arXiv:2305.01635v2 [math.LO] 8 Nov 2023

通过 Hahn 类构造刻画伪完备有限分歧赋值域

安娜·德·马塞*

摘要

我们通过在科恩域 $C(k)$ 上进行 Hahn 类构造，对具有固定剩余域 k 和基数为 $\aleph_1$ 的值群 G 的混合特征 $(0,p)$ 的有限分歧 ω-伪完备赋值域给出一种刻画，其中需假设连续统假设成立。这是对 Ax 和 Kochen 于 1965 年针对形式 p-进域，以及 Kochen 于 1974 年针对剩余域为完美域的非分歧赋值域所得结果的推广。我们考虑一个更一般的背景，即具有任意剩余域和一个截面的混合特征有限分歧赋值域。

MSC：主要分类 03C60、16W60；次要分类 12J20、11D88。关键词：赋值域、饱和性、伪完备性、Hahn 级数。

引言

在他们的论文（[3]）中，Ax和Kochen通过以下性质，给出了形式 p-进域这一类理论的完备公理化：

- 值群是一个 $\mathbb{Z}$-群；
- 剩余域是 $\mathbb{F}_p$；
- $v(p)$是值群的最小正元素。

因此，一个赋值域 K 是形式 p-进的，当且仅当它与 $\mathbb{Q}_p$初等等价。在 [15] 中，Macintyre 从代数和模型论两个角度对域 $\mathbb{Q}_p$进行了广泛分析，并着重比较了它与实数域。事实上，二者都具有这样的性质：它们是有理数域的完备化； $\mathbb{R}$ 是相对于通常的阿基米德绝对值而言，而 $\mathbb{Q}_p$ 则是相对于与 p-进赋值相关的非阿基米德绝对值而言。Hasse 的局部—整体原理（[10]）展示了这两个域在有理方程解的存在性方面所发挥的作用

*坎帕尼亚“路易吉·范维泰利”大学数学与物理系，林肯大道5号，卡塞塔（意大利），anna.demase@unicampania.it

。我们主要关注一种并非两个域所共有的性质。实闭域有一个众所周知的性质：任何与实数域$\mathbb{R}$的有限扩张初等等价的域，都包含一个与 $\mathbb{R}$初等等价的子域。形式 p-进域则不具备这一性质。事实上，在 [4]中，作者证明，对于 $\mathbb{Q}_p$的任意有限扩张L，都存在一个与 L 初等等价的赋值域，它不含任何与 $\mathbb{Q}_p$初等等价的子域。通过考虑 ω-伪完备形式 p-进域，可以避免 p-进域的这种“病态”现象；这类域包含一个与 p-进数域同构的子域，正如引理4.5的一个特例所示。我们在那里证明，所有具有固定剩余域 k 和离散值群 G 的亨泽尔赋值域，都以 $C(k)$（即k上的 Cohen 环）为共同的赋值子域（关于 Cohen 环的介绍见 [7], ，近期的模型论分析见 [1]）。特别地，我们指出，若 K 具有有限分歧 e，则 K 包含 $C(k)$的一个有限扩张的副本，也就是 $C(k)$的分歧度为 e的全分歧扩张。这可以通过向 $C(k)$添加一个 Eisenstein 多项式的根得到。随后，我们利用这一性质，将 Ax和Kochen 在 [3], 中的结果加以推广；该结果刻画了与 p-进数域 $\mathbb{Q}_p$初等等价的 ω-伪完备赋值域。特别地，在 [3],的定理1和定理2中，作者在假设连续统假设的前提下，利用 Hahn 类构造给出了具有固定值群 G 且基数为 $\aleph_1$ 的 ω- 伪完备形式 p- 进域的具体描述，其构造基于$\mathbb{Q}_p$ （另见 [13]）。我们将这种结构称为“扭曲”幂级数域，因为其特征在于乘法中加入一个额外因子，即 p的某个幂，该幂的指数由通过值群定义的一个2-余循环给出。加法则像通常的幂级数加法一样，按系数逐项定义。若 G是一个 $\mathbb{Z}$-群，则在 $\mathbb{Q}_p$上的这一 Hahn 类构造给出一个混合特征赋值域，它是形式 p-进域。在第2节中，我们将这一构造推广到更一般的情形，即定义任意具有截面的混合特征赋值域上的“扭曲”幂级数域（回顾一下，对于赋值 v： $K \longrightarrow G$，截面是一个群同态 σ： $G \longrightarrow K^\times$ ，满足对所有 $g \in G^\times$均有 $v(\sigma(g)) = g$ ）。

许多数学家都曾研究如何用幂级数刻画赋值域，既包括等特征情形（Ax和Kochen在 [2] 中研究了等特征 0 的情形；Kaplansky、Schilling 和 Teichm¨uller 分别在 [12], [23], 和 [25]中研究了等特征 p 的情形），也包括 p-进情形（MacLane 在 [16], [17], 中研究了这一情形，Poonen 在 [20], 中也进行了研究；此外，Ax和Kochen在上述论文中也有相关研究）。特别是在混合特征情形下，可以通过以下论证理解构造“扭曲”幂级数的动机。设 v 是从域 K 到有序群 G的混合特征赋值，并令 A为 G的最小凸子群。在这种情况下，可以应用粗化方法，将 v 分解为一个取值于 A的赋值 v_0 ，以及另一个取值于商群 G/A的赋值 $\dot{v}$ ；该商群的序由 G所诱导的序给出。赋值 v 存在截面 σ ，并不意味着 $\dot{v}$ 具有

截面，因为正合序列

$$0 \to A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\rho} G/A \to 0 \tag{1}$$

赋值群的正合序列并不总是分裂的。事实上，如果它分裂，即存在有序阿贝尔群的同态 $\alpha:\ G/A \longrightarrow G$ 使得 $\rho \circ \alpha = id_{G/A}$，那么 $\sigma \circ \alpha$ 就是 v的截面。此外，在这种情况下，粗化方法可以被逆转，具体如下。从如(1)所示的有序阿贝尔群分裂正合序列出发，即一个取值于 A的混合特征赋值域，以及一个取值于 G/A的等特征零赋值域，可以复合这些赋值，从而得到一个具有更细赋值的混合特征赋值域，该赋值取值于群 G。通过逆转粗化方法得到的一些混合特征赋值域的例子包括（$\mathbb{Q}_p((t^{\mathbb{Z}}))\ val$）、（$\mathbb{Q}_p((t_1^{\mathbb{Z}}))\ldots((t_n^{\mathbb{Z}}))\ val_n$）以及（$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Q}_p((t_1^{\mathbb{Z}}))\ldots((t_n^{\mathbb{Z}}))\ val_\infty$），这些例子曾被研究

由作者在 [8], 中提出，其赋值由 p-进赋值与 t-进赋值复合而得。因此，很自然会问，能否从一个固定的有序阿贝尔群正合序列重构群 G

$$0 \to A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\rho} H \to 0$$

该正合序列不分裂，并定义一个值群为 G 的混合特征赋值域。借助他们的刻画，Ax和Kochen表明，若考虑形式上的 p-进域以及上述有序群正合序列，且其中 G 是一个 $\mathbb{Z}$-群，那么这是可行的。本文旨在为任意 ω-伪完备混合特征亨泽尔赋值域给出类似的刻画：该赋值域具有有限分歧、固定的剩余域 k，其值群为 G，且 $\mathbb{Z}$ 是最小凸子群（见定理 4.14 和推论 4.15）。

1 有序阿贝尔群的正合序列

我们首先回顾群正合序列的一些结果。通常是在模的一般情形下进行讨论（例如见 [22]）；这里我们回顾其在带有全序的阿贝尔群中的情形。

设 G 是一个有序阿贝尔群， A 是 G的一个凸子群。令 H =G/A 为赋予由 G的序所诱导的序的阿贝尔群，并考虑正合序列

$$0 \to A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\rho} H \to 0.$$

对于每个 $h \in H$，选取 $\alpha(h) \in G$作为 h 在投影映射下的任意一个原像。称 $\alpha:\ H \longrightarrow G$为横截映射。根据 H上的商序的定义，任意选择的 α 都是保序的。于是 $\rho\alpha = id_H$，而且 α不必是群同态。然后定义如下函数β：$H \times H \longrightarrow G$：

$$\beta(h, h') = \alpha(h + h') - \alpha(h) - \alpha(h'), \tag{2}$$

对于所有 $h, h' \in H$。

命题 1.1. 对于每个 $h, h', h'' \in H, \beta$，均满足以下性质

$$\beta(h, h') + \beta(h + h', h'') = \beta(h', h'') + \beta(h, h' + h''). \tag{3}$$

证明。根据 G 的结合律，对于每个 h、h'、$h'' \in H$,

$$(\alpha(h) + \alpha(h')) + \alpha(h'') = \alpha(h) + (\alpha(h') + \alpha(h'')).$$

由（2）可得以下结论

$$\alpha(h) + \alpha(h') = \alpha(h + h') - \beta(h, h'),$$

因此我们有

$$(\alpha(h + h') - \beta(h, h')) + \alpha(h'') = \alpha(h) + (\alpha(h' + h'') - \beta(h', h'')).$$

重复代入于

$$\alpha(h + h') + \alpha(h'') = \alpha(h + h' + h'') - \beta(h + h', h'')$$

and

$$\alpha(h) + \alpha(h' + h'') = \alpha(h + h' + h'') - \beta(h, h' + h'')$$

我们有这个断言。 □

在下面的注记中，我们证明 β 取值于 A。

注 1.2. 设

$$0 \to A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\rho} H \to 0$$

是有序阿贝尔群的短正合列。若 $h, h' \in H$，则 $\beta(h, h') \in A$。

证明。若 $h, h' \in H$，则

$$\begin{aligned} \rho(\beta(h, h')) &= \rho(\alpha(h) + \alpha(h') - \alpha(h + h')) = \\ &= \rho(\alpha(h)) + \rho(\alpha(h')) - \rho(\alpha(h + h')) = \\ &= h + h' - (h + h') = 0, \end{aligned}$$

因为 $\rho\alpha = id_H$ 且 ρ是满同态。因此,

$$\beta(h, h') \in ker\, \rho = Im\, i \cong A.$$

□

定义 1.3. 设 $n \geq 1$ 为任意整数。n-上链是一个映射 $\phi: H^n \longrightarrow G$，满足：只要 $h_i = 0$ 对某个 i成立，就有 $\phi(h_1, \ldots, h_n) = 0$。

定义 1.4. (i) 满足 (3) 的 2-上链 β： $H \times H \longrightarrow A$ 称为 2-余循环。我们将从 H 到 A 的 2-余循环集合记为

$$Z^2(H, A).$$

(ii) 如果存在一个映射 α： $H \longrightarrow A$，则称 2-余循环 β 为 2-余边界。

$$\beta(h, h) = \alpha(h + h) - \alpha(h) - \alpha(h').$$

我们将从 H 到 A 的 2-余边界集合记为

$$B^2(H, A).$$

注意，如果 β 是与横截映射 α 相关联的 2-余边界，那么 α 是从 H 到 G 的 1-上链。事实上，

$$0 = \beta(h, 0) = \alpha(h) - \alpha(h) - \alpha(0) = -\alpha(0).$$

此外，对于每个 h、$h' \in H$

$$\beta(h, h') = \beta(h', h).$$

注 1.5. 集合 $Z^2(H, A)$ 配备如下定义的运算】【。

$$(\phi + \psi)(h, h') = \phi(h, h') + \psi(h, h')$$

对于所有 $\phi, \psi \in Z^2(H, A)$，其构成一个阿贝尔群，而 $B^2(H, A)$ 在受限运算下构成一个子群。

定义 1.6。商群

$$H^2(H, A) = Z^2(H, A)/B^2(H, A)$$

是 H 的系数在 A 中的第二上同调群。

事实 1.7。设 α、α' 是从 H 到 G 的两个横截映射，且 β、β' 是满足以下条件的 2- 余循环

$$\beta(h, h') = \alpha(h + h') - \alpha(h) - \alpha(h')$$
$$\beta'(h, h') = \alpha'(h + h') - \alpha'(h) - \alpha'(h')$$

对每个 h、$h' \in H$ 都成立。则 β 和 β' 模 $B^2(H, A)$ 属于同一个陪集。

证明。注意，对每个 $h \in H$，$\rho(\alpha(h) - \alpha'(h)) = h - h = 0$，因此 $\alpha(h) - \alpha'(h)$ 属于 $ker\rho = Im\, i \cong A$。所以，存在一个映射 ψ： $H \longrightarrow A$，使得对每个 $h \in H$，$\alpha(h) - \alpha'(h) = \psi(h)$。代入 β' 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\beta'(h, h') &= \alpha'(h + h') - \alpha'(h) - \alpha'(h') = \\ &= \alpha(h + h') - \psi(h + h') - (\alpha(h) - \psi(h)) - (\alpha(h') - \psi(h')) = \\ &= \beta(h, h') - (\psi(h + h') - \psi(h) - \psi(h')) = \\ &= \beta(h, h') - \psi^*(h, h')\end{aligned}$$

其中，ψ^*： $H \times H \longrightarrow A$ 是由从 H到 A的 1-上链 ψ 定义的 2-余边界。

□

引理 1.8. 若 $\beta\colon\ H\times H\longrightarrow A$ 是一个 2-余循环，则乘积 $A\times H$ 可赋予有序阿贝尔群结构，其群运算 + 定义为

$$(z,h)+(z',h')=(z+z'-\beta(h,h'),h+h')$$

且其序为字典序

$$(z,h)\leq(z',h')\iff h\leq h'\,or\,h=h'\,and\,z\leq z'.$$

证明。我们验证有序阿贝尔群的公理。取 $A\times H$ 中的 (z,h)、(z',h') 和 (z'',h'')。那么

- 结合性。

  $$\begin{aligned}&((z,h)+(z',h'))+(z'',h'')=(z+z'-\beta(h,h'),h+h')+(z'',h'')=\\&=(z+z'+z''-(\beta(h,h')+\beta(h+h',h'')),h+h'+h'')=\\&=(z+z'+z''-(\beta(h',h'')+\beta(h,h'+h'')),h+h'+h'')=\\&=(z,h)+(z'+z''-\beta(h',h''),h'+h'')=(z,h)+((z',h')+(z'',h'')),\end{aligned}$$

  其中第四个等号成立是因为 (3)。

- 交换性。

  $$\begin{aligned}&(z,h)+(z',h')=(z+z'-\beta(h,h'),h+h')=\\&=(z'+z-\beta(h',h),h'+h)=(z',h')+(z,h).\end{aligned}$$

- 单位元。由于对于每个 $h,h'\in H$，$\beta(h,0)=\beta(0,h')=0$，因此有序对 (0, 0) 满足

  $$(z,h)+(0,0)=(z-\beta(h,0),h)=(z,h)=(z-\beta(0,h),h)=(0,0)+(z,h).$$

- 逆元。

  $$(z,h)+(-z+\beta(h,-h),-h)=(z-z+\beta(h,-h)-\beta(h,-h),h-h)=(0,0).$$

- 与序的相容性。设 $(z,h)>0$。则 $(z,h)+(z',h')=(z+z'-\beta(h,h')\ h+h')>(z',h')$ 对每个 $(z',h')\in A\times H$ 都成立。事实上，或者 $h+h'>h'$，若 $h>0$；或者若 $h=0$ 且 $z>0$，则 $\beta(h,h')=\beta(0,h')=0$ 且 $z+z'>z'$。

□

我们将定义在 $A\times H$ 上的群结构记为 G_β。因此，序列

$$0\to A\xrightarrow{i}G_\beta\xrightarrow{\rho}H\to 0$$

是有序阿贝尔群的短正合列。此外，以下事实表明，对于某个 $\beta\in H^2(H,A)$，每个有序阿贝尔群的正合序列都唯一对应于上同调群中的一个等价类 $\beta+B^2(H,A)$。

事实 1.9。设

$$0 \to A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\rho} H \to 0$$

设.....是有序阿贝尔群的短正合列，且 $\alpha: H \longrightarrow G$ 是定义 2-余循环 β 的横截映射。那么，$G \cong G_\beta$。此外，对于任意由其他横截映射 α'定义的 β'， $G \cong G_{\beta'}$。

证明。考虑映射

$$\begin{aligned} f: G_\beta &\longrightarrow G \\ (z,h) &\mapsto z+\alpha(h) \end{aligned}$$

Then

- f 是一个同态。事实上,

$$\begin{aligned} f\left((z,h)+(z',h')\right) &= f(z+z'-\beta(h,h'),h+h') = \\ &= z+z'-\beta(h,h')+\alpha(h+h') = \\ &= z+z'+\alpha(h)+\alpha(h') = \\ &= z+\alpha(h)+z'+\alpha(h') = f(z,h)+f(z',h'). \end{aligned}$$

- f 是单射。令 $(z,h) \in A \times H$ 满足 $z+\alpha(h)=0$。则$\rho(z+\alpha(h)) = \rho(z) + \rho(\alpha(h)) = \rho(z) + h = 0$。因此 $h=0$，因为$z \in A = Im\, i = ker\rho$。由 $z+\alpha(h)=0$ 和 $\alpha(0)=0$，可得 $z=0$。
- f 是满射。取 $g \in G$。我们希望 $(z,h) \in A \times H$ 满足 $g = z+\alpha(h)$。考虑元素 $g-\alpha(\rho(g)) \in G$。注意到 $\rho(g-\alpha(\rho(g))) = \rho(g) - \rho(g) = 0$。由于 $ker\rho = Im\, i = A$，存在 $z \in A$ 使得$g-\alpha(\rho(g)) = z$，从而 $g = z+\alpha(h)$，其中 $h = \rho(g)$。
- f 是保序的。取 $(z,h) \leq (z',h')$。首先假设 $h < h'$，那么$z+\alpha(h) < z'+\alpha(h')$。事实上，反设 $z'+\alpha(h') \leq z+\alpha(h)$。由于 α 是保序的，因此 $0 < \alpha(h') - \alpha(h) \leq z-z'$，又由于 A 在 G中是凸的，因此 $\alpha(h') - \alpha(h) \in A$。由此可得 $\rho(\alpha(h') - \alpha(h)) = h' - h = 0$，这与 $h < h'$矛盾。现在假设 $h = h'$ 和$z < z'$。显然， $\alpha(h) = \alpha(h')$且 $z+\alpha(h) < z'+\alpha(h')$。

现在，设 β' 是通过另一个横截映射 $\alpha': H \longrightarrow G$定义的 2-余循环。根据事实 1.7，$\beta' = \beta - \psi^*$，其中 ψ^* 是由 1-上链$\psi: H \longrightarrow A$定义的 2-余边界。于是映射

$$\begin{aligned} g: G_\beta &\longrightarrow G_{\beta'} \\ (z,h) &\mapsto (z+\psi(h),h) \end{aligned}$$

是有序阿贝尔群之间的同构。事实上，对于每个 (z,h)、$(z',h') \in G_\beta$，以下性质成立:

• g 是一个同态。事实上,

$$\begin{aligned} g((z,h)+(z',h')) &= g(z+z'-\beta(h,h'),h+h') = \\ &= (z+z'-\beta(h,h')+\psi(h+h'),h+h') = \\ &= (z+z'-\beta'(h,h')+\psi(h)+\psi(h'),h+h') = \\ &= (z+\psi(h),h)+(z'+\psi(h'),h') = \\ &= g(z,h)+g(z',h') \end{aligned}$$

• 设 $(z,h) \in G_\beta$ 满足 $(z+\psi(h)\ h) = (0,0)$。那么 $h=0$，并且由于 ψ 是一个 1-上链，$z=0$。因此 g 是单射。

• 设 $(\dot{z},h) \in G_{\beta'}$，则 $(\dot{z}-\psi(h)\ h) \in G_\beta$ 满足 $g(\dot{z}-\psi(h)\ h)=(\dot{z},h)$，这证明了 g 的满射性。

• 设 $(z,h) \leq (z',h')$。若 $h<h'$，则显然 $g(z,h)<g(z',h')$。假设 $h=h'$ 且 $z \leq z'$，则 $\psi(h)=\psi(h')$，并且 $(z+\psi(h)\ h) \leq (z'+\psi(h')\ h')$，因此 g 是保序的。

□

2 混合特征赋值域的 Hahn 类构造

本节展示上述结果在赋值域中的一项应用。具体而言，我们使用 2-余循环，将 Ax和Kochen 所述的 Hahn 类构造（见 [3] 和 [13]）推广到带截面的有限分歧赋值域。因此，考虑有序阿贝尔群的一个正合序列

$$0 \to A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\rho} H \to 0$$

其中 A 是 G 和 $H=G/A$ 的最小凸子群。设 (K,v) 是一个取值于 A 的混合特征 $(0,p)$ 赋值域，并且 $\sigma: A \longrightarrow K^\times$ 是一个截面。现在，设 δ 是一个无限基数，并考虑集合

$$K(t^H,\beta)_\delta = \left\{ \sum_{h\in S} a_h t^h \ : \ S \subseteq_{\text{w.o.}} H,\ |S| \leq \delta,\ a_h \in K \text{ for all } h \in S \right\}$$

其中，元素 $a=\sum_{h\in S} a_h t^h$ 的支撑 S 是 H 的良序（w.o.）子集。集合 $K(t^H,\beta)_\delta$ 可以配备如下定义的加法和乘法运算：对于所有属于 $K(t^H,\beta)_\delta$ 的 $a=\sum_{h\in S} a_h t^h$ 和 $b=\sum_{h\in S'} b_h t^h$，

$$a_h t^h + b_h t^h = (a_h+b_h)t^h$$

and

$$a_h t^h b_{h'} t^{h'} = a_h b_{h'} \sigma(-\beta(h,h'))t^{h+h'}.$$

注意，若 $A \cong \mathbb{Z}$ 且 π 是一致化元（即 $v(\pi) = 1$），则定义为 $\sigma(m) = \pi^m$ 的映射 $\sigma : A \longrightarrow K^\times$ 是赋值 v 的截面。于是 $\pi^{\beta(h,h')} \in K$ 对所有 h、$h' \in H$ 都成立，并且上述定义中的乘法是良定义的。

命题 2.1. 如果 $\beta\colon H \times H \longrightarrow A$ 是一个 2-余循环，则该结构

$$(K(t^H, \beta)_\delta, +, \cdot)$$

上述定义的是一个域。

证明。在定义于 K 上的形式幂级数域中，阿贝尔群公理在 $(K(t^H, \beta)_\delta, +)$ 中同样成立。现在我们检查涉及乘法的公理也成立。令 $a = \sum_{h\in S} a_h t^h$、$b = \sum_{h\in S'} b_h t^h$、$c = \sum_{h\in S''} c_h t^h$ 属于 $K(t^H, \beta)_\delta$。

- 结合律。

$$(a \cdot b) \cdot c = \left(\sum_{h\in S} a_h t^h \cdot \sum_{h\in S'} b_h t^h\right) \cdot \sum_{h\in S''} c_h t^h =$$

$$= \left[\sum_{l\in S+S'} \left(\sum_{\substack{h\in S\\ h'\in S'\\ h+h'=l}} a_h b_{h'} \sigma(-\beta(h,h'))\right) t^l\right] \cdot \sum_{h\in S''} c_h t^h =$$

$$= \sum_{r\in S+S'+S''} \left(\sum_{\substack{l\in S+S'\\ h''\in S''\\ l+h''=r}} \left(\sum_{\substack{h\in S\\ h'\in S'\\ h+h'=l}} a_h b_{h'} \sigma(-\beta(h,h'))\right) c_{h''} \sigma(-\beta(l,h''))\right) t^r =$$

$$= \sum_{r\in S+S'+S''} \left(\sum_{\substack{h\in S\\ h'\in S'\\ h''\in S''\\ h+h'+h''=r}} a_h b_{h'} c_{h''} \sigma(-(\beta(h,h') + \beta(h+h',h'')))\right) t^r$$

将 (3) 代入最后一个表达式，我们得到

$$(a \cdot b) \cdot c = \sum_{r\in S+S'+S''} \left(\sum_{\substack{h\in S\\ h'\in S'\\ h''\in S''\\ h+h'+h''=r}} a_h b_{h'} c_{h''} \sigma(-(\beta(h',h'') + \beta(h,h'+h'')))\right) t^r =$$

$$= \sum_{r\in S+S'+S''} \left(\sum_{\substack{l\in S+S' \\ h\in S \\ l+h=r}} a_h \sigma(-\beta(h,l)) \left(\sum_{\substack{h'\in S' \\ h''\in S'' \\ h'+h''=l}} b_{h'} c_{h''} \sigma(-\beta(h',h'')) \right) \right) t^r =$$

$$= \sum_{h\in S} a_h t^h \cdot \left[\sum_{l\in S'+S''} \left(\sum_{\substack{h'\in S \\ h''\in S' \\ h'+h''=l}} b_{h'} c_{h''} \sigma(-\beta(h',h'')) \right) t^l \right] =$$

$$= \sum_{h\in S} a_h t^h \cdot \left(\sum_{h\in S'} b_h t^h \cdot \sum_{h\in S''} c_h t^h \right) = a \cdot (b \cdot c).$$

- 交换性。

$$a \cdot b = \sum_{h\in S} a_h t^h \cdot \sum_{h\in S'} b_h t^h = \sum_{l\in S+S'} \left(\sum_{\substack{h\in S \\ h'\in S' \\ h+h'=l}} a_h b_{h'} \sigma(-\beta(h,h')) \right) t^l =$$

$$= \sum_{l\in S+S'} \left(\sum_{\substack{h\in S \\ h'\in S' \\ h+h'=l}} b_{h'} a_h \sigma(-\beta(h',h)) \right) t^l =$$

$$= \sum_{h\in S'} b_h t^h \cdot \sum_{h\in S} a_h t^h = b \cdot a.$$

- 分配性。

$$a \cdot (b+c) = \sum_{h\in S} a_h t^h \left(\sum_{h\in S'\cup S''} (b_h + c_h) t^h \right) =$$

$$= \sum_{l\in S+(S'\cup S'')} \left(\sum_{\substack{h\in S \\ h'\in S'\cup S'' \\ h+h'=l}} a_h (b_{h'} + c_{h'}) \sigma(-\beta(h,h')) \right) t^l =$$

$$= \sum_{l\in S+(S'\cup S'')} \left(\sum_{\substack{h\in S \\ h'\in S'\cup S'' \\ h+h'=l}} a_h b_{h'} \sigma(-\beta(h,h')) + a_h c_{h'} \sigma(-\beta(h,h')) \right) t^l =$$

$$= \sum_{l\in S\cup S'} \left(\sum_{\substack{h\in S\\ h'\in S'\\ h+h'=l}} a_h b_{h'} \sigma(-\beta(h,h')) \right) t^l + \sum_{l\in S\cup S''} \left(\sum_{\substack{h\in S\\ h''\in S''\\ h+h''=l}} a_h c_{h''} \sigma(-\beta(h,h'')) \right) t^l =$$

$$= \left(\sum_{h\in S} a_h t^h \cdot \sum_{h\in S'} b_h t^h \right) + \left(\sum_{h\in S} a_h t^h \cdot \sum_{h\in S''} c_h t^h \right) =$$

$$= a\cdot b + a\cdot c.$$

• 单位元。显然，$1 \in K(t^H,\beta)_\delta$是满足以下条件的级数：$1f = f1 = f$对于所有$f \in K(t^H,\beta)_\delta$。

• 乘法逆元。设 $b \in K(t^H,\beta)_\delta$, $b \neq 0$。逆元的存在性由以下论证给出：

1. 设 $a \in K(t^H,\beta)$ 是一个具有严格正支撑的元素（即$min\, supp(a) > 0$）。与通常的幂级数情形一样，可以证明，和 $1+a+a^2+a^3+\ldots$是 $K(t^H,\beta)$ 的一个元素（见 [19]）；

2. 每个元素 $b \in K(t^H,\beta)$ 都可以写成 $ct^h(1-a)$，其中 $c \in K$, $\tilde{h} \in H$，且 $a \in K(t^H,\beta)$ 具有严格正支撑。

事实上，设 $b = \sum_{h\in S} b_h t^h$。那么

$$b = ct^{\tilde{h}}(1-a),$$

其中 $\tilde{h} = min\, supp(b)$, $c = b_{\tilde{h}}$，且 $a = \sum_{h\in S'} a_h t^h$ 满足

$$a_h = -\frac{b_{h+\tilde{h}}}{c\sigma(-\beta(h,\tilde{h}))}.$$

注意，如果 $h < 0$，那么 $h + \tilde{h} < \tilde{h} = min\, supp(b)$ 且 $b_{h+\tilde{h}} = 0$。因此，$a_h = 0$ 和 a具有严格正支撑。

3. 现在，可以按如下方式计算 b 的乘法逆元。

$$b^{-1} = (ct^{\tilde{h}}(1-a))^{-1} = \frac{c^{-1}t^{-\tilde{h}}}{\sigma(-\beta(\tilde{h},-\tilde{h}))}(1+a+a^2+a^3+\ldots).$$

□

我们现在证明，$K(t^H,\beta)_\delta$可以如下赋予一个非平凡赋值。

命题 2.2。域 $K(t^H,\beta)_\delta$可以赋予如下定义的赋值

$$val : K(t^H,\beta)_\delta \longrightarrow G_\beta \cup \{(\infty,\infty)\}$$

使得

$$val(\sum_{h\in S} a_h t^h) = (v(a_{h_0}), h_0)$$

其中， v 是 K 上的混合特征赋值， h_0 是 S 的最小元素，而 (∞,∞) 是一个符号，表示在 0 的赋值下大于 G_β 中任意元素的元素。

证明。我们验证 val 是一个赋值。

- 显然， $val(a) = (\infty,\infty)$ 当且仅当 $a = 0$;
- 设 $a, b \in K(t^H, \beta)$ 满足 $h_1 = min\, supp(a)$ 且 $h_2 = min\, supp(b)$。则 $min\, supp(ab) = h_1 + h_2$，且相应的非零系数为 $a_{h_1} b_{h_2} \sigma(-\beta(h_1, h_2))$。我们有

$$\begin{aligned} val(ab) &= (v(a_{h_1} b_{h_2} \sigma(-\beta(h_1,h_2))), h_1+h_2) = \\ &= (v(a_{h_1}) + v(b_{h_2}) + v(\sigma(-\beta(h_1,h_2))), h_1+h_2) = \\ &= (v(a_{h_1}) + v(b_{h_2}) - \beta(h_1,h_2), h_1+h_2) = \\ &= (v(a_{h_1}), h_1) + v(a_{h_2}), h_2) = val(a) + val(b); \end{aligned}$$

- 设 $a, b \in K(t^H, \beta)$ 满足 $h_1 = min\, supp(a)$ 且 $h_2 = min\, supp(b)$。则 $val(a+b) = (v(a_h + b_h)\ h)$，其中，若 $h_1 \neq h_2$，则为 $h = min\{h_1, h_2\}$，否则为 $h = h_1 = h_2$。于是，

$$val(a+b) \geq (min\{v(a_h), v(b_h)\}, h) = min\{val(a), val(b)\}.$$

□

我们用 K_β 表示上述定义的、值取自 G_β 的赋值域。以下结果确保 K_β 的构造与 β 的选取无关。

命题2.3. 设 β' 是由不同的横截映射 $\alpha' : H \longrightarrow G$定义的一个2-余循环。那么取值于 $G_{\beta'}$ 中的 $K_{\beta'}$ 作为赋值域与 K_β 作为赋值域同构。

证明。根据事实 1.7， $\beta' = \beta - \psi^*$，其中 $\psi: H \longrightarrow A$ 是一个 1-上链。因此

$$\sigma(-\beta'(h,h')) = \sigma(-\beta(h,h'))\frac{\sigma(\psi(h+h'))}{\sigma(\psi(h))\sigma(\psi(h'))}.$$

考虑由线性性定义的映射

$$\begin{array}{rccc} f: & K_\beta & \longrightarrow & K_{\beta'} \\ & a \in K & \mapsto & a \in K \\ & t & \mapsto & t \\ & \sigma(-\beta(h,h')) & \mapsto & \sigma(-\beta'(h,h')) \end{array}$$

ˆ然后 f 是域同构。令 f： $G_\beta \longrightarrow G_{\beta'}$ 为满足以下条件的群同构： $f(\beta) = \beta'$，并且在其他地方取单位元。然后 ˆ f满足对于所有 $a \in K_\beta$，均有 ˆ$f(val(a)) = val'(f(a))$，其中 val是 K_β上的赋值， val'是 $K_{\beta'}$上的赋值。因此 f 是赋值域之间的同构。 □

定理 2.4. 设 λ 是一个极限序数。赋值域 $(K(t^H,\beta)_\delta, val)$ 是 λ-伪完备的，当且仅当 K 是 λ-伪完备的。

证明。设 λ 为一个极限序数，且 $(c_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ 是 $K(t^H,\beta)_\delta$ 中的一个伪柯西序列，并令 $c_\alpha = \sum_{h\in S} a_{\alpha,\ h} t^h$。由于它是伪柯西序列，因此存在 $\alpha_0 < \lambda$，使得对于所有 $\alpha_0 < \alpha' < \alpha* < \alpha''$,

$$val(c_{\alpha''} - c_{\alpha*}) > val(c_{\alpha*} - c_{\alpha'}).$$

集合 $g_\alpha := val(c_\alpha - c_{\alpha+1}) = (v(a_{\alpha,\ h_{\alpha,\ \alpha+1}} - a_{\alpha+1,\ h_{\alpha,\ \alpha+1}})\, h_{\alpha,\ \alpha+1})$，其中 $h_{\alpha,\ \alpha+1}$是 $supp(c_\alpha - c_{\alpha+1})$ 的最小值。由于

$$val(c_\alpha - c_{\alpha'}) \geq min\{val(c_\alpha - c_{\alpha+1}), val(c_{\alpha+1} - c_{\alpha'})\},$$

且该序列是伪柯西序列，因此对所有 $\alpha' > \alpha > \alpha_0$,

$$val(c_\alpha - c_{\alpha'}) = val(c_\alpha - c_{\alpha+1}) = g_\alpha.$$

因此，如果我们设定 $h_{\alpha,\ \alpha+1} = h_\alpha$ 和 $v(a_{\alpha,\ h_{\alpha,\ \alpha+1}} - a_{\alpha+1,\ h_{\alpha,\ \alpha+1}}) = \dot{\gamma}_\alpha$，那么对所有$\alpha' > \alpha > \alpha_0$,

$$h_{\alpha,\alpha'} = \dot{h}_\alpha$$

and

$$v(a_{\alpha,h_{\alpha,\alpha'}} - a_{\alpha',h_{\alpha,\alpha'}}) = v(a_{\alpha,\dot{h}_\alpha} - a_{\alpha',\dot{h}_\alpha}) = \dot{\gamma}_\alpha.$$

由此可知，对所有 $\alpha' > \alpha > \alpha_0$,

$$a_{\alpha,h} = a_{\alpha',h}, \text{ for all } h < \dot{h}_\alpha,$$

并且它们的 h_α-系数之差的赋值始终为固定值 $\dot{\gamma}_\alpha$ ，该值取决于 α。由于该序列是伪柯西序列，赋值序列$g_a = (\dot{\gamma}_a, h_\alpha)_{\alpha<\omega}$对所有 $\alpha > \alpha_0$都严格递增。分两种情况:

1. $(h_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ 对所有 $\alpha > \alpha_0$, 都严格递增。2. 存在 $\alpha_1 > \alpha_0$ ，使得对所有 $\alpha > \alpha_1$, $h_\alpha = h_{\alpha_1}$ 都成立，且 $(\dot{\gamma}_\alpha)_{\alpha_1<\alpha<\lambda}$ 严格递增。

如果情况（1）成立，令

$$b_h := \begin{cases} a_{\alpha,h} & , \text{ if } h < \dot{h}_\alpha \text{ for some } \alpha < \omega; \\ 0 & , \text{ otherwise.} \end{cases}$$

若情形 (2) 成立，令

$$b_h := \begin{cases} a_{\alpha_1,h} & , \quad \text{if } h < \dot{h}_{\alpha_1}, \\ PL\left((a_{\alpha,\dot{h}_{\alpha_1}})_{\alpha<\omega}\right) & , \quad \text{if } h = \dot{h}_{\alpha_1}, \\ 0 & , \quad \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $PL\left((a_{\alpha,\ \dot{h}_{\alpha_1}})_{\alpha<\omega}\right)$ 是括号中序列的任意伪极限；其存在性由 (K, v) 的伪完备性保证。

现在我们证明

$$b := \sum_{h\in H} b_h t^h \in K(t^H, \beta)_\delta,$$

也就是说， $supp(b) = \{h \in H | \, b_h \neq 0\}$ 是 H 的良序子集。只需证明对于所有 $\eta \in supp(b)$, $(-\infty, \eta] \cap supp(b)$ 都是良序的。根据上述两种情形，我们分别进行论证。取 $\eta \in supp(b)$,

1. 若情形 (1) 成立，则存在 $\alpha < \omega$ 使得 $\eta < h_\alpha$，因此 $\eta \in supp(c_\alpha)$。特别地，

$$(-\infty, \eta] \cap supp(b) \subseteq supp(c_\alpha)$$

从而

$$(-\infty, \eta] \cap supp(b) = supp(c_\alpha) \cap (-\infty, \eta],$$

这是 H 的一个良序子集。

2. 如果情形（2）成立，那么对所有 $\alpha > \alpha_1$，都有 $\eta = h_{\alpha_1} = h_\alpha$。特别地， $\eta \in supp(c_{\alpha_1})$。于是，按照前一种情形的证明即可得出该断言。

最后，根据 b的定义，

$$val(b - c_\alpha) = (v(b_{\dot{h}_\alpha} - a_{\alpha,\dot{h}_\alpha}), \dot{h}_\alpha) = (v(a_{\alpha+1,\dot{h}_\alpha} - a_{\alpha,\dot{h}_\alpha}), \dot{h}_\alpha) = (\dot{\gamma}_\alpha, \dot{h}_\alpha) = g_\alpha.$$

由于 g_α 严格递增，因此 $(c_\alpha)_{\alpha\in\omega}$ 收敛到 b。 □

注意，若对于某个极限序数 λ， K 是 λ-伪完备的，则 $K(t^H, \beta)_\delta$是亨泽尔的。

在下面的命题中，我们将说明如何利用 $K(t^H, \beta)_\delta$的伪完备性，证明 $K(t^H, \beta)_\delta$中非零元素的逆元存在，从而证明它是一个域。我们采用 [9, 第 3]章中针对广义幂级数所展示的方法，给出命题 2.1 的另一种证明。

命题2.5. 设 (K, v) 是一个 ω-伪完备赋值域，其取值属于 A，其中 A 是 K 的值群中的最小凸子群。若 $f \in K(t^H, \beta)_\delta$ 非零，则它有一个乘法逆元。

证明. 取 $0 \neq f = \sum_{h\in S} a_h t^h \in K(t^H, \beta)_\delta$，其中 $h_1 = min\, supp(f)$。不失一般性，我们可以假设 $a_{h_1} = 1$。考虑集合

$$\Sigma = \left\{ val(1 - fg) \,|\, g \in K(t^H, \beta)_\delta, 1 - fg \neq 0 \right\}.$$

首先，我们证明 Σ 没有最大元。例如，取 $g \in K(t^H, \beta)_\delta$，使得 $1 - fg \neq 0$。然后 $1 - fg = \sum_{h\in S'} b_h t^h$，并取 $h_2 = min\, supp(1 - fg)$。令 $g' = b_{h_2} p^{\beta(h_1, h_2 - h_1)} t^{h_2 - h_1}$。则 $min\, supp(fg') = h_2$，且其第一个非零系数为 b_{h_2}。因此

$$val(1 - f(g + g')) = val((1 - fg) - fg') > val(1 - fg).$$

通过这种方式，我们可以选取一个由 Σ 中元素构成的严格递增序列 $(\gamma_\nu)_{\nu<\rho}$，使其在 Σ 中共终，即对于每个 $\gamma \in \Sigma$，都存在 $\nu < \rho$，使得 $\gamma < \gamma_\nu$。此外，我们选取一个由 $K(t^H, \beta)_\delta$ 中元素构成的序列 $(g_\nu)_{\nu<\rho}$，使得对于每个 ν，都有 $\gamma_\nu = val(1 - fg_\nu)$。注意，由于 $(\gamma_\nu)_{\nu<\rho}$ 是严格递增的，因此对于每个 $\rho > \mu > \nu > 0$,

$$val(1 - fg_\mu - (1 - fg_\nu)) = val(1 - fg_\nu) = \gamma_\nu$$

因此

$$\gamma_\nu = val(1 - fg_\mu - (1 - fg_\nu)) = val(f(g_\nu - g_\mu)) = val(f) + val(g_\mu - g_\nu).$$

因此，对于每个 $\rho > \mu > \nu > \lambda > 0$,

$$val(g_\mu - g_\nu) > val(g_\nu - g_\lambda) \text{ if and only if } \gamma_\nu > \gamma_\lambda.$$

由此可知，序列 $(g_\nu)_{\nu<\rho}$ 是伪柯西的。

由于 $K(t^H, \beta)_\delta$ 是伪完备的，令 $r = \sum_{h\in S^*} c_h t^h$ 为 $(g_\nu)_{\nu<\rho}$ 的伪极限。

断言：$1 - fr = 0$。反设存在 $0 < \nu < \rho$ 使得 $val(1 - fr) < val(1 - fg_\nu) = \gamma_\nu$。由于 $(\gamma_\nu)_{\nu<\rho}$ 严格递增，因此对于每个 $0 < \nu < \mu < \rho$，我们有

$$val(1 - fr) < val(1 - fg_\nu) < val(1 - fg_\mu).$$

此外，由于 r 是 $(g_\nu)_{\nu<\rho}$ 的伪极限，对于每个 $0 < \nu < \mu < \rho$，$val(r - g_\mu) > val(r - g_\nu)$。于是我们有

$$\begin{aligned} val(1 - fr) &= val(1 - fg_\nu - (1 - fr)) = val(f(r - g_\nu)) = \\ &= val(f) + val(r - g_\nu) < val(f) + val(r - g_\mu) = \\ &= val(f(r - g_\mu)) = val(1 - fg_\mu - (1 - fr)) = val(1 - fr), \end{aligned}$$

这就证明了矛盾。因此，对每个$0 < \nu < \rho$，$val(1 - fr) > val(1 - fg_\nu)$；又由于 Σ 没有最大元素，故 $1 - fr = 0$。 □

3 形式 p 进域的一种刻画

可以如下将上述构造应用于 p-进数域。考虑任意一个 $\mathbb{Z}$群 G。由于 $\mathbb{Z}$ 是其理论的素模型，因此存在从 $\mathbb{Z}$到 G的唯一初等嵌入。令 $H = G/\mathbb{Z}$，则 H 是可除有序阿贝尔群，因为 $\mathbb{Z}$ 在 G中是凸的。我们有如下正合序列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\rho} H \to 0.$$

注 3.1. 如上所述， $\mathbb{Z}$-群的正合序列并不总是分裂的；也就是说，存在一个 $\mathbb{Z}$-群 G，使得 $\mathbb{Z}$ 不是它的直和项。

证明。参见 [18, 推论 2，第 266] 页。特别地，文中证明了：若 R 是皮亚诺算术的一个非标准模型（即一个与$\mathbb{Z}$初等等价的有序环），则其加法群不能以 $\mathbb{Z}$ 为直和项。 □

考虑上述一个不分裂的正合序列，并定义一个余循环β，从 H 到 $\mathbb{Z}$。由于 $\mathbb{Q}_p$ 在 p-进赋值下具有混合特征，且取值于 $\mathbb{Z}$，我们得到以下推论，总结了 Ax和Kochen 在 [3]中给出的构造。

推论 3.2. 按照第 2 节中的定义，域 $\mathbb{Q}_p(t^H, \beta)_\delta$是一个 ω-伪完备赋值域，其在 $\mathbb{Z} \times H$ 上的赋值 val_p如命题 2.2 所定义。

我们回顾 Ax-Kochen 的论文 [3] 中的以下定理，该定理由在 $\mathbb{Q}_p$ 和 [3, 上的 Hahn 类构造以及定理 1]推出。

定理 3.3. 如果 K 是一个 ω-伪完备的形式 p-进域，其值群为一个基数为 $\aleph_1$ 的 $\mathbb{Z}$-群 G，那么在连续统假设成立的前提下，它同构于 $\mathbb{Q}_p(t^H, \beta)^{\aleph_0}$，其中 $H = G/\mathbb{Z}$。

根据前一个定理，可以得出赋值域 $\mathbb{Q}_p(t^H, \beta)^{\aleph_0}$ 与 $\mathbb{Q}_p$ 初等等价。如下一个命题所示，也可以通过另一种不同的论证来证明这一点。

命题 3.4。赋值域 $\mathbb{Q}_p(t^H, \beta)_\delta$ 是形式 p-进的。

证明。我们考虑在 $\mathbb{Q}_p$ 上取值于 H且剩余域为 $\mathbb{Q}_p$的通常Hahn构造。这是 $\mathbb{Q}_p$的一个初等扩张的粗化，其取值于 $\mathbb{Z}$-群 $H \times \mathbb{Z}$，由 t-进赋值与 p-进赋值的复合给出，正如 [8, 第 7]节中的例子所示。根据(0, 0)特征情形下的 Ax-Kochen/Ershov原理，它与定义在 $\mathbb{Q}_p(t^H, \beta)$上的、取值于 $\mathbb{Z} \times H$的赋值的粗化初等等价。于是， $\mathbb{Q}_p(t^H, \beta)$与 $\mathbb{Q}_p$作为域初等等价。此外， $\mathbb{Q}_p(t^H, \beta)$是一个亨泽尔混合特征赋值域，其中 $v(p) = (1, 0)$是值群的最小正元素。因此，其赋值环可由Julia Robinson公式存在性定义。由此可知， $\mathbb{Q}_p(t^H, \beta)$在形式上是 p-进的。 □

4 一般性刻画

本节将定理3.3给出的刻画推广到任意具有固定离散值群 G 和剩余域 k的有限分歧亨泽尔混合特征赋值域。现在固定 k，它是一个特征为 $p \geq 2$ 的域，并固定一个具有最小正元素 1_G的离散有序阿贝尔群 G。令 A为由 1_G生成的 G的最小凸子群，则$A \cong \mathbb{Z}$。在 [24, 第5节中，作者分别在以下两种情形下，对剩余域为 k 且值群为 $\mathbb{Z}$的完备非分歧赋值域给出了刻画，具体见定理3-4] 和 [7], :

- 为 k 上的 Witt 向量环的分式域 $W(k)$，若 k 是完美的;
- 为 k 上 Cohen 环的分式域 $C(k)$，若 k 不是完美的。

由于本文通常不区分这两种情形，我们将对两者使用相同的记号 $C(k)$。因此，若 k 是任意域，则 $C(k)$ 是一个值取自 $\mathbb{Z}$ 的完备无分歧赋值域。此外，对于每个 $e \geq 1$, ~~代数~~闭包 $C(k)$ 中都存在一个 π，它是 $C(k)$ 上一个次数为 e 的 Eisenstein 多项式的根。因此， $C(k)(\pi)$ 是一个分歧度为 e 的完备赋值域，其值群是有序群 $A \cong \mathbb{Z}$。令

$$0 \to A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\rho} H \to 0$$

为相应的有序阿贝尔群正合序列，且 $\beta\colon H \times H \longrightarrow A$ 是一个 2-余循环。那么，域 $C(k)(\pi)(t^H, \beta)$ 是一个值群为 G_β 的混合特征赋值域，正如我们将在下面的引理中证明的那样。

引理 4.1. 赋值域 $\left(C(k)(\pi)(t^H, \beta)_\delta, val\right)$ 的分歧指数为 e，剩余域为 k。

证明. 设

$$C(k)[t^H, \beta]_\delta = \{x \in C(k)(t^H, \beta)_\delta \,|\, min\, supp(x) \geq 0\},$$

并用 $(t)^{\geq 0}$ 表示由 t 生成的环 $C(k)[t^H, \beta]_\delta$ 的理想。$(C(k)(t^H, \beta)_\delta, val)$ 的赋值环为

$$\begin{aligned}
O_{val} &= \left\{x = \sum a_h t^h \in C(k)(t^H, \beta) \,|\, val(x) \geq 0\right\} = \\
&= \left\{x = \sum a_h t^h \in C(k)(t^H, \beta)_\delta \,|\, h_0 > 0 \text{ or } h_0 = 0 \wedge v(a_{h_0}) \geq 0,\, h_0 = min\, supp(x)\right\} = \\
&= \left\{x = \sum a_h t^h \in C(k)[t^H, \beta]_\delta \,|\, x \in (t)^{\geq 0} \text{ or } v(a_0) \geq 0\right\} = \\
&= C[k] + (t)^{\geq 0},
\end{aligned}$$

其中， $C[k]$ 是 k 上的 Cohen 环，因此也是 $C(k)$ 的赋值环。于是， O_{val} 的极大理想是

$$M_{val} = \left\{x = \sum a_h t^h \in C(k)[t^H, \beta]_\delta \,|\, x \in (t)^{\geq 0} \text{ or } v(a_0) > 0\right\} = M + (t)^{\geq 0},$$

其中， M 是 $C[k]$ 的极大理想。因此，剩余域可表示为

$$C[k] + (t)^{\geq 0}/M + (t)^{\geq 0} \cong k.$$

此外， $val(\pi) = (1, 0)$，并且

$$val(p) = (e, 0) = e(1, 0) = (1, 0) + \ldots + (1, 0) = (e - (e-1)\beta(0, 0), 0) = (e, 0),$$

因此， $val(p)$ 是 G_β 的最小正元素的 e 倍，因为 $\beta(0, 0) = 0$。 □

引理 4.2. 设 L 是 $C(k)$ 的有限扩张，则 L 是伪完备的。

证明。 L 的值群同构于 $\mathbb{Z}$，因此每个伪柯西序列都是柯西序列。所以， L 和 $C(k)$ 的完备性等价于伪完备性。现在，结论由 [5, 推出。推论 2，第 57], 页指出，完备赋值域的有限扩张关于扩张后的赋值仍然完备。

□

推论 4.3. 赋值域 $C(k)(t^H, \beta)_\delta$ 是伪完备的。

证明。此结论直接由定理 2.4 得出。 □

现在，我们可以将 Ax和Kochen 关于 p-阿代数域在 [2]和 [3] 中的结果推广到有限分歧的混合特征赋值域。首先，我们注意到以下

注 4.4. 设 K 是一个剩余域为 k 的 ω-伪完备无分歧混合特征赋值域。则存在从 $C(k)$ 到 K 的赋值域嵌入（不一定是初等嵌入）。

°证明。我们可以对 K 应用粗化方法，并考虑核心域 K，°，它是 K 关于粗赋值的剩余域。核心域 K带有一个混合特征赋值，其剩余域为 k，且其赋值取值于 K的值群的最小凸子群。由于 K 是伪完备的，因此核心域显然也是伪完备的。特别地，由于其值群的最小凸子群同构于 $\mathbb{Z}$，核心域实际上是完备的。于是，根据剩余域固定为°的完备无分歧赋值域的刻画，K 同构于 $C(k)$，因此 $C(k)$ 是 K 的赋值子域。

□

如果 K 是有限分歧的，则有如下结论

引理 4.5. 设 K 是一个有限分歧 $e \geq 1$ 的伪完备混合特征赋值域，其剩余域为 k。则 K 包含 $C(k)$ 的一个同构副本，该副本是一个次数为 e 的有限扩张。

证明。设 $\pi \in K$ 为一致化元。如前所述，我们可以应用粗化°方法。根据 [5] 和 [21，第27], 页，核心域 K 同构于科恩域的有限扩张 $C(k)(\pi)$。因此， $C(k)(\pi)$ 是 K 的一个赋值子域。此外，由于元素 π 是 K 的一个一致化元，因此它是一个艾森斯坦多项式 $p(x)$ 的根，该多项式的次数为 e，系数属于 $C(k)$。□

注意，引理 4.5 中假设 K 为伪完备是必要的。事实上，作为反例，[4] 中的作者证明，对于 $\mathbb{Q}_p$ 的每个有限扩张 L，都存在一个与 L 初等等价的赋值域 K，它不是伪完备的，并且其中不存在与 $\mathbb{Q}_p$ 初等等价的子域 K。此外，注意，如果 K 是引理 4.5 中的赋值域，且 K' 是另一个具有有限分歧 e、剩余域 k，并以 $p(x)$ 的任一根为一致化元的伪完备混合特征赋值域，那么 $C(k)(\pi)$ 在 K' 中有一个同构副本。为简化记号，我们引入以下性质。

设 K、K' 是两个伪完备、有限分歧的亨泽尔赋值域。若 K、K' 满足以下条件，我们就称它们具有性质 P：

- K、K' 具有相同的剩余域 k；
- 若 π、π' 分别是 K、K' 中的两个一致化元，那么它们共轭，即是同一个艾森斯坦多项式 $p(x) \in C(k)$的根。

现在我们证明命题 3.4 在 $C(k)(t^H, \beta)_\delta$中的类似结论。

命题 4.6。赋值域 $C(k)(\pi)(t^H, \beta)_\delta$ 与$C(k)(\pi)$作为赋值域初等等价。

证明。对于形式 p-进域，我们采用命题 3.4 的相同论证。事实上，通过粗化、特征为 (0, 0) 情形下的 AKE 原理以及赋值的可定义性（见 [6]），可以得到该断言。此外， $C(k)(\pi)(t^H, \beta)_\delta$和 $C(k)(\pi)$具有性质 P，这保证了有限分歧情形下该断言成立（参见 [1,例 12.8]，其中给出了一个反例：一个具有有限分歧但不具有性质 P、且与另一赋值域不初等等价的混合特征赋值域）。□

为了证明定理 4.14，我们需要以下引理。

引理 4.7. 设 K 是一个具有有限分歧的混合特征伪完备赋值域。若 F 是 K 的亨泽尔赋值子域，在 K 中没有即时扩张，且其值群 Γ_F 是 Γ_K 的纯可数子群，则 F 在 K 中相对代数闭。

证明. 假设 F 在 K 中有一个真有限扩张。则由 Γ_F 在 Γ_K 中的纯性可知，该扩张是即时扩张。这与假设矛盾。□

另一方面，我们有如下结论。

命题 4.8. 设 (K, v_K) 为一个具有有限分歧的亨泽尔混合特征赋值域。若 F 是 K 的相对代数闭子域，则 F 是亨泽尔的。

证明。设 v_F 是由 v_K 在 F 上诱导的赋值。我们证明， v_F 可以唯一地扩张到任意有限扩张。设 α 是 F 的代数闭包 $\overline{F}$ 中的一个元素，并设 v_1、v_2 是 v_F 到 $F(\alpha)$ 的两个扩张，满足 $v_1(\alpha) \neq v_2(\alpha)$。由于 F 在 K 中相对代数闭，域 $K(\alpha)$ 是 K 的代数扩张。于是， v_1 和 v_2 可扩张为 $K(\alpha)$ 上的两个赋值 v_1' 和 v_2'，使得 $v_1'(\alpha) \neq v_2'(\alpha)$，且 $v_{1\restriction_K}' = v_{2\restriction_K}' = v_K$。这与 K 的亨泽尔性矛盾。 □

引理 4.9。设 (K, v_K) 是一个有限分歧的混合特征赋值域。设 F 是 K 的一个相对代数闭子域。若 $\alpha \in \overline{F}$ 和 $y \in K$，则存在 $r \in F$，使得 $v(r-y) \geq v(\alpha - y)$，其中 v 是 v_K 到某个真代数扩张的扩张。

证明。设 $\alpha \in \overline{F}$，则对于某个 $m > 1$，有 $[F(\alpha) : F] = m$，并且对于某个 e'，有 $m = e'f'$，因为根据命题 4.8， F 是亨泽尔的。于是，根据非分歧扩张和全分歧扩张的刻画（见 [5, 第一章]），若 k 是 F 的剩余域，则存在 $\xi \in \overline{k}$，以及 $F(\alpha)$ 的一个一致化元 π'，使得 $F(\alpha) = F(\xi, \pi')$。令 $\theta_{i,j} = \xi^i \pi^j$ 对应于 $i = 0, \ldots, f'-1$ 和 $j = 0, \ldots, e'-1$。于是，$\theta_{i,j}$'s 构成 $F(\alpha)$ 在 F 上的一组基，因此存在 $f_{i,j} \in F$ 使得

$$\alpha = \sum_{i,j} f_{i,j}\theta_{i,j}.$$

根据一个标准论证（见 [24, 第 57] 页），对于每个 $f_{i,j} \in F$，我们有

$$v_{F(\xi,\pi')}(\sum_{i,j} f_{i,j}\theta_{i,j}) = min_{i,j}\{v_{F(\xi,\pi')}(f_{i,j}\theta_{i,j})\},$$

这意味着 $\theta_{i,j}$'s 构成扩张 $F(\xi, \pi')/F$ 的一个分离基。接下来，证明过程与 [2, 命题 1] 中的证明相同。事实上，令

$$d_{i,j} := \begin{cases} 1 & , \text{ if } i = j = 0; \\ 0 & , \text{ otherwise.} \end{cases}$$

我们有

$$\alpha - y = \sum_{i,j}(f_{i,j} - d_{i,j}y)\theta_{i,j}.$$

现在，令 v 为 v_K 在 $K(\xi, \pi')$ 上的扩张。那么，我们有

$$v(\alpha - y) = min_{i,j}((f_{i,j} - d_{i,j}y)\theta_{i,j}) \leq v(f_{0,0} - d_{0,0}y) = v(f_{0,0} - y).$$

因此， $r := f_{0,0}$ 是 F 中具有所需性质的元素。 □

引理 4.10. 设 K 是一个具有有限分歧 $e \geq 1$ 的伪完备赋值域，其值群为 Γ_K。若 F 是 K 的一个赋值子域，使得 F 在 K 中没有即时扩张，且其值群 Γ_F 是 Γ_K 的一个纯可数子群，则 F 是伪完备的。

证明。利用引理 4.5 和 4.9，我们现在可以将 [2, 命题2], 的证明调整到域 K 上。我们需要证明， F的每个伪柯西序列在 F中都有极限。由于 Γ_F是可数的，只需证明 F 是 ω-伪完备的。设 $(c_i)_{i<\omega}$ 是一个伪柯西序列。由于 K 是伪完备的，存在$c \in K$ 作为其伪极限。若存在 $f \in F$ 使得

$$v_K(f-c) > v_K(c-c_i), \tag{4}$$

对所有 $i < \omega$，都有

$$v_F(f-c_i) = v_K(f-c_i) = v_K((f-c)+(c-c_i)) = v_K(c-c_i)$$

对所有 $i < \omega$，因此 f是 F 中 $(c_i)_{i<\omega}$ 的伪极限。因此，假设不存在$f \in F$使得 (4) 成立。

断言。 $c \in F$。我们证明 $F(c)$ 是 K 中 F 的一个即时扩张。只需证明 $(c_i)_{i<\omega}$ 在 F 上是超越型的。事实上，若如此，则对每个多项式 $A(x) \in F[x]$, 序列 $(v_k(A(c_i)))_{i<\omega}$ 最终为常值，而 $v_K(A(c))$ 是其最终值。注意，若将 $A(x)$ 在 $\overline{F}$ 上因式分解，只需证明对于 $A(x)$ 在 $\overline{F}$ 中的每个根 α ， $v_{\overline{F}}(c-\alpha)$ 都是 $(v_{\overline{F}}(c_i-\alpha))_{i<\omega}$ 的最终值。根据注 4.7，我们知道 F 在 K 中是相对代数闭的。因此，由于 $c \in K$，根据引理 4.9，存在 $r \in F$使得 $v_{\overline{F}}(r-c) \geq v_{\overline{F}}(\alpha-c)$。现在，由于该序列是伪柯西序列，存在 $i_0 < \omega$ 使得对所有 $i > i_0$,

$$v_{\overline{F}}(c-c_i) > v_{\overline{F}}(c-c_{i-1}) \geq v_{\overline{F}}(c-r) \geq v_{\overline{F}}(c-\alpha).$$

因此，若 $i > i_0$,

$$v_{\overline{F}}(c_i-\alpha) = min\{v_{\overline{F}}(c-c_i), v_{\overline{F}}(c-\alpha)\} = v_{\overline{F}}(c-\alpha).$$

所以， $v_{\overline{F}}(c-\alpha)$ 是 $(v_{\overline{F}}(c_i-\alpha))_{i<\omega}$ 的最终值。证明至此完成。

□

我们回顾一下 [2] 中的以下定义。

定义 4.11。若 H 是阿贝尔群 G 的子群，则

$$(H \mid G) = \{x \in G \mid \textit{there exists } m \in \mathbb{N} \textit{ such that } mx \in H\}.$$

定义 4.12. 令 K 为一个具有有限分歧 e 的赋值域，并令 π 为 K 的一致化元。如果 F是 K 的子域，使得 F和 K 具有性质 P，那么$[F \mid K]$ 表示某个固定子域 L ，它是 K 中相对于性质$\Gamma_L \subseteq (\Gamma_F \mid G)$极大的子域。

引理 4.13. 设 K、K' 是具有公共值群 G 且满足性质 P 的两个 ω-伪完备赋值域。设 $F \subseteq K$ （分别为 $F' \subseteq K'$）是 K（分别为 K'）中没有即时扩张的赋值子域，并假设 Γ_F 是 G 的可数纯子群。设 $\psi\colon F \longrightarrow F'$ 是赋值域的同构。若 $x \in K \setminus F$，则存在一个赋值域的同构

$$\psi_0 : [F(x) \,|\, K] \longrightarrow F_1^{'},$$

扩展了 ψ，且其中 $F_1^{'}$ 是包含 F' 的 K' 的子域。此外，

$$\Gamma_{[F(x)\,|\,K]} = (\Gamma_{F(x)} \,|\, G) = (\Gamma_{F_1^{'}} \,|\, G).$$

证明。 [3, 命题 3] 的证明可以很容易地调整到我们的情形。只需注意，

- π 是 K 的一个一致化元，而一般来说，$\pi \neq p$；
- 根据引理 4.5，我们可以假设 $C(k)(\pi) \subseteq F$。

那么由引理 4.9、引理4.10 以及即时扩张的唯一性可得所述结论。

□

定理 4.14. 设 K, K' 是基数为 $\aleph_1$ 且满足性质 P 的 ω-伪完备有限分歧赋值域。如果 K 和 K' 具有相同的基数为 $\aleph_1$ 的值群 G，那么存在一个赋值域同构。

$$\psi : K \longrightarrow K'.$$

此外，若 F、F'分别是 K和 K'的两个子域，且 $\phi\colon F \longrightarrow F'$是赋值域的同构，则 ψ 是 ϕ的扩张。

证明。我们沿用 [2, 定理 2]的证明思路。设 k 是 K 和 K'的公共剩余域。于是，根据引理 4.4，我们可以将 $C(k)$视为 K 和 K'的公共子域。现在，设 $\pi \in K$ 和 $\pi' \in K'$ 分别是 K和 K'的一致化元。由于 K、K' 满足性质 P，根据引理 4.5 C，$k(\pi)$和$C(k)(\pi')$分别是 K 和 K' 的两个同构赋值子域。因此，诱导的赋值具有相同的剩余域 k 和相同的值群 $\Gamma \cong \mathbb{Z}$，后者是 G的一个可数纯子群。现在，分别选取 B 和 B' 作为 K 和 K' 在 $C(k)(\pi)$及 $C(k)(\pi')$上的两个超越基。由于 G 的基数为 $\aleph_1$，可得 $|B| = |B'| = \aleph_1$。将 B 和 B' 良序化，以构成 ω_1-序列。因此，我们有 $B = (x_\eta)_{\eta<\omega_1}$ 和 $B' = (x'_\eta)_{\eta<\omega_1}$。对每个 $0 < \lambda < \omega_1$，我们定义

- 一个子域 $F_\lambda \subseteq K$，在 K 中没有即时扩张，且其值群Γ_λ 是 G的纯可数子群；
- 一个子域 $F'_\lambda \subseteq K'$，没有即时扩张，且其值群 Γ'_λ 是 G的一个纯可数子群；

• 赋值域的同构 ψ_λ： $F_\lambda \longrightarrow F'_\lambda$。

对于 $\lambda = 1$， $F_1 := C(k)(\pi)$ 且 $F'_1 = C(k)(\pi')$。因此，我们有一个赋值域的同构 ψ_1： $F_1 \longrightarrow F'_1$，使得 $\psi_1(\pi) = \pi'$。

假设 $\lambda < \omega_1$ 是一个奇序数，且我们已经定义了一个赋值域的同构 $\psi_\lambda : F_\lambda \longrightarrow F'_\lambda$。由于 Γ_{F_λ} 是可数的，存在 $\mu < \omega_1$ 使得$x_\mu \notin F_\lambda$。令 $\mu(\lambda)$为最小的此类 μ。令

$$F_{\lambda+1} = [F(x_{\mu(\lambda)}) \mid K].$$

然后，根据引理 4.13，存在一个赋值子域 $F'_{\lambda+1} \subseteq K'$，使得 ψ_λ 可以扩展为赋值域的同构

$$\psi_{\lambda+1} : F_{\lambda+1} \longrightarrow F'_{\lambda+1}.$$

如果 λ 是偶序数，我们以相同的方式进行，交换 F_λ 和 F'_λ 的角色，并考虑 ψ_λ^{-1} 而不是 ψ_λ。

如果 $\sigma < \omega_1$ 是一个极限序数，我们考虑域 $D_\sigma = \bigcup_{\lambda<\sigma} F_\lambda$ 和 $D'_\sigma = \bigcup_{\lambda<\sigma} F'_\lambda$。那么存在一个赋值域同构 ϕ： $D_\sigma \longrightarrow D'_\sigma$，它延拓了所有的 ψ_λ，$\lambda < \sigma$。如果我们设定

$$F_\sigma = [D_\sigma \mid K],$$
$$F'_\sigma = [D'_\sigma \mid K']$$

那么，根据即时扩张的唯一性，存在一个赋值域同构

$$\psi_\sigma : F_\sigma \longrightarrow F'_\sigma,$$

因为 F_σ（分别地，F'_σ）是 D_σ（分别地，D'_σ）的极大即时扩张。因此，我们通过归纳证明了 $W = \bigcup_{\lambda<\omega_1} F_\lambda$和 $W' = \bigcup_{\lambda<\omega_1} F'_\lambda$是同构的赋值域。对于偶数和奇数 λ，交替使用 F_λ 与 F'_λ 之间的同构，从而确保已考察超越基 B 和B' 中的所有元素。因此， K 和 K' 分别是 W 和 W'的代数扩张。另一方面，由于每个 F_λ（分别地，F'_λ）在 K（分别地： K'）中相对代数闭，因此 W（分别地， W'）在 K（分别地， K'_1）中也相对代数闭。因此， $K = W$和 $K' = W'$，定理得证。

□

现在我们证明以下推论，它刻画了剩余域和值群固定的 ω-伪完备有限分歧赋值域。

推论 4.15. 设 K 是一个基数为 $\aleph_1$、剩余域为 k 且赋值群为基数 $\aleph_1$ 的 ω-伪完备有限分歧赋值域。那么，在连续统假设下，K（作为赋值域）同构于 $L(t^H, \beta)^{\aleph_0}$，其中 L 是 k 上的科恩域 $C(k)$ 的有限扩张， $H = G/A$ 和 β： $H \times H \longrightarrow A$ 是一个 2-余循环。

证明。该证明直接由 $L(t^H, \beta)^{\aleph_0}$ 的 ω-伪完备性，以及将定理 4.14 应用于 K 和 $L(t^H, \beta)^{\aleph_0}$ 得出；其中， L 是 $C(k)$ 的有限扩张，且 L 和 K 具有性质 P。

□

5 评注与推论

5.1 自同构的提升

以幂级数的形式显式描述赋值域，一个结果是可以将剩余域和值群的自同构显式提升为赋值域的自同构。例如，在等特征情形下，若 k 是一个域，G 是一个有序阿贝尔群，则 Hahn 域 $k((t^G))$ 自然带有一个自同构 $\phi(\sum_g a_g t^g) = \sum_g \overline{\phi}(a_g)^{\hat{\phi}(g)}$，其中 $\overline{\phi} \in Aut(k)$ 且 $\hat{} \phi \in Aut(G)$。在混合特征情形下，我们注意到，对于 Hahn 类构造$K(t^H, \beta)^{\aleph_0}$，经过一些必要调整后，同样的情况也会出现。事实上，在这种情况下，赋值是 t-进赋值与系数域 K 上赋值的复合。因此，只有当剩余域和值群的自同构保持 K 的截面（其意义如引理 5.2 中的 (5) 所示）时，才可能将它们提升。回想一下，若 G 是一个有序阿贝尔群，其最小凸子群为 A，且 $H := G/A$，那么按引理 1.8 定义的 G_β 是一个与 G 同构的有序阿贝尔群。

$\hat{}\hat{}\hat{}$ 引理 5.1. 设 $\phi_\beta \in Aut(G_\beta)$。存在两个端同态 ϕ_1，其作用于 A，以及 ϕ_2，其作用于 H，使得

$$\hat{\phi}_1(-\beta(h, h')) = -\beta(\hat{\phi}_2(h), \hat{\phi}_2(h')).$$

$\hat{}\hat{}$ 证明。根据 G_β 的定义，存在两个映射 $\phi_1 : A \longrightarrow A$ 和 $\phi_2 : \hat{}\hat{}\hat{}H \longrightarrow H$，使得对所有 $(z, h) \in G_\beta$，$\phi_\beta(z, h) = (\phi_1(z)\ \phi_2(h))$。由于 ϕ_β 是 G_β 的自同构，我们有 ϕ_1 和 ϕ_2 满足以下性质：

$$\begin{cases} \hat{\phi}_1(z) = 0, \ \text{if } z = 0; \\ \hat{\phi}_2(h) = 0, \ \text{if } h = 0; \\ \hat{\phi}_1(z + z' - \beta(h, h')) = \hat{\phi}_1(z) + \hat{\phi}_1(z') - \beta(\hat{\phi}_2(h), \hat{\phi}_2(h')), \ \text{for all } (z, h) \in G_\beta; \\ \hat{\phi}_2(h + h') = \hat{\phi}_2(h) + \hat{\phi}_2(h'), \ \text{for all } h \in H. \end{cases}$$

$\hat{}\hat{}$ 特别地，我们有 ϕ_1、ϕ_2 分别是 A 和 H 的满射自同态，并且

$$\hat{\phi}_1(-\beta(h, h')) = -\beta(\hat{\phi}_2(h), \hat{\phi}_2(h')).$$

$\hat{}\hat{}$ 请注意，即使 ϕ_β 是单射，ϕ_1 通常也不是单射。 □

引理 5.2. 设 G 是一个具有最小凸子群 A 的有序阿贝尔群，L 是一个取值于 A 且具有截面 $\hat{}\hat{}\hat{}\sigma$ 的混合特征赋值域。设 $\overline{\phi} \in Aut(L)$，且 $\phi_\beta = (\phi_1, \phi_2) \in Aut(G_\beta)$. 若 $\overline{\phi} \circ \sigma = \sigma \circ \phi_1$，则$\phi$: $L(t^H, \beta) \longrightarrow L(t^H, \beta)$ 使得

$$\phi(\sum_{h \in S} a_h t^h) = \sum_{h \in S} \overline{\phi}(a_h) t^{\hat{\phi}(h)}$$

是 $L(t^H, \beta)$ 作为赋值域的一个自同构。

ˆ 证明。注意，由于 $G \cong G_\beta$，任意 $\phi \in Aut(G)$ 都唯一确定一个自同构 $\phi_\beta \in Aut(G_\beta)$。现在我们来验证 ϕ 是一个自同构。显然，

$$\phi(\sum_{h\in S} a_h t^h + \sum_{h\in S'} b_h t^h) = \phi(\sum_{h\in S} a_h t^h) + \phi(\sum_{h\in S'} b_h t^h)$$

与通常的幂级数情形相同。对于乘法，我们有

$$\begin{aligned}
&\phi(\sum_{h\in S} a_h t^h \cdot \sum_{h\in S'} b_h t^h) = \\
=&\phi\left(\sum_{l\in S+S'}\left(\sum_{\substack{h\in S\\ h'\in S'\\ h+h'=l}} a_h b_{h'}\sigma(-\beta(h,h'))\right)t^l\right) = \\
=&\sum_{l\in S+S'}\overline{\phi}\left(\sum_{\substack{h\in S\\ h'\in S'\\ h+h'=l}} a_h b_{h'}\sigma(-\beta(h,h'))\right)t^{\hat{\phi}_2(l)} = \\
=&\sum_{l\in S+S'}\left(\sum_{\substack{h\in S\\ h'\in S'\\ h+h'=l}} \overline{\phi}(a_h)\overline{\phi}(b_{h'})\overline{\phi}(\sigma(-\beta(h,h')))\right)t^{\hat{\phi}_2(l)}.
\end{aligned}$$

另一方面，我们有

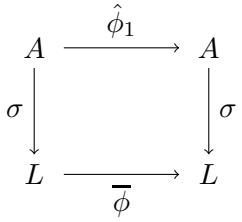
$$\begin{aligned}
&\phi(\sum_{h\in S} a_h t^h)\cdot\phi(\sum_{h\in S'} b_h t^h) = \\
=&\sum_{h\in S}\overline{\phi}(a_h)t^{\hat{\phi}_2(h)}\cdot\sum_{h\in S'}\overline{\phi}(b_h)t^{\hat{\phi}_2(h)} = \\
=&\sum_{l\in S+S'}\left(\sum_{\substack{h\in S\\ h'\in S'\\ h+h'=l}} \overline{\phi}(a_h)\overline{\phi}(b_{h'})\sigma(-\beta(\hat{\phi}_2(h),\hat{\phi}_2(h')))\right)t^{\hat{\phi}_2(l)}.
\end{aligned}$$

ˆ ˆ 断言。对于所有 $h,h' \in H$, $\overline{\phi}(\sigma(-\beta(h,h'))) = \sigma(-\beta(\phi_2(h)\ \phi_2(h')))$.

根据引理 5.1，该断言化为

$$\overline{\phi}(\sigma(-\beta(h,h'))) = \sigma(\hat{\phi}_1(-\beta(h,h'))), \tag{5}$$

即下图是交换图



这由假设可知。 □

回想一下，在离散有序阿贝尔群中，最小凸子群A 同构于 $\mathbb{Z}$，因此 A 作为有序群的唯一满射自同态就是单位元。因此，(5) 强制要求 $\overline{\phi}_{\restriction\sigma(A)} = id_L$。特别地，我们知道，对于一致化元为 π 且取值于 $\mathbb{Z}$的有限分歧赋值域，有 $\sigma(z) = \pi^z$，对所有 $z \in \mathbb{Z}$均成立。因此，(5) 等价于 $\overline{\phi}(\pi^z) = \pi^z$，对所有$z \in \mathbb{Z}$均成立。

命题 5.3. 设 K 是一个基数为 $\aleph_1$、值群 G的基数为 $\aleph_1$、剩余域为 k 且一致化元为 $\hat{}\pi$的 ω-伪完备有限分歧赋值域。若 ϕ是 G的一个自同构，且 $\overline{\phi}$ 是 k 的一个自同构，并且它在 $C(k)(\pi)$上的提升固定 π^{th}次幂，则存在一个 $\hat{}$ 赋值域 K 的自同构，将 ϕ 和 $\overline{\phi}$ 同时提升到 K。

$\hat{}$ 证明。与引理 5.2 的证明类似，令 ϕ_β 为由 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\phi$ 诱导的 G_β 的自同构。由于 $A \cong \mathbb{Z}$，因此我们有 $\phi_\beta = (id_{\mathbb{Z}}, \phi_2)$，其中 ϕ_2 是 H 的自同构。根据假设以及上述关于$\overline{\phi}$ 的观察，我们有 $\phi(\sum_{h\in H} a_h t^h) = \hat{}\sum_{h\in H} \overline{\phi}(a_h)t^{\phi_2}$ 是 $C(k)(\pi)(t^H, \beta)$ 的一个自同构。根据定理 4.14，后者作为赋值域与 K 同构。

□

5.2 等特征 p 情形

在本节中，我们证明定理 4.14，尤其是推论 4.15，可以推广到这样一种情形：固定的特征为 p的剩余域也带有亨泽尔赋值。事实上，在这个等特征 p 赋值域同构于 Hahn 域这一特殊情形下，我们可以用幂级数完整地描述起始的混合特征赋值域。正如引言中所述，许多数学家都曾探讨过在等特征 p 情形下如何用幂级数刻画赋值域。 [12], Kaplansky 证明，若等特征 p 亨泽尔赋值域 K 没有即时扩张，并且满足他所称的假设 A，即 ([14]) 值群是 p-可除的，且剩余域是完美域，不存在次数可被 p整除的有限可分扩张，那么 K 就由其值群和剩余域唯一确定。这是由满足该假设的赋值域的极大即时扩张的唯一性得出的。此结果适用于非离散情形。离散情形则由 Schilling 研究，他证明了以下结果。

定理 5.4. (*[23, 定理 2]*) 设 (K,v) 是一个等特征 p 赋值域，其值群 G 的秩有限，为 m。若 (K,v) 是伪完备的，则它同构于一个以其剩余域为系数、含 m 个变量的幂级数域。

在将定理 4.14 的下一个推论陈述出来之前，我们需要回顾一下将要讨论的设定。为此，我们通过粗化方法对赋值域作标准分解。

设 (K,v) 是一个具有有限分歧的伪完备混合特征赋值域，其剩余域为 k_v，赋值取值于离散有序阿贝尔群 G。一般而言，剩余域本身可能带有非平凡赋值，即一个等特征 p 赋值。在这种情况下，通过粗化得到的标准分解如下：

$$K \xrightarrow{\dot{v}} \mathring{K} \xrightarrow{v_0} k_v \xrightarrow{v_{p,p}} k_p,$$

其中

- $(K,\dot{v},G/A,\mathring{K})$ 是一个等特征零赋值域；。
- (K,v_0,A,k_v) 是一个混合特征赋值域；
- $(k_v,v_{p,\ p},A,k_p)$ 是一个等特征 p 赋值域；

其中， A 是 G的最小凸子群。

推论 5.5. 设 (K,v) 是基数为 $\aleph_1$ 、具有有限分歧、剩余域为 k_v 且赋值于基数为 $\aleph_1$ 的群 G 的伪完备混合特征赋值域。设 $v_{p,\ p}$ 是 k_v 上的一个亨泽尔赋值，且 k_v 关于此赋值是完备的；令 k_p 为相应的剩余域。那么，(K,v) 同构于 $L(t^H,\beta)\aleph_0$，其中 L 是科恩域 $C(k_p((t)))$ 关于 $k_p((t))$ 的一个有限扩张， $H=G/A$ 和 $\beta\colon\ H\times H\longrightarrow A$ 是一个 2-余循环，模连续统假设成立。

证明. 根据标准的粗化分解，域 k_v 的值群为 A，它与 $\mathbb{Z}$ 规范同构。因此，根据席林定理（定理 5.4），$(k_v,v_{p,\ p})$ 同构于其剩余域 k_p 上的幂级数域 $k_p((t))$。于是，结论直接由定理 4.14 得出。 □

现在，我们在饱和的语境下陈述这一结果。

事实 5.6. An $\aleph_1$-饱和赋值域是 ω-伪完备的。

推论 5.7。设 (K,v) 是一个具有有限分歧、值群为 G 且剩余域为 k_v 的混合特征赋值域。设 $v_{p,p}$ 是 k_v 上的亨泽尔赋值，并设 k_p 为相应的剩余域。若 (K,v) 是 $\aleph_1$-饱和的，则它同构于 $L(t^H,\beta)\aleph_0$，其中 L 是科恩域 $C(k_p((t)))$ 在 $k_p((t))$ 上的有限扩张， $H=G/A$ 且 $\beta\colon\ H\times H\longrightarrow A$ 是一个 2- 余循环，模连续统假设成立。

证明。若 (K, v) 是 $\aleph_1$-饱和的，则 k_v 也具有该性质。$v_{p,p}$ 在 k_v 上的亨泽尔赋值取值于 A 中，而 A 是一个 $\aleph_1$-饱和的 $\mathbb{Z}$-群。于是 A 是一个正则的非整除群。根据 [11, 定理 4]， $v_{p,p}$ 在环的语言中无需参数即可定义。这意味着 $(k_v, v_{p,p})$ 作为赋值域也具有 $\aleph_1$-饱和性。于是根据事实 5.6， k_v 是伪完备的，特别地，它是柯西完备的。根据 [23,定理 2], $(k_v, v_{p,p})$ 作为赋值域同构于 $k_p((t))$。根据定理 4.14 和推论 5.5，即得所述结论。 □

致谢。谨向我的博士导师 Paola D'Aquino 致以谢意，感谢她在我撰写论文期间始终给予支持与指导，本研究是该论文的一部分。也感谢 Franziska Jahnke 指出了定理 4.14 的一些推论，这些推论见第 5 节；感谢 Pierre Touchard 与我进行了许多有益的讨论。特别感谢 Angus Macintyre，是他建议了这一课题，并与我进行了许多有趣的数学交流。最后，感谢数学科学研究所（现为 Simons Laufer 数学科学研究所）资助我在伯克利期间的生活开销。我在该研究所参加"数论中的可定义性、可判定性与可计算性——第二部分"项目期间，开始了这项研究。

参考文献

[1] ANSCOMBE, S. 和 JAHNKE, F. Cohen 环的模型论。《Confluentes Math.》14, 2 (2022), 1–28。[2] AX, J. 和 KOCHEN, S. 局部域上的丢番图问题。I. 《Amer. J. Math.》87 (1965), 605–630。[3] AX, J. 和 KOCHEN, S. 局部域上的丢番图问题 ii：p 进数论的一组完备公理。*. 《American Journal of Mathematics》87 (1965), 631。[4] B´ELAIR, L.、VAN DEN DRIES, L. 和 MACINTYRE, A. p-进域中的初等等价与余维。《Manuscripta Math.》62, 2 (1988), 219–225。[5] CASSELS, J. W. S. 和 FR¨OHLICH, A. 代数数论：教学研讨会论文集。Academic Press, 1967。[6] CLUCKERS, R.、DERAKHSHAN, J.、LEENKNEGT, E. 和 MACINTYRE, A. 在剩余域有限或伪有限的亨泽尔赋值域中一致地定义赋值环。《Annals of Pure and Applied Logic》164, 12 (2013), 1236–1246。逻辑讨论会 2011。[7] COHEN, I. S. 完备局部环的结构与理想理论。《美国数学会会刊》59, 1 (1946), 54–106。

[8] DE MASE, A. 有限分歧的亨泽尔赋值域及具有各种赋值群的情形的相对模型完备性。arXiv 预印本（2023 年 11 月），arXiv:2311.00411 [math.LO].[9] ENGLER, A. J. 和 PRESTEL, A.《赋值域》。Springer 数学专著丛书。施普林格出版社，柏林，2005。[10] HASSE, H. 任意代数数域中数由二次型表示的问题。《纯粹与应用数学杂志》153 (1924), 113–130。[11] HONG, J. 可定义的非整除亨泽尔赋值。《伦敦数学会会刊》46（2014 年 2 月）。[12] KAPLANSKY, I. 带赋值的极大域。《杜克数学杂志》9, 2 (1942), 303–321。[13] KOCHEN, S. 局部域的模型论。载于《ISILC 逻辑会议：国际暑期研究所与逻辑讨论会论文集，基尔 1974》（2006），施普林格，第 384–425 页。[14] KUHLMANN, F.-V. 代数极大 kaplansky 域的子域。《代数通讯》50, 8 (2022), 3346–3353。[15] MACINTYRE, A. p 进模型论二十年。载于《逻辑讨论会 '84》（曼彻斯特，1984），第 120 卷，《逻辑与数学基础研究》。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1986，第 121–153 页。[16] MACLANE, S. 某些赋值域的幂级数表示的唯一性。《数学年刊》39, 2 (1938), 370–382。[17] MACLANE, S. p 进域的子域与自同构群。《数学年刊》40, 2 (1939), 423–442。[18] MENDELSON, E. 关于数论的非标准模型。载于《数学基础论文集》。马格尼斯出版社，希伯来大学，耶路撒冷，1961，第 259–268 页。[19] NEUMANN, B. H. 关于有序除环。《美国数学会会刊》66, 1 (1949), 202–252。[20] POONEN, B. 极大完备域。《数学教学》39, 1–2 (1993), 87–106。[21] PRESTEL, A. 和 ROQUETTE, P. 形式 p 进域，第 1050 卷《数学讲义》。施普林格出版社，柏林，1984。[22] ROBINSON, D. J. S.《群论教程》，第二版，第 80 卷《数学研究生教材》。施普林格出版社，纽约，1996。

[23] SCHILLING, O. E. G. 多变量形式幂级数域中的算术。《数学年刊》38, 3 (1937), 551–576。[24] SERRE, J.-P. 《局部域》，《数学研究生教材》第67卷。施普林格出版社，纽约—柏林，1979。由 Mar- vin Jay Greenberg 从法文翻译。[25] TEICHM ¨ULLER, O. 含不完美剩余类域的离散赋值完美域。《纯粹与应用数学杂志》176 (1937), 141–152。