紧支撑 OEP 型平衡对偶多框架小波的结构刻画

RAN LU

Abstract. 与标量框架小波相比，多框架小波具有一些优势，例如生成元的支撑相对较小、消失矩较高等。多框架小波的平衡性质备受关注，因为它反映了如何利用相应的离散多框架小波变换高效处理向量值数据。现有关于平衡多框架小波的研究大多从函数的角度出发，而从多框架小波滤波器组角度进行研究的方法则寥寥无几。本文从斜向扩展原理（OEP）的角度研究平衡对偶多框架小波的结构刻画。OEP 将框架小波与滤波器组自然地联系起来，是分析框架小波性质的得力工具。借助 OEP，我们将通过平衡矩校正滤波器这一概念刻画紧支撑平衡对偶多框架小波；这一概念也是本文研究的核心。本文的结果揭示了最一般情形下平衡对偶多框架小波所具有的基本结构，并使我们能够更全面地理解平衡多框架小波及其背后的离散多框架小波变换。

arXiv:2305.01641v1 [math.FA] 3 Apr 2023

1. 引言

多小波和多框架小波在图像处理和数值算法等应用中颇受关注。与标量小波和框架小波相比，多小波和多框架小波的生成元支撑相对较小，且具有较高的消失矩。关于多小波和多框架小波的文献，读者可参阅 [7–9, 11, 15–18, 21–23, 31, 33, 37, 38] 以及其中的诸多参考文献。多小波和多框架小波通常由可细化向量函数通过扩张原理导出。最常用的是酉扩张原理（UEP）（[34]）及其推广——斜向扩展原理（OEP）（[11, 22, 23]）。借助扩张原理，可以在函数框架或离散滤波器组框架下刻画小波和框架小波。然而，对于多小波和多框架小波，上述两种框架下的逼近性质存在一定差异；文献中将这一问题称为平衡性质。本文将在最一般的框架下，全面研究平衡多框架小波的结构刻画。

近年来，研究多维框架小波和多框架小波的兴趣日益浓厚，并取得了若干相关进展。例如，文献 [13]研究了通过单变量扩展原理从标量可细化函数导出的、具有高阶消失矩或方向性的拟紧框架小波；文献 [20]给出了构造对称菱形紧框架小波的方法；文献 [22]研究了具有高平衡阶数的多元拟紧多框架小波；文献 [29]研究了多元对称插值多框架小波。多框架小波通过在系统中增加冗余对多小波进行了推广，这为其构造提供了更大的灵活性。为了通过离散多小波/多框架小波变换（DmWT/DmFT）高效处理向量值数据，希望多小波/多框架小波具有平衡性质。关于多小波平衡性质的全面研究动机和背景，详见文献 [8, 9, 25, 31, 36, 37, 39] 及其中引用的大量参考文献。尽管多小波的平衡性质已得到广泛研究，

2010年数学主题分类：42C40、42C15、41A15、65D07。关键词和短语：多框架小波、斜向扩展原理、可细化向量函数、消失矩、平衡性质、紧框架小波变换。作者的研究得到国家自然科学基金项目12201178和12271140的资助。

相关理论在文献中对多框架小波的研究仍远未成熟。目前我们仅了解到以下关于多框架小波平衡性质的研究：文献 [17] 研究了单变量平衡对偶多框架小波，并为其构造提供了初步指导；文献 [18] 探讨了多变量平衡对偶多框架小波的结构性质；文献 [21, 22] 分别研究了单变量和多变量平衡拟紧多框架小波的存在性及性质。此外，关于多小波平衡性质的研究，大多采用函数视角；然而，从离散滤波器组的角度研究平衡性质似乎更为自然（例如见文献 [17, 18, 21, 22]），因为平衡性质直接反映了离散多框架小波变换的效率和逼近性质。本文将采用滤波器组方法，给出任意维数下多框架小波平衡性质的简单结构刻画。我们的研究基于广泛使用的斜向扩展原理（OEP）。该原理揭示了多框架小波系统与相应多框架小波滤波器组之间的内在联系，并为构造具有高阶消失矩和高平衡阶数的多框架小波提供了优雅的指导。

本文结构安排如下：第 2 节介绍后续研究所需的一些预备知识，包括：对偶框架小波的简要回顾；离散多框架小波变换的平衡性质；近期提出的一种矩阵值滤波器标准形的若干基础理论，该标准形极大地便利了我们对多框架小波的研究。第 3 节给出我们的第一个主要结果——定理 3.1，该定理指出，平衡对偶多框架小波总能通过 OEP 由一对紧支撑可细化向量函数构造出来。接下来，我们将介绍平衡矩校正滤波器的概念（见定义 3.2），以刻画具有较高平衡阶数的基于斜扩张原理的对偶多框架小波的结构。本节还将陈述并证明本文的主要结果定理 3.5。第 4 节将给出一个平衡矩修正滤波器示例，以说明我们的主要结果。

2. Preliminaries

为更好地阐明我们的研究动机，并为后续研究做好准备，本节将介绍有关对偶框架小波和 OEP 的所有必要背景知识。

2.1. 对偶框架小波的背景。首先，回顾一些基本概念。本文中，M 是一个 $d \times d$ 膨胀矩阵，即 $\mathsf{M} \in \mathbb{Z}^{d\times d}$，且其特征值的模均大于 1。为简单起见，令

$$d_{\mathsf{M}} := |\det(\mathsf{M})|.$$

记 $(L_2(\mathbb{R}^d))^{r\times s}$ 为由 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 中所有平方可积函数构成的 $r \times s$ 矩阵的线性空间。为简单起见，$(L_2(\mathbb{R}^d))^r := (L_2(\mathbb{R}^d))^{r\times 1}$。我们引入以下概念：

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}^{\mathsf{T}}\, dx, \qquad \forall f \in (L_2(\mathbb{R}^d))^{r\times s}, \quad g \in (L_2(\mathbb{R}^d))^{t\times s}.$$

设 $\mathring{\phi}, \tilde{\phi} \in (L_2(\mathbb{R}^d))^r$, $\psi, \tilde{\psi} \in (L_2(\mathbb{R}^d))^s$。如果存在正常数 C_1 和 C_2，使得 $\{\mathring{\phi}; \psi\}$ 是 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 中的一个 M-框架小波，则称其为 M-框架小波。

$$C_1\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\langle f, \mathring{\phi}(\cdot - k)\rangle|^2 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\langle f, \psi_{\mathsf{M}^j;k}\rangle|^2 \leqslant C_2\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^d),$$

其中 $\psi_{\mathsf{M}^j;k} := d^{j/2}_{\mathsf{M}}\ \psi(\mathsf{M}^j \cdot -k)$，且 $|\langle f, \psi_{\mathsf{M}^j;k}\rangle|^2 := \|\langle f, \psi_{\mathsf{M}^j;k}\rangle\|^2_{l_2}$。若 $(\{\mathring{\phi};\ \psi\}, \{\mathring{\tilde{\phi}};\ \tilde{\psi}\})$ 中 $\{\mathring{\phi};\ \psi\}$ 和 $\{\tilde{\phi};\ \tilde{\psi}\}$ 都是 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 中的 M-框架小波，且满足

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \mathring{\phi}(\cdot - k)\rangle \mathring{\tilde{\phi}}(\cdot - k) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \psi_{\mathsf{M}^j;k}\rangle \tilde{\psi}_{\mathsf{M}^j;k}, \qquad \forall f \in L_2(\mathbb{R}^d), \tag{2.1}$$

。且上述级数在 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 中无条件收敛。若重数 $r > 1$，则称 $(\{\mathring{\phi}; \psi\}, \{\tilde{\phi}; \tilde{\psi}\})$ 为对偶多重框架小波；若 $r = 1$，则称其为标量对偶框架小波。除非另有说明，本文所说的框架小波均指这两者。

。对 $\phi; \psi$)对偶框架小波 $(\{\phi; \psi\}, \{\tilde{\phi}; \tilde{\psi}\})$ 框架算子(2.1)的稀疏性与框架小波生成元 ψ 和 $\tilde{\psi}$上的消失矩密切相关。若 ψ 具有 m 个消失矩，则称其为

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathsf{p}(x)\psi(x)dx = 0, \qquad \forall \mathsf{p} \in \mathbb{P}_{m-1},$$

其中 $\mathbb{P}_{m-1}$ 是所有次数至多为 $m-1$的 d元多项式构成的空间。注意， ψ 具有 m个消失矩，当且仅当

$$\widehat{\psi}(\xi) = \mathcal{O}(\|\xi\|^m), \qquad \xi \to 0,$$

其中， $f(\xi) = g(\xi) + \mathcal{O}(\|\xi\|^m)$ 表示当 $\xi \to 0$时， $\partial^\mu f(0) = \partial^\mu g(0)$ 对所有满足 $|\mu| := \mu_1 + \cdots + \mu_d < m$的 $\mu \in \mathbb{N}^d_{0;m}$均成立。我们定义 $\mathrm{vm}(\psi) := m$，其中 m为满足条件的最大整数。逼近理论中一个众所周知的结论（例如参见 [19, 命题 5.5.2]）是，若 $\mathrm{vm}(\psi) = m$ 且 $\mathrm{vm}(\tilde{\psi}) = \tilde{m}$，则必有

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle \mathsf{p}, \mathring{\phi}(\cdot - k)\rangle \mathring{\tilde{\phi}}(\cdot - k) := \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle \mathsf{p}, \mathring{\phi}_\ell(\cdot - k)\rangle \mathring{\tilde{\phi}}_\ell(\cdot - k) = \mathsf{p}, \qquad \forall\, \mathsf{p} \in \mathbb{P}_{m-1}. \tag{2.2}$$

这在逼近理论和数值分析中，对于相关逼近／数值格式的收敛速率起着至关重要的作用。此外，我们有

$$\overline{\widehat{\mathring{\phi}}(\xi)}^{\mathsf{T}} \widehat{\mathring{\tilde{\phi}}}(\xi + 2\pi k) = \mathcal{O}(\|\xi\|^m), \qquad \overline{\widehat{\mathring{\phi}}(\xi + 2\pi k)}^{\mathsf{T}} \widehat{\mathring{\tilde{\phi}}}(\xi) = \mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}), \quad k \in \mathbb{Z}^d\backslash\{0\},$$

and

$$\overline{\widehat{\mathring{\phi}}(\xi)}^{\mathsf{T}} \widehat{\mathring{\tilde{\phi}}}(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}+m}),$$

如 $\xi \to 0$。

文献中提出了一种称为斜向扩展原理（OEP）的流行方法，它使我们能够从可细化向量函数 [1–3,6,8,12,14,20,27,28,30,35] 构造所有生成元都具有足够高消失矩的对偶框架小波。记 $(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times s}$ 为由所有 $r \times s$ 有限支撑的矩阵值序列 $u = \{u(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d} : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}^{r\times s}$ 构成的线性空间。任意元素 $u \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times s}$ 称为有限支撑（矩阵值）滤波器／掩模。对于 $\phi \in (L_2(\mathbb{R}^d))^r$，如果满足以下细化方程，我们称 ϕ 是一个 M 可细化向量函数，其细化滤波器／掩模为 $a \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$:

$$\phi(x) = d_{\mathsf{M}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a(k)\phi(\mathsf{M}x - k), \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.3}$$

如果 $r = 1$，那么我们就称 ϕ 是一个 M-可细化的（标量）函数。对于 $u \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times s}$，通过 $\widehat{u}(\xi)$ 定义其傅里叶级数: $= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} u(k)e^{-ik\cdot\xi}$ 对于 $\xi \in \mathbb{R}^d$。傅里叶变换通过$\widehat{f}(\xi)$ 定义: $= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$对于 $\xi \in \mathbb{R}^d$对所有 $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ 成立，并且可以自然地扩展到 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 函数和温和分布。细化方程（2.3）等价于

$$\widehat{\phi}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi) = \widehat{a}(\xi)\widehat{\phi}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{2.4}$$

$\widehat{\ }$其中， ϕ 是对 ϕ逐项进行傅里叶变换后得到的 $r \times 1$ 向量。大多数已知的框架小波都是通过 OEP 从可细化向量函数构造而来，我们称之为基于 OEP 的框架小波。文献中已有 OEP 的多个版本（见 [7,11,19,22]）。这里我们回顾适用于紧支撑多变量多框架小波的以下 OEP 版本:

定理 2.1（斜向扩展原理（OEP））。设 M 是一个 $d\times d$膨胀矩阵。设 $\theta,\theta,a,\tilde{a}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$ 和 $\phi,\tilde{\phi}\in(L_2(\mathbb{R}^d))^r$ 分别是具有细化滤波器 a 和 $\tilde{a}$的紧支撑 M 可细化向量函数。对于矩阵值滤波器 $b,\tilde{b}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}$，定义

$$\widehat{\mathring{\phi}}(\xi):=\widehat{\theta}(\xi)\widehat{\phi}(\xi),\quad \widehat{\psi}(\xi):=\widehat{\tilde{b}}(\mathsf{M}^{-\mathsf{T}}\xi)\widehat{\phi}(\mathsf{M}^{-\mathsf{T}}\xi),\tag{2.5}$$

$$\widehat{\tilde{\mathring{\phi}}}(\xi):=\widehat{\tilde{\theta}}(\xi)\widehat{\tilde{\phi}}(\xi),\quad \widehat{\tilde{\psi}}(\xi):=\widehat{\tilde{b}}(\mathsf{M}^{-\mathsf{T}}\xi)\widehat{\tilde{\phi}}(\mathsf{M}^{-\mathsf{T}}\xi).\tag{2.6}$$

则 $(\{\phi;\psi\},\{\tilde{\mathring{\phi}};\tilde{\psi}\})$ 在 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 中是一个对偶 M-框架小波，当满足以下条件时：

(1) $\overline{\widehat{\theta}}^{\mathsf{T}}\widehat{\theta}(\xi)\,\widehat{\theta}(\xi):=\widehat{\Theta}(\xi)$；(2) $\widehat{\psi}(0)=\widehat{\psi}(0)=0$；(3) $(\{a;\,b\},\{\tilde{a};b\})_\Theta$ 构成一个基于 OEP 的对偶 M-框架小波滤波器组，即，

$$\overline{\widehat{a}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\Theta}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\widehat{\tilde{a}}(\xi+2\pi\omega)+\overline{\widehat{b}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\tilde{b}}(\xi+2\pi\omega)=\boldsymbol{\delta}(\omega)\widehat{\Theta}(\xi),\tag{2.7}$$

对于所有 $\xi\in\mathbb{R}^d$ 和 $\omega\in\Omega_{\mathsf{M}}$，其中

$$\boldsymbol{\delta}(0):=1\quad and\quad \boldsymbol{\delta}(x):=0,\qquad \forall\, x\neq 0\tag{2.8}$$

且 Ω_{M} 是 $[\mathsf{M}^{-\mathsf{T}}\mathbb{Z}^d]/\mathbb{Z}^d$ 中陪集代表元的一种特定选取，定义为

$$\Omega_{\mathsf{M}}:=\{\omega_1,\dots,\omega_{d_{\mathsf{M}}}\}:=(\mathsf{M}^{-\mathsf{T}}\mathbb{Z}^d)\cap[0,1)^d\quad with\quad \omega_1:=0.\tag{2.9}$$

构造基于 OEP 的对偶框架小波的关键步骤，是求得滤波器 $\theta,\tilde{\theta}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$ 和$b,\tilde{b}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}$，使得 $(\{a;\,b\},\{\tilde{a};\,\tilde{b}\})_\Theta$是满足 (2.7) 的对偶框架小波滤波器组。对于任意 $u\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}$，定义

$$P_{u;\mathsf{M}}(\xi):=[\widehat{u}(\xi+2\pi\omega_1),\dots,\widehat{u}(\xi+2\pi\omega_{d_{\mathsf{M}}})],\qquad \xi\in\mathbb{R}^d,\tag{2.10}$$

它是一个 $s\times(rd_{\mathsf{M}})$ 矩阵，其元素为 $2\pi\mathbb{Z}^d$-周期的 d 元三角多项式。显然，(2.7) 等价于

$$\overline{P_{b;\mathsf{M}}(\xi)}^{\mathsf{T}}P_{\tilde{b};\mathsf{M}}(\xi)=\mathcal{M}_{a,\tilde{a},\Theta}(\xi),\tag{2.11}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{a,\tilde{a},\Theta}(\xi):=&\mathsf{Diag}\left(\widehat{\Theta}(\xi+2\pi\omega_1),\dots,\widehat{\Theta}(\xi+2\pi\omega_{d_{\mathsf{M}}})\right)\\&-\overline{P_{a;\mathsf{M}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\Theta}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)P_{\tilde{a};\mathsf{M}}(\xi).\end{aligned}\tag{2.12}$$

对于基于 OEP 的对偶 M-框架小波 $(\{\phi;\,\psi\},\{\tilde{\phi};\,\tilde{\psi}\})$，$\psi$和 $\tilde{\psi}$的消失矩阶数与滤波器 a 和 $\tilde{a}$ 的和规则密切相关，这些滤波器分别与 ϕ 和 $\tilde{\phi}$相关联。若滤波器$a\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$ 相对于 M 具有 m 阶和规则，且匹配滤波器为 $v\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{1\times r}$，则$\widehat{v}(0)\neq 0$ 并且

$$\widehat{v}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\widehat{a}(\xi+2\pi\omega)=\boldsymbol{\delta}(\omega)\widehat{v}(\xi)+\mathcal{O}(\|\xi\|^m),\quad \xi\to 0,\quad \forall\,\omega\in\Omega_{\mathsf{M}}.\tag{2.13}$$

特别地，我们定义

$$\mathrm{sr}(a,\mathsf{M}):=\sup\{m\in\mathbb{N}_0:(2.13)\text{ holds for some }v\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{1\times r}\}.$$

由（2.7）可轻易推出，无论如何选择 θ 和 θ，总有 $\mathrm{vm}(\psi)\le\mathrm{sr}(\tilde{a},\mathsf{M})$ 和 $\mathrm{vm}(\tilde{\psi})\le\mathrm{sr}(a,\mathsf{M})$。因此，我们关心能否构造滤波器 $\theta,\tilde{\theta}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$，使得矩阵 $\mathcal{M}_{a,\,\tilde{a},\,\Theta}$ 能够像（2.11）那样分解，其中存在某些 $b,\tilde{b}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}$，使得 $\widehat{b}(\xi)\widehat{\phi}(\xi)=\mathcal{O}(\|\xi\|^{\mathrm{sr}(\tilde{a},\mathsf{M})})$ 且 $\tilde{b}(\xi)\,\tilde{\phi}(\xi)=\mathcal{O}(\|\xi\|^{\mathrm{sr}(a,\mathsf{M})})$，如 $\xi\to 0$所示。借助 OEP，文献中已构造出许多具有尽可能高消失矩的紧支撑标量对偶框架小波，仅举数例，参见 [4,5,7,10–13、15、17、19、23,24,26,27,32,34,38] 及其中的许多参考文献。

2.2. 离散多框架变换的完全重构性质和平衡性质。现在我们回顾离散多框架变换的一些基本概念和性质。用 $(l(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}$ 表示所有序列 $v:\mathbb{Z}^d\to\mathbb{C}^{s\times r}$构成的线性空间。我们称每个元素 $v\in(l(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}$ 为矩阵值滤波器。对于滤波器 $a\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$，我们通过 $\widehat{a^\star}(\xi):=\widehat{a}(\xi)^{\mathsf{T}}$定义滤波器 $a^\star$，或者等价地，对于所有 $k\in\mathbb{Z}^d$，有 $a^\star(k):=a(-k)^{\mathsf{T}}$。我们定义两个滤波器的卷积如下：

$$[v*u](n):=\sum_{k\in\mathbb{Z}}v(k)u(n-k),\quad n\in\mathbb{Z}^d,\quad v\in(l(\mathbb{Z}^d))^{s\times r},\quad u\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times t}.$$

设 M 为一个 $d\times d$ 膨胀矩阵，定义上采样算子 $\uparrow\mathsf{M}:(l(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}\to(l(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}$ 如下

$$[v\uparrow\mathsf{M}](k):=\begin{cases}v(\mathsf{M}^{-1}k), & \text{if } k\in\mathbb{Z}^d\cap[\mathsf{M}^{-1}\mathbb{Z}^d],\\ 0, & \text{elsewhere},\end{cases},\qquad\forall k\in\mathbb{Z}^d,\quad v\in(l(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}.$$

我们引入以下作用于矩阵值序列空间的算子：

- 对于 $u\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times t}$，细分算子 $\mathcal{S}_{u,\mathsf{M}}$ 定义如下

$$\mathcal{S}_{u,\mathsf{M}}v=|\det(\mathsf{M})|^{\frac12}[v\uparrow\mathsf{M}]*u=|\det(\mathsf{M})|^{\frac12}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}v(k)u(\cdot-\mathsf{M}k),$$

  对所有 $v\in(l(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}$均成立。

- 对于 $u\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{t\times r}$，过渡算子 $\mathcal{T}_{u,\mathsf{M}}$ 定义如下

$$\mathcal{T}_{u,\mathsf{M}}v=|\det(\mathsf{M})|^{\frac12}[v*u^\star]\downarrow\mathsf{M}=|\det(\mathsf{M})|^{\frac12}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}v(k)\overline{u(k-\mathsf{M}\cdot)}^{\mathsf{T}},$$

  对所有 $v\in(l(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}$。

设 $\theta,\tilde\theta,a,\tilde a\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$ 和 $b,\tilde b\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}$ 为有限支撑滤波器。对于任意 $J\in\mathbb{N}$ 以及任意输入数据 $v_0\in(l(\mathbb{Z}^d))^{1\times r}$，采用滤波器组 $(\{a;\ b\},\{\tilde a;b\})_\Theta$ 的 J 层离散多框架小波变换（DmFT），其中 $\Theta:=\theta^\star*\theta$，其实现如下：

(S1) 分解/分析：递归计算 v_j,w_j，其中 $j=1,\dots,s$，具体如下：

$$v_j:=\mathcal{T}_{a,\mathsf{M}}v_{j-1},\qquad w_j:=\mathcal{T}_{b,\mathsf{M}}v_{j-1}.\tag{2.14}$$

(S2) 重构/综合：定义 $\tilde v_J:=v_J*\Theta$。递归计算 $\tilde v_{j-1}$，其中 $j=J,\dots,1$，具体如下：

$$\tilde v_{j-1}:=\mathcal{S}_{\tilde a,\mathsf{M}}\mathring{v}_j+\mathcal{S}_{\tilde b,\mathsf{M}}w_j.\tag{2.15}$$

(S3) 反卷积：通过 $\breve v_0*\Theta=\tilde v_0$. 从 $\tilde v_0$ 恢复 $\breve v_0$

我们称 $\{a$为$b\}$ 分析滤波器组，称 $\{\tilde a$为$b\}$ 合成滤波器组。如果任意输入数据$v\in(l(\mathbb{Z}^d))^{1\times r}$ 都可以从上述变换中被精确恢复，那么我们称 J层离散多框架变换具有完美重构（PR）性质。根据 [22, 定理 2，3], 层离散多框架变换对所有 $J\in\mathbb{N}$具有完美重构（PR）性质，当且仅当 $(\{a,\ b\},\ \{\tilde a,b\})_\Theta$ 是一个对偶 M-框架小波滤波器组，并且Θ 是强可逆的。这里，如果存在$\Theta^{-1}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$ 使得 $\widehat{\Theta^{-1}}=\widehat{\Theta}^{-1}$，或等价地，对于某些 $c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 和$k\in\mathbb{Z}^d$，$\det(\widehat{\Theta}(\xi))=ce^{-ik\cdot\xi}$，我们就称 $\Theta\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$ 是强可逆的。注意，如果 Θ 是强可逆的，那么作为 $\widehat{\Theta}=\overline{\widehat{\theta}}^{\mathsf{T}}\widehat{\tilde\theta}$，$\theta$ 和 $\tilde\theta$ 也都是强可逆的。

在许多应用中，原始数据是标量值的，也就是说，输入数据为 $v\in l(\mathbb{Z}^d)$。因此，要实现多层 DmFT，我们首先需要将输入数据向量化。设 N 为一个满足 $|\det(\mathsf{N})|=r$ 的 $d\times d$ 整数矩阵，并设 Γ_{N} 为$\mathbb{Z}^d/[\mathsf{N}\mathbb{Z}^d]$ 中陪集代表元的一种特定选取，定义如下

$$\Gamma_{\mathsf{N}}:=\{\mathring{\gamma}_1,\dots,\mathring{\gamma}_r\}=:[\mathsf{N}[0,1)^d]\cap\mathbb{Z}^d,\quad\text{with}\quad\mathring{\gamma}_1:=0.\tag{2.16}$$

我们定义关于 N 的标准向量化算子如下：

$$E_{\mathsf{N}}v:=(v(\mathsf{N}\cdot+\mathring{\gamma}_1),\dots v(\mathsf{N}\cdot+\mathring{\gamma}_r)),\qquad\forall v\in l(\mathbb{Z}^d).\tag{2.17}$$

显然，E_{N} 是 $l(\mathbb{Z}^d)$ 与 $(l(\mathbb{Z}^d))^{1\times r}$ 之间的双射。采用对偶 M-框架小波滤波器组 $(\{a;\ b\},\{\tilde a;b\})_\Theta$ ($\Theta:=\theta^\star*\theta$) 的多层 DmFT 的稀疏性由其 E_{N}-平衡阶数衡量：

分析滤波器组 $\{a;b\}$ 的平衡阶数，记作 bo($\{a;b\}$,M,N) := m 其中 m 是满足以下两个条件的最大整数：

(i) $\mathcal{T}_{a,\,\mathsf{M}}$ 在 $E_{\mathsf{N}}(\mathbb{P}_{m-1}|_{\mathbb{Z}^d})$ 上保持不变，即

$$\mathcal{T}_{a,\mathsf{M}}E_{\mathsf{N}}(\mathbb{P}_{m-1}|_{\mathbb{Z}^d}) \subseteq E_{\mathsf{N}}(\mathbb{P}_{m-1}|_{\mathbb{Z}^d}). \tag{2.18}$$

(ii) 滤波器 b 具有 m E_{N} 阶平衡消失矩，即

$$\mathcal{T}_{b,\mathsf{M}}E_{\mathsf{N}}(\mathsf{p}) = 0, \qquad \forall \mathsf{p} \in \mathbb{P}_{m-1}|_{\mathbb{Z}^d}. \tag{2.19}$$

若满足条件 (i) 和 (ii)，注意到对于所有 $\mathsf{p} \in \mathbb{P}_{m-1}|_{\mathbb{Z}^d}$ 和 $j = 1, \dots, J$，框架小波系数 $w_j = \mathcal{T}_{b,\,\mathsf{M}}\mathcal{T}_a^{j-1}$，$\mathsf{M}$ $E_{\mathsf{N}}(\mathsf{p}) = 0$。这使多层 DmFT 的所有层级都保持稀疏性。关于滤波器组平衡阶数的完整刻画由以下结果给出。

定理 2.2. *[18,* 命题 3.1，定理 4.*1]* 设 M 为一个 $d \times d$ 膨胀矩阵，$r \geqslant 2$ 为正整数。设 $a \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$ 和 $b \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}$，其中 $s \in \mathbb{N}$。设 N 为一个 $d \times d$ 整数矩阵，满足 $|\det(\mathsf{N})| = r$，且 E_{N} 在 (2.17) 中。定义

$$\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\xi) := \left(e^{i\mathsf{N}^{-1}\mathring{\gamma}_1\cdot\xi}, \dots, e^{i\mathsf{N}^{-1}\mathring{\gamma}_r\cdot\xi}\right), \qquad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{2.20}$$

则以下结论成立：

(1) 滤波器 b 具有 阶 m E_{N}平衡消失矩，当且仅当满足 (2.19)

$$\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\xi)\overline{\widehat{b}(\xi)}^{\mathsf{T}} = \mathcal{O}(\|\xi\|^m), \qquad \xi \to 0. \tag{2.21}$$

(2) 该 滤波器组 $\{a;b\}$ 具有 m E_{N}阶平衡，当且仅当 (2.21) 成立，且 d

$$\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\xi)\overline{\widehat{a}(\xi)}^{\mathsf{T}} = \widehat{c}(\xi)\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi) + \mathcal{O}(\|\xi\|^m), \quad \xi \to 0,$$

存在某个 $c \in l_0(\mathbb{Z}^d)$，使得 $\widehat{c}(0) \neq 0$。

假设 $\phi, \tilde{\phi} \in (L_2(\mathbb{R}^d))^r$ 是 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 。中满足 $\widehat{\phi}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi) = \widehat{a}(\xi)\widehat{\phi}(\xi)$ 和 $\tilde{\phi}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi) = \widehat{\tilde{a}}(\xi)\,\widehat{\tilde{\phi}}(\xi)$ 的紧支撑 M 可细化向量函数。按 (2.5) 和 (2.6) 定义 $\mathring{\phi}, \psi, \mathring{\tilde{\phi}}, \tilde{\psi}$。若 T

$\overline{\widehat{\ }}\,\widehat{\approx}$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\approx}$ 。 $\widehat{\approx}$ $\phi(0)\,\Theta(0)\phi(0) = 1$ 且 $\psi(0) = \psi(0) = 0$，那么定理 2.1 告诉我们，$(\{\phi;\,\psi\}, \{\phi;\psi\})$ 是 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 中的一个对偶 M-框架小波。令 m := sr($\tilde{a}$, M)，我们观察到 vm(ψ) $\leqslant m$，bvm(b, M, N) $\leqslant m$，且 bo($\{a;\,b\}$, M, N) 6 bvm(b, M, N)。若 bo($\{a;\,b\}$, M, N) = bvm(b, M, N) = vm(ψ) $= m$，则我们称该离散多框架小波变换（或对偶多框架小波 ($\{\phi;\,\psi\}$, $\{\phi;\psi\}$)）具有 E_{N}-平衡性。对于 $r > 1$，bo($\{a, b\}$, M, N) < vm(ψ) 这种情况经常发生。因此，框架小波生成元具有高消失矩并不能保证平衡性质，因而会显著降低相关离散多框架小波变换的稀疏性。如何克服这一缺陷，已在 [8, 31, 37] 中函数的情形以及 [17–19] 中离散多框架小波变换的情形下得到了广泛研究。

2.3. 矩阵值滤波器的标准形。本小节简要回顾近期提出的矩阵值滤波器标准形相关成果。矩阵值滤波器标准形大大降低了研究多框架小波和多小波的难度，使我们能够仿照研究标量框架小波和小波时所采用的技术。关于这一主题，已有大量研究。详细讨论请参阅 [16–19, 22, 23]。这一主题的最新进展见 [22], ，该成果不仅在弱得多的条件下推广了此前所有已有工作，还提出了一种强化的矩阵值滤波器标准形，极大地助益于我们对平衡多元多框架小波的研究。

我们首先回顾以下引理，该引理称为 [18, 引理 2.2]。这一结果通过强可逆滤波器联系了在原点处光滑的不同函数向量。

引理 2.3. *[[18,*引理 2.*2]]*设 $\widehat{v}=(\widehat{v_1},\dots,\widehat{v_r})$ 和 $\widehat{u}=(\widehat{u_1},\dots,\widehat{u_r})$ 是在 0 处无限可微的 $1\times r$ 函数向量，且满足 $\widehat{v}(0)\neq 0$ 和 $\widehat{u}(0)\neq 0$。若 $r\geqslant 2$，则对于任意正整数 $n\in\mathbb{N}$，存在一个强可逆 $U\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$，使得当 $\xi\to 0$ 时，$\widehat{u}(\xi)=\widehat{v}(\xi)\,\widehat{U}(\xi)+\mathcal{O}(\|\xi\|^n)$。

关于矩阵值滤波器标准形的一个最重要结果如下。该结果是近期发展的成果，也是 [22, 定理 3.3]的一部分。

定理 2.4。设 $\widehat{v}$、$\mathring{v}$ 为向量，ϕ、ϕ 为在 0 处无穷次可微的函数向量。假设

$$\widehat{v}(\xi)\widehat{\phi}(\xi)=1+\mathcal{O}(\|\xi\|^m)\quad and\quad \widehat{\mathring{v}}(\xi)\widehat{\mathring{\phi}}(\xi)=1+\mathcal{O}(\|\xi\|^m),\quad \xi\to 0.$$

若 $r\geqslant 2$，则对每个 $n\in\mathbb{N}$，都存在一个强可逆滤波器 $U\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$，使得

$$\widehat{v}(\xi)\widehat{U}(\xi)^{-1}=\widehat{\mathring{v}}(\xi)+\mathcal{O}(\|\xi\|^m)\quad and\quad \widehat{U}(\xi)\widehat{\phi}(\xi)=\widehat{\mathring{\phi}}(\xi)+\mathcal{O}(\|\xi\|^n),\quad \xi\to 0.$$

定理的一个特例 理 2.4 的一个特殊情形是以下结果（[22, 定理 1.2], ; 参见 [18,定理 5.1]）。

定理 2.5. 设 M 是一个 $d\times d$ 膨胀矩阵，$m\in\mathbb{N}$ 和 $r\geqslant 2$ 为整数。设 ϕ 是一个 $r\times 1$ 紧支撑分布向量，满足 $\widehat{\phi}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)=\widehat{a}(\xi)\widehat{\phi}(\xi)$，其中 $\widehat{\phi}(0)\neq 0$，对某个 $a\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$成立。假设滤波器 a 关于 M 满足 (2.13) 中的 m 阶和规则，且存在一个匹配滤波器 $\upsilon\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{1\times r}$，使得 $\widehat{v}(0)\widehat{\phi}(0)=1$。那么，对于任意正整数 $n\in\mathbb{N}$，存在一个强可逆滤波器 $U\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$，使得以下结论成立：

(1) 定义 $\widehat{\mathring{v}}:=(\widehat{\mathring{v}_1},\dots,\widehat{\mathring{v}_r}):=\widehat{v}\widehat{U}^{-1}$ 和 $\mathring{\phi}:=(\mathring{\phi}_1,\dots,\mathring{\phi}_r)^{\mathsf{T}}:=\widehat{U}\widehat{\phi}$。我们有

$$\widehat{\mathring{\phi}_1}(\xi)=1+\mathcal{O}(\|\xi\|^n)\quad and\quad \widehat{\mathring{\phi}_\ell}(\xi)=\mathcal{O}(\|\xi\|^n),\quad \xi\to 0,\quad \ell=2,\dots,r,\tag{2.22}$$

$$\widehat{\mathring{v}_1}(\xi)=1+\mathcal{O}(\|\xi\|^m)\quad and\quad \widehat{\mathring{v}_\ell}(\xi)=\mathcal{O}(\|\xi\|^m),\quad \xi\to 0,\quad \ell=2,\dots,r.\tag{2.23}$$

(2) 通过 $\widehat{\mathring{a}}$ 定义 $\mathring{a}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}:=\widehat{U}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)\widehat{a}\widehat{U}^{-1}$。则 $\widehat{\mathring{\phi}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)}=\widehat{\mathring{a}}\widehat{\mathring{\phi}}$，且新的滤波器 $\mathring{a}$ 关于 M 具有 m 阶和规则，其匹配滤波器为 $\mathring{v}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{1\times r}$。

设 $\mathring{a}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$ 是与满足 (2.22) 的 M 可细化向量函数 $\mathring{\phi}$ 相关联的细化掩码，并假设 $\mathring{a}$ 具有 m 阶和规则，其匹配滤波器 $\mathring{v}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{1\times r}$ 满足 (2.23)。不难看出，$\mathring{a}$ 具有如下结构：

$$\widehat{\mathring{a}}(\xi)=\begin{bmatrix}\widehat{\mathring{a}_{1,1}}(\xi) & \widehat{\mathring{a}_{1,2}}(\xi)\\ \widehat{\mathring{a}_{2,1}}(\xi) & \widehat{\mathring{a}_{2,2}}(\xi)\end{bmatrix},\tag{2.24}$$

其中 $\mathring{a}_{1,1}$,$\mathring{a}_{1,2}$,$\mathring{a}_{2,1}$ 和 $\mathring{a}_{2,2}$ 是由 $2\pi\mathbb{Z}^d$ 周期三角多项式构成的 1×1, $1\times(r-1)$、$(r-1)\times 1$ 和 $(r-1)\times(r-1)$ 矩阵，使得

$$\widehat{\mathring{a}_{1,1}}(\xi)=1+\mathcal{O}(\|\xi\|^n),\quad \widehat{\mathring{a}_{1,1}}(\xi+2\pi\omega)=\mathcal{O}(\|\xi\|^m),\quad \xi\to 0,\quad \forall\omega\in\Omega_{\mathsf{M}}\setminus\{0\},\tag{2.25}$$

$$\widehat{\mathring{a}_{1,\,2}}(\xi+2\pi\omega)=\mathcal{O}(\|\xi\|^m),\quad \xi\to 0,\quad \forall\omega\in\Omega_{\mathsf{M}},\tag{2.26}$$

$$\widehat{\mathring{a}_{2,1}}(\xi)=\mathcal{O}(\|\xi\|^n),\quad \xi\to 0.\tag{2.27}$$

任何满足 (2.24)、(2.25)、(2.26) 和 (2.27) 的滤波器 $\mathring{a}$ 均称为理想 (m,n)-标准形。

如果 $d=1$，那么三个矩条件 (2.25)、(2.26) 和 (2.27) 进一步得出

$$\widehat{\mathring{a}_{1,1}}(\xi)=(1+e^{-i\xi}+\cdots+e^{-i(|\mathsf{M}|-1)\xi})^m P_{1,1}(\xi)=1+\mathcal{O}(|\xi|^n),\qquad \xi\to 0,$$

$$\widehat{\mathring{a}_{1,2}}(\xi)=(1-e^{-i|\mathsf{M}|\xi})^m P_{1,2}(\xi),\qquad \widehat{\mathring{a}_{2,1}}(\xi)=(1-e^{-i\xi})^n P_{2,1}(\xi),$$

其中 $P_{1,1}$, $P_{1,2}$ 和 $P_{2,1}$ 是由 2π-周期三角多项式构成的一些 1×1, $1\times(r-1)$ 和 $(r-1)\times 1$ 矩阵。回忆一下，2π-周期三角多项式 $\widehat{u}$ 满足 $\widehat{u}(\xi)=\mathcal{O}(|\xi|^m)$，当且仅当 $(1-e^{-i\xi})^m$ 整除 $\widehat{u}$。这是构造具有高消失矩的单变量对偶框架小波的关键性质

具有高消失矩。不幸的是，对于 $d \geqslant 2$，$(1+e^{-i\xi}+\cdots+e^{-i(|\mathsf{M}|-1)\xi})^m$ 和 $(1-e^{-i\xi})^m$ 没有对应的因子。这意味着，对于 $d=1$ 情形，我们用于构造具有高消失矩的对偶框架小波的因式分解技术不再适用，这说明针对 $d>1$ 的研究更为困难。

3. The Existence and a Structural Characterization of Balanced Dual Multiframelets

本节将建立关于平衡对偶多框架小波结构刻画的主要结果。首先，我们将在定理 3.1 中证明，可以由任意一对紧支撑可细化向量函数构造出平衡对偶多框架小波。受定理 3.1 的启发，我们将引入平衡矩校正滤波器的概念，并用它来研究平衡对偶多框架小波的结构。本部分的主要结果总结为定理 3.5。

3.1. $\mathbb{R}^d$ 中基于 OEP 的平衡对偶多框架小波的存在性。要回答的首要问题是，是否总能由任意一对可细化向量函数构造出平衡对偶多框架小波。由此得到以下主要定理。

定理 3.1. 设 M 为一个 $d\times d$ 膨胀矩阵，$r\geqslant 2$ 为一个整数。设 $\phi,\tilde{\phi}\in(L_2(\mathbb{R}^d))^r$ 为与细化掩码 $a,\tilde{a}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$ 相对应的紧支撑 M-可细化向量函数。假设 $\mathrm{sr}(a,\mathsf{M})=\tilde{m}$，且 $\mathrm{sr}(\tilde{a},\mathsf{M})=m$，其对应的匹配滤波器分别为 $\upsilon,\tilde{\upsilon}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{1\times r}$，使得 $\widehat{\upsilon}(0)\widehat{\phi}(0)\neq 0$，且 $\widehat{\tilde{\upsilon}}(0)\widehat{\tilde{\phi}}(0)\neq 0$。设 N 为一个 $d\times d$ 整数矩阵，且 $|\det(\mathsf{N})|=r$。那么，存在 $\theta,\tilde{\theta}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$ 和 $b,\tilde{b}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}$，使得 $s\in\mathbb{N}$

(1) θ 和 $\tilde{\theta}$ 均为强可逆的。(2) 通过以下方式定义有限支撑滤波器 $\mathring{a}$、$\mathring{b}$、$\mathring{\tilde{a}}$、$\mathring{\tilde{b}}$：

$$\widehat{\mathring{a}}(\xi)=\widehat{\theta}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\widehat{a}(\xi)\widehat{\theta}(\xi)^{-1},\quad \widehat{\mathring{b}}(\xi)=\widehat{b}(\xi)\widehat{\theta}(\xi)^{-1},\tag{3.1}$$

$$\widehat{\mathring{\tilde{a}}}(\xi)=\widehat{\tilde{\theta}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\widehat{\tilde{a}}(\xi)\widehat{\tilde{\theta}}(\xi)^{-1},\quad \widehat{\mathring{\tilde{b}}}(\xi)=\widehat{\tilde{b}}(\xi)\widehat{\tilde{\theta}}(\xi)^{-1}.\tag{3.2}$$

那么，$(\{\mathring{a};\ b\},\{\tilde{a};\ \mathring{b}\})\boldsymbol{\delta}_{I_r}$ 是一个基于 OEP 的对偶 M-框架小波滤波器组。此外，采用滤波器组 $(\{\mathring{a};b\},\{\tilde{a};\ \mathring{b}\})\boldsymbol{\delta}_{I_r}$ 的离散框架小波变换是 m E_{N} 阶平衡的，即 $\mathrm{bo}(\{\mathring{a};\ \mathring{b}\},\mathsf{M},\mathsf{N})=\mathrm{sr}(\mathring{\tilde{a}},\mathsf{M})=m$。

(3) $(\{\tilde{\phi};\tilde{\psi}\},\{\phi;\psi\})$ 是 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 中的一个紧支撑对偶 M-框架小波，其中 $\mathrm{vm}(\psi)=\tilde{m}$ and $\mathrm{vm}(\tilde{\psi})=m$，$\phi$、$\psi$、$\tilde{\phi}$、$\tilde{\psi}$ 是按照 (2.5) 和 (2.6) 定义的向量值函数。

定义 3.2. 定理 3.1 中的强可逆滤波器 $\theta,\tilde{\theta}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$ 称为细化掩码 $a,\tilde{a}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$的一对 E_{N}-平衡矩校正滤波器。

为了证明定理 3.1，我们首先需要引入一些记号。对于任意 $k\in\mathbb{Z}^d$，向后差分算子 ∇_k 定义为

$$\nabla_k u(n):=u(n)-u(n-k),\qquad \forall n\in\mathbb{Z}^d,\quad u\in(l(\mathbb{Z}^d))^{t\times r}.$$

对于任意多重指标 $\alpha:=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in\mathbb{N}_0^d$，我们定义

$$\nabla^\alpha:=\nabla_{e_1}^{\alpha_1}\nabla_{e_2}^{\alpha_2}\ldots\nabla_{e_d}^{\alpha_d},$$

其中 $\{e_1,\ldots,e_d\}$ 是 $\mathbb{R}^d$的标准基。注意到

$$\widehat{\nabla^\alpha u}(\xi)=\widehat{\nabla^\alpha\boldsymbol{\delta}}(\xi)\widehat{u}(\xi)=(1-e^{-i\xi_1})^{\alpha_1}(1-e^{-i\xi_2})^{\alpha_2}\cdots(1-e^{-i\xi_d})^{\alpha_d}\widehat{u}(\xi),$$

对于所有 $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_d)^{\mathsf{T}}\in\mathbb{R}^d$ 以及 $u\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{t\times r}$，均有。

对于 $d=1$，回顾一下，当且仅当 $\widehat{c}$ 能被 $(1-e^{-i\xi})^m$ 整除时，2π 周期三角多项式 $\widehat{c}$ 满足 $\widehat{c}(\xi)=\mathcal{O}(|\xi|^m)$，其中 $\xi\to 0$。尽管当 $d>1$

且不存在像单变量情形中的 $(1-e^{-i\xi})^m$ 那样发挥作用的因子，但下面的引理准确地说明了如何刻画多元三角多项式的零点矩。

引理 3.3.（*[12, 引理 5]*）设 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\widehat{c}$ 为一个 $2\pi\mathbb{Z}^d$-周期的 d元三角多项式。当且仅当 $\xi\to 0$ 时，$\widehat{c}(\xi)=\mathcal{O}(\|\xi\|^m)$

$$\widehat{c}(\xi)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_{0;m}^d}\widehat{\nabla^\alpha\boldsymbol{\delta}}(\xi)\widehat{c_\alpha}(\xi)$$

对于所有 $\alpha\in\mathbb{N}_{0;m}^d$，存在某个 $c_\alpha\in l_0(\mathbb{Z}^d)$，其中

$$\mathbb{N}_{0;m}^d:=\{\alpha\in\mathbb{N}_0^d:|\alpha|:=\alpha_1+\cdots+\alpha_d=m\}. \tag{3.3}$$

接下来，我们引入所谓的陪集序列的概念。设 M 为一个可逆整数矩阵，并设 $\gamma\in\mathbb{Z}^d$。对于任意矩阵值序列 $u\in(l(\mathbb{Z}^d))^{t\times r}$，我们定义相对于 M 的 γ-陪集序列 u如下：

$$u^{[\gamma]}(k):=u^{[\gamma;\mathsf{M}]}(k)=u(\gamma+\mathsf{M}k),\quad k\in\mathbb{Z}^d.$$

对于 $u\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{t\times r}$，容易看出

$$\widehat{u}(\xi)=\sum_{\gamma\in\Gamma_\mathsf{M}}\widehat{u^{[\gamma;\mathsf{M}]}}(\mathsf{M}^\mathsf{T}\xi)e^{-i\gamma\cdot\xi},\qquad \xi\in\mathbb{R}^d, \tag{3.4}$$

其中 Γ_M 是一个 com 商群 $\mathbb{Z}^d/[\mathsf{M}\mathbb{Z}^d]$的一组完备典范代表元，其中

$$\Gamma_\mathsf{M}:=\{\gamma_1,\dots,\gamma_{d_\mathsf{M}}\}=:(\mathsf{M}[0,1)^d)\cap\mathbb{Z}^d\quad\text{with}\quad\gamma_1:=0. \tag{3.5}$$

通过式 (2.9) 定义 Ω_M。对于任意滤波器 $u\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{t\times r}$ 和 $\omega\in\Omega_\mathsf{M}$，我们引入与 u 和 ω相关联的以下三角多项式矩阵：

- 定义 $(td_\mathsf{M})\times(rd_\mathsf{M})$ 分块矩阵 $D_{u,\omega;\mathsf{M}}(\xi)$，其第 (l,k) 个分块由下式给出

$$(D_{u,\omega;\mathsf{M}}(\xi))_{l,k}:=\begin{cases}\widehat{u}(\xi+2\pi\omega), & \text{if } \omega_l+\omega-\omega_k\in\mathbb{Z}^d\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{3.6}$$

- 定义 $(td_\mathsf{M})\times(rd_\mathsf{M})$ 分块矩阵 $E_{u,\omega;\mathsf{M}}(\xi)$，其第 (l,k) 个分块由下式给出

$$(E_{u,\omega;\mathsf{M}}(\xi))_{l,k}:=\widehat{u^{[\gamma_k-\gamma_l;\mathsf{M}]}}(\xi)e^{-i\gamma_k\cdot(2\pi\omega)}. \tag{3.7}$$

- 通过下式定义 $t\times(rd_\mathsf{M})$ 矩阵 $Q_{u;\mathsf{M}}(\xi)$

$$Q_{u;\mathsf{M}}(\xi):=\big[\widehat{u^{[\gamma_1;\mathsf{M}]}}(\xi),\widehat{u^{[\gamma_2;\mathsf{M}]}}(\xi),\dots,\widehat{u^{[\gamma_{d_\mathsf{M}};\mathsf{M}]}}(\xi)\big]. \tag{3.8}$$

由 [12, 引理 7], 不难推出

$$\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}(\xi)D_{u,\omega;\mathsf{M}}(\xi)\overline{\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}(\xi)}^\mathsf{T}=d_\mathsf{M}E_{u,\omega;\mathsf{M}}(\mathsf{M}^\mathsf{T}\xi),\qquad \xi\in\mathbb{R}^d,\omega\in\Omega_\mathsf{M}, \tag{3.9}$$

其中 $\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}(\xi)$ 是如下的 $(rd_\mathsf{M})\times(rd_\mathsf{M})$ 矩阵：

$$\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}(\xi):=\left(e^{-i\gamma_l\cdot(\xi+2\pi\omega_k)}I_r\right)_{1\le l,k\le d_\mathsf{M}}. \tag{3.10}$$

因此我们进一步推出

$$P_{u;\mathsf{M}}(\xi)=Q_{u;\mathsf{M}}(\mathsf{M}^\mathsf{T}\xi)\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}(\xi) \tag{3.11}$$

其中 $P_{u;\mathsf{M}}(\xi):=\big[\widehat{u}(\xi+2\pi\omega_1)\ \widehat{u}(\xi+2\pi\omega_2)\dots,\widehat{u}(\xi+2\pi\omega_{d_\mathsf{M}})\big]$ 如 (2.10) 中所示。

现在令 $a\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}$ 是有限支撑滤波器，回顾一下，$\widetilde{\quad}(\{a;b\},\{\tilde{a};b\})_\Theta$（其中 $\Theta:=\theta^\star*\theta$）是对偶 M-框架小波滤波器组，当且仅当式（2.11）成立。利用式（3.11）和 $\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}^\mathsf{T}=d_\mathsf{M}I_{d_\mathsf{M}r}$，不难看出式（2.11）等价于

$$\mathcal{N}_{a,\tilde{a},\Theta}(\xi)=\overline{Q_{b;\mathsf{M}}(\xi)}^\mathsf{T}Q_{\tilde{b};\mathsf{M}}(\xi), \tag{3.12}$$

with

$$\mathcal{N}_{a,\tilde{a},\Theta}(\xi):=d_\mathsf{M}^{-1}E_{\Theta,0;\mathsf{M}}(\xi)-\overline{Q_{a;\mathsf{M}}(\xi)}^\mathsf{T}\widehat{\Theta}(\xi)Q_{\tilde{a};\mathsf{M}}(\xi). \tag{3.13}$$

因此，构造对偶框架小波滤波器组等价于求得式（3.13）中的矩阵分解。给定细化掩码 a 和 $\tilde{a}$ 后，我们只需选取合适的 θ 和 θ，然后按照式（3.13）对 $\mathcal{N}_{a,\,\tilde{a},\,\Theta}$ 进行分解。注意到矩阵 $Q_{b;\mathsf{M}}$ 和 $Q_{\tilde{b};\mathsf{M}}$ 为我们提供了 b 和 b的所有~ ~陪集序列，最后便可通过式（3.4）重构 b 和 b。值得一提的是，在滤波器组构造的相关文献中，将问题转化为陪集序列的方法十分常见。

定理 3.1 的证明。由于 $\mathrm{sr}(a,\mathsf{M}) = \tilde{m}$ 且 $\mathrm{sr}(\tilde{a},\mathsf{M}) = m$，分别具有匹配滤波器 $v,\tilde{v} \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{1\times r}$，不难推导出（例如参见 [16, 命题 3.2]）：

$$\widehat{v}(\xi)\widehat{\phi}(\xi) = \widehat{v}(0)\widehat{\phi}(0) + \mathcal{O}(|\xi|^{\tilde{m}}), \quad \widehat{\tilde{v}}(\xi)\widehat{\tilde{\phi}}(\xi) = \widehat{\tilde{v}}(0)\widehat{\tilde{\phi}}(0) + \mathcal{O}(|\xi|^{m}),$$

当 $\xi \to 0$ 时。经过适当缩放，不失一般性，我们可以假设

$$\widehat{v}(\xi)\widehat{\phi}(\xi) = 1 + \mathcal{O}(|\xi|^{\tilde{m}}), \quad \widehat{\tilde{v}}(\xi)\widehat{\tilde{\phi}}(\xi) = 1 + \mathcal{O}(|\xi|^{m}),$$

当 ^ 时。令 Υ_{N} 如 (2.20) 中所定义。由定理 2.4 可知，存在强可逆滤波器 $\theta,\tilde{\theta} \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$，使得

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathring{v}}(\xi) &:= \widehat{v}(\xi)\widehat{\theta}(\xi)^{-1} = r^{-1/2}\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\xi) + \mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}),\\
\widehat{\mathring{\phi}}(\xi) &:= \widehat{\theta}(\xi)\widehat{\phi}(\xi) = r^{-1/2}\overline{\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\xi)}^{\mathsf{T}} + \mathcal{O}(\|\xi\|^{m+\tilde{m}}),\\
\widehat{\mathring{\tilde{v}}}(\xi) &:= \widehat{\tilde{v}}(\xi)\widehat{\tilde{\theta}}(\xi)^{-1} = r^{-1/2}\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\xi) + \mathcal{O}(\|\xi\|^{m}),\\
\widehat{\mathring{\tilde{\phi}}}(\xi) &:= \widehat{\tilde{\theta}}(\xi)\widehat{\tilde{\phi}}(\xi) = r^{-1/2}\overline{\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\xi)}^{\mathsf{T}} + \mathcal{O}(\|\xi\|^{m+\tilde{m}}),
\end{aligned}$$

当 $\xi \to 0$ 时。特别地，可以得出以下矩条件成立，当 $\xi \to 0$ 时：

$$\widehat{\mathring{v}}(\xi) = C\overline{\widehat{\mathring{\phi}}(\xi)}^{\mathsf{T}} + \mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}) = \widehat{c}(\xi)\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\xi) + \mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}), \tag{3.14}$$

$$\widehat{\mathring{\tilde{v}}}(\xi) = \tilde{C}\overline{\widehat{\mathring{\phi}}(\xi)}^{\mathsf{T}} + \mathcal{O}(\|\xi\|^{m}) = \widehat{d}(\xi)\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\xi) + \mathcal{O}(\|\xi\|^{m}), \tag{3.15}$$

$$\overline{\widehat{\mathring{\phi}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\,\widehat{\mathring{\tilde{\phi}}}(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\|\xi\|^{m+\tilde{m}}), \tag{3.16}$$

fo对某些 $c,d \in l_0(\mathbb{Z}^d)$，满足 $\widehat{c}(0) \neq 0$ 且 $\widehat{d}(0) \neq 0$，以及某些 $C,\tilde{C} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$。

^ ~定义 $\mathring{a}$、$\mathring{\tilde{a}} \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$，如 (3.1) 和 (3.2) 中所示。我们有 $\mathring{\phi}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot) = \widehat{\mathring{a}}\mathring{\phi}$，且 ^ 。 ~$\widehat{\mathring{\phi}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot) = \mathring{\tilde{a}}$ ~ϕ。此外，$\mathring{a}$（分别地，$\mathring{\tilde{a}}$）关于 M 具有阶数为 $\tilde{m}$（分别地，m）的和规则，且匹配滤波器为 $\mathring{v}$（分别地，$\mathring{\tilde{v}}$）。

定义 $n := \tilde{m} + m$。根据定理 2.4，存在一个强可逆的 $U \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$，使得

$$\begin{aligned}
\widehat{\breve{\phi}}(\xi) &:= \widehat{U}(\xi)\widehat{\mathring{\phi}}(\xi) = (1,0,\dots,0)^{\mathsf{T}} + \mathcal{O}(\|\xi\|^{n}),\\
\widehat{\breve{v}}(\xi) &:= \widehat{\mathring{v}}(\xi)\widehat{U}(\xi)^{-1} = (1,0,\dots,0) + \mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}),
\end{aligned}$$

如 $\xi \to 0$。因此令 $\widehat{\breve{a}} := \widehat{U}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)\widehat{\mathring{a}}\widehat{U}^{-1}$，可知 $\breve{a}$ 取理想 $(\tilde{m},n)$-标准形，即，

$$\widehat{\breve{a}}(\xi) = \begin{bmatrix} \widehat{\breve{a}_{1,1}}(\xi) & \widehat{\breve{a}_{1,2}}(\xi) \\ \widehat{\breve{a}_{2,1}}(\xi) & \widehat{\breve{a}_{2,2}}(\xi) \end{bmatrix},$$

^ ^ ^ ^其中 $\breve{a}_{1,\,1}$，$\breve{a}_{1,\,2}$，$\breve{a}_{2,\,1}$ 和 $\breve{a}_{2,\,2}$ 是 $1\times 1, 1\times(r-1), (r-1)\times 1$ 和 $(r-1)\times(r-1)$ 阶矩阵，其元素为$2\pi\mathbb{Z}^d$-周期三角多项式，且满足

$$\begin{aligned}
&\widehat{\breve{a}_{1,1}}(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\|\xi\|^{n}), \quad \widehat{\breve{a}_{1,1}}(\xi + 2\pi\omega) = \mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}), \quad \xi \to 0, \quad \forall \omega \in \Omega_{\mathsf{M}}\setminus\{0\},\\
&\widehat{\breve{a}_{1,2}}(\xi + 2\pi\omega) = \mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}), \quad \xi \to 0, \quad \forall \omega \in \Omega_{\mathsf{M}},\\
&\widehat{\breve{a}_{2,1}}(\xi) = \mathcal{O}(\|\xi\|^{n}), \quad \xi \to 0,
\end{aligned}$$

当 $\xi \to 0$ 时，其中 $\Omega_{\mathsf{M}} := \{\omega_1, \ldots, \omega_{d_{\mathsf{M}}}\}$ 由式 (2.9) 定义。

另一方面，我们有

$$\widehat{\breve{v}}(\xi) := \widehat{\breve{v}}(\xi)\overline{\widehat{U}(\xi)}^{\mathsf{T}} = \overline{\widehat{\breve{\phi}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\overline{\widehat{U}(\xi)}^{\mathsf{T}} + \mathcal{O}(\|\xi\|^m) = (1, 0, \ldots, 0) + \mathcal{O}(\|\xi\|^m),$$

$$\widehat{\breve{\phi}}(\xi) := \overline{\widehat{U}(\xi)}^{-\mathsf{T}}\widehat{\breve{\phi}}(\xi) = \overline{\widehat{U}(\xi)}^{-\mathsf{T}}\overline{\widehat{\breve{v}}(\xi)}^{\mathsf{T}} + \mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}) = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}} + \mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}),$$

为 $\xi \to 0$。此外，条件 (3.16) 意味着

$$\widehat{\breve{\phi}}_1(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\|\xi\|^n), \qquad \xi \to 0,$$

其中 $\breve{\phi}_1$ 是 $\breve{\phi}$ 的第一个坐标。因此，令 $\widehat{\breve{a}} := \widehat{U}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)^{-\mathsf{T}}\widehat{\breve{a}}\overline{\widehat{U}}^{\mathsf{T}}$，可知 $\widehat{\breve{\phi}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot) = \widehat{\breve{a}}\widehat{\breve{\phi}}$ 且 $\breve{a}$ 具有关于 M 的 m 阶和规则，其匹配滤波器为 $\breve{v}$。此外，我们有

$$\widehat{\breve{a}}(\xi) = \begin{bmatrix} \widehat{\breve{a}_{1,1}}(\xi) & \widehat{\breve{a}_{1,2}}(\xi) \\ \widehat{\breve{a}_{2,1}}(\xi) & \widehat{\breve{a}_{2,2}}(\xi) \end{bmatrix},$$

其中 $\breve{a}_{1,1}, \breve{a}_{1,2}, \breve{a}_{2,1}$ 和 $\breve{a}_{2,2}$ 分别是 $1 \times 1, 1 \times (r-1), (r-1) \times 1$ 和 $(r-1) \times (r-1)$ 阶的、由 $2\pi\mathbb{Z}^d$-周期三角多项式构成的矩阵，满足

$$\widehat{\breve{a}_{1,1}}(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\|\xi\|^n), \quad \widehat{\breve{a}_{1,1}}(\xi + 2\pi\omega) = \mathcal{O}(\|\xi\|^m), \quad \xi \to 0, \quad \forall \omega \in \Omega_{\mathsf{M}} \setminus \{0\},$$
$$\widehat{\breve{a}_{1,2}}(\xi + 2\pi\omega) = \mathcal{O}(\|\xi\|^m), \quad \xi \to 0, \quad \forall \omega \in \Omega_{\mathsf{M}},$$
$$\widehat{\breve{a}_{2,1}}(\xi) = \mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}), \quad \xi \to 0,$$

作为 $\xi \to 0$。

对于 $j = 1, \ldots, d_{\mathsf{M}}$，定义

$$\widehat{A_j}(\xi) := \boldsymbol{\delta}(\omega_j) I_r - \overline{\widehat{\breve{a}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\breve{a}}(\xi + 2\pi\omega_j),$$

其中，$\boldsymbol{\delta}$ 定义如式（2.8）所示。我们有

$$\widehat{A_1}(\xi) = I_r - \overline{\widehat{\breve{a}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\breve{a}}(\xi) = \begin{bmatrix} \widehat{A_{1;1}}(\xi) & \widehat{A_{1;2}}(\xi) \\ \widehat{A_{1;3}}(\xi) & \widehat{A_{1;4}}(\xi) \end{bmatrix},$$

其中，$A_{1;1}$、$A_{1;2}$、$A_{1;3}$ 和 $A_{1;4}$ 分别为 1×1、$1 \times (r-1)$、$(r-1) \times 1$ 以及 $(r-1) \times (r-1)$ 矩阵，其元素均为 $2\pi\mathbb{Z}^d$ 周期三角多项式，并满足以下矩条件（当 $\xi \to 0$ 时）：

$$\widehat{A_{1;1}}(\xi) = 1 - \left(\overline{\widehat{\breve{a}_{1,1}}(\xi)}\widehat{\breve{a}_{1,1}}(\xi) + \overline{\widehat{\breve{a}_{2,1}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\breve{a}_{2,1}}(\xi)\right) = \mathcal{O}(\|\xi\|^n),$$
$$\widehat{A_{1;2}}(\xi) = -\overline{\widehat{\breve{a}_{1,1}}(\xi)}\widehat{\breve{a}_{1,2}}(\xi) - \overline{\widehat{\breve{a}_{2,1}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\breve{a}_{2,2}}(\xi) = \mathcal{O}(\|\xi\|^m),$$
$$\widehat{A_{1;3}}(\xi) = -\overline{\widehat{\breve{a}_{1,2}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\breve{a}_{1,1}}(\xi) - \overline{\widehat{\breve{a}_{2,2}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\breve{a}_{2,1}}(\xi) = \mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}).$$

对于 $j = 2, \ldots\ldots, d_{\mathsf{M}}$，我们有

$$\widehat{A_j}(\xi) = -\overline{\widehat{\breve{a}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\breve{a}}(\xi + 2\pi\omega_j) = \begin{bmatrix} \widehat{A_{j;1}}(\xi) & \widehat{A_{j;2}}(\xi) \\ \widehat{A_{j;3}}(\xi) & \widehat{A_{j;4}}(\xi) \end{bmatrix},$$

其中，对于每个 j，$A_{j;1}$、$A_{j;2}$、$A_{j;3}$ 和 $A_{j;4}$ 是由 $2\pi\mathbb{Z}^d$-周期三角多项式构成的 1×1、$1 \times (r-1)$、$(r-1) \times 1$ 和 $(r-1) \times (r-1)$ 矩阵，并满足以下矩条件：

$\xi \to 0$:

$$\widehat{A_{j;1}}(\xi) = -\left(\overline{\widehat{\breve{a}_{1,1}}(\xi)}\widehat{\breve{\breve{a}}_{1,1}}(\xi + 2\pi\omega_j) + \overline{\widehat{\breve{a}_{2,1}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\breve{\breve{a}}_{2,1}}(\xi + 2\pi\omega_j)\right) = \mathcal{O}(\|\xi\|^m),$$
$$\widehat{A_{j;1}}(\xi - 2\pi\omega_j) = -\left(\overline{\widehat{\breve{a}_{1,1}}(\xi - 2\pi\omega_j)}\widehat{\breve{\breve{a}}_{1,1}}(\xi) + \overline{\widehat{\breve{a}_{2,1}}(\xi - 2\pi\omega_j)}^{\mathsf{T}}\widehat{\breve{\breve{a}}_{2,1}}(\xi)\right) = \mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}),$$
$$\widehat{A_{j;2}}(\xi) = -\overline{\widehat{\breve{a}_{1,1}}(\xi)}\widehat{\breve{\breve{a}}_{1,2}}(\xi + 2\pi\omega_j) - \overline{\widehat{\breve{a}_{2,1}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\breve{\breve{a}}_{2,2}}(\xi + 2\pi\omega_j) = \mathcal{O}(\|\xi\|^m),$$
$$\widehat{A_{j;3}}(\xi - 2\pi\omega_j) = -\overline{\widehat{\breve{a}_{1,2}}(\xi - 2\pi\omega_j)}\widehat{\breve{\breve{a}}_{1,1}}(\xi) - \overline{\widehat{\breve{a}_{2,2}}(\xi - 2\pi\omega_j)}^{\mathsf{T}}\widehat{\breve{\breve{a}}_{2,1}}(\xi) = \mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}).$$

对于 $\mu \in \mathbb{N}_0^d$，定义 $\Delta_\mu \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$ 通过 $\Delta_\mu := \mathrm{Diag}(\nabla^\mu \delta, I_{r-1})$。根据上述推导，我们得出

$$\widehat{A_j}(\xi) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_{0;m}^d,\beta\in\mathbb{N}_{0;\tilde{m}}^d} \overline{\widehat{\Delta_\alpha}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{A_{j,\alpha,\beta}}(\xi)\widehat{\Delta_\beta}(\xi + 2\pi\omega_j), \tag{3.17}$$

对于某个 $A_{j,\ \alpha,\ \beta} \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$，对所有 $\alpha \in \mathbb{N}_{0;m}^d, \beta \in \mathbb{N}_{0;\tilde{m}}^d$ 以及所有 $j = 1, \ldots, d_{\mathsf{M}}$均成立。

定义 $\mathcal{M}_{\breve{a},\ \breve{\breve{a}},\ I_r}$，如 (2.12) 中所示，其中将 $a, \tilde{a}, \Theta$ 分别替换为 $\breve{a}, \breve{\breve{a}}, I_r$；并回顾一下，对于所有 $u \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$ 和 $\omega \in \Omega_{\mathsf{M}}$，$D_{\mu,\ \omega;\mathsf{M}}$定义如 (3.6)。注意

$$\mathcal{M}_{\breve{a},\breve{\breve{a}},\tilde{U}} = \sum_{j=1}^{d_{\mathsf{M}}} D_{A_j,\omega_j;\mathsf{M}} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_{0;m}^d,\beta\in\mathbb{N}_{0;\tilde{m}}^d} \overline{D_{\Delta_\alpha,0;\mathsf{M}}}^{\mathsf{T}} D_{A_{j,\alpha,\beta},\omega_j;\mathsf{M}} D_{\Delta_\beta,0;\mathsf{M}},$$

其中，最后一个等式由 (3.17) 得出。

定义 $\mathcal{N}_{\breve{a},\ \breve{\breve{a}},\ I_r}$，如 (3.13) 中所示，其中将 $a, \tilde{a}$ 和 Θ 分别替换为 $\breve{a}, \breve{\breve{a}}$ 和 I_r。回顾一下，对于所有 $u \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$ 和 $\omega \in \Omega_{\mathsf{M}}$，$E_{\mu,\ \omega;\mathsf{M}}$ 定义如 (3.7)，且 $\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}$ 定义如 (3.10)。由 (3.11) 和 $\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}^{\mathsf{T}} = d_{\mathsf{M}} I_{d_{\mathsf{M}}r}$ 可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}_{\breve{a},\breve{\breve{a}},I_r}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi) = d_{\mathsf{M}}^{-2}\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}(\xi)\mathcal{M}_{\breve{a},\breve{\breve{a}},I_r}(\xi)\overline{\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\\ =&d_{\mathsf{M}}^{-1}\sum_{j=1}^{d_{\mathsf{M}}}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_{0;m}^d,\beta\in\mathbb{N}_{0;\tilde{m}}^d} \overline{E_{\Delta_\alpha,0;\mathsf{M}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)}^{\mathsf{T}} E_{A_{j,\alpha,\beta},\omega_j;\mathsf{M}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi) E_{\Delta_\beta,0;\mathsf{M}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi).\end{aligned} \tag{3.18}$$

令

$$E_{\alpha,\beta}(\xi) := d_{\mathsf{M}}^{-1}\sum_{j=1}^{d_{\mathsf{M}}} E_{A_{j,\alpha,\beta},\omega_j;\mathsf{M}}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha \in \mathbb{N}_{0;m}^d, \quad \beta \in \mathbb{N}_{0;\tilde{m}}^d,$$

我们得到

$$\mathcal{N}_{\breve{a},\breve{\breve{a}},I_r}(\xi) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_{0;m}^d,\beta\in\mathbb{N}_{0;\tilde{m}}^d} \overline{E_{\Delta_\alpha,0;\mathsf{M}}(\xi)}^{\mathsf{T}} E_{\alpha,\beta}(\xi) E_{\Delta_\beta,0;\mathsf{M}}(\xi). \tag{3.19}$$

对于每个 $\alpha \in \mathbb{N}_{0;m}^d$ 和 $\beta \in \mathbb{N}_{0;\tilde{m}}^d$，选择由 $2\pi\mathbb{Z}^d$-周期三角多项式构成的 $d_{\mathsf{M}}r \times d_{\mathsf{M}}r$ 个矩阵 $E_{\alpha,\ \beta,\ 1}$ 以及 $E_{\alpha,\ \beta,\ 1}$，使得 $E_{\alpha,\ \beta} = E_{\alpha,\ \beta,\ 1}^{\mathsf{T}} E_{\alpha,\ \beta,\ 2}$。定义 $\breve{b}_{\alpha,\ \beta,\ k}, \breve{\breve{b}}_{\alpha,\ \beta,\ k} \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{1\times r}$ 对于 $k =$

$1,\dots,d_{\mathsf{M}}r$ 以及所有 $\alpha\in\mathbb{N}_{0;m}^d,\beta\in\mathbb{N}_{0;\tilde{m}}^d$ 通过

$$\widehat{\breve{b}_{\alpha,\beta}}(\xi):=\begin{bmatrix}\widehat{\breve{b}_{\alpha,\beta,1}}(\xi)\\ \vdots\\ \widehat{\breve{b}_{\alpha,\beta,d_{\mathsf{M}}r}}(\xi)\end{bmatrix}:=E_{\alpha,\beta,1}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}(\xi)\begin{bmatrix}\widehat{\Delta_\alpha}(\xi)\\ \mathbf{0}_{d_{\mathsf{M}}(r-1)\times r}\end{bmatrix},\tag{3.20}$$

$$\widehat{\breve{\breve{b}}_{\alpha,\beta}}(\xi):=\begin{bmatrix}\widehat{\breve{\breve{b}}_{\alpha,\beta,1}}(\xi)\\ \vdots\\ \widehat{\breve{\breve{b}}_{\alpha,\beta,d_{\mathsf{M}}r}}(\xi)\end{bmatrix}:=E_{\alpha,\beta,2}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}(\xi)\begin{bmatrix}\widehat{\Delta_\beta}(\xi)\\ \mathbf{0}_{d_{\mathsf{M}}(r-1)\times r}\end{bmatrix},\tag{3.21}$$

其中 $\mathbf{0}_{t\times q}$ 表示 $t\times q$ 零矩阵。回顾一下，对于所有矩阵值滤波器 u，$P_{u;\mathsf{M}}(\xi)=[\widehat{u}(\xi+2\pi\omega_1)\dots,\widehat{u}(\xi+2\pi\omega_{d_{\mathsf{M}}})]$，如式 (2.10) 所示。不难看出

$$\begin{aligned}P_{\breve{b}_{\alpha,\beta};\mathsf{M}}(\xi)&=E_{\alpha,\beta,1}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}(\xi)D_{\Delta_\alpha,0;\mathsf{M}}(\xi)\\&=E_{\alpha,\beta,1}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)E_{\Delta_\alpha,0;\mathsf{M}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\overline{\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}(\xi)}^{\mathsf{T}},\end{aligned}\tag{3.22}$$

其中，最后一个等式由式 (3.9) 和 $\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}^{\mathsf{T}}=d_{\mathsf{M}}I_{d_{\mathsf{M}}r}$ 得出。同理，

$$P_{\breve{\breve{b}}_{\alpha,\beta};\mathsf{M}}(\xi)=E_{\alpha,\beta,2}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)E_{\Delta_\beta,0;\mathsf{M}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\overline{\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}(\xi)}^{\mathsf{T}}.\tag{3.23}$$

由式 (3.18)、(3.19)、(3.22) 和 (3.23) 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\breve{a},\breve{\breve{a}},I_r}(\xi)&=\overline{\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\mathcal{N}_{\breve{a},\breve{\breve{a}},I_r}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\mathsf{F}_{r;\mathsf{M}}(\xi)\\&=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_{0;m}^d,\beta\in\mathbb{N}_{0;\tilde{m}}^d}\overline{P_{\breve{b}_{\alpha,\beta};\mathsf{M}}(\xi)}^{\mathsf{T}}P_{\breve{\breve{b}}_{\alpha,\beta};\mathsf{M}}(\xi).\end{aligned}\tag{3.24}$$

定义

$$\begin{aligned}\{\breve{b}_\ell:\ell=1,\dots,s\}&:=\{\breve{b}_{\alpha,\beta}:\alpha\in\mathbb{N}_{0;m}^d,\quad\beta\in\mathbb{N}_{0;\tilde{m}}^d\},\\\{\breve{\breve{b}}_\ell:\ell=1,\dots,s\}&:=\{\breve{\breve{b}}_{\alpha,\beta}:\alpha\in\mathbb{N}_{0;m}^d,\quad\beta\in\mathbb{N}_{0;\tilde{m}}^d\},\end{aligned}$$

并令 $\breve{b}:=[\breve{b}_1^{\mathsf{T}},\dots,\breve{b}_s^{\mathsf{T}}]^{\mathsf{T}},\breve{\tilde{b}}:=[\tilde{b}_1^{\mathsf{T}},\dots,\tilde{b}_s^{\mathsf{T}}]^{\mathsf{T}}$。于是 (3.24) 可写为

$$\mathcal{M}_{\breve{a},\breve{\breve{a}},I_r}(\xi)=\overline{P_{\breve{b};\mathsf{M}}(\xi)}^{\mathsf{T}}P_{\breve{\breve{b}};\mathsf{M}}(\xi),$$

这等价于说 $(\{\breve{a};\breve{b}\},\{\breve{\breve{a}};\breve{\tilde{b}}\})_{I_r}$ 是一个满足以下条件的基于 OEP 的对偶 M-框架小波滤波器组

$$\overline{\widehat{\breve{a}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\breve{\breve{a}}}(\xi+2\pi\omega)+\overline{\widehat{\breve{b}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\breve{\breve{b}}}(\xi+2\pi\omega)=\boldsymbol{\delta}(\omega)I_r,\qquad\xi\in\mathbb{R}^d,\omega\in\Omega_{\mathsf{M}}.\tag{3.25}$$

现在通过以下方式定义 $\mathring{b},\mathring{\tilde{b}},b,\tilde{b}\in(l_0(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}$

$$\widehat{\mathring{b}}:=\widehat{\breve{b}}\widehat{U}^{-1},\quad\widehat{\mathring{\tilde{b}}}:=\widehat{\breve{\tilde{b}}}\overline{\widehat{U}}^{\mathsf{T}},\quad\widehat{b}:=\widehat{\mathring{b}}\widehat{\theta}^{-1},\quad\widehat{\tilde{b}}:=\widehat{\mathring{\tilde{b}}}\widehat{\tilde{\theta}}^{-1}.$$

由 (3.25) 可知，$(\{\mathring{a};b\},\{\tilde{a};b\})_{I_r}$ 是一个满足以下条件的基于 OEP 的对偶 M-框架小波滤波器组

$$\overline{\widehat{\mathring{a}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\mathring{\tilde{a}}}(\xi+2\pi\omega)+\overline{\widehat{\mathring{b}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\mathring{\tilde{b}}}(\xi+2\pi\omega)=\boldsymbol{\delta}(\omega)I_r,\qquad\xi\in\mathbb{R}^d,\omega\in\Omega_{\mathsf{M}},$$

且 $(\{a;b\},\{\tilde{a};b\})_\Theta$（其中 $\Theta:=\theta^\star*\theta$）是满足 (2.7) 的基于 OEP 的对偶 M-框架小波滤波器组。由 (3.15) 和 (3.20)，我们有

$$\begin{aligned}\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\xi)\overline{\widehat{\mathring{b}}(\xi)}^{\mathsf{T}}&=\overline{\widehat{d}(\xi)^{-1}\widehat{\mathring{\phi}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\overline{\widehat{\mathring{b}}(\xi)}^{\mathsf{T}}+\mathcal{O}(\|\xi\|^m)=\overline{\widehat{d}(\xi)}^{-1}\overline{\widehat{\mathring{\phi}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\overline{\widehat{\breve{b}}(\xi)}^{\mathsf{T}}+\mathcal{O}(\|\xi\|^m)\\&=\overline{\widehat{d}(\xi)}^{-1}(1,0,\dots,0)\overline{\widehat{\breve{b}}(\xi)}^{\mathsf{T}}+\mathcal{O}(\|\xi\|^m)=\mathcal{O}(\|\xi\|^m),\quad\xi\to0,\end{aligned}\tag{3.26}$$

其中 $d \in l_0(\mathbb{Z}^d)$ 与 $\widehat{d}(0) \neq 0$ 和 (3.15) 中的相同。类似地，由 (3.14) 和 (3.21) 可得

$$\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\xi)\overline{\hat{\mathring{b}}(\xi)}^{\mathsf{T}} = \mathcal{O}(\|\xi\|^m), \qquad \xi \to 0. \tag{3.27}$$

另一方面，由（3.15）和细化关系可立即得出

$$\widehat{\mathring{\phi}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)} = \widehat{\mathring{a}}\,\widehat{\phi}$$

那个

$$\frac{\widehat{d}(\xi)}{\widehat{d}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)}\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\xi)\overline{\hat{\mathring{a}}(\xi)}^{\mathsf{T}} = \widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi) + \mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}), \qquad \xi \to 0.$$

因此，由定理 2.2 可知，$\mathrm{bo}(\{\mathring{a};\mathring{b}\}, \mathsf{M}, \mathsf{N}) = m = \mathrm{sr}(\mathring{a}; \mathsf{M})$。这就证明了第 (2) 项。

现在定义向量函数 ψ 和 $\tilde{\psi}$，如式 (2.5) 和 (2.6) 所示。由 (3.14)、(3.15)、(3.26)˜ 和 (3.27) 可得，$\mathrm{vm}(\psi) = m$ 且 $\mathrm{vm}(\tilde{\psi}) = \tilde{m}$。进一步注意到

$$\overline{\hat{\phi}(0)}^{\mathsf{T}}\,\widehat{\Theta}(0)\hat{\tilde{\phi}}(0) = \overline{\hat{\mathring{\phi}}(0)}^{\mathsf{T}}\hat{\tilde{\phi}}(0) = 1.$$

。由定理 2.1 可知，$(\{\mathring{\phi};\ \psi\}, \{\tilde{\phi};\ \tilde{\psi}\})$ 是 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 中的对偶 M-框架小波。这就证明了第 (3) 项，至此证明完成。□

对于 $r = 1$ 的情形，不宜期待第 (1) 项和第 (2) 项成立，这是因为滤波器$\theta \in l_0(\mathbb{Z}^d)$ 强可逆，当且仅当对于某些 $c \in \mathbb{C}$ 和 $k \in \mathbb{Z}^d$，$\theta = c\boldsymbol{\delta}(\cdot - k)$；而使用此类滤波器会失去 OEP 在增加框架小波生成元的消失矩方面的优势。不过，定理 3.1 证明中的矩阵分解技术可用于推导出以下针对 $r = 1$ 情形的结果。

推论 3.4. 设 M 为一个 $d \times d$ 膨胀矩阵，且 $\phi, \tilde{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d)$ 是紧支撑 ⌢ ⌢可细化函数，满足 $\widehat{\phi}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi) = \widehat{a}(\xi)\widehat{\phi}(\xi)$ 和 $\widehat{\tilde{\phi}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi) = \widehat{\tilde{a}}(\xi)\,\widehat{\tilde{\phi}}(\xi)$，其中 $a, \tilde{a} \in l_0(\mathbb{Z}^d)$ 分别具有关于 M 的 $\tilde{m}$ 阶和 m 和规则，其匹配滤波器为 $\upsilon, \tilde{\upsilon} \in l_0(\mathbb{Z}^d)$。假设⌢ $\widehat{\upsilon}(0)\widehat{\phi}(0) = \widehat{\tilde{\upsilon}}(0)\,\widehat{\tilde{\phi}}(0) = 1$。那么存在 $b, \tilde{b} \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{s\times 1}$ 以及 $\theta, \tilde{\theta} \in l_0(\mathbb{Z}^d)$，使得

˜(1) $(\{a;\ b\}, \{\tilde{a}; b\})_{\theta^**\tilde{\theta}}$ 构成一个基于 OEP 的对偶 M-框架小波滤波器组。

。(2) $(\{\mathring{\phi};\ \psi\}, \{\tilde{\phi};\ \tilde{\psi}\})$ 是 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 中的紧支撑对偶 M-框架小波，其中 $\mathring{\phi}$、ψ、$\tilde{\phi}$ 和 $\tilde{\psi}$ 按照 (2.5) 和 (2.6) 中的定义给出。此外，$\mathrm{vm}(\psi) = m$，且 $\mathrm{vm}(\tilde{\psi}) = \tilde{m}$。

3.2. 基于 OEP 的平衡对偶多框架小波的结构刻画。要构造具有高平衡阶数的基于 OEP 的对偶多框架小波，最重要的一步是˜确定一对平衡矩校正滤波器 θ 和 $\tilde{\theta}$。本小节给出关于平衡矩校正滤波器的完整判据，从而建立了对具有高平衡阶数的基于 OEP 的对偶多框架小波的全面结构刻画。

定理 3.1 的证明为平衡矩校正滤波器的要求提供了一些线索。下述定理给出了构造具备所有所需性质的基于 OEP 的对偶框架小波的充分条件。

定理 3.5. 设 M 为一个 $d \times d$ 膨胀矩阵，$r \geqslant 2$ 为一个整数。设 $\phi, \tilde{\phi} \in (L_2(\mathbb{R}^d))^r$ 为与细化掩码 a, $\tilde{a} \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$相关联的紧支撑 M-可细化向量函数。假设 $\mathrm{sr}(a, \mathsf{M}) = \tilde{m}$ 且 $\mathrm{sr}(\tilde{a}, \mathsf{M}) = m$，并分别具有匹配滤波器 $\upsilon, \tilde{\upsilon} \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{1\times r}$，使得⌢ ⌢ ˜满足 $\widehat{\upsilon}(0)\phi(0) \neq 0$ 且 $\tilde{\upsilon}(0)\phi(0) \neq 0$。设 N 为一个 $d \times d$ 整数矩阵，且 $|\det(\mathsf{N})| = r$，并按 (2.20) 定义⌢ Υ_{N}。

设 θ、$\tilde{\theta} \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$ 为强可逆有限支撑滤波器。那么，如果满足以下条件，θ 和 $\tilde{\theta}$ 是细化掩模 a 和 $\tilde{a}$ 的一对 E_{N} 平衡矩校正滤波器：

（i）矩条件 (3.14)、(3.15) 和 (3.16) 对于 $\xi \to 0$ 成立，其中 c、$d \in l_0(\mathbb{Z}^d)$ 满足 $\widehat{c}(0) \neq 0$ 且 $\widehat{d}(0) \neq 0$，并且存在某些 C、$\tilde{C} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，其中 $\widehat{\mathring{v}} := \widehat{v}\widehat{\theta}^{-1}$、$\widehat{\mathring{\phi}} := \widehat{\theta\phi}$、$\widehat{\mathring{\tilde{v}}} := \widehat{\tilde{v}}\widehat{\tilde{\theta}}^{-1}$ 且 $\widehat{\mathring{\tilde{\phi}}} := \widehat{\theta\tilde{\phi}}$。

反之，假设 θ 和 θ 是一对分别对应细化掩码 a 和 $\tilde{a}$的 E_{N}-平衡矩校正滤波器，并且还满足以下条件：

(ii) 1 是 $\widehat{a}(0)$的一个单特征值，并且 $\widehat{\mathring{a}}(0)$。此外，

$$\lambda^{\alpha} I_r - \widehat{a}(0), \quad I_r - \lambda^{\beta}\widehat{a}(0), \quad I_r - \lambda^{\alpha}\widehat{\tilde{a}}(0), \quad \lambda^{\beta} I_r - \widehat{\tilde{a}}(0)$$

对于所有满足 $0 < |\alpha| < \tilde{m}$ 和 $0 < |\beta| < m$的 α、$\beta \in \mathbb{N}_0^d$，它们都是可逆矩阵，其中 $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$是M的特征值向量。

(iii) $\widehat{p}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\widehat{\Upsilon}_{\mathsf{N}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi) = \widehat{p}(0)\widehat{\Upsilon}_{\mathsf{N}}(\xi) + \mathcal{O}(\|\xi\|^m)$，因为对于某个满足 $\widehat{p}(0) \neq 0$ 的 $p \in l_0(\mathbb{Z}^d)$，有 $\xi \to 0$，其中 $\widehat{\mathring{\tilde{a}}} := \widehat{\tilde{\theta}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)\widehat{\tilde{a}}\widehat{\tilde{\theta}}^{-1}$ 的定义与 (3.2) 中相同。

(iv) $\widehat{q}(\xi)\overline{\widehat{\mathring{a}}(\xi)\,\widehat{\Upsilon}_{\mathsf{N}}(\xi)}^{\mathsf{T}} = \widehat{q}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\overline{\widehat{\Upsilon}_{\mathsf{N}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)}^{\mathsf{T}}$

对于某个满足 $\widehat{q}(0) \neq 0$ 的 $q \in l_0(\mathbb{Z}^d)$，有 $+\mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}})$，因为 $\xi \to 0$。于是命题 (i) 必须成立。

证明。假设命题 (i) 成立，则由定理 3.1 的证明可立即得出：θ 和 θ 是针对细化掩码 a 和 $\tilde{a}$ 的一对 E_{N}-平衡矩校正滤波器。

反之，设 θ 是关于细化掩码 a 和 $\tilde{a}$的一对 E_{N}平衡矩校正滤波器。按照 (3.1) 定义 $\mathring{a}, \mathring{\tilde{a}} \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{r\times r}$，并按照 (3.2) 定义 $\mathring{b}, \mathring{\tilde{b}} \in (l_0(\mathbb{Z}^d))^{s\times r}$。由定理 3.1 的第 (2) 项可得

$$\overline{\widehat{\mathring{\tilde{a}}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\mathring{a}}(\xi) + \overline{\widehat{\mathring{\tilde{b}}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\mathring{b}}(\xi) = I_r, \tag{3.28}$$

且 $\mathrm{bo}(\{\mathring{a};\, b\}, \mathsf{M}, \mathsf{N}) = m$。由定理 2.2 可得

$$\widehat{\Upsilon}_{\mathsf{N}}(\xi)\overline{\widehat{\mathring{b}}(\xi)}^{\mathsf{T}} = \mathcal{O}(\|\xi\|^m), \quad \widehat{\Upsilon}_{\mathsf{N}}(\xi)\overline{\widehat{\mathring{\tilde{a}}}(\xi)}^{\mathsf{T}} = \widehat{\mathring{c}}(\xi)\widehat{\Upsilon}_{\mathsf{N}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi) + \mathcal{O}(\|\xi\|^m), \quad \xi \to 0, \tag{3.29}$$

对某个 $\mathring{c} \in l_0(\mathbb{Z}^d)$，满足 $\widehat{\mathring{c}}(0) \neq 0$。

另外，假设条件 (ii)–(iv) 均成立。

左乘 $\widehat{\Upsilon}_{\mathsf{N}}$ 在 (3.28) 的两边，并利用性质 (iv)，可得

$$\widehat{\Upsilon}_{\mathsf{N}}(\xi) = \widehat{\mathring{c}}(\xi)\widehat{\Upsilon}_{\mathsf{N}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\widehat{\mathring{\tilde{a}}}(\xi) + \mathcal{O}(\|\xi\|^m) = \widehat{\mathring{c}}(\xi)\frac{\widehat{p}(\xi)}{\widehat{p}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)}\widehat{\Upsilon}_{\mathsf{N}}(\xi) + \mathcal{O}(\|\xi\|^m), \quad \xi \to 0.$$

由上述关系可得 $\mathring{c}(0) = 1$，因此

$$\widehat{\mathring{d}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\widehat{\Upsilon}_{\mathsf{N}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\widehat{\mathring{\tilde{a}}}(\xi) = \widehat{\mathring{d}}(\xi)\widehat{\Upsilon}_{\mathsf{N}}(\xi) + \mathcal{O}(\|\xi\|^m), \quad \xi \to 0, \tag{3.30}$$

其中 $\mathring{d} \in l_0(\mathbb{Z}^d)$ 满足

$$\widehat{\mathring{d}}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty}\widehat{\mathring{c}}((\mathsf{M}^{\mathsf{T}})^{-j}\xi) + \mathcal{O}(\|\xi\|^m), \qquad \xi \to 0.$$

此外，由 (3.29) 中的第二个关系容易看出

$$\overline{\widehat{\mathring{d}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\widehat{\Upsilon}_{\mathsf{N}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)}^{\mathsf{T}} = \widehat{\mathring{a}}(\xi)\overline{\widehat{\mathring{d}}(\xi)\widehat{\Upsilon}_{\mathsf{N}}(\xi)}^{\mathsf{T}} + \mathcal{O}(\|\xi\|^m), \quad \xi \to 0. \tag{3.31}$$

现在，我们应用 [16, 引理 2.2] 证明 (3.14) 和 (3.15) 必须成立。

由于 $\tilde{a}$ 具有与匹配滤波器 $\tilde{v}$ 相关的和规则 m，其中 $\tilde{v} := \tilde{v}\theta$，因此我们有 $\mathring{v}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\mathring{\tilde{a}}(\xi) = \mathring{v}(\xi) + \mathcal{O}(\|\xi\|^m)$，其中 $\xi \to 0$。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，定义 $\otimes^n A := A \otimes \cdots \otimes A$，其中包含 A的 n 个副本。回顾一下，若A、B、C和 E是矩阵，且其维数使得可以进行矩阵乘积 AC和 BE，

则有 $(A\otimes B)(C\otimes E)=(AC)\otimes(BE)$。因此，通过归纳法可得 $(\otimes^n(AC))\otimes(BE)=[(\otimes^n A)\otimes B][(\otimes^n C)\otimes E]$。此外，定义微分算子向量

$$D:=(\partial_1,\dots,\partial_d),\ \text{where}\ \partial_j:=\frac{\partial}{\partial\xi_j},\quad j=1,\dots,d. \tag{3.32}$$

由此可得

$$\left[(\otimes^j D)\otimes\left(\hat{\mathring{\tilde{v}}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)\hat{\mathring{\tilde{a}}}\right)\right](0)=[(\otimes^j D)\otimes\hat{\mathring{\tilde{v}}}](0),\qquad j=1,\dots,m-1. \tag{3.33}$$

重新整理（3.33）可得

$$\left[(\otimes^j D)\otimes\left(\hat{\mathring{\tilde{v}}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)\hat{\mathring{\tilde{a}}}(0)-\hat{\mathring{\tilde{v}}}\right)\right](0)=\left[(\otimes^j D)\otimes\left(\hat{\mathring{\tilde{v}}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)(\hat{\mathring{\tilde{a}}}(0)-\hat{\mathring{\tilde{a}}})\right)\right](0), \tag{3.34}$$

对所有 $j=1,\dots,m-1.$，由广义乘积法则可知，（3.34）右侧仅涉及 $\partial^\mu\tilde{v}(0)$ 和 $|\mu|<j$。经计算可得

$$\left[(\otimes^j D)\otimes\left(\hat{\mathring{\tilde{v}}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)\hat{\mathring{\tilde{a}}}(0)-\hat{\mathring{\tilde{v}}}\right)\right](0)=\left([(\otimes^j D)\otimes\hat{\mathring{\tilde{v}}}](0)\right)[(\otimes^j\mathsf{M}^{\mathsf{T}})\otimes\hat{\mathring{\tilde{a}}}(0)-I_{d^jr}], \tag{3.35}$$

对所有 $j\in\mathbb{N}$。现在，根据条件 (iii) 关于 $\mathring{a}$ 的要求，矩阵 $[(\otimes^j\mathsf{M}^{\mathsf{T}})\otimes\mathring{a}(0)-I_{d^jr}]$ 对 $j=1,\dots,m-1$ 可逆。此外，由（3.34）和（3.35）可知，除一个乘法常数外，$\hat{\mathring{\tilde{v}}}$ 的值 $\partial^\mu\mathring{\tilde{v}}(0)$ $|\mu|<m$ 可由 $\mathring{\tilde{v}}(0)\mathring{a}(0)=\mathring{\tilde{v}}(0)$ 唯一确定，且

$$[(\otimes^j D)\otimes\hat{\mathring{\tilde{v}}}](0)=\left(\left[(\otimes^j D)\otimes\left(\hat{\mathring{\tilde{v}}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)(\hat{\mathring{\tilde{a}}}(0)-\hat{\mathring{\tilde{a}}})\right)\right](0)\right)[(\otimes^j\mathsf{M}^{\mathsf{T}})\otimes\hat{\mathring{\tilde{a}}}(0)-I_{d^jr}]^{-1},$$

对所有 $j=1,\dots,m-1$。

接下来，注意到细化关系 $\mathring{\phi}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)=\hat{\mathring{a}}\mathring{\phi}$（其中 $\mathring{\phi}=\widehat{\theta\phi}$）成立。这意味着

$$[(\otimes^j D)\otimes\hat{\mathring{\phi}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)](0)=[(\otimes^j D)\otimes(\hat{\mathring{a}}\hat{\mathring{\phi}})](0),\qquad j\in\mathbb{N}. \tag{3.36}$$

重排 (3.36) 得到

$$\left[(\otimes^j D)\otimes\left(\hat{\mathring{\phi}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)^{\mathsf{T}}-\hat{\mathring{\phi}}^{\mathsf{T}}\hat{\mathring{a}}(0)^{\mathsf{T}}\right)\right](0)=\left[(\otimes^j D)\otimes\left(\hat{\mathring{\phi}}^{\mathsf{T}}(\hat{\mathring{a}}^{\mathsf{T}}-\hat{\mathring{a}}(0)^{\mathsf{T}})\right)\right](0), \tag{3.37}$$

对所有 $j\in\mathbb{N}$。注意，(3.37) 右端只涉及 $\partial^\mu\hat{\mathring{\phi}}(0)$，其中 $|\mu|<j$。此外，直接计算可得

$$\begin{aligned}&\left[(\otimes^j D)\otimes\left(\hat{\mathring{\phi}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)^{\mathsf{T}}-\hat{\mathring{\phi}}^{\mathsf{T}}\hat{\mathring{a}}(0)^{\mathsf{T}}\right)\right](0)\\&=\left([(\otimes^j D)\otimes\hat{\mathring{\phi}}^{\mathsf{T}}](0)\right)[(\otimes^j\mathsf{M}^{\mathsf{T}})\otimes I_r-(\otimes^j I_d)\otimes\hat{\mathring{a}}(0)],\end{aligned} \tag{3.38}$$

对所有 $j\in\mathbb{N}$。现在，根据条件 (iii) 中关于 $\mathring{a}$ 的要求，矩阵 $[(\otimes^j\mathsf{M}^{\mathsf{T}})\otimes I_r-(\otimes^j I_d)\otimes\hat{\mathring{a}}(0)]$ 对 $j=1,\dots,m-1$ 可逆。此外，由 (3.37) 和 (3.38) 可知，除相差一个乘法常数外，$\partial^\mu\hat{\mathring{\phi}}(0)$ $|\mu|<m$ 的值由 $\hat{\mathring{\phi}}(0)=\hat{\mathring{a}}(0)\hat{\mathring{\phi}}(0)$ 唯一确定，并且

$$\begin{aligned}&[(\otimes^j D)\otimes\hat{\mathring{\phi}}^{\mathsf{T}}](0)\\&=\left(\left[(\otimes^j D)\otimes\left(\hat{\mathring{\phi}}^{\mathsf{T}}(\hat{\mathring{a}}^{\mathsf{T}}-\hat{\mathring{a}}(0)^{\mathsf{T}})\right)\right](0)\right)[(\otimes^j\mathsf{M}^{\mathsf{T}})\otimes I_r-(\otimes^j I_d)\otimes\hat{\mathring{a}}(0)]^{-1},\end{aligned}$$

对于所有 $j=1,\dots,m-1.$

因此，根据上述分析并利用 (3.30) 和 (3.31)，我们得出，对于某个 $\tilde{C}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，(3.15) 成立，其中 $d\in l_0(\mathbb{Z}^d)$ 是 $\mathring{d}$ 的非零标量倍数。

另一方面，条目 (ii) 和条目 (iv) 中关于 $\mathring{\tilde{a}}$ 的条件共同推出

$$\widehat{\mathring{\tilde{\phi}}}(\xi)=K\widehat{q}(\xi)\overline{\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}(\xi)}}^{\mathsf{T}}+\mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}),\qquad \xi\to 0, \tag{3.39}$$

对某个非零常数 K成立。由于 θ 和 θ 是一对用于细化掩码 a 和 $\tilde{a}$的 E_{N}平衡矩校正滤波器，特别地，定理 3.1 的第 (3) 项成立。于是，$\mathrm{vm}(\psi)=\tilde{m}$ 和 (3.39) 表明，当 $\xi\to 0$时，$\widehat{\mathring{\tilde{b}}}(\xi)\,\overline{\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\xi)}^{\mathsf{T}}=\mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}})$。现在，在 (3.28) 两边右乘 $\overline{\widehat{q}\,\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}}^{\mathsf{T}}$，得到

$$\overline{\widehat{q}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)}\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\widehat{\mathring{a}}(\xi)=\overline{\widehat{q}(\xi)}\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\xi)+\mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}}),\quad \xi\to 0. \tag{3.40}$$

由于 $\mathring{a}$具有 $\tilde{m}$和规则，且匹配滤波器 $\widehat{\mathring{v}}:=\widehat{v}\widehat{\theta}^{-1}$，我们有，当$\xi\to 0$时，$\widehat{\mathring{v}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)\widehat{\mathring{a}}(\xi)=\widehat{\mathring{v}}(\xi)+\mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}})$。此外，$\mathring{\tilde{a}}$ 满足细化方程 $\tilde{\phi}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\cdot)=\mathring{\tilde{a}}\tilde{\phi}$。根据第 (iii) 项中关于$\mathring{a}$的条件，由 (3.39) 和 (3.40) 可知，对于某个 $C\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，(3.14) 必须成立，其中 $c\in l_0(\mathbb{Z}^d)$ 是 q 的非零标量倍数。

$\overline{\mathring{\tilde{\phi}}}^{\mathsf{T}}$ $\widehat{\mathring{v}}$ $\widehat{\mathring{v}}$ $\widehat{\mathring{\tilde{a}}}$ $\tilde{\phi}$ $\tilde{\phi}$ $\tilde{\tilde{\phi}}$最后，在（3.28）式左乘 ϕ，并右乘 ϕ（其中 $\phi:=\theta\phi$），得到

$$\overline{\widehat{\mathring{\tilde{\phi}}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\mathring{\tilde{\phi}}}(\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\xi)=\overline{\widehat{\mathring{\tilde{\phi}}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\mathring{\tilde{\phi}}}(\xi)+\mathcal{O}(\|\xi\|^{\tilde{m}+m}),\quad \xi\to 0,$$

且（3.16）由上述恒等式得出。这证明了第（i）项，至此证明完成。 □

4. An Example of Balanced Moment Correction Filters

示例 1。考虑紧支撑的 $M_{\sqrt{2}}$-可细化向量函数 $\phi=(\phi_1,\phi_2)^{\mathsf{T}}$，其细化掩码 $a\in(l_0(\mathbb{Z}^2))^{2\times 2}$ 给定为

$$\widehat{a}(\xi)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 1+e^{i\xi_1}+e^{i\xi_2}+e^{i(\xi_1+\xi_2)}\\ 2e^{-i\xi_1} & 0\end{bmatrix}\quad and\quad M_{\sqrt{2}}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

滤波器 a 关于 $M_{\sqrt{2}}$具有 2 阶求和规则，并存在匹配滤波器 $\upsilon\in(l_0(\mathbb{Z}^2))^{1\times 2}$ 满足。

$$\widehat{v}(\xi)=\left(1,1+\frac{i}{2}(\xi_1+\xi_2)\right)+\mathcal{O}(\|\xi\|^2),\quad \xi=(\xi_1,\xi_2)\to(0,0).$$

可细化向量函数 ϕ 满足矩条件。

$$\widehat{\phi}(\xi)=\frac{1}{360}\begin{bmatrix}240-12(\xi_1^2+\xi_2^2)\\ 120-60i(\xi_1+\xi_2)-6(3\xi_1^2+5\xi_1\xi_2+3\xi_2^2+i(4\xi_1^3+9\xi_1^2\xi_2+9\xi_1\xi_2^2+4\xi_2^3))\end{bmatrix}+\mathcal{O}(\|\xi\|^4)$$

$as\ \xi=(\xi_1,\xi_2)\to(0,0).$

对于对偶可细化向量函数，我们取 $\tilde{\phi}=(\tilde{\phi}_1,\tilde{\phi}_2)^{\mathsf{T}}$，其细化掩码 $\tilde{a}\in(l_0(\mathbb{Z}^2))^{2\times 2}$ 给定为

$$\widehat{\tilde{a}}(\xi)=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}8 & 3+e^{-i\xi_1}+e^{-i\xi_2}+3e^{-i(\xi_1+\xi_2)}\\ 8e^{i\xi_1} & 1+3e^{i\xi_1}+3e^{-i\xi_2}+e^{i(\xi_1-\xi_2)}\end{bmatrix}.$$

滤波器 $\tilde{a}$ 关于 $M_{\sqrt{2}}$具有 2 阶求和规则，并且匹配滤波器 $\tilde{\upsilon}\in(l_0(\mathbb{Z}^2))^{1\times 2}$ 满足

$$\widehat{\tilde{v}}(\xi)=\left(1,1-\frac{i}{2}(\xi_1+\xi_2)\right)+\mathcal{O}(\|\xi\|^2),\quad \xi=(\xi_1,\xi_2)\to(0,0).$$

$\tilde{}$可细化向量函数 ϕ 满足矩条件

$$\widehat{\tilde{\phi}}(\xi)=\frac{1}{192}\begin{bmatrix}96-2(4\xi_1^2+\xi_1\xi_2+2\xi_2^2)\\ 96+48i(\xi_1+\xi_2)-2(10\xi_1^2+13\xi_1\xi_2+8\xi_2^2-i(6\xi_1^3+11\xi_1^2\xi_2+9\xi_1\xi_2^2+4\xi_2^3))\end{bmatrix}+\mathcal{O}(\|\xi\|^4)$$

当 $\xi=(\xi_1,\xi_2)\to(0,0)$ 时。

令 $\mathsf{N}=M_{\sqrt{2}}$，我们有 $\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}}(\xi)=(1,e^{i(\xi_1+\xi_2)/2})$。可以构造一对 E_{N}-平衡矩˜校正滤波器 $\theta,\theta\in(l_0(\mathbb{Z}^2))^{2\times2}$，其形式为

$$\widehat{\theta}(\xi)=\begin{bmatrix}p_1(\xi)&p_2(\xi)\\p_3(\xi)&p_4(\xi)\end{bmatrix},\quad \widehat{\tilde{\theta}}(\xi)=\begin{bmatrix}q_1(\xi)&q_2(\xi)\\q_3(\xi)&q_4(\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-d_3(\xi)&d_2(\xi)\\d_2(\xi)&-d_1(\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1(\xi)&c_2(\xi)\\c_2(\xi)&c_3(\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1(\xi)&s_2(\xi)\\s_3(\xi)&s_4(\xi)\end{bmatrix},$$

其中，p_j、q_j、s_j、$j=1$、2、3、4 以及 d_k、c_k、$k=1$、2、3 是如下给出的 $2\pi\mathbb{Z}^2$-周期三角多项式：

$$\begin{aligned}
p_1(\xi)&:=\frac{\sqrt{2}}{272}\left(542001-3225e^{-2i\xi_1}-7740e^{-i(\xi_1+\xi_2)}-265735e^{-i\xi_1}+12267e^{i\xi_2}-4522e^{i(\xi_1-\xi_2)}-273258e^{i\xi_1}\right),\\
p_2(\xi)&:=-\frac{\sqrt{2}}{17}e^{-i(\xi_1+\xi_2)}\left(645e^{-i\xi_1}-646\right),\\
p_3(\xi)&:=\frac{\sqrt{2}}{3264}e^{i(\xi_1+\xi_2)}\left[(7740e^{-2i\xi_1}-12267e^{-i\xi_1}+4522)e^{-2i\xi_2}-1075e^{-2i\xi_1}-89655e^{-i\xi_1}+90873\right.\\
&\qquad\left.+(3225e^{-3i\xi_1}+265735e^{-2i\xi_1}-544581e^{-i\xi_1}+274763)e^{-i\xi_2}\right],\\
p_4(\xi)&:=\frac{\sqrt{2}}{204}e^{-i\xi_1}(645e^{-i(\xi_1+\xi_2)}-646e^{-i\xi_2}-215).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_1(\xi):=&\frac{\sqrt{2}}{2350080}\left(152782870420-171803098950e^{-i\xi_1}-24271223880e^{-i\xi_2}-473689039775e^{i\xi_1}\right.\\
&+75422352630e^{i\xi_2}+2461284145e^{-i(\xi_1+\xi_2)}-3502342314e^{i(\xi_1+\xi_2)}+7992104616e^{i(\xi_1-\xi_2)}\\
&-4616116784e^{i(\xi_2-\xi_1)}+7473040038e^{-2i\xi_1}-9018774e^{-2i\xi_2}-8342459019e^{-3i\xi_1}+1511e^{-3i\xi_2}\\
&\left.+8967362e^{-i(\xi_1+2\xi_2)}-8333493168e^{-i(2\xi_1+\xi_2)}+576060810e^{-i(2\xi_1-\xi_2)}\right),\\
q_2(\xi):=&\frac{\sqrt{2}}{8}\left(-6+e^{-i\xi_1}+e^{-i\xi_2}\right),\\
q_3(\xi):=&\frac{\sqrt{2}}{2350080}\left(-41819386604+25602071226e^{-i\xi_1}-24343301544e^{-i\xi_2}+16567932951e^{i\xi_1}\right.\\
&-1735780129e^{i\xi_2}+24684568266e^{-i(\xi_1+\xi_2)}+1167447438e^{i(\xi_1+\xi_2)}+7992104616e^{i(\xi_1-\xi_2)}\\
&-7630304e^{i(\xi_2-\xi_1)}+7990728234e^{-2i\xi_1}-9006686e^{-2i\xi_2}-8342459019e^{-3i\xi_1}+1511e^{-3i\xi_2}\\
&\left.+8967362e^{-i(\xi_1+2\xi_2)}-8333493168e^{-i(2\xi_1+\xi_2)}+576060810e^{-i(2\xi_1-\xi_2)}\right),\\
q_4(\xi):=&\frac{\sqrt{2}}{8}\left(2+e^{-i\xi_1}+e^{-i\xi_2}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1(\xi):=&\frac{1}{1152}\left(846168+964186e^{i(\xi_1+\xi_2)}-581936e^{i\xi_1}+648973e^{i(\xi_1-\xi_2)}-65e^{2i\xi_2}-1876500e^{i\xi_2}\right.\\
&\left.-1253380e^{-i\xi_2}+912657e^{i(\xi_2-\xi_1)}+576e^{-i\xi_1}+604428e^{-i(\xi_1+\xi_2)}+263955e^{-2i\xi_1}\right),\\
d_2(\xi):=&(1-d_1(\xi)/d_1(0))^2,\quad d_3(\xi):=\frac{d_2(\xi)^2-1}{d_1(\xi)}.
\end{aligned}$$

$$c_1(\xi) := \frac{1}{96}\big(64e^{i(\xi_1+2\xi_2)} - 208e^{i(\xi_1+\xi_2)} + 203e^{i\xi_1} - 83e^{i(\xi_1-\xi_2)} - 62e^{2i\xi_2} + 199e^{i\xi_2} - 58 + 109e^{-2i\xi_2}$$
$$-17e^{i(\xi_2-\xi_1)} + 49e^{-i\xi_1} - 4e^{2i\xi_1}\big),$$
$$c_2(\xi) := (1 - c_1(\xi)/c_1(0))^2, \quad c_3(\xi) := \frac{c_2(\xi)^2 - 1}{c_1(\xi)}.$$

$$s_1(\xi) := \frac{1}{8}(6 - e^{-i\xi_1} - e^{-i\xi_2}), \quad s_2(\xi) := \frac{1}{8}(2 + e^{-i\xi_1} + e^{-i\xi_2}),$$
$$s_3(\xi) := \frac{1}{256}\big(-42e^{-i\xi_1} - 42e^{-i\xi_2} - 2e^{i(\xi_1-\xi_2)} + 6e^{i(\xi_1+\xi_2)} + 160 + 11e^{i\xi_2} + 6e^{-i(\xi_1+\xi_2)} - 2e^{i(\xi_2-\xi_1)}$$
$$+11e^{i\xi_1} + 12e^{-2i\xi_1} + 12e^{-2i\xi_2} - e^{-3i\xi_1} - e^{-3i\xi_2}\big),$$
$$s_4(\xi) := \frac{1}{256}\big(-6e^{-i\xi_1} - 6e^{-i\xi_2} + 2e^{i(\xi_1-\xi_2)} + 2e^{i(\xi_1+\xi_2)} - 112 + 5e^{i\xi_2} - 14e^{-i(\xi_1+\xi_2)} + 2e^{i(\xi_2-\xi_1)}$$
$$+5e^{i\xi_1} - 4e^{-2i\xi_1} - 4e^{-2i\xi_2} + e^{-3i\xi_1} + e^{-3i\xi_2}\big).$$

θ 和 $\tilde{\theta}$ 均为强可逆。定义 $\widehat{\mathring{\upsilon}} := \widehat{\upsilon}\widehat{\theta}^{-1}$、$\widehat{\mathring{\phi}} := \widehat{\theta}\widehat{\phi}$、$\widehat{\mathring{\tilde{\upsilon}}} := \widehat{\tilde{\upsilon}}\widehat{\tilde{\theta}}^{-1}$、$\widehat{\mathring{\tilde{\phi}}} := \widehat{\tilde{\theta}}\widehat{\tilde{\phi}}$，则有

$$\widehat{\mathring{\upsilon}}(\xi) = \overline{\widehat{\mathring{\phi}}(\xi)}^{\mathsf{T}} + \mathcal{O}(\|\xi\|^2) = \overline{\widehat{\mathring{\tilde{\phi}}}(\xi)}^{\mathsf{T}} + \mathcal{O}(\|\xi\|^2) = \widehat{\mathring{\tilde{\upsilon}}}(\xi) + \mathcal{O}(\|\xi\|^2)$$
$$= \widehat{c}(\xi)\widehat{\Upsilon_{\mathsf{N}}} + \mathcal{O}(\|\xi\|^2), \quad \xi \to (0,0),$$

其中 $\widehat{c}$ 是满足以下条件的某个 $2\pi\mathbb{Z}^2$-周期三角多项式

$$\widehat{c}(\xi) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{143\sqrt{2}}{8}i\xi_1 - \frac{\sqrt{2}}{24}i\xi_2 + \mathcal{O}(\|\xi\|^2), \quad \xi \to (0,0),$$

并且有 $\overline{\widehat{\mathring{\phi}}(\xi)}^{\mathsf{T}}\widehat{\mathring{\tilde{\phi}}}(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\|\xi\|^4)$ 作为 $\xi \to (0,0)$。

Acknowledgements

本文部分结果是在我的博士生导师 Bin Han 博士的指导下得出的。在此，我谨向他致以最诚挚的谢意。此外，我还要感谢期刊编辑对稿件的处理，以及匿名审稿人对文章内容的仔细审阅。

References

[1] Charina, M., Putinar, M., Scheiderer, C., St¨ockler, J.: 关于多元紧框架小波的代数视角。Constr. Approx. 38, 253–276 (2013)[2] Charina, M., Putinar, M., Scheiderer, C., St¨ockler, J.: 关于多元紧框架小波的代数视角（II）。Appl. Comput. Harmon. Anal. 39, 185–213 (2015)[3] Charina, M., St¨ockler, J.: 用于非规则多分辨率分析的紧框架小波。Appl. Comput. Harmon. Anal. 25, 98–113 (2008)[4] Charina, M., St¨ockler, J.: 基于半定规划的紧框架小波。J. Approx. Theory 162, 1429–1449 (2010)[5] Chui, C. K., He, W.: 与可细化函数相关联的紧支撑紧框架。Appl. Comput. Harmon. Anal. 8, 293–319 (2000)[6] Chui, C. K., He, W.: 通过克罗内克积构造多元紧框架。Appl. Comput. Harmon. Anal. 11, 305–312 (2001),[7] Chui, C. K., He, W., St¨ockler, J.: 具有最大消失矩的紧支撑紧框架与兄弟框架。Appl. Comput. Harmon. Anal. 13, 224–262 (2002)[8] Chui, C. K., Jiang, Q. T.: $\mathbb{R}^s$中的平衡多小波，Math. Comp. 74, 1323–1344 (2000)[9] Chui, C. K., Jiang, Q. T.: 多元平衡向量值可细化函数。载于《多元逼近的现代发展》，71–102，Internat. Ser. Numer. Math., 145，Birkh¨auser，巴塞尔，（2003）

[10] Daubechies, I., Han, B.: 任意两个可细化函数生成的对偶小波框架对。Constr. Approx. 20, 325–352 (2004)[11] Daubechies, I., Han, B., Ron, A., Shen, Z.: 框架小波：基于多分辨率分析的框架小波构造。Appl. Comput. Harmon. Anal. 14, 1–46 (2003)[12] Diao, C., Han, B.: 从任意可细化函数导出的具有高消失矩的拟紧框架小波。Appl. Comput. Harmon. Anal. 49, 123–151 (2020)[13] Diao, C., Han, B.: 广义矩阵谱分解与生成元数量最少的拟紧框架小波。Math. Comp. 89, 2867–2911 (2020)[14] Fan, Z., Ji, H., Shen, Z.: 对偶 Gramian 分析：对偶性原理与酉扩张原理。Math. Comp. 85, 239–270 (2016)[15] Han, B.: 关于对偶小波紧框架。Appl. Comput. Harmon. Anal. 4 , 380–413 (1997)[16] Han, B.: Sobolev 空间中的向量级联算法与可细化函数向量。J. Approx. Theory. 124 , 44–88 (2003)[17] Han, B.: 具有高平衡阶数和紧框架小波变换的对偶多小波框架。Appl. Comput. Harmon. Anal. 26 , 14–42 (2009)[18] Han, B.: 平衡多元双正交多小波与对偶多框架小波的结构。Math. Comp. 79, 917–951 (2010)[19] Han, B.: 框架小波与小波：算法、分析与应用。Applied and Numerical Harmonic Analysis。Birkh¨ auser/Springer，Cham，2017[20] Han, B., Jiang, Q. T., Shen, Z., Zhuang, X.: 具有高消失矩和平滑性的对称规范四分象限紧框架小波。Math. Comp. 87 , 347–379 (2018)[21] Han, B., Lu, R.: 具有高平衡阶数和紧框架小波变换的紧支撑拟紧多框架小波。Appl. Comput. Harmon. Anal. 51 , 295–332 (2021).[22] Han, B., Lu, R.: 从任意紧支撑可细化向量函数导出的具有高平衡阶数的多元拟紧框架小波。Sci. China Math. 65, 81–110 (2022).[23] Han, B., Mo, Q.: 由可细化函数向量生成的多小波框架。Adv. Comput. Math. 18 , 211–245 (2003)[24] Han, B., Mo, Q.: 具有三个生成元和高消失矩的对称多分辨率分析紧小波框架。Appl. Comput. Harmon. Anal. 18 , 67–93 (2005)[25] Hardin, D. P. and Roach, D. W.: 多小波预滤波器 I：保持逼近阶数的正交预滤波器$p \leqslant 2$，IEEE Tran. Ciruits and System-II, 45, 1119–1125, (1998).[26] Jiang, Q. T.: 对称酉矩阵扩张与对称正交多滤波器组的参数化。SIAM J. Matrix Anal. Appl. 23 , 167–186 (2001)[27] Jiang, Q. T., Shen, Z.: 具有规范滤波器的低维紧框架小波。J. Approx. Theory. 196 , 55–78 (2015)[28] Krivoshein, A., Protasov, V., Skopina, M.: 多元小波框架。Industrial and Applied Mathematics。Springer，新加坡，（2016）[29] Krivoshein, A. 多元对称插值对偶多小波框架。Symmetry,14, 1425, (2022). https://doi.org/10.3390/ sym14071425[30] Lai, M., St¨ockler,J.: 多元紧支撑紧小波框架的构造。Appl. Comput. Harmon. Anal. 21 , 324–348 (2006)[31] Lebrun, J., Vetterli, M.: 平衡多小波：理论与设计。IEEE Trans. Signal Process. 46 , 1119–1125 (1998)[32] Mo, Q.: 紧支撑对称 MTA 小波框架，阿尔伯塔大学博士论文，（2003）[33] Mo Q.: MRA 多小波紧框架的存在性。J. Concr. Appl. Math. 4, 415–433 (2006)[34] Ron, A., Shen, Z.: $L_2(\mathbb{R}^d)$中的仿射系统：分析算子的分析。J. Funct. Anal. 148 , 408–447 (1997)[35] San Antol´ín, A., Zalik, R. A.: 一些具有消失矩的光滑紧支撑紧小波框架。J. Fourier Anal. Appl.22, 887–909 (2016)[36] I. W. Selesnick，具有额外逼近性质的多小波基。IEEE Trans. Signal Process. 46 (1998), 2898–2908.[37] Selesnick, I. W.: 基于对称 FIR 滤波器的平衡多小波基。IEEE Trans. Signal Process. 48, 184–191 (2000)[38] Selesnick, I. W.: 具有零矩的光滑小波紧框架。Appl. Comput. Harmon. Anal. 10, 163–181 (2001)[39] Xia, X. G. , Hardin, D. P., Geronimo, J. S. and Suter, B.: 离散多小波变换预滤波器的设计，IEEE Trans. Signal Proc. 44, 25-35, (1996).College of Science

, Hohai University, Nanjing, China 211100. rlu3@hhu.edu.cn