arXiv:2305.01636v2 [math.AG] 8 Jan 2024

圆柱体半代数子集上非负性的有理证书

Gabriela Jeronimo[1,2,3,*] DanielPerrucci[1,2,*]

[1] 布宜诺斯艾利斯大学，精确与自然科学学院，数学系。布宜诺斯艾利斯，阿根廷。[2] CONICET – 布宜诺斯艾利斯大学，数学研究所“Luis A. Santal´ó”（IMAS），布宜诺斯艾利斯，阿根廷。[3] 布宜诺斯艾利斯大学，基础共同课程，精确科学系。布宜诺斯艾利斯，阿根廷。

摘要

设 $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, Y]$ 和 $S = \{(\bar{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid g_1(\bar{x}, y) \geq 0, \dots, g_s(\bar{x}, y) \geq 0\}$ 是圆柱体在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个非空、可能无界的子集。设 $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, Y]$是一个在 S 上为正的多项式。我们证明，在某些附加假设下，对于任意在 $\mathbb{R}$ 上为正的非常数多项式 $q \in \mathbb{R}[Y]$， f 在 S 上非负性的证书可由一个有理函数给出，其分子是由 $g_1, \dots, g_s$ 生成的二次模中的多项式，分母则是 q的某个幂。

关键词 ： 正定理、正多项式、平方和、二次模 .
MSC2020：12D15、13J30、14P10。

1 引言

借助平方和构造正性与非负性证书这一主题，其渊源可追溯至希尔伯特第十七问题及 Artin 对该问题的著名解答（[1]）。这一理论发展的另一重要里程碑是 Krivine（[4]）和 Stengle（[22]）提出的正定理，它为在基本闭半代数集 $S \subset \mathbb{R}^n$ 上为正或非负的多元多项式 f 提供有理证书。

近来，Schm¨udgen（[17]）和 Putinar（[12]）的著名研究重新激发了人们对这类证书的兴趣。Schm¨udgen 的正定理保证，对于在紧集 S 上为正的多项式 f，存在一个多项式非负性证书。在一个更强、且能推出 S 紧致性的假设下，Putinar 正定性定理证明了一个更简单的多项式证书的存在。此后，若干研究从不同方向推广了上述定理，其中也包括非紧情形。关于这一主题的全面论述，请参阅 Scheiderer（[16]）的综述以及 Marshall（[7]）和 Powers（[10]）的著作；关于矩问题及其与非负性证书之间联系的具体参考资料，另见 [20] 。

*本研究部分获得布宜诺斯艾利斯大学（UBACYT 20020190100116BA）、CONICET（PIP 2021- 2023 GI 11220200101015CO）和阿根廷国家科学与技术促进局（PICT 2018–02315）的资助。

本文讨论以下设定中非负性证书是否存在的问题。设 $g_1,\dots,g_s \in \mathbb{R}[X,Y]=\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n,Y]$ 和

$$S=\{(\bar{x},y)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid g_1(\bar{x},y)\geq 0,\dots,g_s(\bar{x},y)\geq 0\}$$

是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中圆柱体的一个非空、可能无界的子集。设 $f\in\mathbb{R}[\bar{X},Y]$ 是一个在 S 上为正的多项式。在某些附加假设下，我们证明：对于任意一个在 $\mathbb{R}$ 上为正的非恒定多项式 $q\in\mathbb{R}[Y]$，存在一个由有理函数给出的 f 在 S 上非负性的证书，该有理函数的分子是由 g_1、……、g_s 生成的二次模中的多项式，分母则是 q 的某个幂（见定理 1）。

此前已有研究探讨了这一问题的变体。在 [9] 和 [3], 中，Schm¨udgen 正定理和 Putinar 正定性定理在对多项式 f 作出一些附加假设的条件下，被推广到截面紧致的圆柱体。在 [5] 和 [6], 中，作者们除探讨非紧集上多项式非负性的其他结果外，还分析了 S 为圆柱体子集这一更一般的情形，并证明：若定义 S 的多项式满足某些假设，则存在一个多项式证书，使 f 经适当的小幅扰动后满足相应性质。

另一方面，关于以某个固定特定多项式的幂作为分母的有理证书的存在性，已有研究在不同的框架下展开。在 [15], 中证明了，一个在 $\mathbb{R}^n$ 上为正的多项式 f 可以表示为若干有理函数的平方和，这些有理函数的分母为 $1+\sum X_j^2$的幂。随后，在 [13] 和 [14] 中，这一结果被推广到基本闭半代数集，但需要附加假设，以控制多项式 f 在无穷远处的行为。

回到 Schm¨udgen 和 Putinar 的正定理，在 [21] 和 [8] 中，作者提出了一种构造性方法，以求得这些证书中每一项的次数界。本文证明定理 1 的主要思路，与 [9] 和 [3], 中一样，是针对每个 $y\in\mathbb{R}$，以参数化的方式构造一个关于被方程 $Y=y$截出的 S 切片上的证书，使得所有这些证书都能合并为一个证书。我们在每个切片上采用的过程，实际上是对 [21] 和 [8] 中方法的改编，并使用了 [11]。

这种切片方法与 [6] 中的方法在某种程度上互为补充；后者则通过考察关于变量 X 上的投影的纤维，将圆柱体子集的问题化归为单变量情形，最后设计了一种巧妙的拼接过程。此外，这种方法与 Schm¨udgen 在 [18] 中证明的纤维定理有关（其推广见 [19]）：该定理将闭的（可能无界的）基本半代数集上的矩问题，化归为其关于某个像有界的多项式映射的纤维上的矩问题。

本文其余部分分为两节。第2节介绍我们的假设和记号，并陈述主要结果；随后在第3节证明该结果。

2 假设与主要结果

我们先介绍本文中将一直使用的记号。

设 $g_1,\ \bar{}\ 。。。，\ g_s\in\mathbb{R}[X,Y]$。我们考虑由 g := (g1, 。。。, gs) 生成的二次模 :

$$M(\mathbf{g})=\left\{\sigma_0+\sigma_1 g_1+\cdots+\sigma_s g_s \mid \sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_s\in\sum\mathbb{R}[\bar{X},Y]^2\right\},$$

¯也就是说，包含 $g_1,\dots,g_s$ 的最小二次模。与 [6, 第 5] 节（另见 [3]）一样，我们对 M (g) 作出一个弱于阿基米德性、但在变量 X 上体现类似思想的假设¯。

假设 1 存在 $N \in \mathbb{R}_{>0}$ 使得

$$N - \sum_{1 \le j \le n} X_j^2 \in M(\mathbf{g}).$$

注意，在此假设下，集合 S 包含于横截面为紧致集 $\mathbf{B} \times \mathbb{R}$ 的柱体中，其中

$$\mathbf{B} := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{1 \le j \le n} x_j^2 \le N\}.$$

对于 $i = 1, \ldots, s$，如果

$$g_i(\bar{X}, Y) = \sum_{0 \le k \le m_i} g_{ik}(\bar{X}) Y^k \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$$

$\bar{}$ 满足 $g_{im_i}(X) \neq 0$，我们记

$$\widetilde{g}_i(\bar{X}, Y, Z) := Z^{m_i} g_i(\bar{X}, Y/Z) = \sum_{0 \le k \le m_i} g_{ik}(\bar{X}) Y^k Z^{m_i - k} \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y, Z]$$

表示关于变量 Y 对 g_i 进行齐次化。我们对多项式 $g_1, \ldots, g_s$ 及其描述的集合 S 作出以下进一步假设。

假设 2

1. $S \neq \emptyset$。2. 对于 $i = 1, \ldots, s$, $m_i = \deg_Y(g_i)$ 为偶数。
3. $S_\infty := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_{1m_1}(\bar{x}) \ge 0, \ldots, g_{sm_s}(\bar{x}) \ge 0\} \subset$ B。

事实上，一旦作出假设 1，假设 2 中的第三个条件就可以替换为 S_∞ 有界这一条件，因为必要时总可以增大 N。不过，为了简单起见，我们假设 N 足够大。另一方面，下面的例子表明，假设 2 中的第三个条件并不能由假设 1 和假设 2 中的前两个条件推出。

例 1 对于 $n = 2$，考虑 $g_1 = X_1 Y^2 + (1 - X_1^2 - X_2^2)$ 和 $g_2 = -X_1 Y^2 + 1$。那么

$$2 - X_1^2 - X_2^2 = g_1 + g_1 \in M(\mathbf{g}),$$

因此假设 1 得以满足。此外，$S \neq \emptyset$（而且，它并非有界），因为对于每个 $y \in \mathbb{R}$，$(0, 0, y) \in S$。然而

$$S_\infty = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$$

不是有界集。

设 $q \in \mathbb{R}[Y]$ 是一个在 $\mathbb{R}$ 上为正的非常数多项式（因此，它是 $\mathbb{R}[Y]$ 中的平方和），

$$q(Y) = \sum_{0 \le k \le m_0} q_k Y^k$$

其中有 $m_0 > 0$ 和 $q_{m_0} \neq 0$。假设 q 在 $\mathbb{R}$ 上为正，这意味着 m_0 是偶数且$q_{m_0} > 0$。我们记作

$$\widetilde{q}(Y, Z) := Z^{m_0} q(Y/Z) = \sum_{0 \le k \le m_0} q_k Y^k Z^{m_0 - k}.$$

注意， $\widetilde{q}(Y,Z)$ 是 $\mathbb{R}[Y,Z]$中的平方和， $\widetilde{q}$在 $\mathbb{R}^2$ 中非负，且仅在原点处取零。

Let

$$\mathbf{C} := \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid \widetilde{q}(y,z) = 1, z \geq 0\}$$

and

$$\widetilde{S} := \{(\bar{x},y,z) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \ \widetilde{g}_1(\bar{x},y,z) \geq 0, \ldots, \widetilde{g}_s(\bar{x},y,z) \geq 0, \, (y,z) \in \mathbf{C}\}.$$

对于 $\theta \in [0,\pi]$ 和 $\rho \in \mathbb{R}$，我们有

$$\widetilde{q}(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \rho^{m_0}\widetilde{q}(\cos(\theta),\sin(\theta)).$$

因此，对于任意这样的 θ，存在唯一的 $\rho(\theta) \in [0,+\infty)$，使得 $(\rho(\theta)\cos(\theta) \ \rho(\theta)\sin(\theta)) \in \mathbf{C}$，即

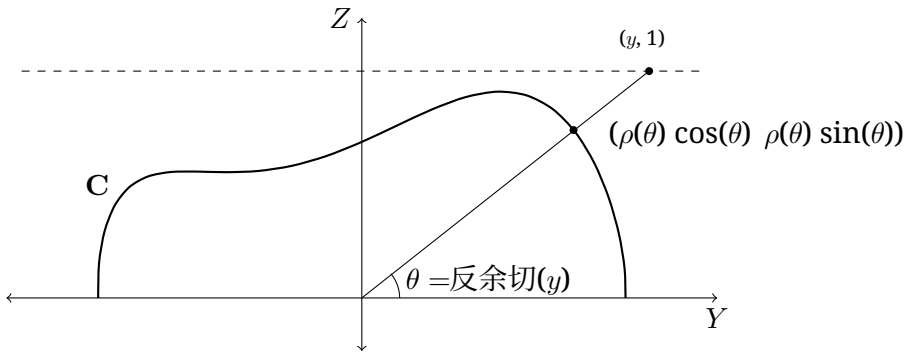
$$\rho(\theta) = \widetilde{q}(\cos(\theta),\sin(\theta))^{-1/m_0}$$

并且满足 $\rho(\theta) > 0$。由于函数 $\rho\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ 是连续的，

$$\mathbf{C} = \{(\rho(\theta)\cos(\theta), \rho(\theta)\sin(\theta)) \mid \theta \in [0,\pi]\}$$

$\widetilde{\ }$是一个紧集。此外，集合 $S \cap \{z \neq 0\}$ 与 S一一对应。这个双射由下式给出

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{S} \cap \{z \neq 0\} & & S \\ (\bar{x},y,z) & \mapsto & (\bar{x}, y/z) \\ \left(\bar{x}, \rho(\operatorname{arccot}(y))\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}, \rho(\operatorname{arccot}(y))\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\right) & & (\bar{x},y) \end{array}$$



这意味着

$$\widetilde{S} \cap \{z \neq 0\} \subset \mathbf{B} \times \mathbf{C}.$$

另一方面，假设 2 意味着

$$\widetilde{S} \cap \{z = 0\} = (S_\infty \times \{(-\rho(\pi),0)\}) \cup (S_\infty \times \{(\rho(0),0)\}) \subset \mathbf{B} \times \mathbf{C}.$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$我们得出结论： $S \subset \mathbf{B} \times \mathbf{C}$，因此 S 是紧致的。

类似地，对于一个多项式

$$f(\bar{X},Y) = \sum_{0 \leq k \leq m} f_k(\bar{X})Y^k \in \mathbb{R}[\bar{X},Y]$$

满足 $f_m(X) \neq 0$，我们记作

$$\widetilde{f}(\bar{X}, Y, Z) := Z^m f(\bar{X}, Y/Z) = \sum_{0 \leq k \leq m} f_k(\bar{X}) Y^k Z^{m-k} \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y, Z]$$

关于变量 Y 的齐次化。

容易看出，当且仅当 f 在 $S \cap \{z \neq 0\}$ 上为正时，f 在 S 上为正。我们对多项式 f 作出以下假设（参见 [13, 定理 4.2], [9, 定义 3], [3, 定义3]）。

假设 3

1. $m = \deg_Y(f)$ 为偶数。
2. $f_m(\bar{x}) > 0$ 在 S_∞ 上。

在假设 2 和 3 下，我们有 $f > 0$ 在 $S \cap \{z = 0\}$ 上。

现在我们可以陈述主要结果，并使用上文引入的记号 e.

定理 1 设 $g := g_1, \ldots, g_s$ 和 f 是 $\mathbb{R}[X, Y]$ 中的多项式，满足 $f > 0$ 在 S 上成立，且假设 1、2 和 3 均成立。设 $q \in \mathbb{R}[Y]$ 是一个在 $\mathbb{R}$ 上为正的非恒定多项式。则存在 $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得 $q^M f \in M(g)$。

注意，由于 $q \in \mathbb{R}[Y]$ 是平方和，必要时在等式两边乘以 q 后，我们可以假设 M 是偶数。如果 $q^M f = \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_s g_s$ 满足 $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}, Y]^2$，那么恒等式

$$f = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_s g_s}{q^M}$$

是 S 上 f 非负性的一个有理证书。对于每个 $y \in \mathbb{R}$，可以对该恒等式进行求值，从而将 $f(X, y)$ 表示为由 $g_1(X, y), \ldots, g_s(X, y)$ 在 $\mathbb{R}[X]$ 中生成的二次模的显式元素，由此以参数化方式获得关于 S 被方程 $Y = y$ 切出的切片上的非负性证书。

下面的例子（[3, 例 8]）表明，假设 3 中的第二个条件对于结果成立是必要的。

例 2 令 $n = 1$ 考虑 $g_1 = (1 - X^2)^3 \in \mathbb{R}[X, Y]$。那么 $S = [-1, 1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ 且

$$\frac{4}{3} - X^2 = \frac{4}{3} X^2 \Big(X^2 - \frac{3}{2} \Big)^2 + \frac{4}{3} \Big(1 - X^2 \Big)^3 \in M(g_1)$$

（另见 [7, 定理 7.1.2]）。取 $f(X, Y) = (1 - X^2)Y^2 + 1 \in \mathbb{R}[X, Y]$。显然 $f > 0$，但 $f_2 = 1 - X^2$ 并非在 $S_\infty = [-1, 1]$ 上为正。

对于任意在 $\mathbb{R}$ 上为正的 $q(Y) \in \mathbb{R}[Y]$，若我们有一个恒等式

$$q(Y)^M ((1 - X^2)Y^2 + 1) = \sum_j \Big(\sum_i p_{ji}(X) Y^i \Big)^2 + \sum_j \Big(\sum_i q_{ji}(X) Y^i \Big)^2 \big(1 - X^2\big)^3,$$

右侧的每一项在 Y 中的次数都不超过 $2m' = m_0 M + 2$（其中 $m_0 = \deg(q)$），再考察 Y 中次数为 $2m'$ 的项，可得

$$q_{m_0}^M (1 - X^2) = \sum_j p_{jm'}(X)^2 + \sum_j q_{jm'}(X)^2 \big(1 - X^2\big)^3.$$

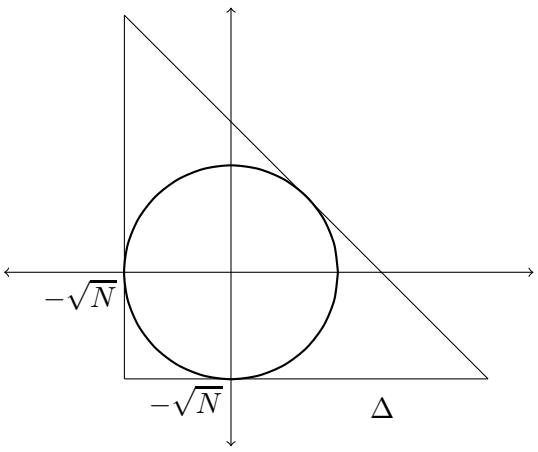
这意味着 $1 - X^2$ 属于由 $(1 - X^2)^3$ 在 $\mathbb{R}[X]$ 中生成的二次模，但这是错误的，因为这正是来自 [23, Example] 的著名例子。

3 主要结果的证明

如引言中所述，证明定理 1 的主要思路是以参数化的方式，为每个 $y \in \mathbb{R}$ 构造一个证书，该证书位于由方程 $Y = y$截出的 S 切片上。为此，我们改编了 [21] 和 [8] 中的技术，并使用 [11]。我们沿用上一节的记号。

令 $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ 为包含 B 的如下单纯形：

$$\Delta = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_j \geq -\sqrt{N} \text{ for } j = 1, \ldots, n, \sum_{1 \leq j \leq n} x_j \leq \sqrt{nN}\}. \tag{1}$$



由于 C 是紧致的且 $0 \notin \mathbf{C}$，因此存在正数 ρ_1、$\rho_2 \in \mathbb{R}$，分别为 $\|(y,z)\|$ 在满足 $(y,z) \in \mathbf{C}$ 的条件下的最小值和最大值。考虑到这一点，可以用类似于 [8, 引理 11] 的方法证明以下引理。

引理 2 令 $f \in \mathbb{R}[X,Y]$。存在常数 $K > 0$，使得对于每个 $\xi_1, \xi_2 \in \Delta \times \mathbf{C}$，

$$|\widetilde{f}(\xi_1) - \widetilde{f}(\xi_2)| \leq K \|\xi_1 - \xi_2\|.$$

此外，常数 K 可以根据 n、X 和 Y 中的次数 f，以及 f、N 和 ρ_2 的系数大小计算得出。

如上一节所述，若 f 在 S 上为正，且满足假设 1、2 和 3，则 f 在

$$\widetilde{S} \subset \mathbf{B} \times \mathbf{C} \subset \Delta \times \mathbf{C}.$$

我们记

$$f^\bullet := \min\{\widetilde{f}(\bar{x}, y, z) \mid (\bar{x}, y, z) \in \widetilde{S}\} > 0.$$

我们的首要目标是构造一个辅助多项式 $h \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$，使得

- $h(\bar{x}, y, z)$ 在 $\Delta \times \mathbf{C}$ 上为正，
- $h(\bar{x}, y, 1) = q(y)^M f(\bar{x}, y) - p(\bar{x}, y)$，其中 $p \in M(\mathbf{G})$ 是一个多项式。

令 r 为 $m = \deg_Y(f)$ 除以 $m_0 = \deg(q) > 0$ 所得的余数，并且，对于 $i = 1, \ldots, s$，令 $e_i \in \mathbb{Z}$ 为使 m_0 整除 $m_i + e_i$的最小非负数。因此，$r, e_1, \ldots, e_s$ 均为偶数，且 $0 \leq r, e_1, \ldots, e_s \leq m_0 - 2$。

命题 3 在沿用前述记号和假设的情况下，存在 $\lambda, \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}_{>0}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 以及 $M, M_1, \ldots, M_s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得多项式

$$h(\bar{X}, Y, Z) \;=\; \widetilde{q}(Y,Z)^M \, \widetilde{f}(\bar{X}, Y, Z) \; -$$

$$-\lambda (Y^2+Z^2)^{\frac{r}{2}} \sum_{1 \leq i \leq s} \alpha_i (Y^2+Z^2)^{\frac{e_i}{2}} \widetilde{g}_i(\bar{X}, Y, Z) (\alpha_i (Y^2+Z^2)^{\frac{e_i}{2}} \widetilde{g}_i(\bar{X}, Y, Z) - \widetilde{q}(Y,Z)^{\frac{m_i+e_i}{m_0}})^{2k} \widetilde{q}(Y,Z)^{M_i},$$

关于 (Y, Z) 是次数为 $\max\{m$ 的齐次多项式；$r + (2k+1)(m_i + e_i) \;\; i = 1, \ldots, s\}$，且满足

$$h(\bar{x}, y, z) > \frac{f^\bullet}{2}$$

对所有 $(\bar{x}, y, z) \in \Delta \times \mathbf{C}$。

注意，对于 $i = 1, \ldots, s$，Y, Z 中的次数为

$$(Y^2+Z^2)^{\frac{r+e_i}{2}} \widetilde{g}_i(\bar{X}, Y, Z) (\alpha_i (Y^2+Z^2)^{\frac{e_i}{2}} \widetilde{g}_i(\bar{X}, Y, Z) - \widetilde{q}(Y,Z)^{\frac{m_i+e_i}{m_0}})^{2k}$$

在除以 m_0 时的余数为 r。这保证了在固定 k 后，存在唯一的 $M, M_1, \ldots, M_s$，使得关于 (Y, Z) 的次数和齐次性条件得以满足。

命题 3 的证明：由于 $\Delta \times \mathbf{C}$ 是紧致的，对于 $i = 1, \ldots, s$，我们定义

$$\beta_i = \sup_{\Delta \times \mathbf{C}} \left| (y^2+z^2)^{\frac{e_i}{2}} \widetilde{g}_i(\bar{x}, y, z) \right|, \qquad \alpha_i = \frac{1}{\beta_i + 1}$$

and

$$G_i(\bar{X}, Y, Z) = \alpha_i (Y^2+Z^2)^{\frac{e_i}{2}} \widetilde{g}_i(\bar{X}, Y, Z).$$

那么，对于 $i = 1, \ldots, s$，我们有

$$\sup_{\Delta \times \mathbf{C}} \left| G_i(\bar{x}, y, z) \right| < 1.$$

命题陈述中的多项式 h 可以改写为

$$h(\bar{X}, Y, Z) \;=\; \widetilde{q}(Y,Z)^M \, \widetilde{f}(\bar{X}, Y, Z) \; -$$

$$-\lambda (Y^2+Z^2)^{\frac{r}{2}} \sum_{1 \leq i \leq s} G_i(\bar{X}, Y, Z) (G_i(\bar{X}, Y, Z) - \widetilde{q}(Y,Z)^{\frac{m_i+e_i}{m_0}})^{2k} \widetilde{q}(Y,Z)^{M_i}.$$

对于每个 $(\bar{x}, y, z) \in \Delta \times \mathbf{C}$，都有 $\widetilde{q}(y, z) = 1$；于是，

$$h(\bar{x}, y, z) = \widetilde{f}(\bar{x}, y, z) - \lambda (y^2+z^2)^{\frac{r}{2}} \sum_{1 \leq i \leq s} G_i(\bar{x}, y, z) \left(G_i(\bar{x}, y, z) - 1 \right)^{2k}.$$

对于 $i = 1, \ldots, s$，如果 $G_i(\bar{x}, y, z) \geq 0$，那么 $0 \leq G_i(\bar{x}, y, z) < 1$。现在不难看出，对于每个 $t \in [0, 1]$，不等式 $t(t-1)^{2k} < \dfrac{1}{2ek}$ 成立；因此，

$$G_i(\bar{x}, y, z) (G_i(\bar{x}, y, z) - 1)^{2k} < \frac{1}{2ek}. \tag{2}$$

考虑集合

$$A = \left\{ (\bar{x}, y, z) \in \Delta \times \mathbf{C} \;\mid\; \widetilde{f}(\bar{x}, y, z) \leq \frac{3}{4} f^\bullet \right\}.$$

注意到 $A \cap S = \emptyset$，因为对每个 $(\bar{x}, y, z) \in S$，都有 $f(\bar{x}, y, z) \geq f^\bullet$。

对于 $(\bar{x}, y, z) \in (\Delta \times \mathbf{C}) - A$，

$$h(\bar{x}, y, z) \geq \widetilde{f}(\bar{x}, y, z) - \lambda \rho_2^r \sum_{\substack{1 \leq i \leq s, \\ G_i(\bar{x}, y, z) \geq 0}} G_i(\bar{x}, y, z) \left(G_i(\bar{x}, y, z) - 1\right)^{2k}$$

并且，由此可得，

$$h(\bar{x}, y, z) > \frac{3}{4} f^\bullet - \frac{\lambda \rho_2^r s}{2ek}.$$

因此，若取 $k \geq \dfrac{2\lambda \rho_2^r s}{e f^\bullet}$，则有

$$h(\bar{x}, y, z) > \frac{f^\bullet}{2}.$$

对于 $\xi = (\bar{x}, y, z) \in \Delta \times \mathbf{C}$，定义 $H(\xi) = \operatorname{dist}(\xi, S)$ 和 $F(\xi) = -\min\{0, G_1(\xi) \ldots, G_s(\xi)\}$。注意

$$F^{-1}(0) = \{\bar{\xi} \in \Delta \times \mathbf{C} \mid G_1(\bar{\xi}) \geq 0, \ldots, G_s(\bar{\xi}) \geq 0\} =$$
$$= \{\bar{\xi} \in \Delta \times \mathbf{C} \mid \widetilde{g}_1(\bar{\xi}) \geq 0, \ldots, \widetilde{g}_s(\bar{\xi}) \geq 0\} = \widetilde{S} = H^{-1}(0).$$

根据 Łojasiewicz 不等式（见 [2, 推论 2.6.7]），存在正常数 L和 c，使得对所有 $\xi \in \Delta \times \mathbf{C}$，

$$\operatorname{dist}(\bar{\xi}, \widetilde{S})^L \leq c\, F(\bar{\xi}).$$

由于 $A \cap S = \emptyset$，对于 $\xi \in A$, $F(\xi) > 0$。令 i_0，其中 $1 \leq i_0 \leq s$，使得 $F(\xi) = -G_{i_0}(\xi)$；那么，

$$G_{i_0}(\bar{\xi}) \leq -\frac{1}{c} \operatorname{dist}(\bar{\xi}, \widetilde{S})^L.$$

设 $\xi_0 \in S$为使 ξ到 S的距离达到最小的点，即 $\operatorname{dist}(\xi, S) = \|\xi - \xi_0\|$。由于 $\frac{f^\bullet}{4} \leq \widetilde{f}(\bar{\xi}_0) - \widetilde{f}(\bar{\xi}) \leq K\|\bar{\xi}_0 - \bar{\xi}\|$，其中 K是引理 2 中的正常数，我们推得

$$\operatorname{dist}(\bar{\xi}, \widetilde{S}) = \|\bar{\xi}_0 - \bar{\xi}\| \geq \frac{f^\bullet}{4K}$$

因此，

$$G_{i_0}(\bar{\xi}) \leq -\frac{1}{c} \left(\frac{f^\bullet}{4K}\right)^L.$$

结合不等式 (2)，可得

$$h(\bar{\xi}) \geq \widetilde{f}(\bar{\xi}) + \frac{\lambda \rho_1^r}{c} \left(\frac{f^\bullet}{4K}\right)^L - \frac{\lambda \rho_2^r (s-1)}{2ek}$$
$$= \left(\widetilde{f}(\bar{\xi}) - f^\bullet + \frac{\lambda \rho_1^r}{c} \left(\frac{f^\bullet}{4K}\right)^L\right) + \left(f^\bullet - \frac{\lambda \rho_2^r (s-1)}{2ek}\right)$$

设 $\xi^\bullet \in S$为使 f在 S上的最小值 $f^\bullet$达到的点，即 $f(\xi^\bullet) = f^\bullet$。由引理 2，得

$$|\widetilde{f}(\bar{\xi}) - f^\bullet| = |\widetilde{f}(\bar{\xi}) - \widetilde{f}(\bar{\xi}^\bullet)| \leq K\|\bar{\xi} - \bar{\xi}^\bullet\|$$

因此，如果 $D := \operatorname{diam}(\Delta \times \mathbf{C})$，

$$|\widetilde{f}(\bar{\xi}) - f^\bullet| \leq KD.$$

因此，对于 $\lambda \geq KD\frac{c}{\rho_1^r}\left(\frac{4K}{f^\bullet}\right)^L$，我们有

$$\widetilde{f}(\bar{\xi}) - f^\bullet + \frac{\lambda\rho_1^r}{c}\left(\frac{f^\bullet}{4K}\right)^L \geq 0. \tag{3}$$

另一方面，对于 $k \geq \frac{2\lambda\rho_2^r s}{ef^\bullet}$，不等式

$$\frac{\lambda\rho_2^r(s-1)}{2ek} \leq \frac{f^\bullet}{4}\,\frac{(s-1)}{s} < \frac{f^\bullet}{4}$$

成立，因此，

$$f^\bullet - \frac{\lambda\rho_2^r(s-1)}{2ek} > \frac{3}{4}f^\bullet. \tag{4}$$

由 (3) 和 (4)，我们得出

$$h(\bar{\xi}) > \frac{3}{4}f^\bullet.$$

综上，对于 $\lambda \geq KD\frac{c}{\rho_1^r}\left(\frac{4K}{f^\bullet}\right)^L$ 和 $k \geq \frac{2\lambda\rho_2^r s}{ef^\bullet}$，我们有：对于每个 $(\bar{x}, y, z) \in \Delta \times \mathsf{C}$，$h(\bar{x}, y, z) > \frac{f^\bullet}{2}$。 □

注 4 由命题 3 的证明可知，一旦多项式 g_1、…、g_s 和 q 固定，对于每个在 S 上为正且满足假设 1、2 和 3 的 f，都可以仿照 *[8]* 或 *[3]*，计算出关于 $\deg(f)$、f 和 $f^\bullet$ 的系数大小的 M 的显式界。

为了证明我们的主要结果，我们将对单纯形应用以下波利亚定理的有效版本（见 [11, 定理 3]）。

¯引理 5 设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一个具有顶点 $v_0, \ldots, v_n$ 的 n 维单纯形，并设 $\ell = \{\ell_0, \ldots, \ell_n\}$ 是 P 上的重心坐标集，即对于 $i = 0, \ldots, n$，$\ell_i \in \mathbb{R}[X]$ 是线性（仿射）的，

$$\bar{X} = \sum_{0\leq i\leq n} \ell_i(\bar{X})v_i, \quad 1 = \sum_{0\leq i\leq n} \ell_i(\bar{X}), \quad \textit{and} \quad \ell_i(v_j) = \delta_{ij} \textit{ for } 0 \leq i, j \leq n.$$

¯设 $h \in \mathbb{R}[X]$ 是一个在 P 上严格为正的多项式。则对于 $\kappa \gg 0$，h 可表示为如下形式

$$h = \sum_{|\beta|\leq\kappa} b_\beta\, \bar{\ell}^\beta \qquad \textit{with} \quad b_\beta > 0.$$

此外，对于每个 β，$b_\beta \in \mathbb{R}$ 是 h 的系数的线性组合，并且可以根据 h 的次数、h 的系数大小、h 在 P 上的最小值以及顶点 $v_0, \ldots, v_n$ 给出 κ 的一个显式界。

引理 6 对于 $N \in \mathbb{R}_{>0}$，令 $\ell_0(\bar{X}) := \sqrt{nN} - \sum_{1\leq j\leq n} X_j$，并且对于 $i = 1, \ldots, n$，令 $\ell_i(\bar{X}) := X_i + \sqrt{N}$。那么，对于 $i = 0, \ldots, n$，我们有 $\ell_i \in M(N - \|\bar{X}\|^2)$，其中 $\|\bar{X}\|^2 = \sum_{1\leq j\leq n} X_j^2$。

证明：通过直接计算，我们得到

$$\sqrt{nN}-\sum_{1\le j\le n}X_j=\frac{1}{2\sqrt{nN}}\Big((\sqrt{nN}-\sum_{1\le j\le n}X_j)^2+\sum_{1\le j<j'\le n}(X_j-X_{j'})^2\Big)+\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{N}}(N-\sum_{1\le j\le n}X_j^2).$$

此外，对于 $i=1,\dots,n$:

$$X_i+\sqrt{N}=\frac{1}{2\sqrt{N}}\Big((X_i+\sqrt{N})^2+\sum_{j\neq i}X_j^2\Big)+\frac{1}{2\sqrt{N}}\Big(N-\sum_{1\le j\le n}X_j^2\Big).$$

这表明 $\ell_0,\ell_1,\dots,\ell_n\in M(N-\|\bar{X}\|^2)$。 □

现在我们可以证明本文的主要结果。

定理 1 的证明：我们继续使用前面引入的记号。

设 $h\in\mathbb{R}[X,Y,Z]$ 与命题 3 中的相同。我们将对多项式 $h_{(y,z)}(X):=h(X,y,z)$ 应用引理 5 中陈述的 Pólya 定理，其中 $(y,z)\in\mathsf{C}$，且单纯形 Δ 如式 (1) 所定义。

Δ 的顶点为

$$\begin{aligned}v_0&:=(-\sqrt{N},\dots,-\sqrt{N}),\\ v_i&:=v_0+(0,\dots,\underbrace{(n+\sqrt{n})\sqrt{N}}_{i-\text{th coord.}},\dots,0)\quad\text{for } i=1,\dots,n,\end{aligned}$$

其重心坐标为

$$\begin{aligned}\ell_0(\bar{X})&:=\frac{1}{(n+\sqrt{n})\sqrt{N}}(\sqrt{nN}-\sum_{1\le j\le n}X_j),\\ \ell_i(\bar{X})&:=\frac{1}{(n+\sqrt{n})\sqrt{N}}(X_i+\sqrt{N})\quad\text{for } i=1,\dots,n.\end{aligned}$$

对于每个固定的 $(y,z)\in\mathsf{C}$，多项式 $h_{(y,z)}(X)$ 满足

$$h_{(y,z)}(\bar{x})>\frac{f^\bullet}{2}>0\quad\text{for every }\bar{x}\in\Delta.$$

由于 $h_{(y,z)}$ 的系数作为 X 的多项式时，其大小以及它们在 Δ 上的最小值对于 $(y,z)\in\mathsf{C}$ 都是一致有界的，根据引理 5，存在 $\kappa\gg 0$ 使得

$$h(\bar{X},Y,Z)=\sum_{|\beta|\le\kappa}b_\beta(Y,Z)\bar{\ell}(\bar{X})^\beta$$

其中 $b_\beta\in\mathbb{R}[Y,Z]$，并且对于每个 $(y,z)\in\mathsf{C}$，$b_\beta(y,z)>0$。此外，对于每个 β，由于 h 关于 (Y,Z) 是齐次的，且 b_β 是 h 的系数的线性组合（将其视为 X 的一个多项式），因此 b_β 是一个齐次多项式。这意味着对于每个 $(y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\ge 0}\setminus\{0\}$，$b_\beta(y,z)>0$；特别地，对于每个 $y\in\mathbb{R}$，$b_\beta(y,1)>0$，因此 $b_\beta(Y,1)$ 是 $\mathbb{R}[Y]$ 中的平方和。

最后，由等式

$$h(\bar{X},Y,1)=q(Y)^M f(\bar{X},Y)-$$

$$-\lambda\sum_{1\le i\le s}\alpha_i(Y^2+1)^{\frac{r+e_i}{2}}g_i(\bar{X},Y)(\alpha_i(Y^2+1)^{\frac{e_i}{2}}g_i(\bar{X},Y)-q(Y)^{\frac{m_i+e_i}{m_0}})^{2k}q(Y)^{M_i}$$

我们有：

$$q(Y)^M f(\bar{X},Y) = \lambda \sum_{1\le i\le s} \alpha_i (Y^2+1)^{\frac{r+e_i}{2}} (\alpha_i (Y^2+1)^{\frac{e_i}{2}} g_i(\bar{X},Y) - q(Y)^{\frac{m_i+e_i}{m_0}})^{2k} q(Y)^{M_i} g_i(\bar{X},Y)$$

$$+ \sum_{|\beta|\le\kappa} b_\beta(Y,1)\bar{\ell}(\bar{X})^\beta.$$

显然，对于 $i = 1, \ldots, s$,

$$\alpha_i (Y^2+1)^{\frac{r+e_i}{2}} (\alpha_i (Y^2+1)^{\frac{e_i}{2}} g_i(\bar{X},Y) - q(Y)^{\frac{m_i+e_i}{m_0}})^{2k} q(Y)^{M_i} g_i(\bar{X},Y) \in M(\mathbf{g}).$$

另一方面，由引理 6,

$$\ell_0(\bar{X}), \ldots, \ell_n(\bar{X}) \in M(N - \|\bar{X}\|^2)$$

并且，考虑到 $M(N - \|\bar{X}\|^2)$ 在乘法下封闭（因为它由单个多项式生成），所有乘积 $\bar{\ell}(\bar{X})^\beta = \ell_0(\bar{X})^{\beta_0} \cdots \ell_n(\bar{X})^{\beta_n}$ 也具有相同性质。根据假设 $N - \|\bar{X}\|^2 \in M(\mathbf{g})$，我们推得，对于每个 $\beta \text{with} |\beta| \le \kappa$，都有 $b_\beta(Y,1)\bar{\ell}(\bar{X})^\beta \in M(\mathbf{g})$。由此可得 $q(Y)^M f(\bar{X},Y) \in M(\mathbf{g})$。□

注 7 定理 1 中 M 的取值与命题 3 中相同，因此可以如注 4 所述进行界定。

参考文献

[1] E. Artin，《关于将正定函数分解为平方和》。汉堡数学研讨班论文集 5 (1927)，第 1 期，100–115 页。[2] J. Bochnak、M. Coste、M.-F. Roy，《实代数几何》。数学及其边界领域成果 36，施普林格，柏林，1998。[3] P. Escorcielo、D. Perrucci，《适用于圆柱体的 Putinar 正定性定理的一个版本》。《纯粹与应用代数杂志》224 (2020)，第 12 期，106448。[4] J.-L. Krivine，《预序环》。数学分析杂志 12 (1964)，307–326 页。[5] S. Kuhlmann、M. Marshall，《正性、平方和与多维矩问题》。美国数学会会刊 354 (2002)，第 11 期，4285–4301 页。[6]S. Kuhlmann、M. Marshall、N. Schwartz，《正性、平方和与多维矩问题 II》。几何进展 5 (2005)，第 4 期，583–606 页。[7] M. Marshall，《正多项式与平方和》。数学调查与专著，146。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008。[8] J. Nie、M. Schweighofer，《关于 Putinar 正定性定理的复杂性》。《复杂性杂志》23 (2007)，第 1 期，135–150 页。[9] V. Powers，《关于紧截面的圆柱体上的正多项式与矩问题》。《纯粹与应用代数杂志》188 (2004)，第 1–3 期，217–226 页。[10] V. Powers，《实多项式的正性证书——理论、实践与应用》。数学进展，69。施普林格，沙姆，2021。

[11] V. Powers、B. Reznick，《Pólya 定理的新界及其在多面体上的正多项式中的应用》。《纯粹与应用代数杂志》164 (2001)，第 1–2 期，221–229 页。[12] M. Putinar，《紧半代数集上的正多项式》。《印第安纳大学数学杂志》42 (1993)，第 3 期，969–984 页。[13] M. Putinar、F.-H. Vasilescu，《通过维数扩张求解矩问题》。《数学年刊》(2) 149 (1999)，第 3 期，1087–1107 页。[14] M. Putinar、F.-H. Vasilescu，《半代数集上的正多项式》。巴黎科学院报告，数学辑 I，328 (1999)，第 7 期，585–589 页。[15] B. Reznick，《希尔伯特第十七问题中的统一分母》。《数学杂志》220 (1995)，第 1 期，75–97 页。[16] C. Sheiderer，《正性与平方和：近期成果指南》。代数几何的新兴应用，271–324 页，IMA 数学及其应用丛书，149，施普林格，纽约，2009。[17] K. Schmüdgen，《紧半代数集上的 K-矩问题》。《数学年刊》289 (1991)，第 2 期，203–206 页。[18] K. Schmüdgen，《关于闭半代数集的矩问题》。《纯粹与应用数学杂志》558 (2003)，225–234 页。[19] K. Schmüdgen，《矩问题的一般纤维定理及其若干应用》。《以色列数学杂志》218 (2017)，第 1 期，43–66 页。[20] K. Schmüdgen，《矩问题》。数学研究生教材，277。施普林格，沙姆，2017。[21] M. Schweighofer，《关于 Schmüdgen 正定理的复杂性》。《复杂性杂志》20 (2004)，第 4 期，529–543 页。[22] G. Stengle，《半代数几何中的一个零点定理和一个正定理》。《数学年刊》207 (1974)，87–97 页。[23] G. Stengle，《Schmüdgen 正定理的复杂度估计》。《复杂性杂志》12 (1996)，第 2 期，167–174 页。