 由 $\Bbbk$ 上的 $x_i,y_i,\ i\in[n]$ 生成，满足以下关系：

$$x_ix_j=q_ip_{ji}^{-1}x_jx_i,\quad y_jy_i=p_{ji}y_iy_j,\quad x_iy_j=p_{ji}y_jx_i,\quad x_jy_i=q_ip_{ji}^{-1}y_ix_j,\qquad \text{for all } i,j\in[n],\ i<j.$$

$$x_iy_i-q_iy_ix_i=1+\sum_{k=1}^{i-1}(q_k-1)y_kx_k,\qquad \text{for all } i\in[n].$$

我们将第一个量子 Weyl 代数[15]记作 $W_1^q(\Bbbk)$（其中 $q=q_1$），它由 $x=x_1$ 和 $y=y_1$ 生成，满足关系 $xy-qyx=1$。不难看出，$W_1^q(\Bbbk)$可以像 $W_1(\Bbbk)$可实现为经典广义 Weyl 代数那样，实现为量子广义 Weyl 代数。然而，更高阶的量子 Weyl 代数并不是广义 Weyl 代数（至少，不是以任何明显的方式）。为此，我们需要一种更一般的构造。

2.3. 扭曲广义 Weyl 代数。鉴于上述讨论，我们有理由期待单李代数的包络代数，或者至少它们的本原商，能够表现为广义 Weyl 代数。一般而言，这种情况并不会发生，但 Mazorchuk 和 Turowksa 的一种构造涵盖了其中许多例子 [78]。尽管他们没有明确指出这种联系，却观察到某些模范畴之间存在类似之处。

定义 2.4. 设 R 是一个 $\Bbbk$-代数，$\sigma=\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\}$ 是 R 的一组互相交换的自同构，$a=\{a_1,\dots,a_n\}\subset R$ 是 R 中的一组中心非零因子，并且 $\mu=(\mu_{ij})\in M_n(\Bbbk^\times)$。扭曲广义 Weyl 构造（TGWC）是由 $X_i^{\pm}$，$i\in[n]$ 在 R 上生成的 $\Bbbk$-代数 $\mathcal{C}_\mu(R,\sigma,a)$，满足以下关系：

$X_i^{\pm}r-\sigma_i^{\pm1}(r)X_i^{\pm}$，$X_i^-X_i^+-a_i$，$X_i^+X_i^--\sigma_i(a_i)$　$X_i^+X_j^--\mu_{ij}X_j^-X_i^+$，对所有 $i,j\in[n],i\neq j,r\in R$。$\mathcal{C}_\mu(R,\sigma,a)$ 上存在一个 $\mathbb{Z}^n$-分次[16]，其定义为对所有 i，令 $\deg(R)=\mathbf{0}$，且令 $\deg(X_i^{\pm})=\pm\mathsf{e}_i$。相应的扭曲广义 Weyl 代数（TGWA）是商代数 $\mathcal{A}_\mu(R,\sigma,a)=\mathcal{C}_\mu(R,\sigma,a)/\mathcal{J}$，其中 $\mathcal{J}$ 是所有满足 $J_{\mathbf{0}}=\{0\}$ 的 $\mathbb{Z}^n$-分次理想 J 之和。

[14]乘法反对称意味着 $p_{ii}=1$ 且 $p_{ij}=p_{ji}^{-1}$ 对 $i\neq j$成立。[15]当 $n=1$时，矩阵 p 无关紧要。[16]参见第 3.1 节。

当对所有 i,j 都有 $\mu_{ij}=1$，且 $\sigma_i(a_j)=a_j$ 对 $i\neq j$ 成立时，我们可以从这些 TGWA 中恢复秩为 n 的广义 Weyl 代数。量子 Weyl 代数 [38]，、 $U(\mathfrak{sl}_{n+1})$ 的某些本原商，以及 $U(\mathfrak{p}_{2n})$ [59]，和李超代数包络代数的某些本原商 [60]，都可以实现为 TGWA。在适当的限制条件下，TGWA 与广义 Weyl 代数类似，在张量积运算下封闭 [42]。完全可以专门为 TGWA 撰写一篇综述[17],，因此我们只能简要介绍该领域的一些近期研究。

我们将特别关注扭曲广义 Weyl 代数的一个特定子类。设 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_\mu(R,\sigma,a)$ 是秩为 n 的扭曲广义 Weyl 代数，满足每个 a_i 都是 R ($\mathcal{A}$ 是正则的) 中的非零因子，且典范映射 $R\longrightarrow\mathcal{A}$ 是单射（$\mathcal{A}$ 是 μ-一致的）。对每个满足 $i<j$ 的 $i,j\in[n]$，令 $V_{ij}=\mathrm{Span}_{\Bbbk}\{\sigma_i^k(t_j):\ k\in\mathbb{Z}\}$。若每个 V_{ij} 在 $\Bbbk$ 上都是有限维的，则称 $\mathcal{A}$ 是 $\Bbbk$-有限的 [54]。

我们再稍作进一步限定。设对所有满足 $i\neq j$ 的 $i,j\in[n]$，都有 $\sigma_i(t_j)=\gamma_{ij}t_j$。在这种情况下，当且仅当对所有 $i\neq j$ 都有 $\mu_{ij}\mu_{ji}=\gamma_{ij}\gamma_{ji}$ 时，$\mathcal{A}$ 才是一致的。此时，$\mathcal{A}$ 满足通常的扭曲广义 Weyl 代数关系，而理想 J 由以下元素生成:

$$X_i^+X_j^+-\gamma_{ij}\mu_{ij}^{-1}X_j^+X_i^+,\quad X_j^-X_i^--\gamma_{ij}\mu_{ji}^{-1}X_i^-X_j^-,\qquad i,j\in[n],i\neq j.$$

这些称为类型为 $(A_1)^n$ 的扭曲广义 Weyl 代数，而秩为 n 的广义 Weyl 代数属于这一子类。Futorny 和 Hartwig 的工作 [38] 明确揭示了这些扭曲广义 Weyl 代数与量子 Weyl 代数之间的联系。

2.4. BR 代数。Bell[19] 和 Rogalski 在对 Gelfand-Kirillov 维数[18] 为二的单 $\mathbb{Z}$ 分次环进行分类时，引入了一种广义化秩一广义 Weyl 代数 [16] 的构造。合理地说，人们可以将此定义视为一种非交换扩展 Rees 环构造。事实上，这些代数起源于对非交换爆破 [69] 的研究。下面的定义取自 [44]„ 其限制条件比原始定义略为宽松。

定义 2.5. 设 R 是一个 $\Bbbk$-代数，σ 是 R 的一个自同构。设 H 和 J 是 R 的两个双边理想。对于 $n\geq 1$，令 $I^{(0)}=R$, $I^{(n)}=J\sigma(J)\cdots\sigma^{n-1}(J)$；对于 $n\leq -1$，令 $I^{(n)}=\sigma^{-1}(H)\sigma^{-2}(H)\cdots\sigma^{n}(H)$。我们假设理想 H 和 J 的选取满足对所有 n，均有 $I^{(n)}\neq 0$。相应的 Bell–Rogalski 代数[20]（简称 BR 代数）是代数

$$R(t,\sigma,H,J)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}I^{(n)}t^n\subseteq R[t,t^{-1};\sigma].$$

取 $H=R$ 和 $J=(a)$，即可得到上述广义 Weyl 代数 $R(\sigma,a)$。这个对应关系来自映射 $y\mapsto t^{-1}$ 和 $x\mapsto at$。反过来，每个具有 H 和 J 主理想的 BR 代数都同构于一个广义 Weyl 代数 [44]。我们将看到，对于广义 Weyl 代数可以研究的许多性质，实际上也可以在这一更一般的背景下考察。

[17]我闻到了续集的气息！[18]请参见第 3.5 节。[19]需要明确的是，这个人是 Jason Bell；如果我的导师收养了我，那也会是我的名字。[20]Bell 和 Rogalski 并没有为这些代数命名。我曾一度建议将它们称为 $generalized\ generalizedWeyl\ algebras$，但我的合著者拒绝了这个提议。现在我赞成 $generalizeder\ Weyl\ algebras$。

3. Ring-theoretic properties

下面我们将讨论广义 Weyl 代数如何推广 Weyl代数的某些性质，更准确地说，是 $U(\mathfrak{sl}_2)$ 的本原商的性质。在可能的情况下，我们也会结合上文介绍的其他推广形式，讨论这些性质。

3.1. 分次。设 Γ 是一个阿贝尔群。若存在向量空间分解 $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$，使得 $A_\gamma A_{\gamma'} \subset A_{\gamma+\gamma'}$，则称 $\Bbbk$-代数 A 是 Γ-分次的。若左 A-模 M 有其自身的向量空间分解 $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$，使得 $A_\gamma M_{\gamma'} \subset M_{\gamma+\gamma'}$，则称其为 Γ-分次的。我们用 $\mathrm{GrMod}_\Gamma A$ 表示由分次左 A-模及零次齐次同态构成的范畴。

环 R 上的 Weyl代数 $W_n(R)$ 带有规范的 $\mathbb{Z}^n$-分次，其定义为对所有 $i \in [n]$，令 $\deg(p_i) = \mathbf{e}_i$，且 $\deg(q_i) = -\mathbf{e}_i$；并对所有 $r \in R$，令 $\deg(r) = 0$。类似地，TGWA $\mathcal{A}_\mu(R,\sigma,a)$ 继承相应 TGWC 的$\mathbb{Z}^n$-分次，因此对所有 $i \in [n]$，$\deg(X_i^{\pm}) = \pm\mathbf{e}_i$，且对所有 $r \in R$，$\deg(r) = \mathbf{0}$。BR 代数上有一个自然的 $\mathbb{Z}$-分次，它继承自 $R[t^{\pm1};\ \sigma]$，其中 $\deg(r) = 0$，且 $\deg(t^{\pm1}) = \pm1$。

3.2. 整环。我们按照次数字典序（其中 $y > x$）对 R-基底 $R(\sigma,a)$ 的单项式排序。设 $f_1, f_2 \in R(\sigma,a)$ 非零，并分别选取其中次数最大的单项式，记为 $m_1 = x^{i_1}y^{j_1}$和 $m_2 = x^{i_2}y^{j_2}$。归纳论证表明 $m_1m_2 = x^{i_1+i_2}y^{i_1+i_2} +$(低次项)。因此，$A$ 中次数最大的单项式是 $x^{i_1+i_2}y^{i_1+i_2}$，故 $f_1f_2 \neq 0$。由此可知，如果 R 是整环，那么 $R(\sigma,a)$ 也是整环。利用迭代构造可进一步推出：若 R 是整环，则整环这一性质也适用于高秩广义Weyl代数 $R(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})$。

这是上述所有 Weyl代数推广形式都具有的一项性质，不过对于量子化，还需要额外的假设（见 [47]）。关于扭曲广义 Weyl 代数，参见 [38, 命题 2.9]，；关于 BR 代数，参见 [44, 引理 3.1]。

3.3. 单性。若一个环的双边理想只有零理想和环本身，则称该环为单环。由于我们假设 $\Bbbk$ 具有特征零，$W_n(\Bbbk)$ 是单环。对此的标准证明是，对 $n = 1$ 取一个非零元素 $b \in I$，并反复利用与 p 和 q 的交换运算，证明 I 包含一个非零常数[21]。更高阶 n 的证明类似。在正特征域 F 上，Weyl代数 $W_n(F)$ 不是单环。

人们有兴趣在更广泛的背景下理解无限维单环。根据前面提到的 Joseph 的结果，当且仅当 a 没有一对同余根[22]时，经典广义 Weyl 代数 $\Bbbk[z](\sigma,a)$ 是单的。不过，秩一广义 Weyl 代数有一个更一般的判据。这一判据可归功于 Bavula [9, 定理 4.2] 和 Jordan [65, 定理 6.1]。

[21]或者，可以注意到，如果一个环没有非零有限维表示，那么它就是单环。这与给定定义等价，因为有限维表示的湮灭子必然是一个非零的真双边理想。现在设 $X, Y \in M_n(\Bbbk)$ 是 $W_1(\Bbbk)$ 的一个 n 维表示，因此 $XY - YX = I_n$。但这样一来，$0 =$迹$(XY - YX) =$迹$(I_n) = n$，矛盾。[22]重根没问题。

如果 $\sigma(I) = I$，则 R 的理想是 σ-稳定的。若存在一个单位 $\alpha \in R$，使得对所有 $r \in R$都有 $\sigma^n(r) = \alpha^{-1} r \alpha$，则称自同构 σ 为内自同构。当且仅当 R 没有非平凡的 σ-稳定理想，σ 的任何幂都不是 R的内自同构，并且对所有 $n \geq 1$都有 $R = Ra + R\sigma^n(a)$时，$R(\sigma, a)$ 才是单的。对于经典广义 Weyl 代数，这最后一个条件等价于同余根条件。

¨Hartwig 和 Oinert [56]给出了扭曲广义 Weyl 代数的一个一般单性判据。这里我们只回顾他们针对类型 $(A_1)^n$ 的结果。设 $A = A_\mu(R, \sigma, t)$ 是这样的扭曲广义 Weyl 代数。那么，当且仅当对所有 $i \in [n]$ 和所有 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，$t_i + Rt_i = R$ $R\sigma_i^k$，且 R 是 $\mathbb{Z}^n$- 单的[23]，并且 $\mathcal{Z}(A) \subset R$ 时，A 是单的。

对于 BR 代数 $B = R(t, \sigma, H, J)$，定义

$$\mathcal{S}(B) = \{\mathbf{p} \in \operatorname{Spec}(R) : \mathbf{p} \supset HJ\} = \operatorname{Spec}(R/(HJ)) = \operatorname{Spec}(R/H) \cup \operatorname{Spec}(R/J). \tag{3.1}$$

若对所有 $i \neq 0$ 都有 $\sigma^i(\mathcal{S}(B)) \cap \mathcal{S}(B) = \emptyset$，则称 $\mathcal{S}(B)$ 是 σ-孤立的。那么，当且仅当 R 是 σ-单的，且 $\mathcal{S}(B)$ 是 σ- 孤立的 [16, 命题 2.18 (3)] 和 [44, 命题 2.3]时，B 是单的。不难看出，这个判据将上面的广义 Weyl 代数判据作为特例。

对于量子化，目前没有判定单性的通用准则，不过量子化当然也可能是单的，例如高阶 Weyl 代数本身，另见 [47, 定理 3.5]。一般而言，高阶量子化代数并不是单的。不过在这种情况下，Jordan 给出了一种单的局部化 [66]，，这一结果稍后还会在本文中再次出现。

3.4. 诺特性。我们先介绍一种在研究广义 Weyl 代数的性质时很有用的构造。σ上的 R-导子是一个 $\Bbbk$-线性映射 δ，满足 $\delta(rr') = \sigma(r)\delta(r') + \delta(r)r'$，对所有 r、$r' \in R$均成立。给定 R的一个 σ-导子δ，Ore 扩张 $R[x; \sigma, \delta]$ 是由 x 在 R 上生成的，并满足规则 $xr = \sigma(r)x + \delta(r)$，对所有 $r \in R$ 均成立。

考虑 Ore 扩张 $T = R[u; \sigma][v; \sigma^{-1}, \delta]$，其中将 σ 扩展到 $R[u; \sigma]$，定义为 $\sigma(u) = u$，而δ 由 $\delta(r) = 0$，$\delta(u) = a - \sigma(a)$确定，其中某个 $a \in R$成立。Jordan 将这种迭代扩张称为双扭曲多项式环 [64]。可以看出，$vu - a$ 是 T中的一个中心元素。因此，$vu - a$ 生成了 T的一个双边理想，并且显然 $T/(vu - a) \cong R(\sigma, a)$。

现在设 R 是（左或右）诺特的。根据 Ore扩张的希尔伯特基定理，T 是诺特的，参见 [52]。由于 $T/(vu - a) \cong R(\sigma, a)$，诺特性质会传递到 $R(\sigma, a)$。关于这一事实的另一种证明是直接将希尔伯特基定理应用于广义 Weyl 代数，参见 [7, 命题 1.3(1)]。与整环性质一样，诺特环上的高秩广义Weyl代数也是诺特的。

其他推广的诺特性质则更加微妙。根据 [42, 定理 4.11(1)]，，诺特环上的 A_1 型^n 扭曲广义 Weyl 代数是诺特的。某些其他诺特环上的扭曲广义 Weyl 代数也确实是诺特的，但不存在一般性的此类论证。

对于 BR 代数 $B = R(t, \sigma, H, J)$，回顾在 (3.1) 中定义的集合 $\mathcal{S}(B)$。如果对任意真闭子集 $Y \subset X$，$Y \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ 对除有限多个 $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}(B)$ 之外的所有 $\mathfrak{p}$ 都成立，则称 $\mathcal{S}(B)$ 在 Spec R 中临界稠密。如果 $\mathcal{S}(B)$

[23]这里的 $\mathbb{Z}^n$-单性无非是指相对于由 σ 生成的群的单性。

是临界稠密的，则 B 是诺特的 [16, 命题 2.18 (1)]。然而，临界稠密并不等同于诺特条件，见 [43]。

3.5. GK 维数。这里我们只回顾与本文情形相关的定义。设 A 是一个仿射 $\Bbbk$-代数，其生成子空间为 V。令 $A_m = \sum_{k=0}^{m} V_k$，并令 $d_m = \text{维数}_{\Bbbk} A_m$。$A$ 的 Gelfand–Kirillov（GK）维数为

$$\operatorname{GKdim} A = \limsup \frac{\log(\dim_k A_m)}{\log m}.$$

关于 GK 维数的详细概述，请参阅 [73]。值得注意的是，取关联分次环不会改变 GK 维数；对于交换环，GK 维数等于 Krull 维数。在标准滤过下，$\operatorname{gr} W_1(\Bbbk) \cong \Bbbk[p,q]$，因此 $\operatorname{GKdim} W_1(\Bbbk) = 2$。类似地，利用上文讨论的滤过，任何经典广义 Weyl 代数的 GK 维数都是 2。

然而，还有一个更一般的结果，该结果几乎同时由 Ebrahim [32, 定理 2.6] 和 Zhao-Mo-Zhang [103, 定理 3.4] 证明。我们称 σ 为 R 的局部代数自同构[24]，如果 U 的任意有限维子空间都包含于 R 的某个 σ-稳定有限维子空间中。注意，如果 σ 是有限阶的，那么这一条件自动成立。如果 σ 是一个 $\Bbbk$-代数 R 的局部代数自同构，那么 $\operatorname{GKdim} R(\sigma, a) = \operatorname{GKdim} R + 1$。假设每个 σ_i 都是局部代数的，也可以将 GK 维数论证迭代应用于高秩广义Weyl代数。

这一条件同样有助于确定 BR 代数 $B = R(t, \sigma, H, J)$ 的 GK 维数。设 $\Bbbk$ 为代数闭域，K 为 R 的分式域，并令 $d = \operatorname{trdeg}(K/\Bbbk)$。若 σ 局部代数，则 $\operatorname{GKdim} B = d + 1$。

对于类型为 $(A_1)^n$ 的扭曲广义 Weyl 代数，很可能也能得到类似结果，但文献中尚无适用于一般情形的此类结果。秩为 n 的量子 Weyl 代数——读者会记得它是这类代数的一个例子——其 GK 维数为 $2n$ [51, 命题 3.4]。

3.6. 整体维数。环 A 的左（分别为右）整体维数，是左（分别为右）A-模 M 的投射维数的上确界。对于诺特环，左、右整体维数相同。因此，整体维数衡量一个环与半单阿廷环有多接近。

当 $\operatorname{char} \Bbbk = 0$ 时，$\operatorname{gldim} W_1(\Bbbk) = 1$，也就是说，$W_1(\Bbbk)$ 是遗传的，参见 [80, 第 7 章]。对于 U_λ，我们有一个三分法：$\operatorname{gldim} U_0 = \infty$，对于非零整数 m，$\operatorname{gldim} U_m = 2$，其他情况下 $\operatorname{gldim} U_\lambda = 1$。这是 Stafford [97] 的结果，其动机来自 Roos [86] 和 Smith [92] 的早期结果。将 U_λ 视为广义 Weyl 代数 GWA，我们有 $a = \frac{1}{4}(\lambda^2 - 1) - z^2 - z$。因此，条件 $\lambda = 0$ 意味着 $a = -(z + 1/2)^2,$，所以 a 有一个重根。另一方面，条件 $\lambda \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 意味着 a 的两个根相差一个整数。

由此得到秩一广义 Weyl 代数的一般判据。经典广义 Weyl 代数 $\Bbbk[z](\sigma, a)$ 在 a 有重根时整体维数为无穷大；在 a 没有重根但存在一对同余根时，整体维数为二；其他情况下整体维数为一。此结果出自 Hodges [62, 定理 4.4]。关于更一般的

[24]等价地，对于所有 $r \in R$，$\dim_{\Bbbk}\{\sigma^n(r) : n \geq 0\} < \infty$。

论证，参见 [63, 推论 7.8]。这一结果可推广到戴德金环 R 上的广义 Weyl 代数 $R(\sigma, a)$，此时用满足 $a \in I$ 的 R 中的理想 I 取代根的作用。另见 [10]。

秩为 n 的量子 Weyl 代数的整体维数为 $2n$，但特殊情形除外（参见 [47, 定理 3.5] 和 [37, 定理 3.8]）。目前尚无关于 BR 代数或扭曲广义 Weyl 代数整体维数的一般判据。关于仿射环上的Weyl代数 [79], ，参见 McConnell 的工作；关于除环上的Weyl代数 [50] 情形的结果，参见 Goodearl、Hodges 和 Lenagan 的工作。

在许多研究中，人们对广义 Weyl 代数的 Krull 维数与整体维数进行了并行研究。我们不逐一回顾这些结果，而是向感兴趣的读者推荐几篇便于查阅的参考文献 [13, 14, 15,37, 50, 63, 79]。

4. Representation theory and other modular considerations

第一 Weyl 代数 $W_1(\Bbbk)$ 的不可约表示分类，以及 $U(\mathfrak{sl}_2)$ 的不可约表示分类，归功于 Block [21]。广义 Weyl 代数的表示论很大程度上借鉴了李代数（及其包络代数）的表示论。在本节中，我们始终假设 R 是交换的，并用 Maxspec(R) 表示 R 的极大理想集合。

4.1. 权模。我们首先描述第一 Weyl 代数 $W_1(\Bbbk)$ 的一些（左）模。令$V^+ = \{v_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$，并定义一个 $W_1(\Bbbk)$-作用，使得对所有 i，有 $pv_i = v_{i+1}$ 和 $qv_i = iv_{i-1}$。类似地，令 $V^- =\{v_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{<0}}$，并定义一个 $W_1(\Bbbk)$-作用，使得对所有 i、$pv_{-1} = 0$，有 $qv_i = iv_{i-1}$，且对 $i < -1$，有 $pv_i = v_{i+1}$。最后，对于 $\lambda \in (0, 1)$，令 $V^\lambda = \{v_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$，并定义一个 $W_1(\Bbbk)$-作用，使得对所有 i，有 $pv_i = v_{i+1}$ 和 $qv_i =(i+\lambda)v_{i-1}$。容易验证这些作用定义良好，且每个都是 $W_1(\Bbbk)$ 的一个（无限维）简单模。此外，这些模彼此不同构。现在我们将这一讨论推广到秩一广义 Weyl 代数的模。

我们称广义 Weyl 代数 $M(R,\sigma,a)$ 的一个（左）模 M 为权模，如果存在如下分解

$$M = \bigoplus_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Maxspec}(R)} M_{\mathfrak{m}}$$

其中 $M_{\mathfrak{m}} = \{z \in M\colon \mathfrak{m}\cdot z = 0\}$。我们称 $M_{\mathfrak{m}}$ 为 M 的一个权空间，而 M 的支集为

$$\mathrm{supp}(M) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Maxspec}(R) : M_{\mathfrak{m}} \neq 0\}.$$

这里的类比在于， R 扮演李代数的嘉当子代数的角色 .

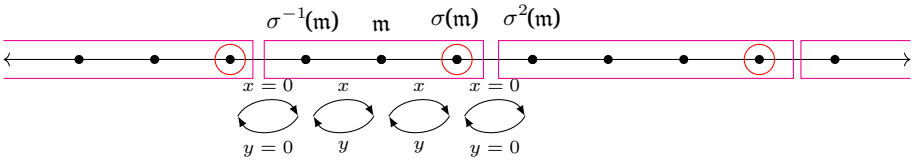
设 M 是广义 Weyl 代数 $R(\sigma, a)$ 的一个权模。在 Maxspec(R) 上有一个由 $n\cdot\mathfrak{m} = \sigma^n(\mathfrak{m})$ 给出的 $\mathbb{Z}$ 作用。于是 $x(M_{\mathfrak{m}}) \subset M_{\sigma(\mathfrak{m})}$，且 $y(M_{\mathfrak{m}})\subset M_{\sigma^{-1}(\mathfrak{m})}$。事实上， M 分解为

$$M = \bigoplus_{\mathcal{O}\in \mathrm{Maxspec}(R)/\mathbb{Z}} M_{\mathcal{O}} \quad \text{where} \quad \mathrm{supp}(M_{\mathcal{O}}) \subset \mathcal{O}.$$

因此，在对某个特定广义 Weyl 代数的权模进行分类时，只需逐一考虑支集位于单个轨道上的权模。Bavula 对经典

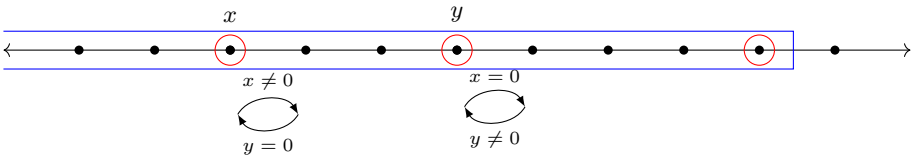
广义 Weyl 代数的单权模和不可分解权模进行了分类 [7]。不过，我们在此采用的方法与 Drozd、Guzner 和 Ovzienko 的工作更为密切相关 [31]。

我们称理想 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Maxspec}(R)$ 是一个断点，如果 $a \in \mathfrak{m}$。在 $R = \Bbbk[t]$ 的情形下，断点对应于定义多项式 a 的根。如果 $\mathfrak{m}$ 是断点，那么很容易证明 $xM_{\mathfrak{m}} = yM_{\sigma(\mathfrak{m})} = 0$。因此，单权模对应于断点之间的区间。权空间是一维的，并且同构于 $R/\sigma^i(\mathfrak{m})$。我们可以将其可视化如下：



对于 Weyl代数，只有一个断点。在含有该断点的轨道上，恰好有两个（无限维）单权模。另一方面，对于不含断点的轨道，恰好有一个（同样是无限维的）单权模。

不可分解权模可以通过沿断点“拼接”单权模构造而成。每个断点都标记有 x 或一个 y，以表明我们选择哪一个非平凡作用。



有限轨道的情形下，也可以描述单权模和不可分解权模，但这里不作介绍。感兴趣的读者可参阅 [31]。

在无限轨道的情形下，BR 代数的权模描述与上述情形完全类似 [44]。关键区别在于，断点被定义为满足$\sigma(m) \in \mathcal{S}(B)$ 的理想 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Maxspec}(R)$（见 (3.1)）。

自然也会想到，权模的研究如何推广到高秩广义Weyl代数 [7, 11]。这里的轨道由 σ_i 生成的群的作用决定。在扭曲广义 Weyl 代数的情形下也可以进行类似研究，这一直是其发展的推动力之一，最早可追溯到 Mazorchuk 和 Turowska 的原始论文 [78]。这里不作介绍，读者可参阅若干发展这一理论的论文 [53, 55, 58]。

4.2. Morita 等价。在 [91], Smith 给出了一个 $W_1(\Bbbk)$ 的右理想 I，使得 $S = \mathrm{End}_{W_1(\Bbbk)}(I)$ 与 $W_1(\Bbbk)$ 不同构，但 $M_2(S) \cong M_2(W_1(\Bbbk))$。这促使 Stafford 更一般地研究 $W_1(\Bbbk)$ 的右理想的自同态。他证明，对于 $W_1(\Bbbk)$ [98] 的任意非循环投射右理想，上述性质都成立。随后，Stafford 对与 $W_1(\Bbbk)$ Morita 等价的整环进行了分类，结果发现这些整环与 $\mathrm{Aut}_{\Bbbk}(W_1(\Bbbk))$ 的某些轨道之间存在自然双射。之后的进一步研究

经 Musson [82], Berest-Wilson [19], 和 Kouakou [72], 的研究，已证明与 $W_1(\Bbbk)$ Morita 等价的整环的同构类与非负整数之间存在双射。关于与 $W_1(\Bbbk)$ [90] 分次等价的环，可参见 Sierra 的研究。对于广义 Weyl 代数，目前尚无此类分类。

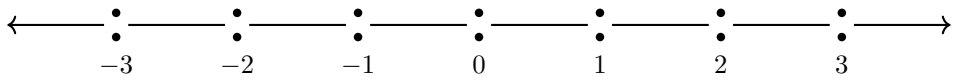
设 $\lambda, \mu \in \Bbbk \backslash \{0\}$。根据 Stafford 的一个结果， U_λ 在 $\lambda - \mu \in \mathbb{Z}$ [97, 时与 U_μ Morita 等价（推论 3.3]）。反向结论由 Hodges 证明（定理 5]） [61, 。回忆一下， U_0 是奇异情形，其整体维数为无穷。等价地说，相应广义 Weyl 代数中的定义多项式有一个重根。

Hodges [62] 和 Jordan [63]研究了秩一广义 Weyl 代数的 Morita 等价问题。我们只描述经典情形下的结果。设 $a(z) \in \Bbbk[z]$ 可分解为 $a(z) = b(z)c(z)$。令 $a'(z) = b(z-1)c(z)$。除非平移产生（或消除了）一个多重根，否则经典广义 Weyl 代数 $\Bbbk[z](\sigma, a)$ 与 $\Bbbk[z](\sigma, a')$ Morita 等价。一般的秩一广义 Weyl 代数情形类似，但考虑的是自同构 σ 下更一般的轨道。Richard 和 Solotar 的工作将结果推广到了更高秩的（经典）广义 Weyl 代数 [85]。

4.3. 分次模。本节中我们只讨论 $\mathbb{Z}$-分次代数，因此令 $\operatorname{GrMod} A = \operatorname{GrMod}_{\mathbb{Z}} A$。

从某种意义上说，分次简单模的图景与上述单权模的图景完全相同。对于秩一广义 Weyl 代数 $R(\sigma, a)$, 关键区别在于，我们在上文中将 $\mathfrak{m}$ 放置在数轴上的位置是任意选择的。在范畴 $\operatorname{GrMod} R(\sigma, a)$ 中， $\mathfrak{m}$ 的放置位置反映了模的分次移位。因此，单权模的分类也将分次简单模分类到了移位意义下。

例如，在 $W_1(\Bbbk)$ 的情形下，每个整数对应两个分次单模，而每个 $\lambda \in \Bbbk \backslash \mathbb{Z}$ 对应一个分次单模（见 Sierra [90]）。因此，单模可以实现为仿射直线 $\Bbbk$，但每个整数点都替换为一个双重点[25]:



经典广义 Weyl 代数 $\Bbbk[z](\sigma, a)$ 的一般情形也可类似得出。读者可参阅 [8]，以及 [101]。

令 $\operatorname{Tors} A$ 表示 $\operatorname{GrMod} A$ 的全子范畴，其中的对象由有限维模的直和构成，并定义 $\operatorname{QGrMod} A := \operatorname{GrMod} A / \operatorname{Tors} A$。我们也可以将范围限制在诺特对象上，并采用记号 $\operatorname{qgrmod} A := \operatorname{grmod} A / \operatorname{tors} A$。显然，对于单广义 Weyl 代数 A，有 $\operatorname{QGrMod} A = \operatorname{GrMod} A$。如上所述，假设$a(z) \in \Bbbk[z]$ 分解为 $a(z) = b(z)c(z)$。令 $a'(z) = b(z-1)c(z)$。如果 $A = \Bbbk[z](\sigma, a)$ 且 $A' = \Bbbk[z](\sigma, a')$，那么 $\operatorname{QGrMod} A \equiv \operatorname{QGrMod} A'$。无论是否产生或消除了重根，这一结论都成立。因此，每个经典广义 Weyl 代数都与某个单广义 Weyl 代数 QGrMod-等价。Won 在 U_λ [101, 定理 4.19]中证明了这一结论。一般情形参见 [36, 定理 3.8] 。

[25]这张图表的代码是未经许可从 Robert Won 的一篇论文中肆无忌惮地抄来的。

QGrMod 和 qgrmod 这两个范畴的重要性源于非交换代数几何 [5] 的研究。暂时设 A 是一个由 1 次齐次元生成的、GK 维数为 2 的连通分次整环。Artin 和 Stafford [4] 的一个定理证明，存在一条射影曲线 X，使得 $\mathsf{qgrmod}\, A \equiv \mathsf{coh}(X)$，即 X 上的凝聚层范畴。

Smith 证明存在一个商栈 $\mathcal{X}$，使得 $\mathsf{GrMod}\ W_1(\Bbbk) \equiv \mathsf{Qcoh}\,\mathcal{X}$ [95]。此处不具体描述该商栈，但指出它来自一个由 $\mathsf{GrMod}\, W_1(\Bbbk)$ 的 Picard 群[26] 构造的交换环。在 [102]，Won 计算了该 U_λ 的 Picard 群，并据此给出了此情形下 Smith 结果的类似结论 [101]。关于经典广义 Weyl 代数情形下 Smith 的结果，见 [36]。

5. Invariant Theory

经典上，不变理论指群在多项式环上的作用。现代非交换不变理论的研究主要关注群和 Hopf 代数在 Artin-Schelter 正则环上的作用，这些环可视为多项式环的非交换版本。有兴趣的读者可参阅 Kirkman 的综述，了解该领域研究概况 [70]。本节将回顾有关广义 Weyl 代数的一些不变理论结果。本节中始终假设 $\Bbbk$ 是代数闭域，且 $\mathsf{char}\,\Bbbk = 0$。

5.1. 自同构与同构。

对于任何代数（或代数对象），一个经典问题是求出其自同构群[27]。与此相关的是同构问题，它探讨代数类中的两个对象在什么条件下同构。

Dixmier 求出了 $W_1(\Bbbk)$ [28]，的自同构群的生成元，以及代数U_λ [29]的自同构群的生成元。Bavula 和 Jordan [12]，将这一结果推广，求出了经典广义 Weyl 代数的自同构群生成元；我们将在此介绍这一结果。

设 $\Bbbk[z](\sigma, a)$ 是一个经典广义 Weyl 代数，且 $n = \deg_z(a)$。设 $\lambda \in \Bbbk$, $\beta \in \Bbbk^\times$, $m \in \mathbb{N}$，并令 Δ_m 为线性映射 $\Bbbk[z] \to \Bbbk[z]$，其定义为 $\sigma^m - 1$。令 G 为由下列映射生成的自同构群:

$$\Theta_\beta : x \mapsto \beta x, \quad y \mapsto \beta^{-1} y, \quad z \mapsto z,$$

$$\Psi_{m,\lambda} : x \mapsto x, \quad y \mapsto y + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} \Delta_m^i(a) x^{im-1}, \quad z \mapsto z - m\lambda x^m,$$

$$\Phi_{m,\lambda} : x \mapsto x + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-\lambda)^i}{i!} y^{im-1} \Delta_m^i(a), \quad y \mapsto y, \quad z \mapsto z + m\lambda y^m.$$

$\Bbbk[z](\sigma, a)$ 的自同构群为 G，除非 a 是反射型的，也就是说，存在某个 $\rho \in \Bbbk$，使得 $a(\rho - z) = (-1)^n a(z)$ [12, 定理 3.29]。当 a 是反射型时，自同构群还包含一个由下式给出的额外生成元】【。

$$\Omega(x) = y, \quad \Omega(y) = (-1)^n x, \quad \Omega(z) = 1 + \rho - z.$$

[26] Picard 群是自等价类模自然同构的集合。[27] 更一般地，为了确定其对称性。

这项工作自然地引出了对经典广义 Weyl 代数同构问题的研究。特别地，$\Bbbk[z](\sigma, a) \cong \Bbbk[z](\sigma, a')$ 当且仅当对于某些满足 $\eta \neq 0$ [12, 的 $\eta, \tau \in \Bbbk$，有 $a'(z) = \eta a(\tau \pm z)$，参见定理 3.28]。这反映了先前的一条评论[28]，即 $U_\lambda \cong U_{-\lambda}$。

第一个量子 Weyl 代数 $W_1^q(\Bbbk)$ 的自同构群由 Alev 和 Dumas[2] 计算得出。对这一结果的改编得出了相应的同构结果：$W_1^q(\Bbbk) \cong W_1^p(\Bbbk)$ 当且仅当 $p = q^{\pm 1}$ [39]。

如上所述，量子 Weyl 代数是量子广义 Weyl 代数的例子。设 $R(\sigma, a)$ 是一个量子广义 Weyl 代数，其 $\sigma(z) = qz$, $q \in \Bbbk^\times$。对于 $R = \Bbbk[z^{\pm 1}]$ 且 q 不是单位根的情形，Bavula 和 Jordan 计算了自同构群，并解决了同构问题 [12]。对于 $R = \Bbbk[z]$ 且 q 不是单位根的情形，Richard 和 Solotar 完成了相关工作 [84]。对于两个基环中 q 都是单位根的情形，Su´arez-Alvarez 和 Vivas 完成了相关工作 [99], ，另见 [71]。关于一种不同的方法，以及一些关于高秩量子广义 Weyl 代数的结果，参见 [22] 。

对于高秩量子化 Weyl 代数，Goodearl 和 Hartwig 确定了其自同构群，并解决了一般参数情形下的同构问题[29] [49]。这利用了 Jordan 的一个结果 [66], ，该结果分类了一般情形下的所有高度为一的素理想[30]。Levitt 和 Yakimov 利用非交换判别式，证明了在中心为多项式环的情形下的相应结果[31] [74]。中心既非平凡也非多项式环的情形仍未解决。另请参见 Hartwig 和 Rosso 关于多项式环上 TGWAs 的分次同构的工作 [57]。

5.2. 不变量。我们已经看到，在某些方面，第一 Weyl 代数的性质与二元多项式环的性质相似（GKdim $W_1(\Bbbk) = 2$），但也有所不同（gldim $W_1(\Bbbk) = 1$）。二者的另一个重要差异在于不变量环。若 G 是 Aut($\Bbbk[x, y]$) 的一个不含伪反射的有限线性子群，则 $\Bbbk[x, y]^G$ 是另一个多项式环[32]，并且再次同构于 $\Bbbk[x, y]$。值得注意的是[33], ， $W_1(\Bbbk)$ 的不变量环从不同构于 $W_1(\Bbbk)$。Smith 对可解群证明了这一点 [93]。Alev、Hodges 和 Velez 将该结果推广到了任意有限群 [3]。Tikaradze 证明，第一 Weyl 代数不是任何整环的不动环 [100]。

如果 $W_1(\Bbbk)$ 的不变量环不是另一个 Weyl代数，那么可以合理地追问：可能保留了什么结构（如果有的话）？ 假设 ϕ 是秩为一的广义 Weyl 代数 $R(\sigma, a)$ 的一个阶为 $\ell < \infty$ 的自同构，它在 R 上的限制是一个阶为 m 的自同构，并且存在 $\mu \in \Bbbk^\times$ 使得 $\phi(x) = \mu^{-1} x$ 且 $\phi(y) = \mu y$。如果

[28]这段内容出现在脚注里，你一直都有认真看脚注，对吧? [29]等价地，该代数的中心是 $\Bbbk$。[30]我就说过，这个结论还会再次出现。[31]参数的等价条件见参考文献。在这里还值得一提的是，该代数在这种情况下是其中心上的自由模。[32]事实上，根据谢泼德-托德-谢瓦莱定理，这是一个“当且仅当”命题 [89, 24]。[33]这有多么引人注目，取决于个人的视角。

$\gcd(\ell, m) = 1$，则 $(R(\sigma, a))^{\langle\phi\rangle} = R^{\langle\phi\rangle}(\sigma^\ell, \widehat{a})$，其中

$$\widehat{a} = y^\ell x^\ell = \prod_{k=0}^{\ell-1} \sigma^{-k}(a).$$

在 $W_1(\Bbbk)$ 的情形下，不变量环是广义 Weyl 代数。该结果由 Jordan 和 Wells 在[34] that$m = 1$ [67, Theorem 2.6] 的情形下证明。一般性表述参见 [40, Theorem 3.3]。关于线性自同构情形下的不变量讨论，参见 [45] 。

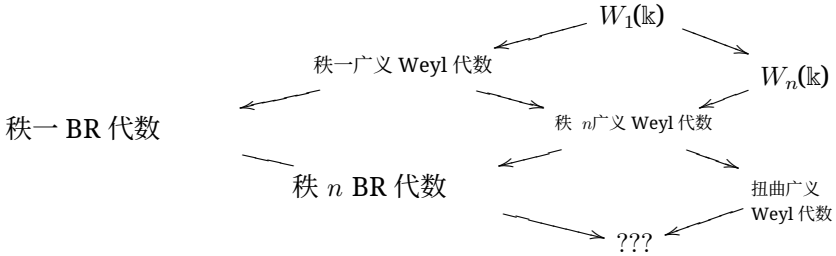
对于其他类似 GWA 的结构，也可以提出类似的问题。在此过程中，人们会寻找一组合适的条件，使得不动环保留给定的结构。例如，对于交换诺特环上的 BR 代数 $B = R(t, \sigma, H, J)$，令 $\phi \in \mathrm{Aut}(R)$，使得 $\phi(H) \subset H$ 且 $\phi(J) \subset J$。对于$\gamma \in \Bbbk^\times$，存在一个自同构 Φ_λ，将 ϕ 扩展为满足 $\Phi_\gamma(t) = \gamma t$的自同构。如果 γ 的阶为 $m < \infty$，ϕ 的阶为 $n < \infty$，且 $\gcd(m, n) = 1$，那么关于 Φ_λ 的不动环是另一个 BR 代数 [44, 命题 2.13]。

现在设 $A = A_\mu(R, \sigma, a)$ 是交换整环 R 上秩为 n 的 TGWA。假设 $\phi \in \mathrm{Aut}(A)$ 限制在 R 上是一个阶为 $\ell < \infty$ 的自同构。假设对于某个阶为 $m_i < \infty$ 的 $\alpha_i \in \Bbbk^\times$，有 $\phi(X_i^{\pm}) = \alpha_i^{\pm 1}$。如果 ℓ 与 m_i 互素，则 $R^{\phi|_R}$ 和 $(X_i^{\pm})^{m_i}$ 生成另一个 TGWA [42,定理 3.10]。在某些情况下，例如当 A 为 $(A_1)^n$ 型时，该 TGWA 恰好是不动环 $A^{\langle\phi\rangle}$。作为推论，这为高秩广义Weyl代数给出了一个结果。

6. 未来工作和研究方向

本文最后提及这一领域未来研究的一些想法。

6.1. 寻找单环。Weyl代数及其推广提供了大量无限维单环的例子。下图展示了各种推广之间的关系，其中箭头表示包含关系[35]。为了找到更多无限维单环的例子，明智的做法是找出高秩 BR 代数[36]与扭曲广义 Weyl 代数的某种恰当结合。



[41], 在文中，作者考察了 (T)GWAs 的扭曲张量积以及 BR 代数的扭曲张量积。这初步展现了扭曲广义 Weyl 代数与 BR 代数的理论可能交汇之处。

[34]在这种情况下，最大公因数条件是平凡的。[35]我们没有纳入量子化这一类，因为它们不太适合所给的范式。[36]我们没有正式讨论高秩 BR 代数。定义及相关讨论见 [43]。

该图表未包含（秩一）弱广义 Weyl 代数的概念 [77]。在这种情形下，映射 σ 只需是一个自同态。自然的延伸方向是研究高秩弱广义 Weyl 代数，以及弱扭曲广义 Weyl 代数和弱 BR 代数。

6.2. Calabi-Yau 条件。整体维数与 Calabi-Yau（CY）条件[48, 83], 或更一般的扭曲 CY 条件相关。此处不介绍其定义，但请注意，$A_n(\Bbbk)$ 是 CY。然 [20, 而，关于这一点的大多数证明，例如 Berger 的定理 6.5], ，都依赖于 $A_n(\Bbbk)$ 的关联分次环是一个多项式环[37], ，而它本身是 CY。Liu 已证明， $\Bbbk[z]$ 上的秩一广义 Weyl 代数以及 $\Bbbk[z_1, z_2]$ 上的秩一广义 Weyl 代数是扭曲 CY [75, 76]。值得探究的是，多项式环上的广义 Weyl 代数是否普遍都是扭曲 CY，以及广义 Weyl 代数、扭曲广义 Weyl 代数和 BR 代数满足这一条件的一些更一般判据。另请参阅关于广义 Weyl 代数的 Hochschild 同调与上同调的相关研究[35, 96]。

6.3. 一般同构结果。如上所述，高秩量子化 Weyl 代数的同构问题仍未解决。一般而言，分次同构问题更容易解决。例如，可参见 Hartwig 和 Rosso 的工作 [57]。Bell 和 Zhang 证明，对于在一阶有限生成的连通 $\mathbb{N}$ 分次代数，如果它们同构，则作为分次代数也同构 [17]。对 $\mathbb{Z}$ 分次代数 [12, 99] 的同构问题进行仔细分析后发现，Bell 和 Zhang 的同构引理的某种形式应当也适用于 $\mathbb{Z}$ 分次情形。然而，由于存在反转分次的同构，问题变得稍微复杂一些。

6.4. Hopf作用。Weyl代数，更一般地说，广义 Weyl 代数具有量子刚性，也就是说，它们的自同构群明显小于其交换对应物。当我们将注意力限制在保持 $\mathbb{Z}$-分次的自同构上时，这一点就更加显著。因此，若要寻找进一步的（量子）对称性，自然会考虑有限维霍普夫代数的作用。关于霍普夫代数及其在环上的作用的基础知识，请参阅 [81]。

Cuadra、Etingof 和 Walton 证明，有限维霍普夫代数 H 在 $A_n(\Bbbk)$ 上的任意作用都可经由群作用 [26, 27]分解。也就是说，若 H 作用于 $A_n(\Bbbk)$，则存在 H 的一个霍普夫理想 I，它在 $A_n(\Bbbk)$ 上作用平凡，且 H/I 是（同构于）一个群代数。关于这一方向的更多结果，请参阅 [33, 34] 。

另一方面，当 σ 有限阶时，量子广义 Weyl 代数 $\Bbbk[z](\sigma, a)$ 确实具有量子对称性。 [46], 证明了广义塔夫特代数可以在其上内忠实作用。此外，这些作用保持这些广义 Weyl 代数上的 $\mathbb{Z}$-分次。关于某些量子广义 Weyl 代数上的滤过作用，参见 [23] 。广义塔夫特代数是尖点霍普夫代数的例子。值得探究的是，除群代数外，其他霍普夫代数族是否也能作用于量子广义 Weyl 代数。

[37]更准确地说，这源于这样一个事实： $A_n(\Bbbk)$ 是 $2n$ 个变量的多项式环的 $PBW\ deformation$ 。

References

[1] J. Alev 和 F. Dumas. 关于某些量子代数的分式域。 *J. Algebra*，170(1)：229–265，1994年。[2] 关于将 sl(2) 的最小本原商嵌入量子 Weyl-Hayashi 代数的刚性。*Nagoya Math. J.*，143：119–146，1996年。[3] J. Alev、T. J. Hodges 和 J.-D. Velez。Weyl 代数 A_1(C) 的不动环。 *J. Algebra*，130(1)：83–96，1990年。[4] M. Artin 和 J. T. Stafford。具有二次增长的非交换分次整环。 *Invent. Math.*，122(2)：231–276，1995年。[5] M. Artin 和 J. J. Zhang。非交换射影概形。 *Advances in Mathematics*，109(2)：228–287，1994年。[6] V. V. Bavula。广义 Weyl 代数及其表示。 *Ph.D. Dissertation (Kiev)*，1990年。[7] 。广义 Weyl 代数及其表示。 *Algebra i Analiz*，4(1)：75–97，1992年。[8] 。单 $D[X,Y;\ \sigma,a]$-模。 *Ukrainian Mathematical Journal*，44(12)：1500–1511，1992年。[9] 。代数与模的滤过维数：广义 Weyl 代数的单性判据。 *Comm. Algebra*，24(6)：1971–1992，1996年。[10] 。广义 Weyl 代数的整体维数。载于 *Representation theory of algebras (Cocoyoc, 1994)*，第18卷，收录于 *CMS Conf. Proc.*，第81–107页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1996年。[11] V. V. Bavula 和 V. Bekkert。广义 Weyl 代数的不可分解表示。 *Comm. Algebra*，28(11)：5067–5100，2000年。[12] V. V. Bavula 和 D. A. Jordan。广义 Weyl 代数的同构问题与自同构群。*Trans. Amer. Math. Soc.*，353(2)：769–794，2001年。[13] V. V. Bavula 和 T. H. Lenagan。广义 Weyl 代数是张量 Krull 极小的。 *J. Algebra*，239(1)：93–111，2001年。[14] 。具有非交换系数的广义 Weyl 代数的 Krull 维数。 *J. Algebra*，235(1)：315–358，2001年。[15] V. V. Bavula 和 F. van Oystaeyen。广义 Weyl 代数与迭代斜多项式环的 Krull 维数：交换系数。 *J. Algebra*，208(1)：1–34，1998年。[16] J. Bell 和 D. Rogalski。$\mathbb{Z}$-分次单环。 *Transactions of the American Mathematical Society*，368：4461–4496，2016年。[17] J. Bell 和 J. J. Zhang。分次环的一个同构引理。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，145(3)：989–994，2017年。[18] G. Benkart 和 T. Roby。down-up 代数。 *J. Algebra*，209(1)：305–344，1998年。[19] Y. Berest 和 G. Wilson。Weyl 代数的自同构与理想。 *Math. Ann.*，318(1)：127–147，2000年。[20] R. Berger。Gerasimov 定理与 N-Koszul 代数。 *J. Lond. Math. Soc. (2)*，79(3)：631–648，2009年。[21] R. E. Block。李代数 $mathfraksl$(2)与 Weyl 代数的不可约表示。 *Adv. in Math.*，39(1)：69–110，1981年。[22] K. Chan、J. Gaddis、R. Won 和 J. J. Zhang。自反包络判别式及其应用。 *Selecta Math. (N.S.)*，28(2)：论文编号40，2022年。[23] K. Chan、C. Walton、Y. H. Wang 和 J. J. Zhang。滤过正则代数上的霍普夫作用。 *J. Algebra*，397：68–90，2014年。[24] C. Chevalley。由反射生成的有限群的不变量。 *Amer. J. Math.*，77：778–782，1955年。[25] S. C. Coutinho。单代数的多种面貌。 *Amer. Math. Monthly*，104(7)：593–604，1997年。[26] J. Cuadra、P. Etingof 和 C. Walton。Weyl 代数上的半单霍普夫作用。 *Adv. Math.*，282：47–55，2015年。[27] 。Weyl 代数上的有限维霍普夫作用。 *Adv. Math.*，302：25–39，2016年。[28] J. Dixmier。关于 Weyl 代数。 *Bull. Soc. Math. France*，96：209–242，1968年。[29] 。$\mathfrak{sl}_2$的包络代数的单商。 *J. Algebra*，24：551–564，1973年。[30] 。包络代数中的本原理想。 *J. Algebra*，48(1)：96–112，1977年。[31] Y. A. Drozd、B. L. Guzner 和 S. A. Ovsienko。广义 Weyl 代数上的权模。 *Journal of Algebra*，184(2)：491–504

, 1996年。

[32] E. Ebrahim. 2×2 反射方程代数的素谱与表示论。 *Comm. Algebra*，47(3):1153–1196，2019年。[33]P. Etingof 和 C. Walton。代数量子化上的有限维 Hopf 作用。 *Algebra Number Theory*，10(10):2287–2310，2016年。[34] 。变形量子化上的有限维 Hopf 作用。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，145(5):1917–1925，2017年。[35] M. A. Farinati、A. Solotar 和 M. Su´arez-´Alvarez。广义Weyl代数的 Hochschild 同调与上同调。*Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，53(2):465–488，2003年。[36] L. Ferraro、J. Gaddis 和 R. Won。Gelfand-Kirillov 维数为二的单 $\mathbb{Z}$分次整环。 *J. Algebra*，562:433–465，2020年。[37]H. Fujita、E. Kirkman 和 J. Kuzmanovich。量子Weyl代数的整体维数与 Krull 维数。 *J. Algebra*，216(2):405–416，1999年。[38] V. Futorny 和 J. T. Hartwig。多参数扭曲Weyl代数。 *J. Algebra*，357:69–93，2012年。[39] J. Gaddis。某些量子空间的同构。载于 *Ring theory and its applications*， *Contemp. Math.*第609卷，第107–116页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2014年。[40] J. Gaddis 和 P. Ho。量子广义 Weyl 代数的不动环。 *Comm. Algebra*，48(9):4051–4064，2020年。[41] J. Gaddis 和 D. Rosso。扭曲广义Weyl代数的扭曲张量积。 *In preparation*，2021年。[42] 。扭曲广义Weyl代数的不动环。 *J. Pure Appl. Algebra*，227(4):107257，2023年。[43] J. Gaddis、D. Rosso 和 R. Won。高秩Bell–Rogalski代数。 *preprint*，2022年。[44] 。Bell–Rogalski代数上的权模。 *arXiv:2204.04307*，2022年。[45] J. Gaddis 和 R. Won。广义Weyl代数的不动环。 *J. Algebra*，536:149–169，2019年。[46] 。量子广义 Weyl 代数上的尖Hopf作用。 *J. Algebra*，601:312–331，2022年。[47] A. Giaquinto 和 J. J. Zhang。量子Weyl代数。 *J. Algebra*，176(3):861–881，1995年。[48] V. Ginzburg。Calabi–Yau代数。 *arXiv preprint math/0612139*，79页，2006年。[49] K. R. Goodearl 和 J. T. Hartwig。多参数量子化Weyl代数的同构问题。 *São Paulo J.Math. Sci.*，9(1):53–61，2015年。[50] K. R. Goodearl、T. J. Hodges 和 T. H. Lenagan。除环上的Weyl代数的 Krull 维数与整体维数。 *J.Algebra*，91(2):334–359，1984年。[51] K. R. Goodearl 和 T. H. Lenagan。量子代数中的串联性。 *J. Pure Appl. Algebra*，111(1-3):123–142，1996年。[52] K. R. Goodearl 和 R. B. Warfield, Jr. *An introduction to noncommutative Noetherian rings*， *London*第61卷，*Mathematical Society Student Texts*。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2004年。[53] J. T. Hartwig。扭曲广义Weyl代数上的局部有限简单权模。 *J. Algebra*，303(1):42–76，2006年。[54] 。扭曲广义Weyl代数、多项式Cartan矩阵与Serre型关系。 *Comm. Algebra*，38(12):4375–4389，2010年。[55] 。非交换纤维积与格模型。 *J. Algebra*，508:35–80，2018年。[56] J. T. Hartwig 和 J. ¨Oinert。扭曲广义Weyl代数的单性与极大交换子代数。 *J.Algebra*，373:312–339，2013年。[57] J. T. Hartwig 和 D. Rosso。多项式环上扭曲广义Weyl代数的分类。 *J. Algebra*，546:274–293，2020年。[58] 。扭曲广义Weyl代数塔的 Grothendieck环。 *Algebr. Represent. Theory*，25(5):1345–1377，2022年。

[59] J. T. Hartwig 和 V. Serganova。扭曲广义Weyl代数与包络代数的本原商。 *Algebr.Represent. Theory*，19(2):277–313，2016年[60] 。Clifford 代数与 Weyl 超代数及旋量表示。 *Transformation Groups*，第 1–23 页，2019年[61] T. J. Hodges。 *U*(sl(2)) 的本原因子的 Morita 等价。载于 *Kazhdan-Lusztig theory and related topics (Chicago,IL 1989)*，第 *Contemp. Math.* 卷第 139 卷，第 175–179 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1992年[62] 。A 型 Kleinian 奇点的非交换变形。 *J. Algebra*，161(2):271–290，1993年[63] D. A. Jordan。某些迭代斜多项式环的 Krull 维数和整体维数。载于 *Abelian groups and noncommutativerings*，第 *Contemp. Math.* 卷第 130 卷，第 201–213 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1992年[64] 。迭代斜多项式环与量子群。 *J. Algebra*，156(1):194–218，1993年[65] 。斜 Laurent 多项式环及相关环中的本原性。 *Math. Z.*，213(3):353–371，1993年[66] 。量子 Weyl 代数的一个单局部化。 *J. Algebra*，174(1):267–281，1995年[67] D. A. Jordan 和 I. E. Wells。某些迭代斜多项式环的自同构不变量。 *Proc. EdinburghMath. Soc. (2)*，39(3):461–472，1996年[68] A. Joseph。Quillen引理的推广及其在 Weyl 代数中的应用。 *Israel J. Math.*，28(3):177–192，1977年[69] D. S. Keeler、D. Rogalski 和 J. T. Stafford。朴素非交换爆破。 *Duke Math. J.*，126(3):491–546，2005年[70] E. E. Kirkman。Artin-Schelter 正则代数的不变理论：综述。载于 *Recent developments in representationtheory*，第 *Contemp. Math.* 卷第 673 卷，第 25–50 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2016年[71] A. P. Kitchin 和 S. Launois。量子广义 Weyl 代数的自同态。 *Lett. Math. Phys.*，104(7):837–848，2014年[72] M. K. Kouakou。 $A_1(k)$ 的右理想分类。 *Bull. London Math. Soc.*，35(4):503–512，2003年[73] G. R. Krause 和 T. H. Lenagan。 *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension*，*Graduate Studies inMathematics* 第 22 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，修订版，2000年[74] J. Levitt 和 M. Yakimov。单位根处的量子 Weyl 代数。 *Israel J. Math.*，225(2):681–719，2018年[75] L. Liu。广义 Weyl 代数的同调光滑性与变形。 *Israel J. Math.*，209(2):949–992，2015年[76] 。两个变量多项式代数上广义 Weyl 代数的同调光滑性。 *J. Algebra*，498:228–253，2018年[77] R. L¨u、V. Mazorchuk 和 K. Zhao。弱广义 Weyl 代数上的单权模。 *J. Pure Appl. Algebra*，219(8):3427–3444，2015年[78]V. Mazorchuk 和 L. Turowska。扭曲广义Weyl代数上的单权模。 *Comm. Algebra*，27(6):2613–2625，1999年[79] J. C. McConnell。仿射系数环上 Weyl 代数的整体维数和 Krull 维数。 *J. London Math. Soc.(2)*，29(2):249–253，1984年[80] J. C. McConnell 和 J. C. Robson。 *Noncommutative Noetherian rings*，第 *Graduate Studies in Mathematics* 卷第 30 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，修订版，2001年。L. W. Small 协助编写。[81] S. Montgomery。 *Hopf algebras and their actions on rings*，第 *CBMS Regional Conference Series in Mathematics* 卷第 82 卷。由数学科学会议委员会出版，华盛顿特区；美国数学会出版，罗得岛州普罗维登斯，1993年[82] I. M. Musson。若干与 Weyl 代数 A_1 Morita 等价的微分算子环。 *Proc. Amer.Math. Soc.*，98(1):29–30，1986年[83] M. L. Reyes 和 D. Rogalski。分次扭曲 Calabi–Yau 代数是广义 Artin-Schelter 正则代数。 *Nagoya Math.J.*，245:100–153，2022年。

[84] L. Richard 和 A. Solotar。量子广义 Weyl 代数之间的同构。 *J. Algebra Appl.*，5(3):271–285，2006年。[85] 。单广义 Weyl 代数的 Morita 等价。 *Algebras and Representation Theory*，13(5):589–605，2010年。[86] J.-E. Roos。关于半单李代数包络代数的本原因子环的补充研究。*C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*，276:A447–A450，1973年。[87] A. L. Rosenberg。Grothendieck 范畴的几何。 *preprint*，1989年。[88] 。
Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras， *Mathematics and*第330卷*its Applications*。Kluwer Academic Publishers Group，多德雷赫特，1995年。[89] G. C. Shephard 和 J. A. Todd。有限酉反射群。 *Canadian J. Math.*，6:274–304，1954年。[90] S. J. Sierra。与 Weyl 代数分次等价的环。 *Journal of Algebra*，321(2):495–531，2009年。[91] S. P. Smith。一个与 Weyl 代数 Morita 等价的环的例子 A_1。 *J. Algebra*，73(2):552–555，1981年。[92] 。sl(2, C) 的包络代数的本原因子环。 *J. London Math. Soc. (2)*，24(1):97–108，1981年。[93] 。Weyl 代数能否是不动环? *Proc. Amer. Math. Soc.*，107(3):587–589，1989年。[94] 。一类类似于 sl(2) 的包络代数的代数。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，322(1):285–314，1990年。[95] 。一个与 Weyl 代数相关的商栈。 *Journal of Algebra*，345(1):1–48，2011年。[96] A. Solotar、M. Suárez-Alvarez 和 Q. Vivas。广义 Weyl 代数的 Hochschild 同调与上同调：量子情形。 *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，63(3):923–956，2013年。[97] J. T. Stafford。包络代数 $U(\mathrm{Sl}_2)$的同调性质。 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*，91(1):29–37，1982年。[98] 。Weyl 代数右理想的自同态。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，299(2):623–639，1987年。[99] M. Suárez-Alvarez 和 Q. Vivas。量子广义 Weyl 代数的自同构与同构。 *J. Algebra*，424:540–552，2015年。[100] A. Tikaradze。作为不动环的 Weyl 代数。 *Adv. Math.*，345:756–766，2019年。[101] R. Won。广义 Weyl 代数的非交换概形。 *J. Algebra*，506:322–349，2018年。[102] 。广义 Weyl 代数分次模范畴的 Picard 群。 *J. Algebra*，493:89–134，2018年。[103] X. Zhao、Q. Mo 和 Y. Zhang。广义 Weyl 代数的 Gelfand-Kirillov 维数（纪念 Guenter Rudolf Krause（1941–2015年））。 *Comm. Algebra*，46(10):4403–4413，2018年。

Miami University, Department of Mathematics, Oxford, Ohio 45056
Email address: gaddisj@miamioh.edu