arXiv:2305.01676v2 [gr-qc] 1 Nov 2023

# 平直准德西特时空的初始奇点与可延拓性

Ghazal Geshnizjani[1,2],Eric Ling[3,4] 和 Jerome Quintin[2,1,4]

[1] 周界理论物理研究所，*31 Caroline Street North*，滑铁卢，安大略省 *N2L 2Y5*，加拿大[2] 应用数学系和滑铁卢天体物理中心，滑铁卢大学，*200 University Avenue West*，滑铁卢，安大略省 *N2L 3G1*，加拿大[3] 哥本哈根几何与拓扑中心（*GeoTop*），数学科学系，哥本哈根大学，*DK-2100* 哥本哈根，丹麦[4] *Fields* 数学科学研究所，多伦多大学，*222 College Street*，多伦多，安大略省 *M5T 3J1*，加拿大

**摘要**

已有许多论述指出，暴胀时空在诸多情况下于过去方向上测地线不完备。然而，测地线不完备性是否意味着存在初始时空曲率奇点，或者时空是否可以延拓（可能延拓至宇宙的另一阶段），通常尚不得而知。这两个问题都具有重要的物理意义。在本文中，我们将进一步考察暴胀时空的几何结构，并研究这些问题。首先，在具有平坦空间截面的均匀各向同性宇宙学中，我们对过去的暴胀历史进行分类，确定其中哪些具有标量曲率奇点，哪些可能是可延拓的和/或无奇点的。随后，我们针对从过去无限固有时演化而来的准德西特时空，推导出适用于各种正则性类别的严格可延拓性判据。最后，我们表明，超越齐次性与各向同性之后，保持爱因斯坦场方程且具有理想流体的特殊连续延拓，在渐近意义下必须具有德西特宇宙的状态方程。对我们结果的一种解释是：过去永恒的暴胀情景在物理上极有可能是奇异的，除非其初始条件极为特殊。

# 目录

**1 引言 12 分类**

**暴胀过去的分类 2**

2.1 预备知识 .22.2 暴胀分类.32.3 过去渐近德西特 .9

**3 度规可延拓性 13**

3.1 更多预备知识 .133.2 热身：精确德西特 .133.3 连续可延拓性的条件 .153.4 提高正则性 .203.4.1 一次和二次连续可微 .203.4.2 高于二次的连续可微（直至光滑）. . . 243.5 关于曲率奇点的评论 .27**4 共形嵌入爱因斯坦静态宇宙 29**4.1 回顾平直德西特模型到爱因斯坦静态宇宙的共形嵌入 .304.2 准德西特时空到爱因斯坦静态宇宙的共形嵌入 .32

**5 宇宙学常数作为初始条件出现37**

5.1 宇宙学常数作为过去渐近德西特时空的初始条件出现.375.2 超越齐次性与各向同性. 395.3 在暴胀理论中的应用.43

**6 结论45**

6.1 总结 .456.2 讨论与未来方向.46**A 第 3.4.2 节的证明 49B 更多平滑可延拓示例 55 参考文献 57**

# 1 引言

暴胀是一种关于原初宇宙的理论，它能够很好地解决标准大爆炸宇宙学中的问题（磁单极子问题、视界问题、平坦性问题），并为产生大尺度结构的种子提供一个框架（例如，参见 [1–6]）。许多暴胀模型都能够与观测结果相符（近乎尺度不变且略带红倾斜的曲率功率谱、较小的张量标量比、较弱的非高斯性等；例如，参见 [7–9]）。然而，暴胀并不是一种关于“大爆炸”的理论，也就是说，它未必能告诉我们有关宇宙极早期起始（如果存在的话）的任何信息。

事实上，众所周知，如果满足某些能量条件（以及其他附加假设），那么宇宙在过去方向上是测地线不完备的 [10–13]（更具体地针对暴胀的定理也见 [14–18]）。此外，已有研究表明，始终处于膨胀状态的宇宙（按照适当定义的平均意义）同样在过去方向上是测地线不完备的 [19],，这证明了任何过去永恒的膨胀宇宙学，包括过去永恒暴胀，无论能量条件如何，都在过去方向上是测地线不完备的。然而，测地线不完备性并不能告诉我们任何有关时空奇点性质的信息（特别是，它并不总是意味着存在曲率奇点），这是所有测地线不完备性定理的一个众所周知的缺陷（尽管这些定理通常仍被称为“奇点定理”；综述和讨论见例如 [20] ）。在加速膨胀的均匀各向同性宇宙背景下，德西特（dS）时空是一个典型例子：平直 Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker（FLRW）区域（也称为德西特时空的平面坐标 [21]）只覆盖整个（全局）德西特时空的一半。因此，在平直 FLRW区域内，零测地线表现为过去不完备，但整个极大时空却是无奇点的。这一已知事实将在本文后文及其他文献中进行回顾，并可作为构造过去永恒且测地线完备的暴胀情景的基础（例如 [22–24]；相关方面见 [25, 26] ）。

关于暴胀之前实际存在的奇点及其强度，目前具体的普适性结果寥寥无几。通常尚不清楚，暴胀过去方向的测地线不完备性是否总是对应于类似“大爆炸”的初始奇点，或者时空实际上是否能够延拓至其过去边界之外。 [27] 首次朝这一方向迈出了一步（并在 [28–32] 中得到进一步发展和应用），其中探讨了准德西特时空中的奇点性质。在有关时空可延拓性与平行传播曲率奇点之间关系的数学结果 [33–37], 的基础上， [27, 29] 表明，为避免出现平行传播曲率奇点，宇宙必须足够迅速地趋近于德西特时空。

本文旨在考察暴胀时空的几何结构，并判定暴胀之前是否存在奇点，以及暴胀时空何时可能无奇点且可延拓。具体而言，我们将探讨判定度规可延拓性的充分条件。在此过程中，我们将拓展 [27, 29] 中取得的结果，并使其理论基础更加严谨。另一个相关的重要数学问题是确定时空何时无法在连续度规下延拓，即 $C^0$ 不可延拓。然而，这个问题向来难以解答，目前仅有部分结果（见 [38–44]）。在宇宙学背景下，已知具有有限粒子视界的 FLRW 时空是 $C^{0,1}$ 不可延拓的 [42]。此外，

某些 $C^0$不可延拓性结果可在球对称时空这一类别中得到 [38]。关于仍包含奇点的前大爆炸几何延拓研究，见 [45]。

正如第 2 节将从物理和数学上加以论证的那样，本文的框架设定在足够接近德西特时空平坦片的情形中。具体而言，我们将主要研究过去渐近平坦的德西特时空，并推导关于其可延拓性的条件。在关于类米尔恩时空度规可延拓性的主题上，本文将与 [38,46–49] 的研究存在许多相似之处；类米尔恩时空是空间曲率为负（而非零）的均匀各向同性宇宙。

本文结构如下：在第2节中，我们进一步介绍并阐明本研究关注的问题。具体而言，我们对平直 FLRW 时空中暴胀宇宙学可能的过去演化史进行分类。我们定义了各种暴胀类别，并说明哪些类别必然具有初始标量曲率奇点，哪些则未必。从无限久远的过去便开始暴胀的宇宙学（过去永恒）属于后一类，这促使我们寻找允许时空可延拓性的具体条件。我们定义了这类时空的一个一般性子类，并称之为“过去渐近平直德西特”。第3 节旨在给出过去永恒的暴胀时空在过去边界之外具有度规可延拓性的充分条件。为此，我们引入一组新的坐标，以便明确写出时空延拓。我们推导出尺度因子和/或哈勃参数（以及必要时其导数）的渐近判据，从而得到连续（$C^0$）、连续可微（$C^1$）、二阶连续可微（$C^2$）等（直至光滑；$C^\infty$）可延拓性。我们还讨论这些时空中标量曲率奇点与平行传播奇点的概念。第4节中，我们给出另一组坐标，在这组坐标下，过去渐近德西特时空可以连续延拓。我们通过证明这类时空可以共形嵌入爱因斯坦静态宇宙来实现这一点，这与精确德西特时空的情形相同。这也为第5节的结果奠定基础：假设爱因斯坦方程中包含理想流体，我们可以证明，在某些不要求均匀性与各向同性的可延拓性假设下，物质的初始状态方程必定对应于正宇宙学常数。（回想一下，德西特时空满足具有正宇宙学常数的爱因斯坦方程。）在介绍暴胀宇宙学中的一些应用之后，我们将在第6节总结并讨论研究结果，尤其是其物理应用、含义与诠释。

# 2 暴胀过去的分类

## 2.1 预备知识

本文前几节讨论具有平坦空间截面的齐次各向同性（FLRW）宇宙。 $3+1$ 维流形为 $M = I \times \mathbb{R}^3$，其中 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个（时间）开放区间。度量 $g$ 可以用多种方式表示，例如：

$$g = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 h_{\mathbb{E}} = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \left(\mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\Omega^2\right) , \tag{2.1}$$

其中 $h_{\mathbb{E}} := \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ 是通常的三维欧几里得度量，笛卡尔坐标 $(x,\ y,\ z)$ 与球坐标 $(r,\ \theta,\ \phi)$ 按通常方式相互转换。在

上式中，$\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2$ 是 $\mathbb{S}^2$ 上的圆度量。尺度因子 $a(t): I \to \mathbb{R}_{>0}$ 是物理时间 $t$ 的光滑、正且无量纲的函数，用于描述空间截面大小的演化。[1] 哈勃参数 $H(t): I \to \mathbb{R}$ 定义为 $H(t) := \dot{a}(t)/a(t)$，其中点表示对 $t$ 求导；它刻画了空间截面的膨胀或收缩速率。

在第2节中，我们用 $I$ 的下确界 $t_{\mathrm{ini}}$表示该值，因此它对应于此坐标系中共动观测者的“初始时刻”。或者 $t_{\mathrm{ini}} > -\infty$ 或$t_{\mathrm{ini}} = -\infty$。对于前一种情况，我们假设 $a(t) \searrow 0$ 当 $t \to t_{\mathrm{ini}}^+$时，即我们假设

$$t_{\mathrm{ini}} > -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to t_{\mathrm{ini}}^+} a(t) = 0^+ , \tag{2.2}$$

否则，时空很容易就能连续延拓到 $t < t_{\mathrm{ini}}$ 时刻，而我们希望忽略这类情况。对于后一种情况（$t_{\mathrm{ini}} = -\infty$），可能出现许多情形，例如$a(t)$ 在无限久远的过去可能趋于 0，也可能趋于无穷大（宇宙在渐近过去开始时便具有无限大的尺度，如反弹情景所示），还可能趋于某个常数（宇宙在渐近过去开始时接近闵可夫斯基时空，如徘徊情景所示）。反弹情景和徘徊情景已有大量文献探讨，此处不作综述（例如，参见 [50–54]）。本文其余部分（从第 3 节起），我们主要关注 $a(t) \searrow 0$ 当$t \to -\infty$时的情形。

## 2.2 暴胀分类

暴胀有多种定义方式，但就本文而言，我们将其定义为宇宙以加速速率膨胀的一段时间。因此，我们说，对于某个区间 $I_{\mathrm{inf}} \subset I$，

$$\dot{a}(t) > 0 \qquad \text{and} \qquad \ddot{a}(t) > 0 \tag{2.3}$$

对所有 $t \in I_{\mathrm{inf}}$ 均成立。由此，我们可以将暴胀情景（过去的演化）分为两种一般情形，每种情形又包含若干子情形：

1. 暴胀始于过去某个有限时刻，当时宇宙具有有限大小。因此，宇宙在暴胀之前已经经历了一段演化（我们称之为暴胀前阶段）。这相当于说，存在开始和结束时刻，分别记为 $t_1$，$t_2 \in \mathbb{R}$ 在这段时间内，宇宙处于暴胀状态，因此 $I_{\mathrm{inf}} = [t_1, t_2]$。注意，在暴胀开始时刻，宇宙具有有限大小（即 $0 < a(t_1) < \infty$），且膨胀率有限（即 $0 < H(t_1) < \infty$）。在暴胀之前，可能出现两种一般情形，因此我们定义两个子情形：

   (a) 在暴胀之前，宇宙始终处于减速膨胀状态，即对于所有$t \in I_{\text{pre-inf}}$： $\ddot{a}(t) \leq 0$ $= (t_{\mathrm{ini}}, t_1)$。正如我们即将证明的，这种情况意味着

   $$\lim_{t \to t_{\mathrm{ini}}^+} a(t) = 0^+ ,$$

   在该处标量曲率不变量发散，因此存在初始标量曲率奇点。示意见图 1。

[1] 宇宙学中的惯例是将当前时刻的尺度因子设为 $a_0 = 1$。它在其他时间的取值与电磁波的物理红移 $z$ 通过关系式 $1/a(t) = 1 + z$相关。

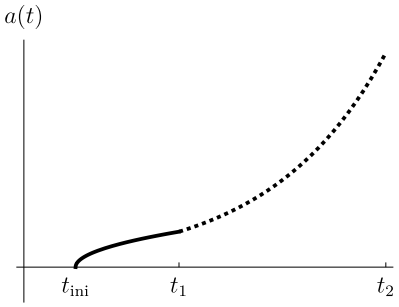



图1： 分类1a中尺度因子演化示例示意图。宇宙在区间$\dot{a}(t) > 0$和 $\ddot{a}(t) > 0$内处于暴胀状态，但在$[t_1, t_2]$至$t_{\rm ini}$ 的暴胀前阶段处于减速膨胀状态。 $t_1$在 $t_{\rm ini}$处达到奇点。

(b) 或者，暴胀之前，宇宙并非始终处于减速膨胀状态。在这种情况下，可能发生许多事情，例如：

i. 过去仍可能存在初始奇点；或者 ii. A. 宇宙可能缓慢趋近于尺度因子恒定的徘徊阶段（即过去渐近闵可夫斯基），此时它可能无奇点且测地线完备（左侧面板所示为一种示意图，见图2）；B. 或者宇宙可能经历无奇点反弹，在此之前宇宙从较大的状态开始收缩。右侧面板给出了示意图，见图2。

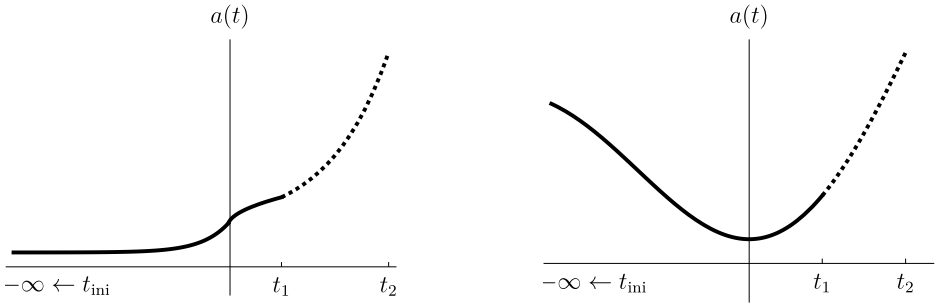



图2： 左图： 分类1(b)iiA中尺度因子演化示例示意图，宇宙从 $t_1$ 到 $t_2$处于暴胀状态，而在此之前，$a(t)$ 先后经历减速和加速。具体而言，宇宙在过去趋近于一个“徘徊阶段”，即当时间趋近于 $-\infty$时，尺度因子趋于一个正的常数。 右图： 分类1(b)iiB中尺度因子演化示例示意图，宇宙再次从 $t_1$ 到 $t_2$ 处于暴胀状态，并在此之前既经历加速也经历减速。具体而言，宇宙经历了无奇点反弹，即在 $a(t)$ 附近，从收缩转变为膨胀，且尺度因子达到非零最小值。如果尺度因子在过去增长至无穷大或趋于常数，则初始时刻 $t_{\rm ini}$ 将推至 $-\infty$。

这些后两种情形（徘徊和反弹）往往需要诉诸对广义相对论的某些修正、违反标准能量条件的物质

（尤其是零能量条件），或量子引力。尽管这里不对它们进行综述，但仍需强调，存在可能无奇点且测地线完备的暴胀前情景。

2. 第二种可能是，暴胀一直持续到“起点”，此时 $a(t)$ 趋近于 0。这里的“起点”可能位于有限的过去时间，也可能位于无限久远的过去，因此我们区分以下额外的子情况：

(a) $I_{\rm inf} = (t_{\rm ini}, t_2]$、 $t_{\rm ini} > -\infty$，且

$$\lim_{t \to t_{\rm ini}^+} a(t) = 0^+ .$$

图 3 左图给出了示意。

(b) 或者， $I_{\rm inf} = (-\infty, t_2]$ 且

$$\lim_{t \to -\infty} a(t) = 0^+ .$$

图 3 右图给出了示意。

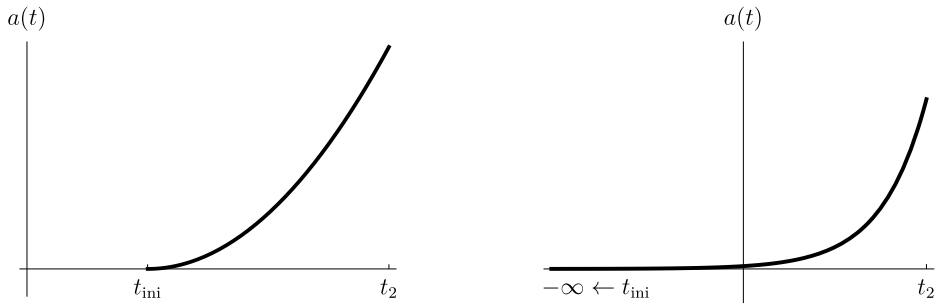



图3：左图：分类2a中的尺度因子演化示例。宇宙从有限的初始时刻 $t_{\rm ini}$开始暴胀，该时刻对应一个奇点。右图：分类2b中的尺度因子演化示例，其中宇宙的暴胀一直持续到 $t_{\rm ini} = -\infty$。

我们很快将证明，情形 2a意味着在 $t_{\rm ini}$ 存在初始标量曲率奇点。相应地，这将促使我们在本文余下部分更仔细地考察情形2b。

不同情形的示意性总结见图4。

我们重述上述定义的情形 1a ：

**定理2.1**。 设 $\ddot{a}(t) \leq 0$ 对所有 $t \in I_{\text{pre-inf}} := (t_{\rm ini}, t_1)$均成立，其中 $t_1$ 表示暴胀开始的时间（因此，从该时刻起， $a(t)$ 的二阶时间导数会改变符号）。那么， $t_{\rm ini} > -\infty$，因此当 $t \to t_{\rm ini}^+$时， $a(t) \searrow 0$ ，且至少有两个标量曲率不变量在同一极限下发散。相应地，当趋于 $t_{\rm ini}$时，该时空存在一个初始标量曲率奇点。

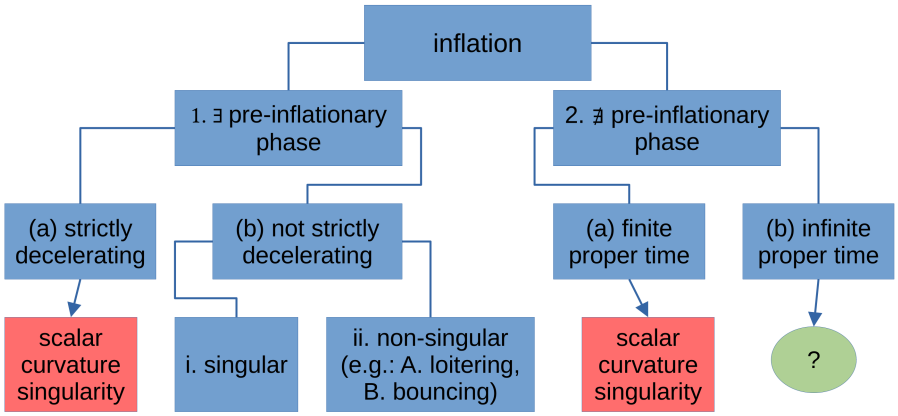



图4：文中所述平直 FLRW 时空中暴胀宇宙学（过去部分）的分类。请注意，“∄ 暴胀前阶段”仅适用于时空（$M$，$g$）内部。事实上，在情形 2b中，时空完全有可能越过位于无限固有时处的边界而延拓。这正是下一节将要讨论的主题。

证明。 通过积分，$\ddot{a}(t) \leq 0$ 意味着 $\dot{a}(t) \geq \dot{a}(t_1)$ 对所有 $t \in I_{\text{pre-inf}}$均成立，而以下事实$\ddot{a}(t) \leq 0$ 也意味着 $\dot{a}(t)$ 在区间 $t$ 内是 $I_{\text{pre-inf}}$的递减函数。根据方程（2.3）中对暴胀的定义，我们有 $\dot{a}(t_1) > 0$, 因此

$$\dot{a}(t) \geq \dot{a}(t_1) > 0 \tag{2.4}$$

对于所有 $t \in I_{\text{pre-inf}}$ 均成立。对该不等式进行积分，我们始终有，对于所有 $t \in I_{\text{pre-inf}}$,

$$\begin{aligned} \int_t^{t_1} \mathrm{d}\tilde{t}\, \dot{a}(\tilde{t}) \geq \int_t^{t_1} \mathrm{d}\tilde{t}\, \dot{a}(t_1) > 0 \implies a(t_1) - a(t) \geq \dot{a}(t_1)(t_1 - t) > 0 \\ \implies a(t) \leq a(t_1) - \dot{a}(t_1)(t_1 - t)\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

令 $H_1 := \dot{a}(t_1)/a(t_1)$，这是一个有限的正数——即暴胀开始时的哈勃膨胀率。接着我们可以定义 $t_{\text{out}} := t_1 - H_1^{-1}$, $-\infty < t_{\text{out}} < t_1$，根据 (2.5)，这似乎意味着 $a(t_{\text{out}}) \leq 0$ 。然而，根据我们在 2.1 中对尺度因子的定义，$a(t) > 0$ 对所有 $t \in I$ 都成立。由于 $a(t)$ 被认为在整个 $\inf I = t_{\text{ini}}$ 上都是光滑的，因此必有 $-\infty < t_{\text{out}} \leq t_{\text{ini}} < t_1$，从而根据假设 (2.2)，

$$\lim_{t \to t_{\text{ini}}^+ > -\infty} a(t) = 0^+\,. \tag{2.6}$$

因此，暴胀前阶段只能持续有限的时间，并且满足 $I_{\text{pre-inf}} = (t_{\text{ini}},\ t_1)$，在这种情况下，这是宇宙自 $t_{\text{ini}} = \inf I = \inf I_{\text{pre-inf}}$ 以来的第一个阶段。然后，根据（2.4）以及 $\dot{a}(t)$ 是 $t$的递减函数这一事实，我们可以得知 $\dot{a}(t)$ 在 $t \to t_{\text{ini}}^+$时达到一个正的极限（有限或无限）。因此，回顾$H := \dot{a}/a$，方程（2.6）意味着

$$\lim_{t \to t_{\text{ini}}^+} H(t) = +\infty\,. \tag{2.7}$$

此时，有必要回顾平直 FLRW 时空中的几个线性无关的曲率不变量：

$$R = 6(2H^2 + \dot{H})\,, \tag{2.8a}$$
$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 3\big((3H^2 + 2\dot{H})^2 + 3H^4\big)\,, \tag{2.8b}$$
$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 12\big((H^2 + \dot{H})^2 + H^4\big)\,, \tag{2.8c}$$

分别是里奇标量、里奇张量与其自身的收缩，以及黎曼张量与其自身的收缩（也称为克雷奇曼标量）。最后我们可以观察到，其中至少有两个将发散，因为 $t \to t_{\rm ini}^+$根据（2.7）。事实上，$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ 和克雷奇曼标量是 $H^2$ 和 $\dot{H}$的非负函数，因此当 $H$ 发散为 $t \to t_{\rm ini}^+$时，它们也将发散，而不论 $\dot{H}$ 如何变化。相应地，当 $t \to t_{\rm ini}^+$时，存在初始标量曲率奇点。

□

注。 如果假设广义相对论和强能量条件，则会导致减速（$\ddot{a}(t) \leq 0$），从而得到上述定理。只要满足强能量条件，时空不可避免地具有初始奇点并不令人意外。不过，前一定理与所采用的引力场方程无关：只假设了一个几何上的"汇聚"条件（减速），尽管该定理仅限于平直FLRW时空。

接下来，我们陈述关于此前定义的情形 2的结果：

**引理 2.2**。 假设 $H(t) \to H_\Lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 当 $t \to t_{\rm ini}^+$ 时，其中回顾一下，$t_{\rm ini}$ 是 $a(t)$定义域的下确界。那么，$t_{\rm ini} = -\infty$。

证明。 反证法如下：假设 $t_{\rm ini} > -\infty$。那么，根据假设（2.2），当 $t \to t_{\rm ini}^+$ 时，我们有 $a(t) \searrow 0$。根据 $\lim_{t\to t^+_{\rm ini}} H(t) = H_\Lambda$ 的定义，存在一个 $t_{\rm L} > t_{\rm ini}$，使得对于所有 $t \in (t_{\rm ini}, t_{\rm L})$，任意 $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ 均有 $0 < |H(t) - H_\Lambda| < \varepsilon$。因此，从 $t$ 积分到 $t_{\rm L}$，对于任意时间 $t \in (t_{\rm ini}, t_{\rm L})$，我们有

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon(t_{\rm L} - t) < \int_t^{t_{\rm L}} \mathrm{d}\tilde{t}\,(H(\tilde{t}) - H_\Lambda) < \varepsilon(t_{\rm L} - t) \\
\Longrightarrow\ &(\varepsilon - H_\Lambda)(t - t_{\rm L}) < \ln\big(a(t_{\rm L})\big) - \ln\big(a(t)\big) < (\varepsilon + H_\Lambda)(t_{\rm L} - t) \\
\Longrightarrow\ &a(t_{\rm L})e^{(\varepsilon+H_\Lambda)(t-t_{\rm L})} < a(t) < a(t_{\rm L})e^{(H_\Lambda-\varepsilon)(t-t_{\rm L})}\,.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

因此，$a(t)$ 有一个随时间递减而衰减的 $t$ 指数函数作为下界。特别地，由于（2.9）对所有 $t \in (t_{\rm ini}, t_{\rm L})$ 及任意 $\varepsilon > 0$ 均成立，我们可以令 $t \to t_{\rm ini}^+$，对（2.9）取极限；回顾一下 $t_{\rm ini} > -\infty$，可得 $\lim_{t\to t^+_{\rm ini}} a(t)$ 有一个正数下界，即 $a(t_{\rm L})e^{(\varepsilon+H_\Lambda)(t_{\rm ini}-t_{\rm L})}$，这与 $\lim_{t\to t^+_{\rm ini}} a(t) = 0^+$ 矛盾。 □

注释。 由于前面的证明对任意 $\varepsilon > 0$均成立，因此特别地，对于足够小的 $0 < \varepsilon < H_\Lambda$，只要 $H_\Lambda > 0$，结论就必然成立。因此，在这种情况下，$a(t)$ 实际上被两个关于 $t$ 的衰减指数函数夹在中间，其中时间按照式（2.9）递减，因此$a(t)$ 本身也衰减至零。

另一个观察是，上述引理的逆否命题告诉我们，当 $t \to t_{\text{ini}}^{+}$ 时，$t_{\text{ini}} > -\infty$, $H(t)$ 不可能趋近于一个非负常数。这一点很快就会派上用场。

**命题 2.3.** 假设宇宙在有限时间内达到零体积，即 $a(t) \searrow 0$当 $t \to t_{\text{ini}}^{+}$ 且 $\inf I = t_{\text{ini}} > -\infty$, 并假设宇宙在 $t_{\text{ini}}$ 的某个邻域内最初处于膨胀状态，即 $\dot{a}(t) > 0$ 对所有 $t \in U := (t_{\text{ini}}, t_{\text{ini}} + \delta)$ 以及某个固定的 $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$。那么， $H(t)$ 在 $U$ 的 $t_{\text{ini}}$邻域内无界。

证明. 证明采用反证法：假设 $H(t)$ 在 $U$的 $t_{\text{ini}}$邻域内有界。这意味着存在 $H_{\max} \in \mathbb{R}_{>0}$ ，使得 $0 < H(t) < H_{\max}$ 对所有$t \in U$成立。下界来自以下事实： $H(t)$ 在 $U$ 中必须为正，因为$a(t)$ 始终为正，且 $\dot{a}(t)$ 在 $U$ 中为正。记作 $H := \dot{a}/a = \mathrm{d} \ln a/\mathrm{d}t$, 我们得到 $0 < \mathrm{d} \ln a < H_{\max}\mathrm{d}t$ 对所有 $t \in U$成立，因此，从任意 $t \in U$ 积分到 $t_{\text{ini}} + \delta$可得

$$0 < \ln\big(a(t_{\text{ini}} + \delta)\big) - \ln\big(a(t)\big) < H_{\max}(t_{\text{ini}} + \delta - t)\,.$$

特别是，当 $t \to t_{\text{ini}}^{+}$ 时，这必须成立，此时 $a(t) \searrow 0$; 但由于 $a(t_{\text{ini}} + \delta) > 0$，这就意味着 $0 < +\infty < H_{\max}\delta$，因此产生矛盾。 □

**定理 2.4.** 如果暴胀一直持续到宇宙起始，即 $a(t) \searrow 0$ 当 $t \to t_{\text{ini}}^{+}$ 时，其中 下确界 $I =$ 下确界 $I_{\inf} = t_{\text{ini}} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$，且 $\dot{a}(t) > 0$ （因此 $H(t) > 0$），并且对于所有 $t \in (t_{\text{ini}}, t_2]$, $\ddot{a}(t) > 0$ , 那么以下情况之一成立：

*(i)* $t_{\text{ini}} = -\infty$ 且 $H(t)$ 在 $t \to -\infty$ 时存在有限极限；

*(ii)* $t_{\text{ini}} = -\infty$ 且 $H(t)$ 在 $t \to -\infty$ 时不存在有限极限；

*(iii)* $t_{\text{ini}} > -\infty$ 且 $H(t)$ 在 $t \to t_{\text{ini}}^{+}$ 时不存在有限极限。

在情形（*iii*）中，该时空具有一个初始标量曲率奇点。

证明。根据引理 2.2 的逆否命题，如果 $t_{\text{ini}} > -\infty$，那么 $H(t) \nrightarrow H_\Lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。根据假设，对于所有 $t \in (t_{\text{ini}}, t_2]$, $H(t) > 0$ , 因此 $H(t)$ 不具有有限极限（即无法收敛） , 当 $t \to t_{\text{ini}}^{+}$ ——这对应于定理的情形 (iii)（或先前定义的分类中的 2a）。另一种情况（分类 2b）是 $t_{\text{ini}} = -\infty$，在此情况下，要么 $H(t)$ 收敛到有限正数 [情形 (i)] , 要么不收敛 [情形 (ii)]。

在情形 (iii) 中，命题 2.3 告诉我们， $H(t)$ 实际上在 $t_{\text{ini}}$的一个邻域内无界。这意味着，要么 $H(t)$ 发散至 $+\infty$ , 要么 $H(t)$ 随着$t \to t_{\text{ini}}^{+}$无界振荡。在这两种情况下，我们都可以使用与定理 2.1 证明中相同的论证，得出当 $t \to t_{\text{ini}}^{+}$ 时会到达一个标量曲率奇点（特别是，克雷奇曼标量发散，即它要么趋于 $\infty$ , 要么无界振荡）。 □

注。 请注意，当 $t_{\text{ini}} = -\infty$ 时，命题 2.3 并无类似的结论。事实上，很容易构造一个反例：若 $a(t) = \exp\big(t + \frac{1}{2}\sin t\big)$, 则 $a \searrow 0$ 当 $t \to -\infty$ 时，且 $\ddot{a}(t)$ 处处为正；然而 $H(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos$ 并不

当 $t \to -\infty$ 时，它并不趋于某个极限，但仍有界于 $1/2$ 和 $3/2$ 之间。因此，上述定理的情形 (ii) 并不一定意味着 $H(t)$ 会“爆炸”，进而产生标量曲率奇点。

示例。前一个定理告诉我们，如果我们处于暴胀的分类2a 中，那么在过去的有限时间内，初始时刻存在一个类似大爆炸的标量曲率奇点。一个典型例子是尺度因子渐近呈幂律形式，

$$a(t) \overset{t\to 0^+}{=} a_0 t^q + \dots , \qquad q \in \mathbb{R}_{>1} , \; a_0 \in \mathbb{R}_{>0} ,$$

对于该尺度因子， $R$、 $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$和 $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$在 $t \to 0^+$时均发散。在这里，不失一般性地令 $t_{\rm ini} = 0$。另一个例子是形如 $a(t) \propto \exp(-1/t^\alpha)$ 的函数，其中$\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$。另一个例子是 $a(t) \propto \exp[A(\ln t)^\gamma]$，其中 $A \in \mathbb{R}_{>0}$ 且 $\gamma \in \{3, 5, 7, 9, \dots\}$。后者是文献中所谓“对数中介”暴胀的一个子类 [55,56]。

最后，我们在本小节中指出，以上讨论专门针对平直 FLRW。这一点至关重要，因为许多论述未必适用于空间截面具有正曲率或负曲率的情形。众所周知，暴胀会“稀释”空间曲率，因此假设暴胀期间及之后时空是平直的，是有充分依据的。在暴胀之前（或暴胀刚开始时），三种情形——平直、闭合、开放——都有可能。我们选择重点讨论平坦空间截面。负曲率 FLRW 时空的可延拓性问题已在 [29,38,46–49] 中得到相当广泛的研究。对于正空间曲率，也有一些相关研究 [29]；在此背景下，已有暴胀前非奇异反弹的实例 [57, 58], ，而如何设定量子初始条件的问题也已得到探讨 [59]。

### 2.3 过去渐近德西特

总而言之，迄今为止我们已经证明，要么平直 FLRW 中的暴胀并未一直延续到过去；在这种情况下，时空是奇异的 [情形 1a和1(b)i] ；要么由于对广义相对论的某些修改或量子引力效应，时空可能是测地线完备的 [例如情形 1(b)iiA 和 1(b)iiB],；要么暴胀一直延续到过去，在这种情况下，要么有限时间处存在曲率奇点 [情形2a]，要么暴胀开始于$t \to -\infty$ [情形 2b]。

因此，这最后一种情形是在广义相对论适用范围内，平直 FLRW 中唯一可能避开奇点问题的暴胀情景，也是本文后续讨论的主题。在此背景下，现有结果——在宇宙学文献中常被称为 Borde-Guth-Vilenkin 定理 [19]——[2] 指出，若$H(t) > 0$ 对所有 $t \in (-\infty, t_2]$均成立，则零测地线在过去不完备。然而，这并不总意味着存在奇点，因为 $t \to -\infty$，而且时空实际上可能可以越过 $t_{\rm ini} = -\infty$处的过去边界延拓。正如引言中提到的，平直德西特时空是这一特性的一个很好的例子，但精确的德西特时空是一个非常特殊的解，无法代表我们的宇宙。所有暴胀情景的一个必要特征是，$H(t)$ 随时间变化，从而使量子涨落能够产生我们

[2]另见 [27]；不过，关于其缺点的讨论，请参见 [60] 。

宇宙的大尺度结构种子，并与观测相符。因此，考察“准德西特”宇宙中的奇点问题更为切题。尤其是，接下来很自然的一步是研究那些在无限久远的过去趋近德西特时空的宇宙，以符合分类2b。文献 [27], 也采用了类似的前提，但我们将在下文的定义中将其表述得更为精确。

**定义 2.5**。 第 2.1 节中定义的平直 FLRW 时空[3] 过去渐近德西特，如果

$$H(t) \overset{t\to-\infty}{=} H_\Lambda + o(1)\,, \qquad \dot{H}(t) \overset{t\to-\infty}{=} 0 + o(1)\,,$$

其中 $H_\Lambda \in \mathbb{R}_{>0}$。注意，渐近小-$o$ 记号等价于说

$$\lim_{t\to-\infty} H(t) = H_\Lambda\,, \qquad \lim_{t\to-\infty} \dot{H}(t) = 0\,.$$

注。 精确德西特是具有正宇宙学常数 $\Lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ 的爱因斯坦方程的一个解。在平直 FLRW 时空中，相应的哈勃参数为常数，记为 $H_\Lambda = \pm\sqrt{\Lambda/3}$；此处我们选择哈勃参数为正的膨胀分支。这就是上述过去渐近德西特（dS）记号的由来。

在下面的引理中，我们证明，过去渐近德西特的定义可以写成 $H(t) \to H_\Lambda$，并且当 $t \to -\infty$时， $H$ 的极限存在（且有限）。

**引理 2.6**。 设第 *2.1* 节中定义的平直 *FLRW* 时空满足

$$H(t) \overset{t\to-\infty}{=} H_\Lambda + o(1)\,, \qquad \dot{H}(t) \overset{t\to-\infty}{=} c + o(1)\,,$$

这里 $H_\Lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ 和 $c \in \mathbb{R}$。于是该时空是过去渐近德西特 .

证明。 我们注意到

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\ddot{a}}{a} = \lim_{t\to-\infty} (\dot{H} + H^2) = c + H_\Lambda^2\,,$$

从而得到

$$\lim_{t\to-\infty} \ddot{a} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\ddot{a}}{a} \times a = \lim_{t\to-\infty} \frac{\ddot{a}}{a} \times \lim_{t\to-\infty} a = (c + H_\Lambda^2) \times 0 = 0\,.$$

注意，我们将 $a(t) \searrow 0$ 视为 $t \to -\infty$。这是因为 $H_\Lambda > 0$；参见引理 2.2之后的注。同时，我们有

$$\lim_{t\to-\infty} \dot{a} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\dot{a}}{a} \times a = \lim_{t\to-\infty} \frac{\dot{a}}{a} \times \lim_{t\to-\infty} a = H_\Lambda \times 0 = 0\,.$$

因此，应用洛必达法则可得

$$\lim_{t\to-\infty} H = \lim_{t\to-\infty} \frac{\dot{a}}{a} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\ddot{a}}{\dot{a}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{a}{\dot{a}} \times \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{H_\Lambda}(c + H_\Lambda^2)\,,$$

[3]由于我们始终关注平坦空间截面，因此通常会省略形容词“平坦”，并将其含义隐含其中。

这只有在 $c=0$ 由于 $\lim_{t\to-\infty} H = H_\Lambda$ 时才成立。 □

在下面的引理中，我们展示过去渐近德西特的另一种替代性概念。

**引理 2.7**。 假设存在一个光滑函数 $f\colon\ I\to\mathbb{R}$，使得

$$a(t)=e^{H_\Lambda t}+f(t)\,,\qquad \dot a(t)=H_\Lambda e^{H_\Lambda t}+\dot f(t)\,,\qquad \ddot a(t)=H_\Lambda^2 e^{H_\Lambda t}+\ddot f(t)\,,$$

并且满足 $f(t)\ \dot f(t)\ \ddot f(t)$ 在 $t\to-\infty$ 时渐近于 $o(e^{H_\Lambda t})$，即，

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{f(t)}{e^{H_\Lambda t}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{\dot f(t)}{e^{H_\Lambda t}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{\ddot f(t)}{e^{H_\Lambda t}}=0\,.$$

那么该时空是过去渐近德西特的。

证明。我们注意到

$$H(t)-H_\Lambda=\frac{\dot a(t)}{a(t)}-H_\Lambda=\frac{H_\Lambda e^{H_\Lambda t}+\dot f(t)}{e^{H_\Lambda t}+f(t)}-H_\Lambda=\frac{e^{-H_\Lambda t}(\dot f(t)-H_\Lambda f(t))}{1+e^{-H_\Lambda t}f(t)}\overset{t\to-\infty}{\longrightarrow}0\,,$$

and

$$\begin{aligned}\dot H(t)&=\frac{\ddot a(t)}{a(t)}-\frac{\dot a(t)^2}{a(t)^2}=\frac{(H_\Lambda^2 e^{H_\Lambda t}+\ddot f(t))(e^{H_\Lambda t}+f(t))-(H_\Lambda e^{H_\Lambda t}+\dot f(t))^2}{(e^{H_\Lambda t}+f(t))^2}\\&=\frac{e^{-H_\Lambda t}(H_\Lambda^2 f(t)-2H_\Lambda\dot f(t)+\ddot f(t))+e^{-2H_\Lambda t}(f(t)\ddot f(t)-\dot f(t)^2)}{(1+e^{-H_\Lambda t}f(t))^2}\overset{t\to-\infty}{\longrightarrow}0\,.\end{aligned}$$

□

注。请注意，前一个引理的逆命题通常并不成立。反例可以简单地取为 $a(t)=(1-t)e^{H_\Lambda t}$，它满足 $H\to H_\Lambda$ 和 $\dot H\to 0$，因为 $t\to-\infty$，但它并非渐近地具有 $a(t)=e^{H_\Lambda t}+o(e^{H_\Lambda t})$的形式。因此，过去渐近地呈指数形式的尺度因子，并不等同于我们对过去渐近德西特时空的定义2.5 。不过，我们将分别探讨尺度因子过去渐近地呈指数形式，以及时空过去渐近德西特这两种前提。

在前一个引理的假设中，注意到对于某个常数 $a_0\in\mathbb{R}_{>0}$，我们本可以写成 $a(t)\overset{t\to-\infty}{=}a_0e^{H_\Lambda t}+o(e^{H_\Lambda t})$、$\dot a(t)\overset{t\to-\infty}{=}a_0H_\Lambda e^{H_\Lambda t}+o(e^{H_\Lambda t})$ 等形式，但 $a_0$ 在平直 FLRW 中是一个在物理上无关紧要的无量纲量，因此我们可以将其设为 1。

另一个注是，可以仅用 $\ddot a(t)\overset{t\to-\infty}{=}e^t+o(e^t)$ 以及条件 $a(t)\searrow 0$ 和 $\dot a(t)\searrow 0$ as $t\to-\infty$，来替代引理 2.7 的假设。事实上，若 $(\ddot a(t)-e^t)/e^t\to 0$as $t\to-\infty$，那么根据洛必达法则，由于 $\dot a(t)\searrow 0$，必有 $(\dot a(t)-e^t)/e^t\to 0$ [，因此$\dot a(t)\overset{t\to-\infty}{=}e^t+o(e^t)$]，；再应用一次洛必达法则，并结合 $a(t)\searrow 0$，可推出 $(a(t)-e^t)/e^t\to 0$ [，故 $a(t)\overset{t\to-\infty}{=}e^t+o(e^t)$]。因此，在此情形下，关于 $a(t)$ 和 $\dot a(t)$ 的渐近条件可由关于 $\ddot a(t)$ 的渐近条件推出。

定义2.5 还有一个动机：如果时空在渐近过去趋近于德西特，我们便预期能恢复精确德西特的无奇点性质，也就是说，过去边界上不应存在标量曲率奇点。具体而言，我们猜想如下：

在过去渐近德西特时空中，黎曼张量、里奇张量和里奇标量的任意标量收缩在 $t \to -\infty$ 时均为有限值。

我们不对此陈述给出严格的证明，但正如我们将在第 3.5 节中看到并论证的，由 $n$ 黎曼张量与度规张量及其逆张量缩并后所构成的乘积（因此可能涉及里奇张量和里奇标量）所构造的平直 FLRW 时空中的任意标量曲率不变量，似乎都可以表示为 $\{H^{2n}, H^{2(n-1)}\dot{H}, H^{2(n-2)}\dot{H}^2, \cdots, H^2\dot{H}^{n-1}, \dot{H}^n\}$ 的线性组合。因此，根据过去渐近德西特的定义，很容易看出，当 $t \to -\infty$ 时，所有此类标量曲率不变量都应具有有限的极限。

根据前述结论，过去渐近德西特时空不应存在 $C^2$ 标量曲率奇点（其中 $C^2$ 指度规张量的可微性类），但这并不能保证时空边界 $t_{\text{ini}} = -\infty$之外的度规可延拓性。度规可延拓性的条件将是下一节的主题。我们可以先指出，其他类型的奇点仍可能存在，例如在过去渐近德西特宇宙中，$t \to -\infty$ 仍可能存在平行传播奇点；这些奇点可能会阻碍时空可延拓性（参见 [27, 29] 及其中的参考文献）。

最后，我们提及一点：人们可能希望在 $t \to -\infty$ 极限下，为 $a(t)$、$\dot{a}(t)$ 和 $\ddot{a}(t)$ 考虑不同于引理 2.7 假设中的主导阶函数。然而，若不考虑（病态的）情形——例如 $H(t)$ 振荡而不趋于任何极限，或 $H(t)$ 无界（此时过去方向上存在标量曲率奇点）——那么当 $t \to -\infty$ 时，唯一可能的情形是 $H(t) \to H_\Lambda > 0$，或 $H(t) \searrow 0$（此时 $H(t)$ 在 $t_{\text{ini}} = -\infty$ 的某个邻域内至少满足 $> 0$）。当 $t \to -\infty$ 时，$H(t) \to H_\Lambda > 0$ 的情形正是我们定义过去渐近德西特时空的动机；而 $H(t) \searrow 0$则对应于类似过去渐近闵可夫斯基时空的情况。本文只关注前一种情形。在这种情况下，正如引理 2.2 后的注中所述，$a(t)$ 必定介于两个衰减指数函数之间，这也进一步说明了为何要考察引理 2.7 假设中给出的 $a(t)$ 及其导数的渐近泛函表达式。

作为几个当前研究不关注的渐近函数的例子，可以取 $a(t) = 1/|t|^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$)，它在 $t \to -\infty$ 时趋于 0 的速度慢于 $e^t$；也可以取 $a(t) = \exp(-\exp(|t|^\alpha))$ ($\alpha \in (0, 1]$)，它在 $t \to -\infty$ 时趋于 0 的速度快于 $e^t$。这两个例子都满足暴胀情况下（2.3）的条件，且 $I_{\text{inf}} = (-\infty, 0)$；但直接计算可得，两种情况下均有 $H(t) \to \infty$ as $t \to -\infty$。另外两个例子可以是 $a(t) = \exp(-|t|^\alpha)$ 和 $a(t) = \exp(-(\ln|t|)^\alpha)$（两种情况下均有 $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$），它们同样满足（2.3）且 $I_{\text{inf}} = (-\infty, 0)$，但这两种情况下可得 $H(t) \searrow 0$ as $t \to -\infty$。过去渐近闵可夫斯基时空或可作为另一篇论文的主题。

# 3 度规可延拓性

在形式化定义时空可延拓性（第 3.1 节），并将精确德西特时空可连续延拓作为预备示例（第 3.2 节）之后，我们在第 $C^0$ 节导出一个可延拓性定理，该定理要求尺度因子满足渐近条件，且仅涉及尺度因子本身： $a(t) = e^{ht} + o(e^{ht})$，当 $t \to -\infty$ 时，其中 $h > 0$ 为某个常数；或者要求 $H \to h > 0$ 在 $t \to -\infty$ 时成立。对 $a(t)$ 及其导数施加渐近条件，则可在第3.4 节得到高正则性定理，最后我们在第 3.5 节讨论曲率奇点。

## 3.1 更多预备知识

我们将遵循约定 [47, 第 2], 并简要回顾这些约定。

设 $k \geq 0$ 为整数或 $\infty$。 $C^k$ 时空 $(M, g)$ 是配备有 $C^k$ 洛伦兹度量张量 $g$ （即，其分量 $g_{\mu\nu}$ 在任意坐标系中都是 $C^k$ 函数）以及由某个 $C^0$ 类时向量场诱导的时间定向的 $C^{k+1}$ 四维流形 $M$ （连通、豪斯多夫、第二可数）。未来指向类时曲线 $\gamma\colon [a,b] \to M$ 是分段 $C^1$ 曲线，使得对于所有 $s \in [a,b]$，包括其折点和端点（导数按单侧导数理解），$\dot\gamma(s) := \mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}s$ 都是未来指向类时的。过去指向类时曲线按时间对偶方式定义。相对于包含 $p$ 的开放集 $U \subset M$，点 $p \in M$ 的类时未来记作 $I^+(p, U)$，定义为满足以下条件的点 $q \in U$ 的集合：存在一条未来指向类时曲线 $\gamma\colon [a,b] \to U$，从 $p$ 到达 $q$。类时过去 $I^-$ 按时间对偶方式定义。若需强调度量 $g$，则记作 $I^{\pm}_g$。

**定义 3.1**。 假设 $(M, g)$ 是一个 $C^\infty$ 时空，而 $(M_{\mathrm{ext}}, g_{\mathrm{ext}})$ 是一个 $C^k$ 时空。如果存在等距嵌入 $(M, g) \hookrightarrow (M_{\mathrm{ext}}, g_{\mathrm{ext}})$，使得 $M \subset M_{\mathrm{ext}}$ 是一个真开子集，那么称 $(M_{\mathrm{ext}}, g_{\mathrm{ext}})$ 是 $(M, g)$ 的扩张。注意，我们将 $M$ 与其在该嵌入下的像等同起来。

**定义 3.2**。 设 $(M_{\mathrm{ext}}, g_{\mathrm{ext}})$ 是时空 $(M, g)$ 的 $C^k$ 扩张。 $M_{\mathrm{ext}}$ 内 $M$ 的拓扑边界记为 $\partial M$。若未来指向类时曲线$\gamma\colon [a,b] \to M_{\mathrm{ext}}$ 满足$\gamma(b) = p$ 且 $\gamma\big([a,b)\big) \subset M$，则称其为点 $p \in \partial M$ 的未来终止类时曲线。过去终止类时曲线 以时间对偶方式定义。 $M$ 在 $M_{\mathrm{ext}}$ 内的未来和过去边界为

$$\begin{aligned} \partial^+ M &= \{p \in \partial M \mid \text{存在一条未来终止类时曲线，其对应于 } p\}, \\ \partial^- M &= \{p \in \partial M \mid \text{存在一条过去终止类时曲线，其对应于 } p\}. \end{aligned}$$

## 3.2 预热：精确 de Sitter

该平直德西特时空模型是一个空间曲率为零、尺度因子呈指数增长的 FLRW 时空。具体而言，流形为 $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$，度量为（2.1），尺度因子为 $a(t) \propto \exp\!\left(\sqrt{\Lambda/3}\, t\right)$，其中 $\Lambda$ 是一个正实常数。这是带有宇宙学常数 $\Lambda$ 的爱因斯坦场方程的一个解。从这里开始，我们将任意比例常数设为单位值，并且在本小节中我们还

采用以 $\Lambda = 3$ 为单位的约定，使尺度因子简洁地写作 $a(t) = e^t$。通过规定 $\partial_t$ 为未来指向来确定时间定向。

我们定义共形时间 $\eta$，使其满足 $\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}t/a(t)$，即使平直 FLRW度规能够表示为闵可夫斯基时空的共形变换，$g = a(\eta)^2(-\mathrm{d}\eta^2 + h_{\mathbb{E}})$。在德西特时空中，我们可以取 $\eta(t) = -\int_t^\infty \mathrm{d}\tilde{t}/a(\tilde{t}) = -e^{-t} = -1/a(t)$，从而可将德西特时空的度量表示为

$$g = \frac{1}{\eta^2}\left(-\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2\right). \tag{3.10}$$

正如 其启发， [27], 我们随后引入新坐标（$\lambda$， $v$），将其作为（$t$， $r$）的函数，定义为 [4]

$$\lambda(t) := \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}\tilde{t}\, a(\tilde{t}) \quad \text{and} \quad v(t,r) := \eta(t) + r\,, \tag{3.11}$$

因此对于德西特时空，这给出

$$\lambda(t) = e^t = a(t) \quad \text{and} \quad v(t,r) = -e^{-t} + r = -\frac{1}{\lambda(t)} + r\,. \tag{3.12}$$

由于 $v + 1/\lambda = r > 0$，坐标（$\lambda$， $v$）是从

$$\{(t,r) \mid t \in \mathbb{R} \text{ and } r > 0\} \quad \text{onto} \quad U := \{(\lambda, v) \mid \lambda \in (0,\infty) \text{ and } v \in (-1/\lambda, \infty)\}\,. \tag{3.13}$$

利用 $\mathrm{d}\lambda = a\mathrm{d}t$ （等价地，$\mathrm{d}t = \mathrm{d}\lambda/a$）以及 $\mathrm{d}v = \mathrm{d}t/a + \mathrm{d}r$ （等价地，$\mathrm{d}r = \mathrm{d}v - \mathrm{d}\lambda/a^2$），我们有

$$-\mathrm{d}t^2 + a^2\mathrm{d}r^2 = -\frac{1}{a^2}\mathrm{d}\lambda^2 + a^2\left(\mathrm{d}v - \frac{1}{a^2}\mathrm{d}\lambda\right)^2 = a^2\mathrm{d}v^2 - 2\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}v\,.$$

因此， $U \times \mathbb{S}^2$ 上的度量为

$$g = -2\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}v + a^2\mathrm{d}v^2 + a^2r^2\mathrm{d}\Omega^2\,. \tag{3.14}$$

在上述表达式中， $a$ 和 $r$ 是 $\lambda$ 和 $v$的函数。具体而言，将（3.12）代入（3.14），可得德西特时空的

$$g = -2\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}v + \lambda^2\mathrm{d}v^2 + (\lambda v + 1)^2\mathrm{d}\Omega^2\,. \tag{3.15}$$

注意， $t = -\infty$ 对应于 $\lambda = 0$。由方程（3.15）可知，在$\lambda = 0$处不存在退化。因此，可以利用这些坐标将时空延拓穿过 $\lambda = 0$。当然，如果没有任何额外假设，这种延拓并不唯一。[5]

为了说明 $C^0$ 延拓的存在性，注意 $U \cup \{(\lambda, v) \mid \lambda \leq 0 \text{ 和 } v \in \mathbb{R}\}$是一个光滑流形，因为 $U$ 由（3.13）给出。因此，

$$M_{\text{ext}} = M \cup \left(\{(\lambda, v) \mid \lambda \leq 0 \text{ and } v \in \mathbb{R}\} \times \mathbb{S}^2\right) \tag{3.16}$$

[4]由于满足 $\mathrm{d}\lambda = a\mathrm{d}t$， $\lambda$ 可解释为零测地线的仿射参数；零测地线由 $v =$ 保持常数来刻画（角坐标也保持常数）。[5]显然，延拓后的度规仍应是相关场方程的一个解。这里我们不指定任何场方程，讨论纯粹局限于几何层面，即所得结果适用于任意度规引力理论。

是一个光滑流形，它包含 $M$ 作为真子集。我们通过以下方式定义延拓度规：

$$g_{\text{ext}} = \begin{cases} g & \text{on } M \\ -2\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}\Omega^2 & \text{on } \{(\lambda, v) \mid \lambda \leq 0 \text{ and } v \in \mathbb{R}\} \times \mathbb{S}^2. \end{cases} \tag{3.17}$$

我们在 $M_{\text{ext}}$ 上选择时间定向，使得 $\partial_\lambda + \partial_v$ 对于 $\lambda \leq 0$是未来指向的。此时间定向与 $M$ 上的原时间定向一致。于是，$(M_{\text{ext}}, g_{\text{ext}})$是$(M, g$的连续延拓，定义见第3.1节。当然，也可以为延拓中的度量作出其他选择。特别地，存在 $C^\infty$ 诸如完整（整体）德西特时空这样的延拓。

最后，我们注意到，对于此延拓，$\lambda = 0$ 是 $M$ 的过去边界 $\partial^- M$。为此，固定 $v_0 \in \mathbb{R}$ 和 $\omega_0 \in \mathbb{S}^2$。定义 $\gamma\colon\ [0, f(v_0)] \to M_{\text{ext}}$ 如下：

$$\lambda \circ \gamma(s) = s \quad \text{and} \quad v \circ \gamma(s) = v_0 + s\,, \tag{3.18}$$

并且 $\gamma(s)$在 $\mathbb{S}^2$上保持固定值 $\omega_0$。这里，$f(v_0)$由下式给出：当 $v_0 \geq -1/2$ 时为 $f(v_0) = 1$，当 $v_0 \leq -1/2$时为$f(v_0) = -1/(2v_0)$。（对 $f(v_0)$的这一选择大体上是任意的——此例足以确保 $\gamma$ 仍留在流形中，但并非必要。）于是，$\gamma$ 的过去端点为$(0, v_0, \omega_0)$处的 $\gamma(0)$。由于 $U$ 由（3.13）给出，$f$的选择确保 $\gamma$ 映入 $M_{\text{ext}}$。利用（3.15），我们看到 $\gamma$ 是一条类时曲线：

$$g_{\text{ext}}(\gamma', \gamma')|_{\gamma(s)} = g_{\text{ext}}(\partial_\lambda + \partial_v, \partial_\lambda + \partial_v)|_{\gamma(s)} = -2 + \big(\lambda \circ \gamma(s)\big)^2 = -2 + s^2 \leq -1\,.$$

反之，很容易看出，如果 $p$ 是 $\partial^- M$ 上的任意一点，那么 $\lambda(p) = 0$。因此，$\partial^- M$ 与 $\lambda = 0$ 超曲面重合。

### 3.3 连续可延拓性的条件

现在我们考虑这样一类时空：它们在过去方向上以某种意义渐近趋近平直德西特时空。流形由 $M = (-\infty,\ t_{\max}) \times \mathbb{R}^3$ 给出，其中 $t_{\max} \in \mathbb{R}$。度量如前仍为平直 FLRW 度量，但现在尺度因子 $a\colon (-\infty,\ t_{\max}) \to (0,\ \infty)$ 被假定满足

$$a(t) \overset{t \to -\infty}{=} e^{ht} + o(e^{ht}) \tag{3.19}$$

or

$$H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \overset{t \to -\infty}{\to} h \tag{3.20}$$

对于某个 $h \in \mathbb{R}_{>0}$。（根据定义，前一个假设意味着 $\big(a(t) - e^{ht}\big)/e^{ht} \to 0$ 当 $t \to -\infty$ 时成立。）我们假设 $a(t)$ 是光滑的，从而 $(M,\ g)$ 是一个光滑时空。同样，通过规定 $\partial_t$ 为未来指向来给出时间定向。

注。正的有限数 $h$ 在定义 $H_\Lambda$ 中起到 $H_\Lambda$ 的作用。2.5。注意，尽管（3.19）中的尺度因子在过去渐近呈指数形式（因此在渐近过去具有与精确德西特相同的形式），但它不一定符合我们定义的过去渐近德西特 时空的条件2.5。事实上，根据引理 2.7，我们需要了解 $a(t)$ 的一阶和二阶导数，才能准确地将该尺度因子称为过去渐近德西特。同样，若不了解 $H \to h > 0$，就不能称其为过去渐近德西特 $H$。

然而，正如很快就会明白的，推导 $C^0$ 可延拓性结果并不需要了解 $a(t)$或 $H(t)$的导数。尽管如此，我们将看到， $C^0$-可延拓性结果确实适用于过去渐近德西特时空。

需要指出的是，本小节中的所有结果均不需要预先知道 $\ddot{a}$ [甚至也不需要知道 $\dot{a}$ 的符号，只要满足以下假设：[6] (3.19)]。因此，这些结果也适用于不一定具有过去渐近暴胀性质的宇宙——例如，宇宙可能是循环的（即经历一系列反弹和转折），并且仅在某种“平均”意义上具有暴胀性质（例如， [61, 62]）。如果宇宙在过去渐近地处于暴胀状态（根据分类 2b），那么这些结果当然适用。

固定任意 $t_{\mathrm{L}} \in (-\infty, t_{\max})$；其选择对以下内容没有影响。我们将共形时间定义为

$$\eta(t) = -\int_t^{t_{\mathrm{L}}} \frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{a(\tilde{t})}\,. \tag{3.21}$$

同样，我们通过 (3.11) 将新坐标 $(\lambda, v)$ 引入为 $(t, r)$ 的函数。（关于 $a$ 的渐近假设意味着 $\lambda$ 的积分收敛。）注意， $\lambda$ 将 $(-\infty, t_{\max})$ 映射到 $(0, \lambda_{\max})$，其中 $\lambda_{\max} = \int_{-\infty}^{t_{\max}} \mathrm{d}t\, a(t)$。由于 $a$ 为正，映射 $t \mapsto \lambda$ 可逆。由此可知，坐标 $(\lambda, v)$ 是从 $\{(t, r) \mid t \in (-\infty, t_{\max})$ 到其像上的微分同胚。与 (3.13) 不同，像的闭合形式并不容易推导出来，不过我们知道它位于 $\lambda > 0$ 中。

记号说明。 由于 $t$ 和 $\lambda$ 是可逆的，我们可以通过 $\eta \circ t(\lambda)$ 将 $\eta$ 视为 $\lambda$ 的函数；我们将滥用记号，并将其称为 $\eta(\lambda)$。上下文可以用于区分 $\eta(t)$ 和 $\eta(\lambda)$。类似地，如果我们写作 $a(\lambda)$，那么我们指的是 $a \circ t(\lambda)$。同样，上下文可以用于区分这两者。

注意， $\eta(\lambda)$ 是定义在 $(0, \lambda_{\max})$ 上的严格递增函数，并且是到其像上的微分同胚。由于 $v - \eta = r > 0$，坐标 $(\lambda, v)$ 是从 $(-\infty, t_{\max}) \times (0, \infty)$ 到上的微分同胚。

$$U := \big\{(\lambda, v) \mid \lambda \in (0, \lambda_{\max}) \text{ and } v \in \big(\eta(\lambda), \infty\big)\big\}. \tag{3.22}$$

类比于精确德西特时的（3.16），我们接下来希望将延拓流形选为$M_{\mathrm{ext}} = M \cup (\{(\lambda, v) \mid \lambda \leq 0$ 和 $v \in \mathbb{R}\} \times \mathbb{S}^2)$。以下引理保证，若将下半平面 $\lambda \leq 0$ 附接到 $U$，则所得空间确实是一个流形。

**引理 3.3。** 令 $U$ 表示$(\lambda、 v)$ 坐标的像。对于每个 $v \in \mathbb{R}$，都存在一个 $\lambda > 0$，使得 $(0, \lambda) \times (v - \lambda、 \infty) \subset U$。因此， $U \cup \{(\lambda、 v) \mid \lambda \leq 0$，且 $v \in \mathbb{R}\}$ 是一个光滑流形。

证明。 我们证明了当 $t \to -\infty$ 时， $\eta(t) \to -\infty$，因此当 $\lambda \to 0^+$ 时， $\eta(\lambda) \to -\infty$。固定 $v \in \mathbb{R}$。存在一个 $\lambda > 0$，使得 $\eta(\lambda) < v - \lambda$。由于 $\eta$ 是递增函数，因此

[6] 如果假设为 (3.20)，那么我们必然知道 $\dot{a} \searrow 0$ 当 $t \to -\infty$时成立，因此宇宙必定在 $t = -\infty$的某个邻域内膨胀。然而，无论 $\ddot{a}$为何，这一点仍然成立，所以它在过去的渐近行为可能呈现暴胀，也可能不呈现暴胀。

竖直直线 $\{(\lambda', v-\lambda) \mid \lambda' \in (0, \lambda)\}$ 包含于 $U$ 中。同样，对于任意 $v' > v-\lambda$，我们也有 $v' > \eta(\lambda)$，因此以 $v'$ 为基点的同一条竖直直线也包含于 $U$ 中。 □

接下来的引理将保证延拓度规在延拓边界上非退化。

**引理 3.4.** 设 $a(t)$ 满足 (3.19) 或 (3.20)。则 $a(t)\eta(t) \to -1/h$ 当 $t \to -\infty$ .

证明。先从假设（3.19）开始。定义 $\Theta(t) := 1/a(t) - e^{-ht}$。断言 1：$\Theta(t) = o(e^{-ht})$ 当 $t \to -\infty$。事实上，

$$\frac{\Theta(t)}{e^{-ht}} = \frac{1/a(t) - e^{-ht}}{e^{-ht}} = \frac{e^{ht}}{a(t)} - 1 \to 0 \quad \text{as} \quad t \to -\infty ;$$

极限成立，因为关于尺度因子的渐近假设推出 $a(t)/e^{ht} \to 1$当 $t \to -\infty$。这就证明了断言 1。

断言 2：$e^{ht}\int_t^{t_L} \mathrm{d}\tilde{t}\,\Theta(\tilde{t}) \to 0$ 当 $t \to -\infty$。固定 $\varepsilon > 0$。由断言 1，存在一个 $\delta > 0$，使得 $t < \delta$ 推出

$$-\varepsilon e^{-ht} < \Theta(t) < \varepsilon e^{-ht} . \tag{3.23}$$

为证明断言 2，只需证明 $e^{ht}\int_t^{\delta} \mathrm{d}\tilde{t}\,\Theta(\tilde{t}) \to 0$ 当 $t \to -\infty$ 时成立。为此，对式（3.23）从 $t$ 积分至 $\delta$：

$$-\frac{\varepsilon}{h}\big(-e^{-h\delta} + e^{-ht}\big) < \int_t^{\delta} \mathrm{d}\tilde{t}\,\Theta(\tilde{t}) < \frac{\varepsilon}{h}\big(-e^{-h\delta} + e^{-ht}\big) .$$

两边乘以 $e^{ht}$，得到

$$-\frac{\varepsilon}{h} < -\frac{\varepsilon}{h}\big(-e^{h(t-\delta)} + 1\big) < e^{ht}\int_t^{\delta} \mathrm{d}\tilde{t}\,\Theta(\tilde{t}) < \frac{\varepsilon}{h}\big(-e^{h(t-\delta)} + 1\big) < \frac{\varepsilon}{h} .$$

这就证明了断言 2。

接下来，我们证明（3.19）情形下的引理。由于 $1/a(t) = e^{-ht} + \Theta(t)$，我们有

$$\eta(t) = -\int_t^{t_L} \mathrm{d}\tilde{t}\,\big(e^{-h\tilde{t}} + \Theta(\tilde{t})\big) = -\frac{e^{-ht}}{h}\left(1 - e^{h(t-t_L)} + e^{ht}\int_t^{t_L} \mathrm{d}\tilde{t}\,\Theta(\tilde{t})\right) .$$

定义 $F(t) := a(t)/e^{ht} - 1$，使得 $a(t) = e^{ht}\big(1 + F(t)\big)$. 关于$a(t)$的渐近假设意味着 $F(t) \to 0$ 当 $t \to -\infty$时成立。将 $a(t)\eta(t)$ 相乘，得到

$$a(t)\eta(t) = -\frac{1+F(t)}{h}\left(1 - e^{h(t-t_L)} + e^{ht}\int_t^{t_L} \mathrm{d}\tilde{t}\,\Theta(\tilde{t})\right) .$$

该引理现由断言 2 以及 $F(t) \to 0$ as $t \to -\infty$ 这一事实得出。

如果我们从假设（3.20）出发，而不是从（3.19）出发，那么通过对 $\eta(t)\ 1/a(t)$ 应用洛必达法则即可得出 $a(t)\eta(t) \to -1/h$ ,

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{\eta(t)}{1/a(t)} = \lim_{t\to-\infty}\frac{\dot{\eta}}{-\dot{a}/a^2} = -\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{H(t)} = -\frac{1}{h} ,$$

其中我们回顾一下，共形时间满足 $\mathrm{d}\eta = a^{-1}\mathrm{d}t$。 □

**定理 3.5.** 设$(M, g)$ 为如下给出的光滑时空

$$M \;=\; (-\infty, t_{\max}) \times \mathbb{R}^3 \qquad \textit{and} \qquad g \;=\; -\mathrm{d}t^2 + a^2(t) h_{\mathbb{E}}\,,$$

通过规定 $\partial_t$ 为未来指向来确定时间定向。如果尺度因子满足

$$a(t) \overset{t\to-\infty}{=} e^{ht} + o(e^{ht}) \qquad \textit{for some} \quad h \in \mathbb{R}_{>0}\,,$$

或者满足

$$H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \overset{t\to-\infty}{\to} h \qquad \textit{for some} \quad h \in \mathbb{R}_{>0}\,,$$

那么，$(M_{\text{ext}}, g_{\text{ext}})$ 对 $(M, g)$ 的连续延拓可表示为

$$M_{\text{ext}} \;=\; M \cup M_{\lambda\le 0}\,, \qquad M_{\lambda\le 0} := \{(\lambda, v) \mid \lambda \le 0 \;\textit{and}\; v \in \mathbb{R}\} \times \mathbb{S}^2$$

*and*

$$g_{\text{ext}} \;=\; \begin{cases} -2\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}v + a(\lambda)^2\mathrm{d}v^2 + a(\lambda)^2(v-\eta(\lambda))^2\mathrm{d}\Omega^2 & \textit{on } M \\ -2\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}v + h^{-2}\mathrm{d}\Omega^2 & \textit{on } M_{\lambda\le 0}\,. \end{cases}$$

坐标$(\lambda,\ v)$ 定义于(3.11)中，而 $\eta$ 是由(3.21)给出的共形时间。通过规定 $\partial_\lambda + \partial_v$ 为未来指向，确定了$(M_{\text{ext}},\ g_{\text{ext}})$ 上的时间定向；这与 $M$上的原时间定向一致。过去边界 $\partial^- M$ 由 $\lambda = 0$ 超曲面给出，其拓扑结构为 $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$。

证明。上一小节中推导出 (3.14) 的同样计算仍然适用，因此在 $(\lambda, v, \theta, \phi)$ 坐标下，度量仍由 (3.14) 给出。由于 $a(t(\lambda)) \searrow 0$ 当 $\lambda \to 0^+$ 时，度量中令人担忧的项是 $a^2 r^2$，其中 $a(\lambda)$ $r(\lambda, v) = a(\lambda)\big(v - \eta(\lambda)\big)$。为使度量非退化，我们希望证明当 $\lambda \to 0^+$ 时，该表达式趋于一个有限的非零数。由于 $\lambda \to 0^+$ 当且仅当 $t \to -\infty$，由引理 3.4 即可得出结论。

现在我们说明如何获得连续延拓。我们选择延拓流形为 $M_{\text{ext}} = M \cup M_{\lambda\le 0}$ — 引理 3.3 确保这确实是一个流形。类似于精确德西特中的（3.17），度量 $g_{\text{ext}}$ 在 $M_{\text{ext}}$ 上取为 $g$ 在 $M$ 上，并且[7] $-2\,\mathrm{d}\lambda$ $\mathrm{d}v + h^{-2}\mathrm{d}\Omega^2$在 $\{$（$\lambda$，$v$）上 $\mid \lambda \le 0$以及 $v \in \mathbb{R}\} \times \mathbb{S}^2$。因此（$M_{\text{ext}}$，$g_{\text{ext}}$）给出了所需的连续延拓。

此外，正如在精确德西特中，$\lambda = 0$ 与过去边界 $\partial^- M$ 在此延拓中重合。可以通过一条类似的曲线 $\gamma$来说明这一点：$[0, f\,(v_0)\,] \to M_{\text{ext}}$，如（3.18）中所定义，但在选择函数 $f$（$v_0$）时必须更加谨慎；引理 $f$3.3 保证了某个 $v_0$ 的存在，因为我们可以从 $\lambda = 0$ 上的 $a$一条极小的类时曲线。只要 $\lambda$（$< \sqrt{2}$），当曲线足够小时，它就是类时的。 □

**推论 y 3.6.** 平坦过去渐近德西特时空是连续可延拓的 .

证明。过去渐近德西特时空满足 $H \to h > 0$ 且 $H \to 0$ 当 $t \to -\infty$，因此定理3.5 适用。 □

[7]注意，此处延拓中的度量与式（3.17）中的相同，其中我们曾设定 $h = 1$ .

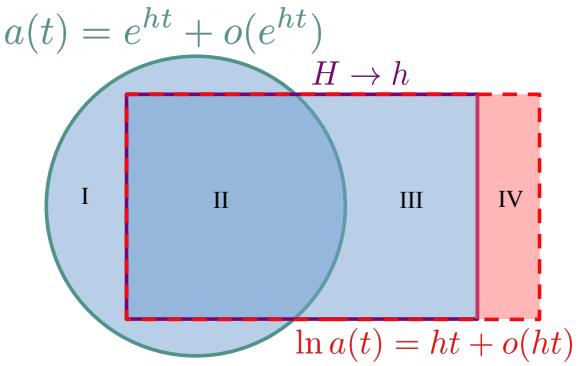



图 5：函数类别的维恩图式示意图：这些函数 [要么是 $a(t)$，要么是 $H(t)$] ，其特征由它们在 $t \to -\infty$ 时的渐近行为决定。我们看到， $a(t) = e^{ht} + o(e^{ht})$（绿色圆形）并不等价于 $H \to h$（紫色矩形；若无进一步假设，两者互不蕴含），但二者存在部分重叠（图中称为区域 II）。条件 $H \to h$ 蕴含 $\ln(a) = ht + o(ht)$（红色虚线矩形），因此紫色矩形位于红色矩形内，但反向推论不成立，故留下区域 IV。落在绿色圆形与紫色矩形内部的函数（即区域 I、II 和 III）是 $C^0$ 可延拓的。对于落在区域 IV 的函数，我们不作判断。文中给出了相关示例。

例子。 我们先考虑以下尺度因子：

$$a(t) = e^t + \sin^2(e^{-3t})e^{2t} \overset{t\to-\infty}{=} e^t + o(e^t)\,. \tag{3.24}$$

由于它满足（3.19），因此所得时空必定是 $C^0$ 可延拓的（定理 3.5）。然而，请注意， $H = \dot{a}/a$ 在 $t \to -\infty$处不存在极限；因此它不满足（3.20）。因此，这是一个 -可延拓时空，但它并非过去渐近德西特时空。它属于图 5所示示意图中的区域 I。反过来，我们来考虑

$$a(t) = (1 + t^2)e^t \overset{t\to-\infty}{\neq} e^t + o(e^t)\,.$$

这不满足（3.19），但通过简单计算可知 $H \to 1$ （且 $H \to 0$）满足 $t \to -\infty$，因此它确实满足（3.20）。因此，根据定理 3.5，它仍符合 $C^0$ 可延拓性 。这属于图 5中的区域 III。

这些例子凸显了这样一个事实：仅对 $a$（$t$）的条件与对 $H$（$t$）的条件 [（后者涉及 $\dot{a}$（$t$）]）并不总是等价。当然，在许多情况下它们是等价的；一个简单的例子是 $a$（$t$）$= e^t + e^{2t}$，它属于图 5中的重叠区域 II。

如果将后者表示为对数，则 $H \to h$ 与关于 $a(t)$ 的条件之间存在直接关系。具体而言，我们注意到，当 $H \to h$ 如 $t \to -\infty$ 所示时，便有 $\ln a(t) \overset{t\to-\infty}{=} ht + o(ht)$。事实上，利用洛必达法则

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\ln a(t)}{ht} = \lim_{t\to-\infty} \frac{H(t)}{h} = 1\,.$$

然而，反向命题通常并不成立。一个反例是 $\ln a(t) = t + \sin(t^2)\sqrt{-t} \overset{t\to-\infty}{=} t + o(t),\ t < 0$，可以验证 $H(t)$ 在 $t \to -\infty$ 时不存在极限。因此，此例属于图 5 中的区域 IV。

注。 请注意，与该图中的区域 I、II 和 III 相反，我们不知道落在区域 IV 的函数是否存在 $C^0$ 延拓。例如，对于 $\ln a(t) = t + \sin(t^2)\sqrt{-t}$，可以通过数值积分 $1/a(t)$ 来表明， $a\eta$ 在 $t \to -\infty$时并不收敛。因此，这表明区域 IV 中的函数通常无法在本小节的 $(\lambda, v)$ 坐标系中延拓。再次强调，这并不意味着一般意义上的不可延拓，因为我们的论述仅限于特定坐标系。事实上，这适用于任何不属于图 5所示函数类别的函数。此外，即便在 $(\lambda, v)$ 坐标系中，我们也不知道图 5中的区域 I、II 和 III 是否涵盖了所有允许存在 $C^0$ 延拓的可能情形。

让我们以一项重要观察结束本小节。众所周知，但或许并非总能得到充分认识的是，时空可延拓性与奇点的概念并不等价。上文已经遇到过这样的例子：事实上，尺度因子（3.24）允许对时空进行 $C^0$ 延拓，但此时哈勃参数发散，意味着在 $t = -\infty$ [处存在标量曲率奇点（例如，里奇标量和克雷奇曼标量曲率不变量均发散；回顾式（2.8）]）。因此我们强调，尽管过去渐近德西特时空通常被认为始终不存在标量曲率奇点，而且始终可以进行 $C^0$ 延拓，但确实存在一些可进行 $C^0$-延拓的例子，它们不属于该类别，并且仍可能具有奇点。

## 3.4 提高正则性

到目前为止，我们已经找到了关于 $a(t)$ 或 $H(t)$ 的渐近条件，该条件可确保度规 $C^0$ 的可延拓性。自然地，我们接下来想要探讨，需要满足哪些渐近条件才能得到正则性更高的延拓，例如一次连续可微（$C^1$）、二次连续可微（$C^2$）或更高阶的延拓。我们将在接下来的小节中探讨这些问题。

### 3.4.1 一次和二次连续可微

从度量 $g = -2\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}v + a^2\mathrm{d}v^2 + a^2r^2\mathrm{d}\Omega^2$，可以看出，要提高正则性，我们必须控制 $a$ 和 $ar$（将它们视为 $\lambda$ 和 $v$ 的函数）。 $v$ 导数在 $\lambda = 0$ 处表现良好，因为 $\frac{\partial}{\partial v}a(t(\lambda)) = 0$，并且回想起 $r(\lambda, v) = v - \eta(t(\lambda))$，

$$\frac{\partial}{\partial v}\Big(a(t(\lambda))r(\lambda, v)\Big) = a(t(\lambda)) \overset{\lambda\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+ .$$

还要回顾一下 $\mathrm{d}\lambda = a\mathrm{d}t$、$\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}t/a$ 和 $H = \dot{a}/a$，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}a(t(\lambda)) = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\dot{a}}{a} = H \tag{3.25}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(a(t(\lambda))r(\lambda, v)\Big) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(a(v-\eta)\Big) = H(v-\eta) - a\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} = H(v-\eta) - \frac{1}{a}\,. \tag{3.26}$$

上述计算表明，以下极限是理想的：

$$H(t) \to h \quad \text{and} \quad \frac{1}{a(t)} + H(t)\eta(t) \to c \in \mathbb{R} \qquad \text{as} \quad t \to -\infty\,, \tag{3.27}$$

对于某个实数 $c$。回想一下，当 $t \to -\infty$ 时取极限等价于当 $\lambda \to 0^+$ 时取极限。

**引理 3.7**。假设 $a(t) = e^{ht} + o\big(e^{(2+\varepsilon)ht}\big)$ 和 $\dot{a}(t) = he^{ht} + o\big(e^{(2+\varepsilon)ht}\big)$ 当 $t \to -\infty$时，对于某个 $h$，$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$。则 (3.27) 成立。

证明。选取 $t_{\mathrm{L}1} < 0$，使得 $t < t_{\mathrm{L}1}$ 蕴含 $he^{ht} - e^{(2+\varepsilon)ht} > 0$, $|a(t) - e^{ht}| < e^{(2+\varepsilon)ht}$，以及 $|\dot{a}(t) - he^{ht}| < e^{(2+\varepsilon)ht}$。那么

$$0 < he^{ht} - e^{(2+\varepsilon)ht} < \dot{a}(t) < he^{ht} + e^{(2+\varepsilon)ht}$$

and

$$\frac{1}{e^{ht} + e^{(2+\varepsilon)ht}} < \frac{1}{a(t)} < \frac{1}{e^{ht} - e^{(2+\varepsilon)ht}}\,, \tag{3.28}$$

因此，由夹逼定理可得 $H(t) = \dot{a}(t)/a(t) \to h$，如 $t \to -\infty$ 所示。

现在我们证明 $1/a(t) + H(t)\eta(t)$ 趋近于某个实数 $c$。注意，问题的一部分在于推导出 $c$ 的值。

令 $\Theta(t) := 1/a(t) - e^{-ht}$。断言：当 $t \to -\infty$ 时，$\Theta(t) = o(e^{\varepsilon ht/2})$。为证明该断言，注意到（3.28）蕴含 $\frac{1}{a(t)} \le \frac{1}{e^{ht} - e^{(2+\varepsilon)ht}} = \frac{e^{-ht}}{1 - e^{(1+\varepsilon)ht}} = e^{-ht}\big(1 + e^{(1+\varepsilon)ht} + e^{2(1+\varepsilon)ht} + \cdots\big)$。因此

$$\frac{1/a(t) - e^{-ht}}{e^{\varepsilon ht/2}} < e^{\varepsilon ht/2} + e^{(1+3\varepsilon/2)ht} + \cdots\,.$$

右侧趋于零。同样，反向不等式的证明也类似。因此，根据夹逼定理，该断言成立。

根据该断言，存在一个 $t_{\mathrm{L}2}$，使得 $t < t_{\mathrm{L}2}$ 蕴含 $|\Theta(t)| < e^{h\varepsilon t/2}$。令 $\Theta^{\pm}(t) := \max\{0, \pm\Theta(t)\}$ 表示 $\Theta(t)$ 的正部和负部，从而 $\Theta(t) = \Theta^{+}(t) - \Theta^{-}(t)$。于是 $|\Theta(t)| < e^{h\varepsilon t/2}$ 蕴含 $\int_{-\infty}^{t_{\mathrm{L}2}} \mathrm{d}t\, \Theta^{+}(t)$ 和 $\int_{-\infty}^{t_{\mathrm{L}2}} \mathrm{d}t\, \Theta^{-}(t)$ 都收敛到实数。因此 $\int_{-\infty}^{t_{\mathrm{L}2}} \mathrm{d}t\, \Theta(t)$ 也收敛到某个实数，从而 $\int_{-\infty}^{t_{\mathrm{L}}} \mathrm{d}t\, \Theta(t)$ 也如此。然后

$$\eta(t) = -\int_t^{t_{\mathrm{L}}} \mathrm{d}\tilde{t}\, a(\tilde{t})^{-1} = h^{-1}e^{-ht_{\mathrm{L}}} - h^{-1}e^{-ht} - \int_t^{t_{\mathrm{L}}} \mathrm{d}\tilde{t}\, \Theta(\tilde{t})\,.$$

因此，对于 $t < t_{\mathrm{L}1}$，我们有

$$\frac{1}{a(t)} + H(t)\eta(t) < \frac{e^{-ht}}{1 - e^{(1+\varepsilon)ht}} + H(t)\left(\frac{e^{-ht_{\mathrm{L}}}}{h} - \frac{e^{-ht}}{h} - \int_t^{t_{\mathrm{L}}} \mathrm{d}\tilde{t}\, \Theta(\tilde{t})\right)\,.$$

右侧趋于有限数

$$c := e^{-ht_{\mathrm{L}}} - \int_{-\infty}^{t_{\mathrm{L}}} \mathrm{d}t\, \Theta(t)$$

当 $t \to -\infty$ 时。事实上，简单计算可知，关于 $a(t)$ 和 $\dot{a}(t)$ 的假设意味着 $\frac{e^{-ht}}{1-e^{(1+\varepsilon)ht}} - H(t)\frac{e^{-ht}}{h}$ 在~~$t \to -\infty$~~ 时~~趋于~~0。反向不等式的证明类似。因此，根据夹逼定理，$1/a(t) + H(t)\eta(t)$ 趋于 $c$。 □

注。

- 不难看出，引理 3.7 在较弱的假设"$a(t) \overset{t\to-\infty}{=} e^{ht} + o\big(e^{(2+\varepsilon)ht}\big)$ 和 $\dot{a}(t) \overset{t\to-\infty}{=} he^{ht} + o\big(e^{(1+\varepsilon)ht}\big)$"下仍然成立。然而，如果 $a(t) \overset{t\to-\infty}{=} e^{ht} + o\big(e^{(2+\varepsilon)ht}\big)$，且 $\lim_{t\to-\infty} \frac{\dot{a}(t - he^{ht})}{e^{(2+\varepsilon)ht}}$ 存在或发散到 $\pm\infty$，那么~~应用~~洛必达法则可知，该极限必为零，因此一开始就必然有 $\dot{a}(t) \overset{t\to-\infty}{=} he^{ht} + o\big(e^{(2+\varepsilon)ht}\big)$。因此，只有在 $\lim_{t\to-\infty} \frac{\dot{a}(t - he^{ht})}{e^{(1+\varepsilon)ht}} = 0$、$\lim_{t\to-\infty} \frac{\dot{a}(t - he^{ht})}{e^{(2+\varepsilon)ht}}$ 不存在，且 $\lim_{t\to-\infty} \frac{a(t - e^{ht})}{e^{(2+\varepsilon)ht}} = 0$ 的情况下，较弱的假设才成立而 $\dot{a}(t) \neq he^{ht} + o\big(e^{(2+\varepsilon)ht}\big)$ 随 $t \to -\infty$ 而成立——这种情况似乎无关紧要。

- 事实上，再次使用洛必达法则，引理3.7 的假设等价于以下假设集合："$a(t) \searrow 0$ 当 $t \to -\infty$ 且 $\dot{a}(t) \overset{t\to-\infty}{=} he^{ht} + o\big(e^{(2+\varepsilon)ht}\big)$。"

- 如果 $a(t) = e^t + e^{2t}$ 或

$$a(t) = \frac{e^t}{1 + e^t/t} \overset{t\to-\infty}{=} e^t - \frac{e^{2t}}{t} + \dots ,$$

那么直接计算可知，(3.27) 不成立。后者是一个反例，表明如果假设为"$a(t) \overset{t\to-\infty}{=} e^{ht} + o(e^{2ht})$ 且 $\dot{a}(t) \overset{t\to-\infty}{=} he^{ht} + o(e^{2ht})$"，引理 3.7 将不成立。因此，在引理 $\varepsilon = 0$ 的假设中取3.7 不足以得出其结论。

**定理 3.8**。 设 $(M, g)$ 为如下给出的光滑时空

$$M = (-\infty, t_{\max}) \times \mathbb{R}^3 \quad and \quad g = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t) h_{\mathbb{E}} ,$$

时间取向规定为 $\partial_t$ 为未来指向。令 $(\lambda, v)$ 表示由 (3.11)给出的坐标。

(a) 假设 $a(t) = e^{ht} + o\big(e^{(2+\varepsilon)ht}\big)$ 且 $\dot{a}(t) = he^{ht} + o\big(e^{(2+\varepsilon)ht}\big)$ 作为 $t \to -\infty$，其中 $\varepsilon > 0$。那么$(M, g)$ 可穿过该 $\lambda = 0$ 超曲面作 $C^1$ 延拓。

(b) 假设满足*(a)*部分中的条件，并且假设$\lim_{t\to-\infty} \dot{H}(t)/a(t)^2$ 在$\mathbb{R}$内存在，其中 $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$。那么$(M, g)$ 可穿过该 $\lambda = 0$超曲面作 $C^2$ 延拓。

注。"存在一个穿过该超曲面的 $C^k$ 延拓"是指：存在该超曲面 $\lambda = 0$ 的一个邻域 $V$，$\{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$，以及定义在 $V$上的一个 $C^k$ 洛伦兹度量 $g_{\text{ext}}$，使得 $g_{\text{ext}} = g$ 在 $M \cap V$上成立，并且 $V$上的时间定向与 $M \cap V$上的时间定向一致。因此，若 $M_{\text{ext}} = M \cup V$，则（$M_{\text{ext}}$，$g_{\text{ext}}$）是（$M$，$g$）的一个 $C^k$ 延拓。

请注意，我们当然并未构造任何类型的极大延拓。此外，延拓度规 $g_{\text{ext}}$ 不可能与定理 3.5中引入的度规相同。要构造所需的 $C^k$ 延拓，只需证明度量分量的所有（至 $k$阶）偏导数在过去边界处都有连续极限。随后即可得到一个具有足够可微性的度量延拓，依据是 [63]；另见 [64]。然而，由于度量分量关于 $v$导数的表现良好，只需以过去边界处的偏导数作为系数，在 $\lambda$ 中构造泰勒级数，就能轻易构造出一个 $C^k$ 延拓。下文的证明展示了 $C^1$ 情形。

证明。

(a) 在 $M$ 内，度量在 $(\lambda, v)$ 坐标下具有如下形式： $g = -2\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}v + a^2\mathrm{d}v^2 + (ar)^2\mathrm{d}\Omega^2$。在此表达式中， $a$ 和 $r$ 是 $\lambda$ 和 $v$ 的函数。利用 (3.26)，我们得到 $\partial_\lambda(ar)^2 = 2a(v-\eta)(H(v-\eta) - 1/a)$。由于满足 $C^0$ 可延拓性的条件，因此当 $\lambda \to 0^+$ 时， $a\eta \to -1/h$ 。由此，根据引理 3.7， $\partial_\lambda(ar)^2$ 可连续延拓至 $\lambda = 0$ 超曲面。事实上，其连续延拓为 $2(v - c/h)$，其中 $c$ 由 (3.27) 给出。其他偏导数 $\partial_v(ar)^2$、$\partial_\lambda a^2$、 $\partial_v a^2$ 的极限均为零。由于这些导数在 $\lambda = 0$ 超曲面上有连续极限，因此 $a^2$ 和 $(ar)^2$ 在下半平面 $\lambda \le 0$ 上存在 $C^1$ 延拓。具体而言，可以通过以下方式定义一个 $C^1$ 时空延拓：

$$g_{\text{ext}} \;=\; -2\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}v + \frac{1}{h^2}\big(1 + 2h(hv - c)\lambda\big)\mathrm{d}\Omega^2$$

对于 $\lambda \in (-\delta,\ 0]$。通过将 $\delta > 0$ 选得足够小，我们可以确保度量保持洛伦兹特征。此外，我们可以确保 $\partial_\lambda + \partial_v$ 始终为类时$(\lambda \in (-\delta,\ 0]$。因此，我们规定 $\partial_\lambda + \partial_v$ 为未来指向，从而为延拓赋予时间定向；这与 $M$上的原有时间定向一致。

(b) 在 (a) 部分的假设下，很容易看出，所有度量分量的二阶偏导数在趋近于 $\lambda = 0$ 超曲面时都趋于有限值，除了 $\partial_\lambda^2 a^2$ 和 $\partial_\lambda^2(ar)^2$。这些项需要我们对 $\dot{H}/a^2$作出额外假设。回顾 (3.25)，可得

$$\frac{\partial^2 a}{\partial\lambda^2} = \frac{\partial H}{\partial\lambda} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\dot{H}}{a}\,, \tag{3.29}$$

因此我们有 $\partial_\lambda^2 a^2 = 2(\dot{H} + H^2)$。由于在额外假设下， $H^2 \to h^2$ 和 $\dot{H} \to 0$ ， $\partial_\lambda^2 a^2$ 在趋近于 $2h^2$ 时趋于 $\lambda = 0$ 超曲面。利用 (a) 部分对 $\partial_\lambda(ar)^2$ 的计算，以及 (3.26) 和 (3.29)，可得

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda^2(ar)^2 \;&=\; \partial_\lambda\big(2a(v-\eta)(vH - H\eta - 1/a)\big) \\
&=\; 2(vH - H\eta - 1/a)\partial_\lambda\big(a(v-\eta)\big) + 2a(v-\eta)\partial_\lambda(vH - H\eta - 1/a) \\
&=\; 2(vH - H\eta - 1/a)^2 + 2\dot{H}(v-\eta)^2\,.
\end{aligned}$$

上面的第一项根据引理 3.7趋于一个有限值。对于第二项，我们有 $\dot{H}(v-\eta)^2 = \frac{\dot{H}}{a^2}(av - a\eta)^2$。由于 $a \searrow 0$， $a\eta \to -1/h$，并且 $\dot{H}/a^2$ 趋于有限

值（根据假设），可知当趋近于 $\lambda = 0$ 超曲面时， $\partial_\lambda^2(ar)^2$ 趋于一个有限值。 $C^2$ 延拓可以用与(a)部分相同的方法得到。

□

**推论 3.9.** 假设对于某些数 $h \in \mathbb{R}_{>0}$ 和 $b \in \mathbb{R}$，我们有

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{ht} + be^{3ht} + o(e^{3ht}) , \\ \dot{a}(t) &= he^{ht} + 3hbe^{3ht} + o(e^{3ht}) , \\ \ddot{a}(t) &= h^2e^{ht} + 9h^2be^{3ht} + o(e^{3ht}) . \end{aligned}$$

那么 $(M, g)$ 存在一个穿过该 $\lambda = 0$ 超曲面的 $C^2$ 延拓。

证明。通过直接计算可得，当 $t \to -\infty$ 时， $\dot{H}(t)/a^2(t) \to 4bh^2$ 。 □

注。 在前一个推论中，注意到 $a(t)$、 $\dot{a}(t)$ 和 $\ddot{a}(t)$ 满足引理 2.7 的条件，因此该例中的时空可以称为过去渐近德西特。

还要注意，我们也可以将上一个推论中的 $a(t)$、 $\dot{a}(t)$ 和 $\ddot{a}(t)$ 等价地改写为 $\sim e^{ht} + O(e^{3ht})$，即 $t \to -\infty$。这一渐近条件与此前在 [29]中得到的条件相符。此外，将 $\lim_{t\to-\infty} \dot{H}/a^2$ 的存在性和有限性作为时空可延拓性的条件，也与 [27, 29]中的结果相符。

### 3.4.2 二阶以上连续可微（直至光滑）

我们先定义一些新记号：对于任意函数 $\mathcal{F}(\lambda) : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ 以及任意整数 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们使用以下简写记号

$$l_\lambda^k[\mathcal{F}] := \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\mathrm{d}^k\mathcal{F}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^k} .$$

如果 $\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\mathrm{d}^k\mathcal{F}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^k}$ 存在且有限，那么 $l_\lambda^k[\mathcal{F}]$ 就是一个泛函（它只会给出一个有限实数），并且当 $\lambda \to 0^+$时， $\mathcal{F}(\lambda)$ 属于 $C^k$ 可微性类。类似地，对于函数 $\mathcal{G}(a) : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$，我们写作

$$l_a^k[\mathcal{G}] := \lim_{a\to 0^+} \frac{\mathrm{d}^k\mathcal{G}(a)}{\mathrm{d}a^k} .$$

现在我们来注意到，由于我们的度量是

$$g = -2\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}v + a(\lambda)^2\mathrm{d}v^2 + a(\lambda)^2r(v,\lambda)^2\mathrm{d}\Omega^2 , \tag{3.30}$$

其中 $r(v, \lambda) = v - \eta(\lambda)$，度量是 $C^k$ 可延拓的，当且仅当 $l_\lambda^r[a^2]$ 并且

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\partial^r}{[\partial\lambda\partial v]^r}\Big(a(\lambda)\big(v - \eta(\lambda)\big)\Big)^2 = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\partial^r}{[\partial\lambda\partial v]^r}\left(a(\lambda)^2v^2 - 2a(\lambda)^2\eta(\lambda)v + a(\lambda)^2\eta(\lambda)^2\right) \tag{3.31}$$

对所有 $r \in \{0,\dots,k\}$均存在且有限。在上文中，$[\partial\lambda\partial v]^r$ 示意性地表示关于 $\lambda$ 和/或 $v$ 的总阶数为 $r$的偏导数的任意组合。[8] 需要指出的是，通过反复使用关于混合偏导数等式的克莱罗定理，并注意到 $\partial_v(a^2v^2) = 2a^2v$、$\partial_v^2(a^2v^2) = 2a^2$、$\partial_v(a^2\eta v) = a^2\eta$以及任何其他 $v$ 阶导数均为零，可知对所有 $r \in \{0,\dots,k\}$而言，$l^r_\lambda[a^2]$、$l^r_\lambda[a^2\eta]$和 $l^r_\lambda[a^2\eta^2]$ 的存在性与有限性等价于（3.31）的存在性与有限性。我们在此回顾，极限 $\lambda \to 0^+$ 应始终在固定 $v$的条件下取。因此，对所有$r \in \{0,\dots,k\}$ 而言，$l^r_\lambda[a^2]$、$l^r_\lambda[a^2\eta]$和 $l^r_\lambda[a^2\eta^2]$ 的存在性与有限性等价于度量（3.30）是 $C^k$ 可延拓的，且 $\lambda \to 0^+$。这就引出了以下结果：

**引理 3.10**。 存在性和有限性 $l^r_\lambda[a]$ 以及 $l^r_\lambda[a\eta]$ 对于所有 $r \in \{0,\dots,k\}$ 等价于在 (3.30) 中给出的度量为 $C^k$ 可延拓为 $\lambda \to 0^+$。

证明见附录A。[9]

接下来，我们注意到，对于 $C^2$ 可延拓性，$l^0_\lambda[a]$、$l^0_\lambda[a\eta]$ 和 $l^0_\lambda[\dot{H}/a^2]$ 的存在性与有限性意味着 $l^2_\lambda[a]$ 和 $l^2_\lambda[a\eta]$ 的存在性与有限性，因为 $\partial^2_\lambda a = a(\dot{H}/a^2)$ 且 $\partial^2_\lambda(a\eta) = (a\eta)(\dot{H}/a^2)$。如下文所示，我们可以将这一关系推广到任意高阶导数。

**引理 3.11**。 这个引理由两个相似（但彼此独立）的陈述组成：

(a) 对于所有 $r \in \{0,\dots,k-2\}$，$l^r_\lambda[a]$ 和 $l^r_\lambda[\dot{H}/a^2]$ 的存在性与有限性意味着 $l^{k-1}_\lambda[a]$ 和 $l^k_\lambda[a]$的存在性与有限性；(b) 对于所有 $r \in \{0,\dots,k-2\}$，$l^r_\lambda[a\eta]$ 和 $l^r_\lambda[\dot{H}/a^2]$ 的存在性与有限性意味着 $l^{k-1}_\lambda[a\eta]$ 和 $l^k_\lambda[a\eta]$的存在性与有限性。

证明见附录A。

**推论 3.12**。 对于所有 $l^r_\lambda[a]$、$l^r_\lambda[a\eta]$和 $l^r_\lambda[\dot{H}/a^2]$，$r \in\{0,\dots,k-2\}$ 度量 (3.30) 是 $C^k$ 可延拓的，且 $\lambda \to 0^+$。

证明。 由引理3.11，可知 $l^r_\lambda[a]$ 和 $l^r_\lambda[a\eta]$ 对所有$r \in \{0,\dots,k\}$均存在且有限，因此由引理3.10度量（3.30）可 $C^k$ 延拓为 $\lambda \to 0^+$。 □

对于应用而言，将 $\lambda$关于 $\dot{H}/a^2$ 的导数与 $a$关于 $\dot{H}/a^2$ 在 $\lambda \to 0^+$趋于 $a$时的导数联系起来，将会很有用。当然，只有当我们能够将 $\dot{H}/a^2$ 表示为 $a$的函数时，$a$ 导数 $\lambda$ 才有意义。若 和 $\lambda_{\rm L}$ 在某个区间 (0 $\dot{a}$,$t$) 上可逆，则这一条件便成立。例如，若 $> 0$ 在某个区间 $(-\infty, t_{\rm L})$ 上成立，则可满足这一条件——对于满足 (2b 的暴胀宇宙而言，这一条件显然能够实现。2.3 在以下论述中，每当我们对某个 $a$ 导数作出断言时，都隐含地假设上述可逆性条件成立。

[8]例如，若 $r = 3$，则有 $\partial^3_\lambda$, $\partial_v\partial^2_\lambda$, $\partial_\lambda\partial_v\partial_\lambda$, $\partial^2_\lambda\partial_v$, $\partial^2_v\partial_\lambda$, $\partial_v\partial_\lambda\partial_v$, $\partial_\lambda\partial^2_v$ 和 $\partial^3_v$。[9]为改善行文，本小节中的大多数证明都放在附录中。这些证明大多具有组合性质，并未带来额外的几何或物理洞见。

**引理 3.13**。 对于所有 $r \in \{0, \ldots, k-2\}$， $l^r_\lambda[a]$ 和 $l^r_a[\dot{H}/a^2]$ 的存在性与有限性意味着对于所有 $r \in \{0, \ldots, k-2\}$， $l^r_\lambda[\dot{H}/a^2]$ 的存在性与有限性。

证明见附录A。

**推论 3.14**。对于所有 $l^r_\lambda[a]$， $l^r_\lambda[a\eta]$和 $l^r_a[\dot{H}/a^2]$ ， $r \in\{0, \ldots, k-2\}$ 的存在性和有限性意味着度量(3.30) 是 $C^k$ 可扩展的，扩展为 $\lambda \to 0^+$。

证明。由引理3.13可得 $l^r_\lambda[a]$， $l^r_\lambda[a\eta]$和 $l^r_\lambda[\dot{H}/a^2]$对于所有 $r \in \{0, \ldots, k-2\}$，3.12 根据推论，度量（3.30）是 $C^k$ 可扩展的，扩展为$\lambda \to 0^+$。

□

综上，我们可以证明主要结果：

**定理 3.15**。如果度量(3.30) 是 $C^{k-2}$ 可扩展的，扩展为 $\lambda \to 0^+$ 且 $l^r_a[\dot{H}/a^2]$ 对于所有 $r \in \{0, \ldots, k-2\}$都存在且有限，那么度量(3.30) 是 $C^k$ 可扩展的，扩展为 $\lambda \to 0^+$。

证明。 根据假设，引理 3.10告诉我们 $l^r_\lambda[a]$ 和 $l^r_\lambda[a\eta]$ 对所有 $r \in \{0, \ldots, k-2\}$都存在且有限。因此，我们可以应用推论 3.14，由此完成证明。 □

注与例子。 从该定理可知，若要使度量能够光滑延拓，则需要 $\dot{H}/a^2$ 视为关于 $a$ 的函数时，在 $a \to 0^+$处是光滑的。（这证明了 [27]附录中一个陈述过但未予以适当证明的结果。）例如，当 $\dot{H} \propto a^q$ 对于 $q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 成立时，或当 $\dot{H} = \sum_{q=2}^{N} c_q a^q$ 对于某些系数 $c_q \in \mathbb{R}$， $q$ 从 2 到$N \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$成立时，便是如此。前一种情况下，当 $H = -ba^q$ 对于某个比例常数 $b \in \mathbb{R}_{>0}$满足 $H = \dot{a}/a \to h$ 在 $t \to -\infty$时，存在唯一的解，其形式为

$$a(t) = \left(\frac{h^2 q}{2b}\operatorname{sech}^2\left(\frac{hq}{2}(t - t_0)\right)\right)^{1/q}, \qquad t_0 \in \mathbb{R}\,. \tag{3.32}$$

令 $b = 2q$、 $h = 1$和 $t_0 = 0$，作为示例，上述表达式的渐近膨胀为

$$a(t) \overset{t\to-\infty}{=} e^t - \frac{2}{q}e^{(1+q)t} + \frac{2+q}{q^2}e^{(1+2q)t} + \ldots\,.$$

回顾此处 $q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，因此上述表达式渐近地为 $a(t) \overset{t\to-\infty}{=} e^t + O(e^{3t})$。

另一类有趣的例子是

$$a(t) = e^t + e^{nt}, \qquad n \in \mathbb{R}_{\geq 3}\,. \tag{3.33}$$

我们将证明 $C^\infty$ 对于 $n = 3$的可延拓性。[10] 当 $n = 3$时，在这种情况下可以解析地反演尺度因子，从而得到

$$t(a) = \ln\left(\frac{2^{1/3}\Delta(a)^{2/3} - 2\cdot 3^{1/3}}{6^{2/3}\Delta(a)^{1/3}}\right), \qquad \Delta(a) := 9a + \sqrt{12 + 81a^2}\,.$$

[10]更一般地，我们猜想，如果 $n \in \mathbb{R}_{\geq k+1}$或 $n \in \{3, 4, \ldots, k\}$，则 $C^k$ 可延拓性成立。相应地，如果 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$，则 $C^\infty$ 也将成立。我们检验了若干支持这些猜想的情形，但一般性证明虽然可以实现，却超出了本文的研究范围（而且与本文主题的关联也不大）。

然后，

$$\frac{\dot{H}}{a^2} = \frac{4}{(1+e^{2t})^4} = 4\left(\frac{1}{3} + \frac{\Delta(a)^{2/3}}{3\cdot 2^{2/3}\cdot 3^{1/3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}\frac{1}{\Delta(a)^{2/3}}\right)^{-4},$$

它是关于 $a$ 的光滑函数，当 $a \to 0^+$时。理解这一点的一种方法是注意到，当 $a \to 0^+$ 时，级数展开为

$$\frac{\dot{H}}{a^2} = 4 - 16a^2 + 72a^4 - 352a^6 + 1820a^8 - 9792a^{10} + \dots,$$

因此，作为 $a$的函数， $\dot{H}/a^2$在 $a = 0^+$附近的一个开放邻域内实解析；所以它在该邻域内光滑。

更多示例，包括利用标量场实现慢滚暴胀的示例，可见附录 B。

### 3.5 关于曲率奇点的讨论

本节最后，我们讨论 $C^2$ 延拓与曲率奇$M$点的关系。设 $(g, C^2)$ 为一个时空。我们称 标量曲率不变量 $\mathcal{S}$ 为定义在 $M$ 上的标量函数，它是度量 $g_{\mu\nu}$、其逆度量 $g^{\mu\nu}$以及（黎曼）曲率张量 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$各分量的多项式。常见的标量曲率不变量包括一阶曲率下的标量曲率 $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}$，以及二阶曲率下的克雷奇曼标量 $\mathcal{K} := R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$、里奇张量与自身的收缩 $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$和高斯-博内不变量 $\mathcal{G} := R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \mathcal{K}$。对于任意阶曲率，由于黎曼张量的收缩方式有限（并且还受到其对称性的进一步限制），总能写出有限个线性独立的多项式；例如，参见 [65, 66] 三阶曲率的情形。下面的定理表明，对于那些允许 $\lambda = 0$延拓的时空，趋近 $C^2$ 超曲面（即过去边界）时不存在曲率奇点。

**定理 3.16**。 假设 $(M,\ g)$按定理 3.8 的前提所定义，并且存在一个穿过 $C^2$的延拓，使其经过 $\lambda = 0$ 超曲面。（例如，若假设定理 3.8 第 ***(b)*** 部分或推论 3.9的假设，即可实现。）如果 $\mathcal{S}$ 是$M$上的一个标量曲率不变量，那么 $\mathcal{S}$ 可连续延拓至 $\lambda = 0$ 超曲面。

证明。 曲率张量 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ 是由涉及度量 $g_{\mu\nu}$、逆度量 $g^{\mu\nu}$及其一阶和二阶导数的有限多个项组成的。对 $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$求导可知，逆度量具有与度量相同的正则性。因此，根据度量的 $C^2$可延拓性，出现在任意曲率不变量 $\mathcal{S}$ 中的每一项都可以连续延拓至 $\lambda = 0$ 超曲面。

□

注。当前述定理得以实现时，通常会说所得时空是无奇点的，因为它不存在标量曲率奇点。

定理 3.16或许强于所需。事实上，正如第2.3节所述，不存在标量曲率奇点这一事实，或许已蕴含于该 $C^2$ 可延拓时空的过去渐近德西特性质之中。事实上，我们主张任何

过去渐近德西特时空（按定义 2.5 的意义）都不存在标量曲率奇点。更准确地说，我们断言，对于任意阶的曲率（例如 $n$ 阶），任何标量曲率不变量都是由 $H^2$ 和 $\dot{H}$ 构成的同阶多项式，也就是说，它由 $\{H^{2n}, H^{2(n-1)}\dot{H}, \ldots, H^2\dot{H}^{n-1}, \dot{H}^n\}$的线性组合构成。原因在于，任意 $O$阶（曲率$^n$）标量曲率不变量，在示意上都具有 $g^{-n}\mathrm{Riem}^n$的形式。接着，我们可以观察到，在 FLRW 时空坐标（以及笛卡尔空间坐标 $i,j \in \{x,y,z\}$）中，非零收缩涉及黎曼张量的分量 $R^j{}_{iji} = a^2H^2$ 和 $R^t{}_{iti} = a^2(H^2+\dot{H})$（不对指标求和），它们与 $g^{ii} = 1/a^2$ 收缩；还涉及黎曼张量的分量 $R^i{}_{tit} = H^2+\dot{H}$，它们与 $g^{tt} = -1$收缩。因此，标量多项式（与坐标无关）只能由 $H^2$ 和 $\dot{H}$ 的适当次幂项构成。我们可以通过线性和二次不变量清楚地看到这一点 [回顾式 (2.8)], ；再举两个三次阶的例子，有
$R_{\mu\nu}R^{\nu\rho}R_\rho{}^\mu = 108H^6 + 162H^4\dot{H} + 108H^2\dot{H}^2 + 30\dot{H}^3$和
$R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\sigma}R_{\gamma\sigma}{}^{\mu\nu} = 48H^6 + 72H^4\dot{H} + 72H^2\dot{H}^2 + 24\dot{H}^3$。

因此，任何过去渐近德西特时空似乎都不存在标量曲率奇点（精确德西特时空也是如此）。然而，正如本节中我们所看到的，过去渐近德西特时空并不一定可延拓（在 $(\lambda,\ v)$ 坐标中）；($C^0$、 $C^1$、 $C^2$ 等) 可延拓性的条件可能比定义过去渐近德西特时空的条件更强。因此，我们不禁想问，对于那些可能($C^0$、 $C^1$、 $C^2$ 等)不可延拓、却没有标量曲率奇点的时空，究竟出了什么问题。

对于 $C^k$ （不可）延拓性， $k \geq 2$，我们可以给出一些解释。回想定理 3.8 中关于 $C^2$ 可延拓性的部分 (b)：如果量 $\dot{H}/a^2$ 在过去边界处收敛，那么就可以实现 $C^2$ 可延拓性。如果量 $\dot{H}/a^2$ 发散，那么我们不知道在 $(\lambda、\ v)$ 坐标中是否存在 $C^2$ 延拓。不过，我们可以证明，该时空在过去边界处具有零测地线平行传播曲率奇点。事实上，很容易验证，在 $(\lambda、\ v)$ 坐标中，曲率张量的某些分量会包含量 $\dot{H}/a^2$，因此会发散。例如，里奇张量的 $\lambda\lambda$ 分量为 $R_{\lambda\lambda} = -2\dot{H}/a^2$。由于曲率张量的发散是特定于这一坐标系的，因此这并非标量曲率奇点，而是具有前述名称的奇点，通常简称为平行传播奇点。[11] 严格来说，必须找到一个四标架基 $\{E^M\}$，使其沿零测地线平行传播，也就是说，沿零测地线切向量 $K$ 的协变导数为零： $\nabla_K E^M = K^\mu\nabla_\mu E^M = 0$。可以构造出不同的基 [27,29],，但它们都具有这样的性质：在给定基下的里奇张量分量中会出现 $\dot{H}/a^2$。例如， [29] 中构造的零平行传播基可用我们的坐标写作 $E^0 = \mathrm{d}v/\sqrt{2}$， $E^1 = (2\mathrm{d}\lambda - a^2\mathrm{d}v)/\sqrt{2}$， $E^2 = ar\mathrm{d}\theta$， $E^3 = ar\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$；在该平行传播基[12] 下，可以得到 $R_{11} = -\dot{H}/a^2$。只要这一项发散，我们就可以称之为平行传播曲率奇点。 – –

可以说，平行传播奇点弱于标量曲率奇点，但它仍可能具有物理意义。事实上，平行传播奇点与时空可延拓性之间的关系，正是 Clarke 这项工作的核心 [33,36,37], ，该工作后来被应用于

[11]这一讨论可推广到 $C^k$ 可延拓性， $k \geq 2$，回忆推论3.12。在这种情况下，相关量为 $\mathrm{d}^{k-2}(\dot{H}/a^2)/\mathrm{d}\lambda^{k-2}$，它出现在曲率张量的第 $(k-2)$ 阶协变导数在 $(\lambda,\ v)$ 坐标中的分量里。更多详情请参见 [27] 的附录。[12]固定 $v$，$\theta$和 $\phi$后，可以清楚地看出，沿零测地线起作用的是 $\lambda$ 分量。

宇宙学领域 [27–32]。例如， [27] 所采用的方法，正是在平直 FLRW 时空中用零平行传播基计算曲率张量，并找出判定平行传播曲率奇点是否存在的标准。结果表明，只有当 $\dot{H}/a^2$ 这一量收敛时，时空才不存在平行传播奇点，也不会对时空可延拓性造成阻碍。因此，我们看到，这种方法与我们的方法所得结果一致——二者无疑是互为补充的。

## 4 Co向爱因斯坦静态宇宙的共形嵌入

众所周知，平直德西特模型可共形嵌入爱因斯坦静态宇宙 [67–69]。本节将证明，过去渐近德西特模型也可共形嵌入爱因斯坦静态宇宙，并保有相似的几何性质。后续章节将利用这些性质超越 FLRW 的对称性，即超越严格的均匀性与各向同性。

首先，我们给出共形延拓的定义。定义 4.1 和 4.2 分别对应第 3.1 节中的定义 3.1 和 3.2。

**定义 4.1**。 设 $(M, g)$ 是一个 $C^\infty$ 时空，且 $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ 是一个 $C^k$ 时空。若存在一个嵌入 $M \hookrightarrow \widetilde{M}$ 以及一个 $C^k$ 函数 $\Omega\colon M \to [0, \infty)$（$M$ 将在下文定义），使得则称 $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ 是 $(M, g)$ 的 $C^k$ 共形延拓

(i) $M \subset \widetilde{M}$ 是真开子集，

(ii) $\Omega|_M$ 的限制光滑且为正，

(iii) $\partial_0 M \neq \emptyset$ 其中 $\partial_0 M := \{p \in \partial M \mid \Omega(p) = 0\}$，

(iv) $\tilde{g}$ 在嵌入下的拉回等于 $\Omega^2 g$。

在这种情况下，我们称 $M \hookrightarrow \widetilde{M}$ 为一个 $C^k$ 共形嵌入。

几点说明：(1) 如第 3.1节所示，我们将 $M$ 与其在 $\widetilde{\ }$ 下的像等同；(2) $M$ 表示 $M$ 在 $M$中的闭包，同样，$\overline{\partial M}$ 表示 $\widetilde{M}$ 在 $M$中的拓扑边界，因此 $\overline{M} = M \cup \partial M$。

**定义 4.2**。 设 $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ 是时空 $(M, g)$ 的一个 $C^k$ 共形延拓。一条 $\widetilde{\ }$ 未来指向的 $\tilde{g}$类时曲线 $\gamma\colon [a, b] \to M$，若满足 $\gamma(b) = p$ 且 $\gamma\big([a, b)\big) \subset M$，则称其为点 $p \in \partial M$ 的未来终止类时曲线。 $\widetilde{\ }$ 过去终止类时曲线则通过时间对偶方式定义。 $M$ 在 $M$ 中的未来和过去共形边界定义为

$$\begin{aligned} \partial_0^+ M &= \{p \in \partial_0 M \mid \text{there is a future-terminating timelike curve for } p\}, \\ \partial_0^- M &= \{p \in \partial_0 M \mid \text{there is a past-terminating timelike curve for } p\}. \end{aligned}$$

$\widetilde{\ }$ 未来与过去边界 of $M$ within $M$ 的定义为

$$\begin{aligned} \partial^+ M &= \{p \in \partial M \setminus \partial_0 M \mid \text{there is a future-terminating timelike curve for } p\}, \\ \partial^- M &= \{p \in \partial M \setminus \partial_0 M \mid \text{there is a past-terminating timelike curve for } p\}. \end{aligned}$$

~注。的未来边界与过去边界的定义 $M$ 在 $M$ （定义4.2）类似于 $M$ 在 $M_{\text{ext}}$ （定义3.2）中未来边界与过去边界的定义，其中（$M_{\text{ext}}$， $g_{\text{ext}}$）是（$M$， $g$）的连续延拓。虽然它们通常并不相同，但正如推论4.5中所示，也可能存在二者重合的情况。（此处的重合是指对于两个边界点，可以在 $M$ 中找到同一条终止类时曲线。）在满足一些较弱的正则性假设，且（$M$， $g$）全局双曲的条件下，这些点之间存在一个延伸至边界的局部等距 [70]。

## 4.1 回顾平直德西特模型向爱因斯坦静态宇宙的共形嵌入

~爱因斯坦静态宇宙是时空 $(M, \widetilde{g})$，其定义为

$$\widetilde{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3 \quad \text{and} \quad \widetilde{g} = -(\mathrm{d}T')^2 + h_{\mathbb{S}^3} ,$$

其中， $h_{\mathbb{S}^3}$ 是单位三维球面上的标准圆度量， $T'$ 是 $\mathbb{R}$ 上的坐标。（选择 $T'$ 而非 $T$，是为了使我们的记号与下文保持一致。）本小节回顾平直德西特时空如何共形嵌入爱因斯坦静态宇宙。设 $(M, \hat{}g)$ 表示平直德西特模型，即

$$\hat{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \quad \text{and} \quad \hat{g} = -\mathrm{d}\hat{t}^{\,2} + e^{2h\hat{t}} h_{\mathbb{E}} ,$$

其中， $h_{\mathbb{E}}$ 与前文一样是欧几里得度量；若 $(r, \theta, \phi)$ 表示标准球坐标，则 $h_{\mathbb{E}} = \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)$。此外，我们用 $h \in \mathbb{R}_{>0}$ 表示德西特哈勃常数。

^ 我们通过以下方式为 $(M, \hat{}g)$ 引入新坐标 $(T, \chi, \theta, \phi)$

$$e^{h\hat{t}} = \sinh(hT) + \cosh(hT)\cos\chi , \tag{4.34a}$$

$$hre^{h\hat{t}} = \cosh(hT)\sin\chi , \tag{4.34b}$$

$\theta$ 和 $\phi$ 保持不变。

$(\{\hat{}\mathrm{v1}\}, r, \theta, \phi)$ 与 $(T, \chi, \theta, \phi)$ 之间的雅可比行列式非零，因此后者是定义良好的坐标。在 $(T, \chi, \theta, \phi)$ 坐标下，度量 $\hat{}g$ 为

$$\hat{g} = -\mathrm{d}T^2 + \frac{\cosh^2(hT)}{h^2}\left[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\,(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)\right] .$$

方括号中的项是 $\mathbb{S}^3$ 上的圆度量。坐标 $(\theta, \phi)$ 是 $\mathbb{S}^2$ 上的通常坐标，因此其取值范围也是通常范围。现在我们确定 $T$ 和 $\chi$ 的取值范围。将方程 (4.34a) 和 (4.34b) 平方后相加，得到 $\sinh(hT) = \frac{1}{2}h^2r^2e^{h\hat{t}} + \sinh(h\hat{}t)$。因此， $T$ 的取值范围是 $\mathbb{R}$。将其代入 (4.34a)，并代入 (4.34b)，得到 $\tan\chi = 2hr/(1 - h^2r^2 + e^{-2h\hat{t}})$。因此， $\chi$ 的取值范围是 $(0, \pi)$。文献中通常将 $(T, \chi, \theta, \phi)$ 坐标称为闭合德西特切片，或全局德西特时空。

现在，我们考察平直德西特时空的共动观测者在（$T$， $\chi$， $\theta$， $\phi$）坐标中的轨迹，其中 $\hat{}t \to -\infty$。回想一下，在平直德西特时空中，共动观测者

的坐标曲线是一条类时曲线 $\hat{t} \mapsto (\hat{t},\ x_0,\ y_0,\ z_0)$，其中（$x_0,\ y_0,\ z_0$）为某些固定值。（从现在起，我们所说的共动观测者均指这些观测者。）令 $r_0$ 表示相应的径向点。由于 $r_0$ 是固定的，上一段中 $\sinh(hT)$ 的表达式表明，沿共动观测者的轨迹，当 $\hat{t} \to -\infty$ 时，$T \to -\infty$ 。于是，由（4.34b）可知，$\chi$ 趋近于 0 或 $\pi$。然而，根据（$\chi$），我们可以排除 $\pi$ 趋近于4.34a 的情况。因此，我们得到了以下命题，它将在后续讨论中发挥重要作用。

**命题 4.3**。 $T \to -\infty$ 和 $\chi \to 0$ 沿每个共动观测者分别趋于 $t \to -\infty$ 。因此，当 $t \to -\infty$时，所有共动观测者在 $\mathbb{S}^3$ 上趋于北极（$\chi = 0$）。

定义新坐标 $T'$，使其满足 $T' = 2\arctan\left(e^{hT}\right) - \pi/2$，从而 $\cosh(hT) = \sec T'$。因此，$T'$ 将 $\mathbb{R}$ 微分同胚地映射到 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$。由 (4.34a) 和 (4.34b) 可得 $(\hat{t}, r, \theta, \phi)$ 与 $(T', \chi, \theta, \phi)$ 之间的关系为

$$e^{h\hat{t}} = \frac{\sin T' + \cos\chi}{\cos T'}, \tag{4.35a}$$

$$hr = \frac{\sin\chi}{\sin T' + \cos\chi}, \tag{4.35b}$$

而 $\theta$ 和 $\phi$ 保持不变。将度量写成 $(T',\ \chi,\ \theta,\ \phi)$ 坐标的形式，我们很容易看出，该度量与爱因斯坦静态宇宙共形:

$$\hat{g} = \frac{1}{h^2\cos^2 T'}\left(-(\mathrm{d}T')^2 + \mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\,(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)\right). \tag{4.36}$$

$(T', \chi)$ 在 $M$ 上取值的范围，现解释如下。由于 $T' \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，由（4.35a）可得 $\sin T' + \cos\chi > 0$。因此 $\cos\left(T' - \frac{\pi}{2}\right) > \cos(\chi - \pi)$。由于余弦函数在区间 $(-\pi, 0)$ 上严格递增，因此有 $T' > \chi - \frac{\pi}{2}$。根据定义4.1，以下性质便可直接得出。

$\hat{}$ 共形嵌入的性质 $M \hookrightarrow \tilde{M}$:

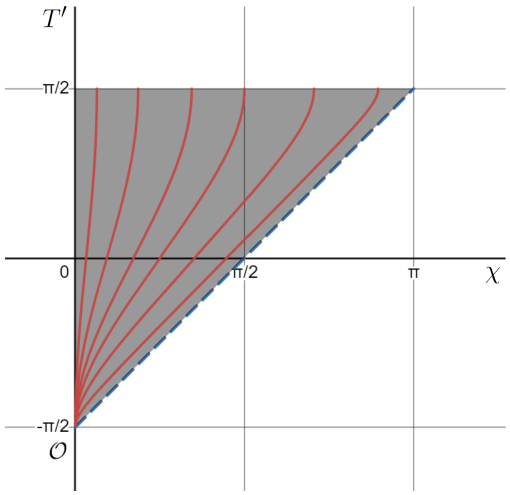
(1) 爱因斯坦静态宇宙 $(M, \tilde{g})$ 是平直德西特时空模型 ( $C^\infty$ 的共形延拓 $\hat{M}, \hat{g}$)。见图 6。

(2) $\hat{M}$对应于点集 $\{(T', \chi) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [0, \pi) \mid T' > \chi - \frac{\pi}{2}\}$.[13]

(3) 拓扑边界由不相交并集 $\partial\hat{M} = \{\mathcal{O}\} \sqcup \mathcal{B}^- \sqcup \Sigma^+$ 给出。这里，$\mathcal{O}$ 是对应于 $T' = -\frac{\pi}{2}$ 处北极（即 $\chi = 0$）的点。此外，$\mathcal{B}^- = \{(T', \chi) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, \pi) \mid T' = \chi - \frac{\pi}{2}\}$ 是平直德西特时空的过去零边界，而 $\Sigma^+ = \{T' = \frac{\pi}{2}$ 和 $0 \le \chi \le \pi\}$ 是未来类空边界。下文中，定义 $\mathcal{P}$ 也将有所帮助，它是 $T' = \frac{\pi}{2}$ 处对应于南极（即 $\chi = \pi$）的点。

(4) 共形因子 $\Omega$ 由 $h\cos T'$ 给出，并限制在 $\tilde{M}$ 内 $\hat{M}$ 的闭包上，即限制在 $M \cup \partial M$ 上。

[13]我们只刻画（$T'$，$\chi$）空间，即省略每次显式写出 $\times\mathbb{S}^2$。




ˆ 图6：阴影区域对应于爱因斯坦静态宇宙 $M$ 内的平直德西特模型 $\widetilde{M}$。纵轴为 $T'$，横轴为 $\chi$。共动观测者由红线表示；它们都趋于点 $\mathcal{O}$，该点对应于 $T' = -\pi/2$ 处的北极（$\chi = 0$）。过去共形边界恰好是 $\partial_0^- \hat{M} = \{\mathcal{O}\}$。过去边界 $\partial^- \hat{M}$ 由光锥 $T' = \chi - \pi/2$ 给出，适用于数值 $-\pi/2 < T' < \pi/2$——图中以蓝色虚线表示。

(5) 共形边界为 $\partial_0 \hat{M} = \{\mathcal{O}\} \sqcup \Sigma^+$，此外，$\partial_0^- \hat{M} = \{\mathcal{O}\}$ 和 $\partial_0^+ \hat{M} = \Sigma^+ \setminus \{\mathcal{P}\}$。回顾一下，$\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{P}$ 分别对应于 $T' = -\pi/2$ 和 $T' = \pi/2$ 处的北极点和南极点。(6) $\partial^- \hat{M} = \mathcal{B}^-$，$\partial^+ \hat{M} = \emptyset$。(7) 上述命题 4.3 表明，沿着每个共动观测者，$T' \to -\frac{\pi}{2}$ 和 $\chi \to 0$ 均趋于 $\hat{t} \to -\infty$。因此，所有共动观测者在 $t \to -\infty$ 时均趋于 $\mathcal{O}$。(8) 存在一个包含 $\mathcal{O}$ 的开放子集 $\widetilde{M}' \subset \widetilde{M}$，使得 $\hat{M} = I^+_{\tilde{g}}(\mathcal{O}, \widetilde{M}')$。例如，可以取 $\widetilde{M}' = (-\infty, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{S}^3$。注意，$I^+_{\tilde{g}}$ 是相对于 $\tilde{g}$ 的类时未来。（$I^\pm$ 的定义见第3.1节开头。）

–

注。我们注意到，过去边界和未来边界中均不存在 $\mathcal{P}$，因为在 $M$内，任何类时曲线都无法到达它。

## 4.2 准德西特时空到爱因斯坦静态宇宙的共形嵌入

在本节中，我们将证明上一节中的许多几何性质，对于在渐近过去趋近于德西特时空的时空仍然成立。具体而言，我们考虑采用与第3.3节开头相同的前提。与之前一样，我们固定一个平坦的

FLRW 时空 $(M,\ g)$，由 $M=(-\infty,\ t_{\max})\times\mathbb{R}^3$ 和 $g=-\mathrm{d}t^2+a(t)^2h_{\mathbb{E}}$ 给出，其中 $a(t)$ 是定义在 $(-\infty,\ t_{\max})$ 上的光滑正函数。我们寻求函数 $\omega(t)>0$ 和 $\hat{t}(t)$，使得

$$g=\omega^2\hat{g}\,, \tag{4.37}$$

即，

$$-\mathrm{d}t^2+a(t)^2h_{\mathbb{E}}\ =\ \omega\big(t(\hat{t})\big)^2\left(-\mathrm{d}\hat{t}^{\,2}+e^{2h\hat{t}}h_{\mathbb{E}}\right)\,, \tag{4.38}$$

从而 $(M,g)$ 与平直德西特模型 $(M,\hat{g})$ 共形等价。只要满足以下条件，这一结论便成立：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t}\ =\ \frac{1}{\omega(t)}\,, \tag{4.39a}$$

$$e^{h\hat{t}}\ =\ \frac{a(t)}{\omega(t)}\,. \tag{4.39b}$$

对（4.39b）关于 $t$ 求导，并代入（4.39a），可得到关于 $\omega$（$t$）的如下微分方程：

$$\frac{\dot{\omega}}{a}-\omega\frac{\dot{a}}{a^2}\ =\ -\frac{h}{a}\ \Longleftrightarrow\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\omega}{a}\right)=-\frac{h}{a}\,;$$

该微分方程的一个解为

$$\omega(t)\ =\ h\,a(t)\int_t^{t_0}\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{a(\tilde{t})}\,, \tag{4.40}$$

其中 $t_0\ \in\ (-\infty,t_{\max})$ 为任意函数。此外，将其与（3.21）进行比较并考虑$t_0\le t_{\mathrm{L}}<t_{\max}$，可知

$$\omega(t)=h\,a(t)\,(\eta(t_0)-\eta(t))\ . \tag{4.41}$$

将此解代入（4.39b），我们还可以得到

$$\hat{t}(t)\ =\ \frac{1}{h}\ln\left(\frac{a(t)}{\omega(t)}\right)\ =\ -\frac{1}{h}\ln\left(h\int_t^{t_0}\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{a(\tilde{t})}\right)\ . \tag{4.42}$$

注。 函数 $\omega(t)$ 对所有 $t\in(-\infty,t_0)$ 均为正。此外，当 $t\to t_0^-$ 时，$\omega(t)\ \searrow 0$，因此当 $t\to t_0^-$ 时，$\hat{t}\to\infty$。

回想一下，我们用 $\mathcal{O}$ 表示爱因斯坦静态宇宙 $(M,\widetilde{g})$ 中 $T'=-\pi/2$ 处北极（$\chi=0$）的点。

**命题 4.4。** 任取 $t_0\in(-\infty,t_{\max})$。通过 $M_{t_0}=(-\infty,t_0)\times\mathbb{R}^3$ 定义 $M_{t_0}\subset M$。假设满足引理 3.4 的条件，即 $a(t)=e^{ht}+o(e^{ht})$ 或者 $H(t)\to h$ as $t\to-\infty$，其中 $h\in\mathbb{R}_{>0}$ 是某个正的有限数。那么存在从 $(M_{t_0},g)$ 到爱因斯坦静态宇宙 $(M,\widetilde{g})$ 的 $C^0$ 共形嵌入，使得

(a) *within* $M_{t_0}$, *the conformal factor* $\Omega$ *is* $\frac{h\cos T'}{\omega(t)}$,

(b) $\partial_0 M_{t_0} = \{\mathcal{O}\} \sqcup \{\mathcal{P}\}$, $\partial_0^- M_{t_0} = \{\mathcal{O}\}$, $\partial_0^+ M_{t_0} = \emptyset$,(c) $\partial^- M_{t_0} = \mathcal{B}^-$, $\partial^+ M_{t_0} = \Sigma^+ \setminus \{\mathcal{P}\}$,(d) $\gamma(t) \to \mathcal{O}$ *as* $t \to -\infty$，对于每个共动观测者 $\gamma(t)$,

(e) 存在一个包含 $\mathcal{O}$ 的开子集 $\widetilde{M}' \subset \widetilde{M}$，使得 $M_{t_0} = I_{\tilde{g}}^+(\mathcal{O}, \widetilde{M}')$。例如，可以取 $\widetilde{M}' = (-\infty, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{S}^3$。

证明. 令 $\omega(t)$ 和 $\hat{}t(t)$ 由 (4.40) 和 (4.42) 给出。回忆 $a(t) \searrow 0$ as $t \to -\infty$。由 (4.41) 以及引理 3.4 的结论（即 $a\eta \to -1/h$ as $t \to -\infty$），我们得到$\omega(t) \to 1$ as $t \to -\infty$。因此，$\hat{}t \to -\infty$ as $t \to -\infty$。

令 $(T', \chi, \theta, \phi)$ 表示第4.1节中引入的爱因斯坦静态宇宙的坐标。回顾一下，平直德西特模型 $(M, \hat{}g)$ 对应于满足 $T' > \chi - \frac{\pi}{2}$ 的点集 $T' \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 和 $\chi \in (0, \pi)$。由方程 (4.35a) 可知，超曲面 $\hat{}t = +\infty$ 对应于超曲面 $T' = \pi/2$。因此，$M_{t_0}\hat{}$ 对应于图6中的全部 $M$。

由（4.38）和（4.36），我们有

$$g = \frac{\omega(t)^2}{h^2 \cos^2 T'} \left( -(\mathrm{d}T')^2 + \mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi \left( \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \, \mathrm{d}\phi^2 \right) \right) . \tag{4.43}$$

由于 $\omega(t)$ 为正，且当 $t \to -\infty$ 时趋于 1，因此 $\hat{}t$ 将 $(-\infty, t_0)$ 微分同胚地映射到 $(-\infty, \infty)$，由此可知 $M_{t_0}$ 与 $M$微分同胚。因此，过去的$\widetilde{}$共形嵌入 $M_{t_0} \hookrightarrow M$ 的共形性质继承自第 4.1 节中的共形嵌入 $\hat{}\widetilde{} \; M \hookrightarrow M$。也就是说，对于 4.1，(b)–(e) 均成立，因为类似的 $\hat{}$ 结论对于 $M_{t_0}$ 同样成立。唯一的区别在于，现在的共形因子是

$$\Omega = \frac{h \cos T'}{\omega(t)} = \frac{h}{a(t)} \left( \sin T' + \cos\chi \right) ,$$

其中我们结合了 (4.35a) 和 (4.39b)。因此，当 $T' = \pm\pi/2$ 且 $\omega(t)$ 非零时，$\Omega$ 为零；这种情况仅在 $T' = -\pi/2$ 时发生，因此位于 $\{\mathcal{O}\}$，因为 $\omega \to 0$ 当 $T' \to \pi/2$ 时（即当 $t \to t_0^-$ 或 $\hat{}t \to \infty$ 时）。$\Omega$ 为零的唯一其他情形是 $T' = \pi/2$ 且 $\chi = \pi$，因此位于 $\{\mathcal{P}\}$，因为此时 $a(t)$ 非零，但 $\sin T' + \cos\chi = 0$。由于 $h \neq 0$，可知 $\Omega$ 能够延拓为一个定义在 $\widetilde{M}$ 内拓扑边界 $\partial M_{t_0}$ 上的 $C^0$ 函数；因此，我们只能保证得到一个 $C^0$ 共形嵌入。 □

由方程（4.43），可得

$$g = \frac{\omega(t)^2}{h^2 \cos^2 T'} \, \widetilde{g} \, .$$

由于当 $t \to -\infty$ 时，$\omega(t) \to 1$，我们得到以下推论。

**推论 4.5.** 假设 $a(t) = e^{ht} + o(e^{ht})$ 或 $H(t) \to h$ 当 $t \to -\infty$ 对于某个有限正数 $h \in \mathbb{R}_{>0}$时。考虑命题 $C^0$ *4.4* 中给出的共形嵌入 $M_{t_0} \hookrightarrow \widetilde{M}$。通过以下方式定义 $C^0$ 时空 $(M_{\mathrm{ext}}, g_{\mathrm{ext}})$:

$$M_{\mathrm{ext}} = M \cup \left\{ \widetilde{M} \,\middle|\, T' \leq \chi - \frac{\pi}{2} \quad and \quad T' \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right\} ,$$

$$g_{\text{ext}} = \begin{cases} g & on\ M \\ \frac{1}{h^2\cos^2 T'}\,\widetilde{g} & on\ M_{\text{ext}} \setminus M\,, \end{cases}$$

其时间定向由声明 $\partial_{T'}$ 为未来指向来确定。于是 $(M_{\text{ext}}, g_{\text{ext}})$ 是 $C^0$ 的一个延拓 $(M, g)$。$M$ 在 $M_{\text{ext}}$（定义 3.2）中的过去边界与 $\widetilde{\ }$ 在 $M$ 中 $M$（定义 4.2）中的过去边界重合。两者均记为 $\partial^- M$，并对应于 $T' = \chi - \frac{\pi}{2}$ 内的光锥 $M_{\text{ext}}$。

注。推论 4.5 中唯一的假设是，$a(t) = e^{ht} + o(e^{ht})$ 或 $H(t)$ 在 $t \to -\infty$时趋于一个正的有限数 $h$。这与第3.3节关于$C^0$-可延拓性的结果相符；该结果为说明为什么 $a(t) = e^{ht} + o(e^{ht})$ 或 $H \to h > 0$ 在 $t \to -\infty$ 时会产生一个 $C^0$ 延拓提供了另一种证明。不过，显然两种延拓的选择并不相同：在定理 3.5 中，延拓基本上是特意选为平直时空（闵可夫斯基）的；这里的延拓则是闭合（全局）德西特时空。

现在我们仔细考察共动观测者，即 $u := \partial_t$ 的积分曲线。在命题4.4中，我们看到所有共动观测者都从 $T' = -\frac{\pi}{2}$ 时的北极（$\chi = 0$）出发。请注意，$u$ 的积分曲线以 $g$ 固有时为参数。现在考虑 $\bar{M}_{t_0}$ 上的向量场 ${}^1\Omega\, u$，其中 ${}^1\Omega u$ 的积分曲线以 $\widetilde{g}$ 固有时为参数。接下来我们证明以下命题。

**命题 4.6**。对于 ${}^1\Omega u$ 的每条积分曲线，沿该积分曲线的向量场都可连续延拓至 $\partial_{T'}\ \mathcal{O}$。

注。换句话说，命题 4.6 表述如下：设 $\widetilde{\gamma}$：$(0, b) \to M$ 是 ${}^1\Omega u$ 的一条积分曲线；因此它由 $\widetilde{g}$-固有时参数化。根据命题 4.4，我们知道，当 $\widetilde{\gamma}(s) \to \mathcal{O}$ 时，$s \to 0^+$。命题 4.6 指出，其切向量 $\widetilde{\gamma}'(s)$，同样收敛到$\sim\partial_{T'} \in T_{\mathcal{O}}M$ 当 $s \to 0^+$ 时。每个共动观测者都具有这一性质。事实上，这种行为可以在图 6 中看到。

证明。利用 (4.35a) 和 (4.35b)，共动观测者在固定 $T'$ 和 $\chi$ 处的 $r_0$ 之间的关系为

$$hr_0(\sin T' + \cos\chi) = \sin\chi\,. \tag{4.44}$$

$\widetilde{\ }$由于 $T'$是 $(M, \widetilde{g})$ 的时间函数，我们可以用 $T'$ 对共动观测者的曲线进行参数化。采用这种参数化后，相对于 $(t, r, \theta, \phi)$ 坐标的共动观测者 $t \mapsto (t, r_0, \theta_0, \phi_0)$，可表示为相对于 $(T', \chi, \theta, \phi)$ 坐标的 $T' \mapsto (T', \chi(T')\ \theta_0, \phi_0)$。对 $T'$ 隐式求导 (4.44)，可得 $\chi(T')$ 的导数：

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}T'} = \frac{hr_0\cos T'}{\cos\chi + hr_0\sin\chi}\,.$$

我们可以通过 ( $hr_0\cos T'$将 $\chi$ 与 (4.44) 联系起来。将这一关系代入 $\mathrm{d}\chi/\mathrm{d}T'$ 的表达式，可得共动观测者曲线的 $\chi$ 参数化。若要获得 $\widetilde{g}$ 固有时参数化，需要沿积分曲线将向量场归一化

相对于 $\widetilde{g}$。这样便得到在 $r_0$ 保持恒定时，沿 $^{1}\,\Omega u$ 的积分曲线的向量场表达式：

$$\sqrt{\frac{\cos^2\chi+2hr_0\sin\chi+h^2r_0^2\sin^2\chi}{1+2hr_0\sin\chi(1-\cos\chi)}}\,\partial_{T'}+\sqrt{\frac{h^2r_0^2-\sin^2\chi+2hr_0\cos\chi\sin\chi-h^2r_0^2\cos^2\chi}{1+2hr_0\sin\chi(1-\cos\chi)}}\,\partial_\chi\,.$$

当 $\chi\to 0^+$ 时，沿积分曲线的上述向量场趋近于 $\partial_{T'}$。 □

下一个命题及推论将为定理5.2中的一个重要假设提供动机。

**命题 4.7**。 在 $M_{t_0}$ 内， $g$-里奇张量的非零分量 $\mathrm{Ric}_g$ 在$(T',\chi,\theta,\phi)$坐标中由下式确定：

$$\begin{aligned}
\Omega^2\,\mathrm{Ric}_g(\partial_{T'},\partial_{T'}) &= -3H^2+\frac{\dot H}{a^2}\left(-3\frac{\omega^2}{\cos^2T'}(1+\sin T'\cos\chi)^2+\omega^2\sin^2\chi\right),\\
\Omega^2\,\mathrm{Ric}_g(\partial_\chi,\partial_\chi) &= 3H^2+\frac{\dot H}{a^2}\left(-3\omega^2\sin^2\chi+\frac{\omega^2}{\cos^2T'}(1+\sin T'\cos\chi)^2\right),\\
\Omega^2\,\mathrm{Ric}_g(\partial_{T'},\partial_\chi) &= 2\frac{\dot H}{a^2}\frac{\omega^2}{\cos T'}\sin\chi(1+\sin T'\cos\chi)\,,
\end{aligned}$$

以及$\Omega^2\,\mathrm{Ric}_g(\partial_\theta,\partial_\theta)=(3H^2+\dot H)\sin^2\chi=\Omega^2\mathrm{Ric}_g(\partial_\phi,\partial_\phi)/\sin^2\theta$。

证明。 证明过程是计算性的。我们对第一个等式的证明作一概述，其余等式类似。令 $R_{T'T'}=\ _g\,\partial_{T'}\ \partial_{T'}$ $R_{tt}$ $R_{tt}=$: Ric (,)，其他情形同 $-3\ H^2+\dot H$ $R_{rr}=a^2\ 3H^2+\dot H$ $R_{tr}=0$ $R_{tr}=0$ 理，等等。回忆 ( )、( ) 以及 。由于，根据分量变换定律可得 $R_{T'T'}=R_{tt}(\frac{\partial t}{\partial T'})^2+R_{rr}(\frac{\partial r}{\partial T'})^2$。由 (4.35a) 和 (4.35b)，可得

$$\frac{\partial t}{\partial T'}=\frac{\partial t}{\partial\hat t}\frac{\partial\hat t}{\partial T'}=\frac{\omega}{h\cos T'}\frac{1+\sin T'\cos\chi}{\sin T'+\cos\chi}$$

and

$$\frac{\partial r}{\partial T'}=-\frac{\cos T'\sin\chi}{h(\sin T'+\cos\chi)^2}\,.$$

将这些代入 $R_{T'T'}$ 的分量变换定律，并利用 $a/\omega=e^{h\hat t}$、$\Omega=\ ^{h}$余弦$_{\omega}\ ^{T'}$ 以及 $\frac{\dot H}{a^2}=\dot H$余弦 $^{2}\,T'$ $\omega^2$ $\frac{1}{T'+(\text{正弦 余弦 }\chi)^2}$。 □

我们称函数 $f$: $M_{t_0}\to\mathbb{R}$ 连续延拓到 $M_{t_0}\cup\{\mathcal{O}\}$，如果存在一个 $\sim$ $\sim$连续函数 $f$: $M_{t_0}\cup\{\mathcal{O}\}\to\mathbb{R}$，使得 $f$ 在 $M_{t_0}$ 上的限制与$\sim f$一致。 $M_{t_0}\cup\{\mathcal{O}\}$上的拓扑学就是从 $M$继承的子空间拓扑。

**推论 4.8**。 如果 $H$ 趋于一个正的有限数，且当 $t\to-\infty$时， $\dot H/a^2$ 趋于一个有限数，那么 $(T',\chi,\theta,\phi)$-分量的 $\Omega^2\mathrm{Ric}_g$ 可以连续延拓至 $M_{t_0}\cup\{\mathcal{O}\}$。

注。 假设“ $\dot H/a^2$ 当 $t\to-\infty$时趋于有限值” $C^2$ 正是定理3.8中用于得到连续延拓的假设。

证明。 由于 $H$ 趋于一个正的有限值， $\omega$ 趋于 1（见命题 4.4的证明）。因此，根据命题 4.7，只需证明函数 $f\colon M_{t_0}\to\mathbb{R}$定义为 $f=(1+$正弦 $T'$余弦 $\chi)/$ 余弦 $T'$可连续延拓至 $M_{t_0}\cup\{\mathcal{O}\}$。事实上，我们将 ~证明该连续延拓由 $f(\mathcal{O})=0$给出。

回顾 注意， $\mathcal{O}$对应于点$T'=-\frac{\pi}{2}$和 $\chi=0$。注意，我们可以写成

$$f=\frac{1+\sin T'}{\cos T'}-(1-\cos\chi)\tan T'\,.$$

当 $T'\to-\pi/2$时，利用洛必达法则可以证明（$1+\sin T'$）/ $\cos T'$，其形式为 $0/0$，极限为 $-\cot(-\pi/2)=0$。关于上面的 $f$ 中的第二项，我们可以在 $T'=-\pi/2$附近对$\tan T'$进行泰勒展开，并在 $\chi=0$附近对$\cos\chi$进行泰勒展开，因此对于 $\mathcal{O}$附近的点，有

$$(1-\cos\chi)\tan T'=-\frac{\chi^2}{2(T'+\pi/2)}\left(1-\frac{\chi^2}{12}+O\left(\chi^4\right)\right)\left(1-\frac{1}{3}\left(T'+\frac{\pi}{2}\right)^2+O\left(\left(T'+\frac{\pi}{2}\right)^4\right)\right).$$

因此，我们只需证明 $\chi^2/(T'+\pi/2)$可以连续延拓到$M_{t_0}\cup\{\mathcal{O}\}$，并且在 $\mathcal{O}$处取值0。事实确实如此：由于在 $M_{t_0}$内 $0<\chi<(T'+\pi/2)$，我们有在 $M_{t_0}$内 $0<\chi^2/(T'+\pi/2)<\chi$，其在 $\mathcal{O}$处的极限为0。 □

# 5 Th宇宙学常数表现为一个初始条件ntu n

迄今为止，我们已经推导出过去永恒的准德西特宇宙中有关时空可延拓性的条件，但这些条件受限于均匀性和各向同性（FLRW）的对称性假设。尽管这些结果相当全面且纯属几何性质——它们不依赖于物理输入，即不依赖于任何引力场方程——但一旦偏离精确的 FLRW 背景，它们在物理上的适用性必然有限。这一点尤其重要，因为在暴胀宇宙学理论中，作为一种旨在生成结构形成的初始条件的早期宇宙情景，必然存在原初量子涨落（因此也存在时空非均匀性）。本节受第 4 节分析结论的启发，将推导出超越 FLRW 各向同性和均匀性假设的结果。具体而言，在定理5.2中，我们将证明，在某种意义上，对于满足上一节所述几何性质的时空，宇宙学常数表现为一个初始条件。不过，为此我们需要明确一些物理输入；谨慎起见，让我们应用经典广义相对论的爱因斯坦场方程。

## 5.1 宇宙学常数作为过去渐近德西特时空的初始条件出现

如 [71, 定理 12。11], FLRW 时空满足具有理想流体的爱因斯坦方程（$u$， $\rho$， $p$），

$$\mathrm{Ric}-\frac{1}{2}Rg\;=\;8\pi T\;=\;8\pi\big((\rho+p)u_*\otimes u_*+pg\big)\,,\tag{5.45}$$

其中，$u_* = g(u,\cdot)$ 是与流体速度向量场 $u = \partial_t$ （在流体的共动参考系中）在度量意义下等价的 1-形式。注意，我们将牛顿引力常数设为 1。我们强调，对于 FLRW 时空，总能量密度 $\rho$ 和压强 $p$ 是纯几何量，由 $\rho = \frac{1}{8\pi}G(u,u)$ 和 $p = \frac{1}{8\pi}G(e,e)$ 给出，其中 $e$ 是任意一个与 $u$ 正交的单位类空向量（由于空间各向同性，其选取无关紧要）。[14] 这里，$G := \mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Rg$ 是爱因斯坦张量，它通过 $G = 8\pi T$ 与能量-动量张量 $T$ 相关。为纳入正宇宙学常数 $\Lambda > 0$，我们定义 $T_{\mathrm{m}} = T + \frac{\Lambda}{8\pi}g$，从而爱因斯坦方程变为

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g \;=\; 8\pi T_{\mathrm{m}}\,.$$

令 $\rho_{\mathrm{m}} = T_{\mathrm{m}}(u,\ u)$ 和 $p_{\mathrm{m}} = T_{\mathrm{m}}(e,\ e)$，则有

$$\rho \;=\; \rho_{\mathrm{m}} + \rho_\Lambda \quad \text{and} \quad p \;=\; p_{\mathrm{m}} + p_\Lambda\,,$$

其中 $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi}$ 和 $p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi}$。注意，

$$p_\Lambda \;=\; -\rho_\Lambda\,. \tag{5.46}$$

方程（5.46）是宇宙学常数的状态方程。

对于平直（$k = 0$）FLRW 时空，弗里德曼方程 [71, 定理 12。11] 为

$$\frac{8\pi}{3}\rho(t) \;=\; H(t)^2 \quad \text{and} \quad -8\pi p(t) \;=\; 2\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + H(t)^2\,. \tag{5.47}$$

这些方程意味着

$$\dot{H}(t) \;=\; -4\pi\big(\rho(t) + p(t)\big)\,. \tag{5.48}$$

命题 *5.1.* 如果第 *2.1* 节中定义的平直 *FLRW* 时空是过去渐近德西特的（回顾定义 *2.5*），那么 $\rho(t)$ 和 $p(t)$ 在 $t \to -\infty$ 时收敛；此外，若 $\rho(-\infty)$ 和 $p(-\infty)$ 表示它们的极限，则 $p(-\infty) = -\rho(-\infty) = -\frac{3}{8\pi}H_\Lambda^2$。反过来，如果在膨胀中的平直 *FLRW* 时空中，$\rho(t)$ 和 $p(t)$ 在 $t \to -\infty$ 时收敛，且 $\rho(-\infty) > 0$，那么该时空就是过去渐近德西特的，其中 $H_\Lambda$ 由 $\frac{3}{8\pi}H_\Lambda^2 = -p(-\infty) = \rho(-\infty)$ 决定。

证明。首先，假设平直 FLRW 时空在过去渐近于德西特时空。由于 $\dot{H} = \ddot{a}/a - H^2$，可得 $\ddot{a}(t)/a(t)$ 在 $t \to -\infty$时收敛。显然，根据（ $\rho(t)$）中的第一条弗里德曼方程，5.47， $p(t)$ 也收敛；根据（ $t \to -\infty$ ）中的第二条弗里德曼方程，5.47， $p(-\infty) = -\rho(-\infty)$ 则由（5.48）得出。

对于第二部分，设平直 FLRW 时空 $\rho(t)$ 和 $p(t)$ 按如下方式收敛$t \to -\infty$ 其中 $\rho(-\infty) > 0$。那么，(5.47) 和 (5.48) 表明， $H$ 和 $H$ 按如下方式收敛$t \to -\infty$。若将 $H$ 的极限 $t \to -\infty$ 记为 $H_\Lambda$，则必有 $H_\Lambda > 0$

[14]在物理学文献中，更常见的做法是将 $\rho = T(u,u)$ 和 $p = T(e,e)$ 定义为.....，但若爱因斯坦方程 $G = 8\pi T$成立，则物理定义与几何定义等价。若引力理论经过修正，则需要更加谨慎，因为这两种定义可能会有所不同。本文采用几何定义。

由 (5.47) 及假设 $\rho(-\infty) > 0$。根据引理 2.6，还可推出$H(t) \to 0$ 当 $t \to -\infty$时成立。因此，时空是过去渐近德西特的，并且根据 (5.48)，还满足$p(-\infty) = -\rho(-\infty)$。 □

注。 根据方程（5.46），我们将 $p(-\infty) = -\rho(-\infty)$ 称为作为初始条件出现的宇宙学常数。上述命题的一个推论是，前文各节讨论的所有过去渐近德西特时空情形，都等价于将宇宙学常数作为初始条件。举例来说，推论 3.6 现在可以改述如下：若 $p(-\infty) = -\rho(-\infty)$，则该时空是 $C^0$ 可延拓的。再举一例，若满足 $C^2$ 可延拓性定理 3.8(b) 的假设，则这当然意味着该时空的初始条件中出现了宇宙学常数。

我们将在下一节推广命题5.1 （见定理 5.2）。

## 5.2 超越均匀性与各向同性

在本节中，我们将命题 5.1 推广到非齐次情形。我们表明，宇宙学常数之所以表现为初始条件，是与命题*4.4*中共形嵌入的几何有关。事实上，所有共动观测者都从原点出发 $\mathcal{O}$（见命题 4.4），正是这一事实迫使宇宙学常数表现为初始条件；这与平直 FLRW 时空中的对称性假设毫无关系。因此，我们的定理适用于非各向同性或非齐次时空中的暴胀情景，我们将在第5.3节讨论这一点。

我们为定理铺垫背景。设 $(M, g)$ 是一个光滑时空。设 $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ 是 $(M, g)$ 的一个 $C^0$ 共形延拓，其共形因子为 $\Omega$（定义 4.1）。假设$M = I^+_{\widetilde{g}}(\mathcal{O}, \widetilde{M})$，其中 $\mathcal{O} \in \partial_0^- M$ 是某个点。（这里，$\widetilde{M}$扮演命题 4.4(e) 中的 $\widetilde{M}'$的角色。）设 $f\colon M \to \mathbb{R}$是一个光滑函数。我们称 $f$ 在 $M \cup \{\mathcal{O}\}$可连续延拓至，如果存在一个连续函数 $\tilde{f}\colon M \cup \{\mathcal{O}\} \to \mathbb{R}$，使得 $\tilde{f}|_M = f$。此时，我们称 $\tilde{f}$ 为 $f$ 到 $M \cup \{\mathcal{O}\}$的连续延拓。$M \cup \{\mathcal{O}\}$ 上的拓扑是从 $\widetilde{M}$继承的子空间拓扑。换言之，$f$ 在 $\mathcal{O}$ 处连续，意味着对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\mathcal{O}$的一个邻域 $U \subset \widetilde{M}$，使得对于所有 $x \in U \cap (M \cup \{\mathcal{O}\})$，都有 $|f(\mathcal{O}) - f(x)| < \varepsilon$。

同样，如果存在一个 $U \subset \widetilde{M}$，其坐标为 $(x^0, \dots, x^3)$，使得 $X$ 上 $M$ 可连续延拓至 $M \cup \{\mathcal{O}\}$，并且 $\widetilde{M}$中的每个分量 $X^\mu$ 在 $X = X^\mu \partial_\mu$ 上都可连续延拓至 $(U \cap M) \cup \{\mathcal{O}\}$。若 $X^\mu$ 是 $X^\mu$的连续延拓，则 $X$ 在 $\mathcal{O}$ 处的连续延拓 就是向量$\tilde{X}^\mu(\mathcal{O})$ $\partial_\mu \in T_{\mathcal{O}} M$。对于 $M$ 上的光滑张量，也可通过要求其每个分量都连续延拓来作类似定义。（根据张量分量的通常变换律，此定义不依赖于坐标系的选取。）

例如，根据定义，${}^2g$ 在 $M$ 上的共形度量 $\Omega^2 g$ 可以连续延拓至 $M \cup \{\mathcal{O}\}$。再举一例，假设 $T$ 是 $M$上的一个光滑张量，那么显然，其限制 $T|_M$可以连续延拓至 $M \cup \{\mathcal{O}\}$，因为它可以光滑延拓。

以下定理推广了命题 5.1。它是 [48, 定理 2。2] 针对本文所研究的过去渐近德西特时空的类比结果。 [48, 定理 2。2] 与定理5.2 之间的主要区别在于使用了共形边界。

**定理 5.2**。 设 $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ 是光滑时空 $(M, g)$ 的一个 $C^0$ 共形延拓，其共形因子为Ω，且对于某个点 $\mathcal{O} \in \partial_0^- M$ 有 $M = I_{\tilde{g}}^+(\mathcal{O}, \widetilde{M})$。我们作出以下假设：

*(a)* $(M, g)$满足爱因斯坦方程，其理想流体为（$u$， $\rho$， $p$），如（*5.45*）所述。*(b)* $u$ 的每条积分曲线在 $M$内都有过去端点 $\mathcal{O}$ 。此外，沿 $^1$ 的每条积分曲线的向量场$\Omega u$ 连续延拓为在 $\mathcal{O}$处的 $\tilde{g}$-类时向量。*(c)* 能量密度 $\rho$ 和压强 $p$ 连续延拓至 $M \cup \{\mathcal{O}\}$。此外，$\Omega^2$ $Ric_{\mathbb{g}}$ 连续延拓至 $M \cup \{\mathcal{O}\}$，其中，$Ric_{\mathbb{g}}$ 是（$M$， $g$）的里奇张量。*(d)* （$M$， $\tilde{g}$）在 $\mathcal{O}$ 处具有强因果性。

于是， $\rho$ 和 $p$ 的连续延拓在 $\mathcal{O}$处满足 $\widetilde{p} = -\widetilde{\rho}$ 。

在证明定理5.2之前，我们先作一些注释。

注。

- 定理 5.2 的结论是 $\widetilde{p}(\mathcal{O}) = -\widetilde{\rho}(\mathcal{O})$。这推广了命题 5.1，其中我们得到了 $p(-\infty) = -\rho(-\infty)$。- 注意，在命题 4.4 中， $M = I_{\tilde{g}}^+(\mathcal{O}, \widetilde{M})$ 对 $M_{t_0}$ 成立；在定理 5.2 中，$\widetilde{M}$ 扮演了命题 4.4(e) 中 $M'$ 的角色。- 定理 5.2 中的假设 (b) 对命题 4.4 中的 $M_{t_0}$ 也成立。假设 (b) 意味着，如果 $\gamma\colon [0, b] \to M \cup \{\mathcal{O}\}$ 是 $\Omega u$ 在 $(0, b]$ 上的一条积分曲线，且过去端点为 $\gamma(0) = \mathcal{O}$，那么 $\gamma'(0)$ 是一个未来指向类时向量，因此 $\gamma$ 是位于 $M$ 内的一条未来指向类时曲线。因此，命题 4.4 和命题 4.6 表明，假设 (b) 对 $M_{t_0}$ 成立。若采用比本文所用定义更宽松的类时曲线定义，定理 5.2 中的假设 (b) 也可以放宽。例如，参见 [48, 定理 2.2] 中的假设 (b) 及其后的注。- 关于假设 (c)，我们在命题 5.1 中看到，如果 $H$ 收敛且 $H$ 收敛到零，那么 $\rho$ 和 $p$ 也收敛为 $t \to -\infty$。由推论 4.8 可知，只要 $H$ 的极限为正的有限值，且 $\dot{H}/a^2$ 的极限为有限值（当 $t \to -\infty$ 时），$\Omega^2$Ric 就可以连续延拓到 $M \cup \{\mathcal{O}\}$ 。- 关于假设 (d)，回顾一下，$(M, \tilde{g})$ 在 $\mathcal{O}$ 处具有强因果性，意味着对于 $\mathcal{O}$ 的任意邻域 $U$ ，都存在 $\mathcal{O}$ 的一个邻域 $V \subset U$ ，使得对于任意未来指向因果曲线 $\gamma\colon [a, b] \to \widetilde{M}$，如果 $\gamma(a)$ $\gamma(b) \in V$，那么 $\gamma\big([a, b]\big) \subset U$。这一假设对任何整体双曲时空都成立，因此也适用于命题 4.4 中出现的爱因斯坦静态宇宙。

定理 5.2的证明。

证明只需对 [48,定理 2。2]的证明稍作修改。不过，为了完整起见，我们给出全部细节。

由于 $(M,g)$ 与理想流体 $(u,\rho,p)$ 一起满足爱因斯坦方程，爱因斯坦张量满足等式 (5.45)。回想一下， $u_*$ 是一个 1-形式，它在 $g$-度量意义下与向量场 $u$ 等价（即，在坐标中， $u_* = g_{\mu\nu}u^\mu \mathrm{d}x^\nu$，并且回想 $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$）。对该等式进行缩并，可得标量曲率 $R_g$ 关于 $\rho$ 和$p$的表达式。将此表达式代回 (5.45)，得到

$$\mathrm{Ric}_g \;=\; 8\pi\big((\rho+p)u_*\otimes u_* + pg\big) + 4\pi(\rho-3p)g\,.$$

两边乘以 $\Omega^2$ ，得到

$$\Omega^2\mathrm{Ric}_g \;=\; 8\pi\big((\rho+p)(\Omega u_*)\otimes(\Omega u_*) + p\Omega^2 g\big) + 4\pi(\rho-3p)\Omega^2 g\,. \tag{5.49}$$

为导出矛盾，假设 $\tilde{p}(\mathcal{O}) \neq -\tilde{\rho}(\mathcal{O})$。那么，存在 $\mathcal{O}$ 的一个坐标邻域 $U\subset M$，使得对 $U\cap(M\cup\{\mathcal{O}\})$ 中的点， $\tilde{\rho}+\tilde{p}\neq 0$ 成立。因此，在该集合内，我们可以在上述等式中解出 $(\Omega u_*)\otimes(\Omega u_*)$，从而得到

$$(\Omega u_*)\otimes(\Omega u_*) \;=\; \frac{\frac{1}{8\pi}\Omega^2\mathrm{Ric}_g - \frac{1}{2}(\rho-p)\Omega^2 g}{\rho+p}\,.$$

由于 $\tilde{g}=\Omega^2 g$，且 $\tilde{g}$ 和 $\Omega^2\mathrm{Ric}_g$ 可连续延拓至 $M\cup\{\mathcal{O}\}$，因此上述等式的右端可连续延拓至 $M\cup\{\mathcal{O}\}$。所以左端也可以。

令 $S$表示 $(\Omega u_*)\otimes(\Omega u_*)$ 到 $M\cup\{\mathcal{O}\}$ 的连续延拓。令 $(x^0,\dots,x^3)$ 表示 $U$ 上的坐标。令 $S_{\mu\nu} = S(\partial_\mu,\partial_\nu)$。那么在 $U\cap M$ 内， $S_{\mu\nu} = \Omega^2 u_\mu u_\nu$，其中 $u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu$ 是 $u_*$ 的分量。通过 $\alpha|_M = \Omega u_*$ 及其延拓，在 $M\cup\{\mathcal{O}\}$ 上定义一个一形式 $\alpha$

$$\alpha_\mu(\mathcal{O}) \;=\; \begin{cases} +\sqrt{S_{\mu\mu}(\mathcal{O})} & \text{if } S_{\mu\mu}(\mathcal{O})\neq 0 \text{ and } \Omega u_\mu > 0 \text{ near } \mathcal{O}\,;\\ -\sqrt{S_{\mu\mu}(\mathcal{O})} & \text{if } S_{\mu\mu}(\mathcal{O})\neq 0 \text{ and } \Omega u_\mu < 0 \text{ near } \mathcal{O}\,;\\ 0 & \text{if } S_{\mu\mu}(\mathcal{O}) = 0\,. \end{cases}$$

那么 $\alpha$ 是 $\Omega u_*$ 到 $M\cup\{\mathcal{O}\}$ 的连续延拓。现在考虑定义在 $M\cup\{\mathcal{O}\}$ 上的向量场 $X$，它与 $\Omega u_*$ 的连续延拓在 $\tilde{g}$-度量下等价。利用 $M$ 中坐标系的分量，很容易看出，在 $M$ 内，$X$ 就是向量场 $^{1}_{-}\Omega u$:

$$X = \tilde{g}^{\alpha\nu}(\Omega g_{\mu\nu}u^\mu)\partial_\alpha \;=\; \Omega^{-2}g^{\alpha\nu}(\Omega g_{\mu\nu}u^\mu)\partial_\alpha \;=\; \Omega^{-1}u^\alpha\partial_\alpha\,.$$

因此， $X$ 是将 $^{1}\Omega u$ 连续延拓到 $M\cup\{\mathcal{O}\}$的结果。

由于 $g(u,\ u) = -1$ （根据理想流体的定义），连续性意味着 $\tilde{g}(X,\ X) = -1$在 $\mathcal{O}$处成立。利用 [72, 引理 2。9] 并适当地应用 Gram-Schmidt 正交化过程，对于任意 $0<\varepsilon<1$，我们可以假设 $x^0$、…、 $x^3$上的坐标 ( $U$满足以下假设 (1)–(6):

(1) $\partial_0|_{\mathcal{O}} = X|_{\mathcal{O}}$,

(2) $x^0$ 是 $U$上的时间函数,

(3) $\widetilde{g}_{\mu\nu}(\mathcal{O}) = \eta_{\mu\nu}$以及 $|\widetilde{g}_{\mu\nu}(x) - \eta_{\mu\nu}| < \varepsilon$对所有 $x \in U$，其中 $\widetilde{g}_{\mu\nu} = \widetilde{g}(\partial_\mu, \partial_\nu)$。

这里 $\eta_{\mu\nu}$ 是闵可夫斯基度规相对于坐标 $(x^0, \dots, x^3)$ 的通常分量，也就是说,

$$\eta = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = -(\mathrm{d}x^0)^2 + h_{\mathbb{E}}\,,$$

其中与之前一样 $h_{\mathbb{E}} = \delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$。通过选取 $U$ 更小的值，运用与 [72,引理 29] 中类似的论证,可知我们也可以假设

(4) $\eta^\varepsilon(Y,Y) \le 0 \implies \widetilde{g}(Y,Y) < 0$ for all nonzero $Y \in T_p\widetilde{M}$ whenever $p \in U$,

其中， $\eta^\varepsilon$ 是 $U$ 上的窄闵可夫斯基度规，给出为

$$\eta^\varepsilon = -\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}(\mathrm{d}x^0)^2 + h_{\mathbb{E}} = \eta + \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}(\mathrm{d}x^0)^2\,.$$

此外，由于 $X$ 是 ${}^1\Omega u$ 到 $M \cup \{\mathcal{O}\}$的连续延拓，我们还可以假设

(5) $|X^\mu(x) - X^\mu(\mathcal{O})| < \frac{\varepsilon}{2}$ for all $x \in U \cap (M \cup \{\mathcal{O}\})$.

最后，若 $\phi\colon U \to \mathbb{R}^{3+1}$ 表示坐标映射 [，即 $\phi = (x^0, \dots, x^3)$],，那么通过限制 $\phi$ 的定义域，我们可以假设 that

(6) $\phi(U) = B_{2r}$ 其中 $B_{2r} \subset \mathbb{R}^{3+1}$ 是一个半径为 $2r > 0$ 的开球（根据欧几里得度量 $\delta = \delta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ 测量），位于 $U$ 上，以原点为中心： $\phi(\mathcal{O}) = (0, 0, 0, 0)$。

取 $\varepsilon = \frac{3}{5}$。则在这些坐标中， $\eta^\varepsilon$ 的光锥具有斜率 2。考虑曲线 $c\colon [0,r] \to B_{2r}$位于由 $c(s) = (s, \frac{s}{2}, 0, 0)$ 定义的这条狭窄光锥上。根据（4），曲线 $\phi^{-1}\circ c(s)$ 是未来指向类时的。令 $q = \phi^{-1}\big(c(r)\big)$。由于 $M = I^+_{\widetilde{g}}(\mathcal{O}, \widetilde{M})$，可知 $q \in M$。令 $\gamma\colon [0,b] \to M \cup \{\mathcal{O}\}$表示 ${}^1\Omega u$ 的积分曲线，即 $\gamma'(t) = X|_{\gamma(t)}$ 在 $(0, b]$ 上，其未来端点为 $\gamma(b) = q$，过去端点为 $\gamma(0) = \mathcal{O}$。注意， $t$ 是 $\gamma$ 的 $\widetilde{g}$-固有时。

我们可以假设 $\gamma\big([0,b]\big) \subset U$。这是由 $\mathcal{O}$ 处 $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ 的强因果性得出的。为说明这一点，注意到强因果性意味着存在 $\mathcal{O}$ 的一个邻域 $V \subset U$，使得若 $\gamma$ 的端点位于 $V$ 中，则 $\gamma$ 的像包含在 $U$ 中。令 $V' \subset V$ 表示满足上述假设 (6) 的 $\mathcal{O}$ 的一个邻域。接着，我们在 $V'$ 中以与前一段完全相同的方式构造曲线 $\gamma$。于是，强因果性意味着 $\gamma$ 的像包含在 $U$ 中。

由于 $\gamma\big([0,b]\big) \subset U$，由 (2) 可知，我们可以用 $x^0$ 对 $\gamma$ 重新参数化。令 $\bar\gamma\colon [0,r] \to M \cup \{\mathcal{O}\}$ 为用 $x^0$ 对 $\gamma$ 重新参数化所得的曲线。于是

$$\bar\gamma(s) = \gamma \circ (x^0 \circ \gamma)^{-1}(s)\,, \quad \text{where} \quad x^0 \circ \gamma(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tilde t\, \frac{\mathrm{d}\big(x^0 \circ \gamma\big)}{\mathrm{d}\tilde t}\,.$$

注意到 $\bar\gamma(0) = \mathcal{O}$和 $\bar\gamma(r) = q$。由于 $\phi(q) = (r, \frac{r}{2}, 0, 0)$，由中值定理可知，存在一个 $s_* \in (0, r)$，使得 $(x^1 \circ \bar\gamma)'(s_*) = \frac{1}{2}$。令 $\gamma^\mu = x^\mu \circ \gamma$和 $\bar\gamma^\mu = x^\mu \circ \bar\gamma$。利用 $t$ 和 $s = x^0 \circ \gamma$ 互为逆函数这一事实，由链式法则可得

$$\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{d}\bar\gamma^1}{\mathrm{d}s}(s_*) = \frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}\big(t(s_*)\big)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s_*) = \frac{\mathrm{d}\gamma^1/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\gamma^0/\mathrm{d}t}\big(t(s_*)\big) = \frac{X^1}{X^0}\big(\bar\gamma(s_*)\big)\,.$$

然而，由 (1) 和 (5)，我们有

$$\sup_{x\in U\cap(M\cup\{\mathcal{O}\})}\frac{X^1}{X^0}(x)\leq\frac{0+\varepsilon/2}{1-\varepsilon/2}=\frac{3}{7}<\frac{1}{2},$$

这就产生了矛盾。 □

**推论 5.3**。 假设定理 5.2的假设成立。那么，${}^2\mathrm{Ric}_g$ 在 $\mathcal{O}$ 处的连续延拓为 $8\pi\widetilde{\rho}\,\widetilde{g}$ 在 $\mathcal{O}$处的取值。

证明。 证明过程与 [48, 推论 2。5]类似。本质上，只需将$\widetilde{\rho}(\mathcal{O})+\widetilde{p}(\mathcal{O})=0$ 代入（5.49）即可。不过，需要谨慎控制（$\Omega u_*$）$\otimes$($\Omega u_*$)。为严谨起见，考虑一个包含 $U$ 的坐标邻域 $\mathcal{O}$。在 $U\cap M$内，我们有

$$\widetilde{g}^{\alpha\mu}\widetilde{g}^{\beta\nu}\Omega^2R_{\mu\nu}=8\pi\left((\rho+p)\left(\frac{1}{\Omega}u^\alpha\right)\left(\frac{1}{\Omega}u^\beta\right)+p\widetilde{g}^{\alpha\beta}\right)+4\pi\left(\rho-3p\right)\widetilde{g}^{\alpha\beta},\tag{5.50}$$

其中 $u^\alpha=g^{\alpha\mu}u_\mu$。固定 Ω 的一条积分曲线 $\gamma$，${}^1\Omega u$，并沿 $\gamma$对（5.50）进行计算。（由于我们已经假设 $\Omega^2\mathrm{Ric}_g$可连续延拓至 $M\cup\{\mathcal{O}\}$，因此只需考虑沿单条曲线 $\gamma$ 的趋近即可。）根据定理 5.2的假设（b），可知分量 ${}^1\Omega\,u^\alpha$沿 $\gamma$趋近 $\mathcal{O}$时有界。因此，$(\rho+p)({}^1\Omega u^\alpha)({}^1\Omega u^\beta)$ 沿 $\gamma$趋近 $\mathcal{O}$ 时趋于零。结论得证。 □

## 5.3 暴胀理论的应用

上一节的结果可应用于非均匀情形下的暴胀理论。我们将说明，在有利条件下，定理5.2中出现的几何假设将蕴含暴胀情景。本节与 [48, 第 3], 类似，因此我们将简略介绍相关细节。

设$M$是满足定理 5.2 假设的 $C^0$ 共形嵌入。令 $\mathcal{H}=\frac{1}{3}\,\mathrm{div}_g(u)$。这是 FLRW 时空中哈勃参数 $H$ 的推广。（回忆一下，$u$ 是理想流体的四速度。）按照 [73], ，我们沿着 $u$ 的流线定义平均长度尺度 $\mathfrak{a}(t)$，即 $\dot{\mathfrak{a}}/\mathfrak{a}=\mathcal{H}$，其中点表示关于流线固有时 $t$ 的导数，即一般而言有 $\dot{\mathfrak{a}}:=\nabla_u\mathfrak{a}$。平均长度尺度 $\mathfrak{a}(t)$ 是 FLRW 时空中尺度因子 $a(t)$ 的推广。弗里德曼第二方程的推广是瑞恰杜里方程，

$$3\frac{\ddot{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}}=-\mathrm{Ric}_g(u,u)+2\omega^2-2\sigma^2+\mathrm{div}_g\dot{u},\tag{5.51}$$

其中，$\omega$ 和 $\sigma$ 分别是涡量和剪切标量，$\dot{u}=\nabla_uu$ 是流的加速度。若 $u$ 是超曲面正交的（如在 FLRW 时空中），则有 $\omega=0$，且 $\mathcal{H}$ 将是相应空间切片的平均曲率。此外，若 $u$ 是测地向量场（如在 FLRW 时空中），则加速度将为零，散度项也将为零（即 $\mathrm{div}_g\dot{u}=0$）。

由推论 5.3，利用连续性可知，对于 $M$ 中充分接近于 $\mathcal{O}$的点，有 $\mathrm{Ric}_g(u,u) \approx 8\pi\widetilde{\rho}(\mathcal{O})$ $g(u,u) = -8\pi\widetilde{\rho}(\mathcal{O})$。将其代入（5.51），且不假设超曲面正交和加速度为零，可得

$$3\frac{\ddot{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}} \approx 8\pi\widetilde{\rho}(\mathcal{O}) + 2\omega^2 - 2\sigma^2 + \mathrm{div}_g\dot{u}\,. \tag{5.52}$$

因此我们看到，如果剪切足够小，且加速度散度不会过于负，以至于

$$8\pi\widetilde{\rho}(\mathcal{O}) + 2\omega^2 \gtrsim 2\sigma^2 - \mathrm{div}_g\dot{u}\,, \tag{5.53}$$

那么（5.52）会产生加速膨胀，$\ddot{\mathfrak{a}} > 0$，对于 $M$ 中充分接近 $\mathcal{O}$的点而言。这是对暴胀时期的一种推广。

我们来讨论（5.53）右侧各项的潜在来源。FLRW 时空的空间各向同性带来一个结果：其剪切为零：$\sigma^2 = 0$。事实上，对于任何均匀膨胀的流，剪切都为零。从这个意义上说，在（$2\sigma^2$ 5.53）中假设较小，可以看作是对 FLRW 时空所具有的空间各向同性的一种近似。换言之，若忽略非均匀性，则背景应当更接近平直 FLRW，而非例如具有各向异性的 Bianchi I，这样剪切才会足够小。事实上，Bianchi I 可以看作是在平均 FLRW 背景上加入剪切各向异性，而 FLRW 极限恰好对应于物质能量密度占主导、超过剪切的情形；关于此类讨论，可参见例如 [74]及其中的参考文献。

我们看到，涡量 $\omega^2$ 在（5.53）中通常会“有助于”成功开启暴胀。众所周知，涡量实际上通常会缓解时空奇点；然而，目前尚无证据表明我们的宇宙中存在涡量，这说明极早期宇宙中存在涡量的可能性不大（例如参见 [75]）。

最后，（5.53）中的加速度散度可以由（不一定是线性的）非均匀性的存在所产生。为此，将加速度散度表示为如下形式会很有帮助：

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_g\dot{u} = -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{\nabla}p}{\rho+p}\right) &= -\frac{1}{p+\rho}\left(\nabla^2\delta p - \frac{|\vec{\nabla}\delta p|^2 + \vec{\nabla}\delta p\cdot\vec{\nabla}\delta\rho}{p+\rho}\right)\\ &= -\frac{c_{\mathrm{s}}^2}{p+\rho}\left(\nabla^2\delta\rho - \frac{1+c_{\mathrm{s}}^2}{p+\rho}\left|\vec{\nabla}\delta\rho\right|^2\right)\,,\end{aligned}$$

其中，$\vec{\nabla}$ 和 $\nabla^2$ 分别表示空间导数和拉普拉斯算子。上面的第一个关系很容易从理想流体的动量守恒方程推导出来（例如，参见 [75]）。在上面的第二个等式中，我们将压强和能量密度表示为均匀部分与非均匀部分之和，即 $p(t,\vec{x}) = \bar{p}(t) + \delta p(t,\vec{x})$和 $\rho(t,\vec{x}) = \bar{\rho}(t)$ $+ \delta\rho(t,\vec{x})$，但不一定假设 $\delta p$和 $\delta\rho$小于其均匀部分。在最后一个等式中，我们假设非均匀部分之间由一个空间上恒定的参数联系，即 $\delta p = c_{\mathrm{s}}^2\delta\rho$；若 $\delta p$ 和 $\delta\rho$ 是小的线性扰动，则这一假设成立——在这种情况下，线性化的爱因斯坦方程将表明$\delta\rho$ 满足一个修正波动方程，其中 $c_{\mathrm{s}}$ 可解释为流体的声速。通常假设非均匀性远小于均匀背景（以符合观测约束），但若在早期不作此假设，

上述加速度散度可能很大[15], 尤其是因为它涉及 $1/(p+\rho)$ 和 $p \to -\rho$ 在原点处。然而，恰恰由于状态方程在原点处趋近于宇宙学常数，人们可以预期非均匀性也会在该$\vec{}$ $\vec{}$极限下消失。然而，定理5.2 并未说明 $\nabla p$ 和 $\nabla \rho$ 的极限情况——这需要了解它们的导数，即需要更高阶的正则性结果，而目前我们尚无此结果。

# 6 结论

## 6.1 总结

本文研究了暴胀宇宙学背景下初始时空奇点的不同方面。特别地，在第 3 节和第 4 节中，我们针对满足均匀性与各向同性假设的平坦过去永恒准德西特宇宙（即平直 FLRW 时空）中的时空可延拓性，得到了若干有趣的条件。这些结果相当完备且纯粹是几何性的——它们不依赖于物理输入。虽然我们的工作主要聚焦于平直 FLRW 时空，但在第 5 节中，我们在不采用 FLRW 的各向同性与均匀性假设的情况下推导出，在某种意义上，宇宙学常数表现为一种初始条件。下面对我们的结果作详细总结。

在平直 FLRW 时空中，我们证明，如果暴胀是过去永恒的，即宇宙自诞生之初便以加速速率膨胀，那么唯一可能没有标量曲率奇点的情形，是宇宙在过去延伸至无限固有时（分类 2b）。当空间截面在过去的有限固有时内达到零尺度时，无论尺度因子最初是在减速（分类 1a；见定理2.1）还是在加速（分类2a；见命题 2.3），都必然会到达标量曲率奇点。分类 2b 中暴胀宇宙的典型例子是德西特时空的平直叶状分解，其中尺度因子随时间呈指数函数变化，因此哈勃率达到常数。这促使我们考察接近德西特的情形（准德西特），或者更具体地说，按照定义2.5所称的平坦过去渐近德西特时空。这类时空预计始终不存在标量曲率奇点，但它们能否越过 $t = -\infty$ 处的过去边界进行延拓，是本文的主要研究问题之一。本文研究了低正则性延拓。如果延拓度规是 $C^2$ （或仅仅是 $C^{1,1}$），则从过去边界进入原始时空的测地线的存在性与唯一性保证了该时空片的测地线不完备性。然而，这些测地线可以越过边界延拓，并且在延拓后的时空中可能是完备的。

基于这样一个事实：采用 FLRW 坐标的平坦德西特时空可以通过使用不同的坐标 [（称为（$\lambda$, $v$）坐标）], 延拓至过去边界之外，我们推导出了准德西特度量在（$\lambda$, $v$）坐标下可延拓性的充分渐近条件。特别地， $a$（$t$） $= e^{ht} + o$（$e^{ht}$）或 $H \to h$ 当 $t \to -\infty$ 对于某个 $h > 0$ 成立时，可确保连续（$C^0$）可延拓性（见定理3.5）。对于更高阶的正则性， $a$（$t$） $= e^{ht} + o$（$e^{(2+\varepsilon)ht}$）

[15]请注意，与 $|\vec{\nabla}\delta\rho|^2$ 成正比的项通常会使加速度散度为正，因此根据（5.53），它有利于暴胀。与 $\nabla^2\delta\rho$ 成正比的项则可能振荡。

和 $a(t) = he^{ht} + o(e^{(2+\varepsilon)ht})$ 作为 $t \to -\infty$ 某个 $\varepsilon > 0$，保证了 $C^1$ 可延拓性，而 $\dot{H}/a^2$ 的收敛性 $C^2$ 则导出可延拓性（见定理 3.8）。此外，我们讨论了如何将这些条件推广到 $C^k$ 可延拓性，$k \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \cup \{\infty\}$。特别地，当量 $\dot{H}/a^2$ 可以重新表示为尺度因子的函数时，如果例如 $\dot{H}/a^2$ 在过去边界的某个邻域内是实解析的，则可得到光滑延拓（见定理 3.15）。一个例子包括 $a(t) = e^t + e^{3t}$。

在此我们再次强调，上述结果并未预设任何引力理论，即从未求解任何场方程，因此这些结果纯粹是几何性的。事实上，我们采用了另一种几何方法，通过证明过去渐近德西特时空可以共形嵌入爱因斯坦静态宇宙，来证明它们可以连续延拓。确实，在渐近过去足够接近德西特的时空可以像精确德西特一样共形嵌入爱因斯坦静态宇宙，因此，它们的过去共形边界具有相似的几何和拓扑性质（参见命题 4.4 和推论 4.5）。这些时空的一项基本几何性质是，共动观测者（即共动坐标中的 $u = \partial_t$ 积分曲线）都从过去共形边界上的同一个原点 $\mathcal{O}$ 出发。

如前所述，若假设理想流体满足爱因斯坦场方程，那么我们便能证明一个不依赖于 FLRW 强对称性假设的结果；也就是说，该结果适用于可能是非均匀且各向异性的度量。具体而言，命题（定理5.2）指出，若时空存在一种共形延拓，且满足上文所述的基本几何性质，那么原点处的状态方程必定对应于宇宙学常数。第 5.2 节讨论了定理5.3在非齐次情形下对暴胀理论的应用。

## 6.2 讨论与未来方向

虽然定理 5.2适用于非齐次时空，但据我们所知，满足其假设的时空实例仅有过去渐近德西特时空，也就是说，这些时空本身已经是各向同性的。因此，一个重要的数学问题是，寻找满足定理 5.2假设、但不属于过去渐近德西特时空这一类的时空实例。类米尔恩情形中也存在同样的问题 [48]。

通过考察定理 5.2 的逆否命题，可以获得物理上的洞见：如果原点处的“初始”状态方程并非宇宙学常数对应的状态方程，那么在前提成立的情况下，假设 (a)–(d) 中至少有一项必然失效。若我们坚持爱因斯坦方程（下文将进一步讨论）、合理的因果性，以及 $u$ 的积分曲线都从原点发出，那么剩下的条件便与能量密度、压强和里奇张量等具有物理意义的（有量纲）量的可延拓性有关。[16] 因此，在这种情况下，一个可能的结论是这些量在原点处发散。虽然这本身并不能得出 不可延拓性 的结论，但确实表明，任何具有点状过去共形边界、且并非以

[16]我们尚不清楚为何定理的假设中涉及的量是 $\Omega^2 \mathrm{Ric}_g$（而不仅仅是例如 $\mathrm{Ric}_g$ 或共形变换后的里奇张量），以及这一选择背后是否存在更深层次的含义。未来的研究可以对此进行探讨。

宇宙学常数为“起点”的宇宙，很可能都不可延拓（至少在共形意义上）。如果这一点得到证实，可以从不同角度加以解读：如果广义相对论始终成立，且暴胀在根本上是过去永恒的，那么这意味着宇宙学常数被“选定”为唯一可行的初始条件（因此时空是可延拓的）；或者，这意味着初始奇点确实不可避免。

从动力学角度看，后一种可能性占据主导地位。事实上，在广义相对论中，空间体积较小且时空曲率较大的状态（最终趋近于奇点）通常被认为具有高度各向异性。这被称为别林斯基-哈拉特尼科夫-利夫希茨（BKL）混沌混合模型奇点趋近[76–78]。正如我们可以预期宇宙学常数在晚期占据主导地位一样（参见宇宙无毛猜想；例如，[79–89]），我们也可以预期早期恰恰相反。以广义相对论中含理想流体的Bianchi I度规为例。哈密顿约束方程表明，平均膨胀率的平方 $\mathcal{H}^2$与剪切各向异性之和成正比，其中 $\sigma^2 \propto \mathfrak{a}^{-6}$，以及物质能量密度之和成正比，其中 $\rho \propto \mathfrak{a}^{-4}$，$\mathfrak{a}^{-3}$，$\mathfrak{a}^0$ 分别对应辐射、尘埃和宇宙学常数；$\mathfrak{a}$ 是平均尺度因子。因此，尽管宇宙学常数的能量密度在 $\mathfrak{a} \to \infty$时占据主导地位，但当 $\mathfrak{a} \searrow 0$时，它很容易被其他物质组分——最终还会被各向异性——超越。事实上，从动力学角度看（并且在广义相对论框架内），最微小的扰动都可能排除满足过去渐近平坦的德西特度规条件的真实时空的存在。换言之，暴胀一直持续到 $a \searrow 0$，且当 $t \to -\infty$ 时的情形相当特殊，可以说是“无限精细调谐”的：任何物质组分的能量密度（即使是最微小的扰动）都会在该极限下超过暴胀子的能量密度（其近似保持常数，如同宇宙学常数），并最终发散。一旦这些物质组分占据主导地位（例如满足强能量条件的标准物质），我们就必然进入情形1a，即减速的暴胀前阶段以及初始的类似大爆炸的标量曲率奇点。[17] 这可以解释为：暴胀不太可能“启动”宇宙[18]；或者也可能意味着，需要某种基本原理将“暴胀”选为“初始条件”（例如有限量子振幅；参见 [103, 104]）。

值得注意的是，本文的分析处于经典引力的层面。然而，在趋近奇点时，经典物理可能会因强烈的量子效应而失效；或者至少从有效场论的角度来看，高曲率项可能会开始变得重要。这一点在高曲率区域尤其相关，该区域可能对应于暴胀的过去。不过，第 2 至 4 节的大多数结果仅依赖于存在一种实的洛伦兹度量引力理论，因此并不局限于广义相对论，也可直接应用于含高阶导数的有效引力理论。即使在第 5节中，我们明确依赖了爱因斯坦

[17]假设熵满足 Bousso界限 [90]（这一假设受全息和量子引力的启发[91]），已有研究证明了一个一般的（半经典）奇点定理 [92]，，由此可得出以下推论：在足够遥远的未来或过去，只要向全局德西特时空中加入哪怕极少量的辐射，就会导致该时空零测地线不完备。不出所料，随着喉部渐近而来，辐射的能量密度将超过宇宙学常数，并破坏全局德西特反弹。[18]宇宙演变为暴胀状态的可能性有多大，也是一个相关问题；例如，可参阅 [93, 94]标准综述，以及一些较新的数值视角下的研究进展 [95–102] 或数学视角下的研究进展 [84–88]。

场方程，我们也可以推测，这些结果能够推广到含高曲率项的理论。例如，如果将定理 5.2 的假设 (a) 替换为任意高曲率理论的场方程（例如涉及黎曼张量、其收缩及其导数，并将这些量提升到更高次幂），那么只要在假设 (c) 中假定相应的高曲率项可连续（或可能光滑）延拓，我们便可以推测会得到相同的结果，即 $\widetilde{p}(\mathcal{O}) = -\widetilde{\rho}(\mathcal{O})$。这一点很有意思，因为高曲率理论中存在新颖的解。例如，在二次引力中，可以存在具有常数哈勃参数 $H$ 和常数剪切 $\sigma^2$的解，因此该解是类德西特的，但具有各向异性 [105–108], 不过，这类解不太可能是过去的动力学吸引子 [105, 109]。

当然，如果我们所熟知的时空连续体这一概念彻底失效，或者也许在不那么极端的情况下，仅仅是时空不再具有实在性和洛伦兹性质，那么可延拓性、测地线不完备性和时空奇点等问题也会发生变化。[19,20] 例如，哈特尔-霍金无边界提案是量子理论中暴胀前奏的一个著名例子，其中“暴胀前阶段”被推测为黎曼的 [122]（或者至少，度量可能经历从黎曼到洛伦兹的复数过渡——例如，参见 [123] 及其中的参考文献，了解此类复度规在理论上可能受到何种约束）。尽管如此，经典物理在量子宇宙学背景下仍然具有重要意义：如果我们设想对引力进行半经典路径积分（作为未知量子引力理论的一种替代描述），那么其领先阶的“树级”贡献通常就是经典壳上作用量，即在运动方程的经典解上求得的作用量。因此，确定经典解在过去是否可延拓至关重要，因为结论可能在很大程度上取决于经典解的性质。例如， [103, 104] 中的研究发现，测地线完备的无奇点反弹宇宙或循环宇宙往往具有发散的经典壳上作用量（因此，从量子理论的角度来看，这类解必须被舍弃）；而在高曲率引力理论中，从初始奇点演化而来的测地线不完备加速解则具有有限的经典壳上作用量（因此它们是定义良好的）。[21] 在本研究中，我们确实证实了在有限时间内趋于 0 的加速膨胀因子具有初始标量曲率奇点，但我们也表明，当其在无限时间内趋于 0 时，某些渐近条件（例如，对 $e^{ht}$的修正）会导致时空具有可延拓性。此类宇宙中的量子跃迁振幅问题或许是一个值得进一步研究的有趣课题。

我们这项工作曾提及、但未深入探讨的一个方面是：当时空可延拓时，延拓可能采取哪些形式。正如我们多次提到的，如果时空可以越过其过去边界延拓，延拓的选择通常并非唯一。例如，定理3.5

[19]即便采取最保守的观点，在弯曲时空上的量子场论层面，可延拓性与完备性的概念也会发生变化。关于暴胀背景下量子完备性的某些方面，参见 [110, 111]。[20]在时空的非光滑、低正则性几何构造中，仍然存在奇点定理（例如参见 [112–121] 及其中的参考文献），但目前尚不清楚此类几何能否应用于量子引力。[21]或者，[124]有人主张，不应将经典奇异解纳入引力路径积分。（关于德西特量子引力的具体分析，参见 [125] 。）无论如何，正确判定给定的经典解是否具有奇点以及是否可延拓，仍然至关重要。

（例如，该定理适用于过去渐近德西特时空的连续延拓）所选择的时空延拓对应于闵可夫斯基时空；不过，也可以有许多其他选择。我们在精确德西特的预备示例中（第3.2节）展示的也是闵可夫斯基延拓。不过，很明显，对于精确德西特，我们也可以将延拓后的度量和流形取为原度量和流形的副本（因此这种延拓可视为时空的某种“反射”）。同样可以得到连续延拓；事实上，正如前面提到的，由此得到的延拓将是对应于全局德西特时空的光滑延拓（见 [27]）。对于允许延拓的准德西特时空，我们猜想，类似的“反射”延拓一般也可能适用；证明这一点并分析所得延拓时空的几何和拓扑性质，可以作为后续研究的主题。[22] 这类延拓或许可应用于对称的“镜像”宇宙，例如 [126–129]的相关研究。由此得到的“反射”全局时空还有一个值得探究的物理问题：它是否通常会呈现（无奇点）反弹，正如闭合德西特时空那样。

**致谢**

我们感谢 Eric Woolgar 在本项目初期所进行的富有启发性的讨论。我们还要感谢 Fields 研究所在“非光滑黎曼与洛伦兹几何”专题项目期间营造的富有启发性的氛围，尤其是在低正则性物理与几何研讨会以及数学相对论、标量曲率与合成洛伦兹几何研讨会期间。本出版物得到了 Fields 数学科学研究所的支持。本文内容完全由作者负责，并不一定代表该研究所的官方观点。E. Ling 得到了嘉士伯基金会 CF21-0680 和丹麦国家研究基金会 CPH-GEOTOP-DNRF151 的支持。本研究还得到了加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）提供的探索研究资助，并部分得到了周界理论物理研究所的支持。周界理论物理研究所的研究得到加拿大政府通过创新、科学与经济发展部以及安大略省通过学院与大学部提供的支持。

## 第 3.4.2 节的证明

我们已将第 3.4.2 节中缺失的证明汇集于本附录。

**引理 3.10**。 对于所有 $l^r_\lambda[a]$ 和 $l^r_\lambda[a\eta]$， $r \in \{0,\dots,k\}$ 的存在性与有限性等价于度量 (3.30) 可 $C^k$ 延拓为 $\lambda \to 0^+$。

证明。 (⇒) 如果我们证明对于所有 $r \in\{0,\dots,k\}$， $l^r_\lambda[a]$ 和 $l^r_\lambda[a\eta]$ 的存在性与有限性蕴含着 $l^r_\lambda[a^2]$、 $l^r_\lambda[a^2\eta]$和 $l^r_\lambda[a^2\eta^2]$ 的存在性与有限性

[22]朝这个方向迈出的初步步骤可见于 [30]。

$\{0,\dots,k\}$，那么我们就完成了（回顾第 3.4.2 节开头的讨论）。在任意阶数 $k$处应用广义莱布尼茨法则，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^k(a^2\eta^2)}{\mathrm{d}\lambda^k} &= \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}\lambda^{k-1}}\left(\frac{\mathrm{d}(a\eta)^2}{\mathrm{d}\lambda}\right) = \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}\lambda^{k-1}}\left(2a\eta\cdot\frac{\mathrm{d}(a\eta)}{\mathrm{d}\lambda}\right)\\ &= 2\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{m!(k-1-m)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1-m}(a\eta)}{\mathrm{d}\lambda^{k-1-m}}\frac{\mathrm{d}^{m+1}(a\eta)}{\mathrm{d}\lambda^{m+1}}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^k(a^2)}{\mathrm{d}\lambda^k} &= \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}\lambda^{k-1}}\left(\frac{\mathrm{d}\big(a^2\big)}{\mathrm{d}\lambda}\right) = \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}\lambda^{k-1}}\left(2a\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\lambda}\right)\\ &= 2\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{m!(k-1-m)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1-m}a}{\mathrm{d}\lambda^{k-1-m}}\frac{\mathrm{d}^{m+1}a}{\mathrm{d}\lambda^{m+1}}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^k(a^2\eta)}{\mathrm{d}\lambda^k} &= \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}\lambda^{k-1}}\left(\frac{\mathrm{d}(a\cdot a\eta)}{\mathrm{d}\lambda}\right) = \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}\lambda^{k-1}}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\lambda}\cdot a\eta + a\cdot\frac{\mathrm{d}(a\eta)}{\mathrm{d}\lambda}\right)\\ &= \sum_{m=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{m!(k-1-m)!}\left(\frac{\mathrm{d}^{k-m}a}{\mathrm{d}\lambda^{k-m}}\frac{\mathrm{d}^m(a\eta)}{\mathrm{d}\lambda^m} + \frac{\mathrm{d}^{k-1-m}a}{\mathrm{d}\lambda^{k-1-m}}\frac{\mathrm{d}^{m+1}(a\eta)}{\mathrm{d}\lambda^{m+1}}\right).\end{aligned}$$

取 $\lambda\to 0^+$ 的极限，我们于是得到

$$l^k_\lambda[a^2\eta^2] = 2\sum_{r=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!}l^{k-r}_\lambda[a\eta]l^r_\lambda[a\eta]\,, \tag{A.54a}$$

$$l^k_\lambda[a^2] = 2\sum_{r=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!}l^{k-r}_\lambda[a]l^r_\lambda[a]\,, \tag{A.54b}$$

$$\begin{aligned}l^k_\lambda[a^2\eta] &= \sum_{r=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{r!(k-1-r)!}l^{k-r}_\lambda[a]l^r_\lambda[a\eta] + \sum_{r=1}^{k}\frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!}l^{k-r}_\lambda[a]l^r_\lambda[a\eta]\\ &= l^k_\lambda[a]l^0_\lambda[a\eta] + \sum_{r=1}^{k-1}\frac{k!}{r!(k-r)!}l^{k-r}_\lambda[a]l^r_\lambda[a\eta] + l^0_\lambda[a]l^k_\lambda[a\eta]\,,\end{aligned} \tag{A.54c}$$

最后一行进行了若干组合化简。这些表达式证实，对于所有 $r\in\{0,\dots,k\}$， $l^r_\lambda[a]$ 和 $l^r_\lambda[a\eta]$ 的存在性与有限性意味着对于所有 $r\in\{0,\dots,k\}$， $l^r_\lambda[a^2]$、 $l^r_\lambda[a^2\eta]$和 $l^r_\lambda[a^2\eta^2]$ 的存在性与有限性，从而完成了证明的这一部分。

($\Leftarrow$) 若度量 (3.30) 可 $C^k$ 延拓为 $\lambda\to 0^+$，则 $l^r_\lambda[a^2]$， $l^r_\lambda[a^2\eta]$，且 $l^r_\lambda[a^2\eta^2]$必须对所有 $r\in\{0,\dots,k\}$均存在且有限。因此，我们希望证明这意味着 $l^r_\lambda[a]$和 $l^r_\lambda[a\eta]$对所有 $r\in\{0,\dots,k\}$均存在且有限。下面用归纳法进行证明。对于 $k=0$，显然， $l^0_\lambda[a^2]$ 和 $l^0_\lambda[a^2\eta^2]$存在且有限，意味着 $l^0_\lambda[a]$ 和 $l^0_\lambda[a\eta]$存在且有限。现在，假设该结果在阶数

$k-1$，因此 $l^r_\lambda[a]$ 和 $l^r_\lambda[a\eta]$ 对所有 $r\in\{0,\dots,k-1\}$均存在且有限。然后，给定 $l^k_\lambda[a^2\eta^2]$存在且有限，我们可以推导出一个与 (A.54a) 类似的表达式：

$$l^k_\lambda[a^2\eta^2]-2\sum_{r=1}^{k-1}\frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!}l^{k-r}_\lambda[a\eta]l^r_\lambda[a\eta]=2\lim_{\lambda\to0^+}\left(a\eta\frac{\mathrm{d}^k(a\eta)}{\mathrm{d}\lambda^k}\right).$$

此表达式左边的所有量都存在且有限，因此右边也必然如此，但我们实际上知道 $l^0_\lambda[a\eta]=-1/h\neq0$，因此 $l^k_\lambda[a\eta]$ 也必然存在且有限。类似地，已知 $l^k_\lambda[a^2\eta]$ 存在且有限，我们可以推导出与（A.54c）类似的表达式：

$$l^k_\lambda[a^2\eta]-\sum_{r=1}^{k-1}\frac{k!}{r!(k-r)!}l^{k-r}_\lambda[a]l^r_\lambda[a\eta]-l^0_\lambda[a]l^k_\lambda[a\eta]=\lim_{\lambda\to0^+}\left(\frac{\mathrm{d}^k a}{\mathrm{d}\lambda^k}a\eta\right).$$

此表达式左边的所有量都存在且有限（现在包括 $l^k_\lambda[a\eta]$ ），因此右边也必然如此，但我们实际上知道 $l^0_\lambda[a\eta]=-1/h\neq0$，故 $l^k_\lambda[a]$ 也必然存在且有限。

□

**引理 3.11**。 该引理包含两个相似（但彼此独立）的陈述：

(a) 对于所有 $r\in\{0,\dots,k-2\}$， $l^r_\lambda[a]$ 和 $l^r_\lambda[\dot H/a^2]$ 存在且有限，意味着 $l^{k-1}_\lambda[a]$ 和 $l^k_\lambda[a]$ 存在且有限；(b) 对于所有 $r\in\{0,\dots,k-2\}$， $l^r_\lambda[a\eta]$ 和 $l^r_\lambda[\dot H/a^2]$ 存在且有限，意味着 $l^{k-1}_\lambda[a\eta]$ 和 $l^k_\lambda[a\eta]$ 存在且有限。

证明。 我们分别证明这些结论：

(a) 回顾（3.29），由广义莱布尼茨法则可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^k a}{\mathrm{d}\lambda^k}&=\frac{\mathrm{d}^{k-2}}{\mathrm{d}\lambda^{k-2}}\left(\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}\lambda^2}\right)=\frac{\mathrm{d}^{k-2}}{\mathrm{d}\lambda^{k-2}}\left(a\cdot\frac{\dot H}{a^2}\right)\\&=\sum_{m=0}^{k-2}\frac{(k-2)!}{m!(k-2-m)!}\frac{\mathrm{d}^{k-2-m}a}{\mathrm{d}\lambda^{k-2-m}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\lambda^m}\left(\frac{\dot H}{a^2}\right).\end{aligned}$$

因此，当 $\lambda\to0^+$ 趋于极限时，

$$l^k_\lambda[a]=\sum_{r=0}^{k-2}\frac{(k-2)!}{r!(k-2-r)!}l^{k-2-r}_\lambda[a]l^r_\lambda[\dot H/a^2].$$

这一关系表明，若对所有$r\in\{0,\dots,k-2\}$， $l^r_\lambda[a]$ 和 $l^r_\lambda[\dot H/a^2]$ 均存在且有限，则 $l^k_\lambda[a]$也存在且有限。因此，特别地，若对所有 $r\in\{0,\dots,k-3\}$， $l^r_\lambda[a]$ 和 $l^r_\lambda[\dot H/a^2]$ 均存在且有限，则 $l^{k-1}_\lambda[a]$也存在且有限。

(b) 回顾 $\mathrm{d}\eta = a^{-1}\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\lambda = a\mathrm{d}t$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}(a\eta)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}(a\eta)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{a}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\eta + a\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\right) = H\eta + \frac{1}{a}\,,$$

然后，

$$\frac{\mathrm{d}^2(a\eta)}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(H\eta + \frac{1}{a}\right) = \frac{\dot{H}\eta}{a}\,.$$

对于任意阶数 $k$，广义莱布尼茨法则给出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^k(a\eta)}{\mathrm{d}\lambda^k} &= \frac{\mathrm{d}^{k-2}}{\mathrm{d}\lambda^{k-2}}\left(\frac{\mathrm{d}^2(a\eta)}{\mathrm{d}\lambda^2}\right) = \frac{\mathrm{d}^{k-2}}{\mathrm{d}\lambda^{k-2}}\left(a\eta\cdot\frac{\dot{H}}{a^2}\right)\\ &= \sum_{m=0}^{k-2}\frac{(k-2)!}{m!(k-2-m)!}\frac{\mathrm{d}^{k-2-m}(a\eta)}{\mathrm{d}\lambda^{k-2-m}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\lambda^m}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right)\,,\end{aligned}$$

因此，当趋于 $\lambda\to 0^+$ 的极限时，

$$l_\lambda^k[a\eta] = \sum_{r=0}^{k-2}\frac{(k-2)!}{r!(k-2-r)!}l_\lambda^{k-2-r}[a\eta]l_\lambda^r[\dot{H}/a^2]\,.$$

该关系表明，对于所有 $r\in\{0,\dots,k-2\}$，若 $l_\lambda^r[a\eta]$ 和 $l_\lambda^r[\dot{H}/a^2]$ 存在且有限，则 $l_\lambda^k[a\eta]$ 也存在且有限。特别地，对于所有 $r\in\{0,\dots,k-3\}$，若 $l_\lambda^r[a\eta]$ 和 $l_\lambda^r[\dot{H}/a^2]$ 存在且有限，则 $l_\lambda^{k-1}[a\eta]$ 也存在且有限。

□

以下是一个新的引理，在第 3.4.2 节中未出现，但作为中间步骤，有必要先证明它，以便随后证明引理 3.13。

**引理 A.1.** $\lambda$ 阶和 $a$ 阶导数之间的关系如下：对于 $k=2$，显然有，将 $\dot{H}/a^2$ 视为 $\lambda$ 的函数，等于将 $\dot{H}/a^2$ 视为 $a$ 的函数；而对于任意 $k\geq 3$，

$$\frac{\mathrm{d}^{k-2}}{\mathrm{d}\lambda^{k-2}}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right) = \sum_{m=1}^{k-2}\mathcal{H}_m^{(k)}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}a^m}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right)\,, \tag{A.55}$$

其中，函数 $\mathcal{H}_m^{(k)}$ 是关于 $H$ 及其 $\lambda$ 阶导数（最高至 $k-3$ 阶）的非负整系数多项式。具体而言，

$$\mathcal{H}_1^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^{k-3}H}{\mathrm{d}\lambda^{k-3}}\,,\qquad \mathcal{H}_{k-2}^{(k)} = H^{k-2}\,, \tag{A.56}$$

并且，对于 $m\in\{2,\dots,k-3\}$ 当 $k\geq 5$ 时，存在 $c_n^{(m,k)}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得

$$\mathcal{H}_m^{(k)} = \sum_{n\in\mathcal{N}_m^{(k)}}c_n^{(m,k)}\prod_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^{n_i}H}{\mathrm{d}\lambda^{n_i}}\,, \tag{A.57}$$

其中

$$\mathcal{N}_m^{(k)} := \left\{ \{n_i\}_{i=1}^m \;\middle|\; n_i \in \{0,\dots,k-2-m\} \text{ and } \sum_{i=1}^m n_i = k-2-m \right\} . \tag{A.58}$$

注。 对于我们的目的而言，无需知道系数 $c_n^{(m,k)}$ 的确切形式，但若能发现它们是否呈现某种规律，将会很有趣。

证明。 对 $k \geq 3$ 的证明采用归纳法。对于 $k=3$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right) = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right) = H\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right) ,$$

这确实是 $k=3$ (A.55)–(A.56) 的情形。

现在，假设引理在阶数 $k-3$ 时成立，那么我们有

$$\frac{\mathrm{d}^{k-3}}{\mathrm{d}\lambda^{k-3}}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right) = \sum_{m=1}^{k-3} \mathcal{H}_m^{(k-1)} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}a^m}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right) , \qquad \mathcal{H}_1^{(k-1)} = \frac{\mathrm{d}^{k-4}H}{\mathrm{d}\lambda^{k-4}} , \qquad \mathcal{H}_{k-3}^{(k-1)} = H^{k-3} ,$$

并且对于 $m \in \{2,\dots,k-4\}$，存在 $c_n^{(m,k-1)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得

$$\mathcal{H}_m^{(k-1)} = \sum_{n \in \mathcal{N}_m^{(k-1)}} c_n^{(m,k-1)} \prod_{i=1}^m \frac{\mathrm{d}^{n_i}H}{\mathrm{d}\lambda^{n_i}} ,$$

with

$$\mathcal{N}_m^{(k-1)} = \left\{ \{n_i\}_{i=1}^m \;\middle|\; n_i \in \{0,\dots,k-3-m\} \text{ and } \sum_{i=1}^m n_i = k-3-m \right\} .$$

接下来，尝试证明 $k-2$ 阶的结果，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{k-2}}{\mathrm{d}\lambda^{k-2}}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}^{k-3}}{\mathrm{d}\lambda^{k-3}}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right)\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\sum_{m=1}^{k-3} \mathcal{H}_m^{(k-1)} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}a^m}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right)\right) \\
&= \sum_{m=1}^{k-3} \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_m^{(k-1)}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}a^m}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right) + \sum_{m=1}^{k-3} \mathcal{H}_m^{(k-1)} H \frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}a^{m+1}}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{k-3} \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_m^{(k-1)}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}a^m}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right) + \sum_{m=2}^{k-2} H\mathcal{H}_{m-1}^{(k-1)} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}a^m}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right) \qquad \text{(A.59a)} \\
&=: \sum_{m=1}^{k-2} \widetilde{\mathcal{H}}_m^{(k)} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}a^m}\left(\frac{\dot{H}}{a^2}\right) , \qquad \text{(A.59b)}
\end{aligned}$$

其中最后一个等式定义了 $\widetilde{\mathcal{H}}_m^{(k)}$。比较（A.59a）和（A.59b），我们注意到

$$\widetilde{\mathcal{H}}_1^{(k)} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_1^{(k-1)}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}^{k-4}H}{\mathrm{d}\lambda^{k-4}}\right) = \frac{\mathrm{d}^{k-3}H}{\mathrm{d}\lambda^{k-3}} = \mathcal{H}_1^{(k)}\,,$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{k-2}^{(k)} = H\mathcal{H}_{k-3}^{(k-1)} = HH^{k-3} = H^{k-2} = \mathcal{H}_{k-2}^{(k)}\,,$$

并且，对于 $m \in \{2,\dots,k-3\}$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{H}}_m^{(k)} &= \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}_m^{(k-1)}}{\mathrm{d}\lambda} + H\mathcal{H}_{m-1}^{(k-1)} \\
&= \sum_{n\in\mathcal{N}_m^{(k-1)}} c_n^{(m,k-1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^{n_i}H}{\mathrm{d}\lambda^{n_i}}\right) + \sum_{n\in\mathcal{N}_{m-1}^{(k-1)}} c_n^{(m-1,k-1)} H \prod_{i=1}^{m-1}\frac{\mathrm{d}^{n_i}H}{\mathrm{d}\lambda^{n_i}} \\
&= \sum_{n\in\mathcal{N}_m^{(k-1)}} c_n^{(m,k-1)} \sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^{n_i+1}H}{\mathrm{d}\lambda^{n_i+1}}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{\mathrm{d}^{n_j}H}{\mathrm{d}\lambda^{n_j}} + \sum_{n\in\mathcal{N}_{m-1}^{(k-1)}} c_n^{(m-1,k-1)} \underbrace{\prod_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^{n_i}H}{\mathrm{d}\lambda^{n_i}}}_{\text{with } n_m=0}\,.
\end{aligned} \tag{A.60}$$

注意，（A.60）中的第一项求和可以改写为[23]

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_m^{(k-1)}} c_n^{(m,k-1)} \sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^{n_i+1}H}{\mathrm{d}\lambda^{n_i+1}}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{\mathrm{d}^{n_j}H}{\mathrm{d}\lambda^{n_j}} = \sum_{n\in\mathcal{N}_m^{(k)}} \widetilde{c}_n^{(m,k)} \prod_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^{n_i}H}{\mathrm{d}\lambda^{n_i}}\,,$$

其中，新的系数 $\widetilde{c}_n^{(m,k)}$来自不同 $c_n^{(m,k-1)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$的求和，因此 $\widetilde{c}_n^{(m,k)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。类似地，注意，（A.60）中的第二项求和可以改写为

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_{m-1}^{(k-1)}} c_n^{(m-1,k-1)} \underbrace{\prod_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^{n_i}H}{\mathrm{d}\lambda^{n_i}}}_{\text{with } n_m=0} = \sum_{n\in\mathcal{N}_m^{(k)}} c_n^{(m-1,k-1)} \prod_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^{n_i}H}{\mathrm{d}\lambda^{n_i}}$$

因为对.....求和

$$n \in \mathcal{N}_{m-1}^{(k-1)} = \left\{ \{n_i\}_{i=1}^{m-1} \;\middle|\; n_i \in \{0,\dots,k-2-m\} \text{ and } \sum_{i=1}^{m-1} n_i = k-2-m \right\}$$

[23]事实上，对.....求和

$$\frac{\mathrm{d}^{n_i+1}H}{\mathrm{d}\lambda^{n_i+1}}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{\mathrm{d}^{n_j}H}{\mathrm{d}\lambda^{n_j}}$$

对所有满足 $\sum_{i=1}^{m} n_i = k-3-m$ 的 $n_i$ 组合求和，与.....求和相同

$$\prod_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^{n_i}H}{\mathrm{d}\lambda^{n_i}}$$

遍历满足 $\sum_{i=1}^{m} n_i = k-2-m$ 的 $n_i$ 的所有组合。

等价于对.....求和

$$n \in \mathcal{N}_m^{(k)} = \left\{ \{n_i\}_{i=1}^m \;\middle|\; n_i \in \{0, \dots, k-2-m\} \text{ and } \sum_{i=1}^m n_i = k-2-m \right\}$$

当 $n_m = 0$时。因此，(A.60) 变为

$$\widetilde{\mathcal{H}}_m^{(k)} = \sum_{n \in \mathcal{N}_m^{(k)}} c_n^{(m,k)} \prod_{i=1}^m \frac{\mathrm{d}^{n_i} H}{\mathrm{d}\lambda^{n_i}} = \mathcal{H}_m^{(k)} \,,$$

其中 $c_n^{(m,k)} = \tilde{c}_n^{(m,k)} + c_n^{(m-1,k-1)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。 □

**引理 3.13.** 对于所有 $r \in \{0, \dots, k-2\}$，若 $l_\lambda^r[a]$ 和 $l_a^r[\dot{H}/a^2]$ 的存在性与有限性成立，则 $l_\lambda^r[\dot{H}/a^2]$ 对于所有 $r \in \{0, \dots, k-2\}$都存在且有限。

证明。 若 $k = 2$，显然 $l_\lambda^0[\dot{H}/a^2] = l_a^0[\dot{H}/a^2]$。接着对于 $k \geq 3$，令 $\lambda \to 0^+$（等价地 $a \to 0^+$），对引理 A.1中的方程 (A.55) 取极限，我们得到

$$\begin{aligned} l_\lambda^{k-2}[\dot{H}/a^2] &= l_\lambda^{k-3}[H] l_a^1\left[\frac{\dot{H}}{a^2}\right] + \sum_{m=2}^{k-3} l_a^m\left[\frac{\dot{H}}{a^2}\right] \sum_{n \in \mathcal{N}_m^{(k)}} c_n^{(m,k)} \prod_{i=1}^m l_\lambda^{n_i}[H] + l_\lambda^0[H^{k-2}] l_a^{k-2}\left[\frac{\dot{H}}{a^2}\right] \\ &= l_\lambda^{k-2}[a] l_a^1\left[\frac{\dot{H}}{a^2}\right] + \sum_{m=2}^{k-3} l_a^m\left[\frac{\dot{H}}{a^2}\right] \sum_{n \in \mathcal{N}_m^{(k)}} c_n^{(m,k)} \prod_{i=1}^m l_\lambda^{n_i+1}[a] + h^{k-2} l_a^{k-2}\left[\frac{\dot{H}}{a^2}\right] \,, \end{aligned}$$

由此完成证明。特别注意，中间项中的 $n_i$取值范围为 0 至不超过 $k-3$，根据 (A.58)。在推导出上面的第二行时，我们利用了这一事实；回忆 $a/\mathrm{d}\lambda = (1/a)(\mathrm{d}a/\mathrm{d}t) = H$，

$$\frac{\mathrm{d}^{m+1} a}{\mathrm{d}\lambda^{m+1}} = \frac{\mathrm{d}^m H}{\mathrm{d}\lambda^m} \,,$$

这意味着 $l_\lambda^m[H] = l_\lambda^{m+1}[a]$。我们还利用了 $l_\lambda^0[H]$ 是一个常数（此前记作 $h$ 或 $H_\Lambda$）这一事实，因此 $l_\lambda^0[H^{k-2}] = l_\lambda^0[H]^{k-2} = h^{k-2}$ 也只是一个常数。 □

# B 更光滑的可延拓例子

我们将提供更多光滑可延拓时空的例子，继续讨论3.4.2末尾的内容。

一类有趣的例子是

$$a(t) = \frac{1}{e^{-t} + e^{nt}} = e^t - e^{(2+n)t} + e^{(3+2n)t} - e^{(4+3n)t} + \dots \,, \qquad n \in \mathbb{R}_{\geq 1} \,. \tag{B.61}$$

这里我们再次猜想，如果 $n \in \mathbb{R}_{\geq k-1}$ 或者如果 $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots, k-2\}$，那么 $C^k$ 可延拓性 $k \geq 2$ 成立；因此，如果 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，则 $C^\infty$ 也成立。（证明会很繁琐，但已在许多情况下验证该猜想成立。）对于特殊情形 $n = 1$（此前

已在 [27]中讨论过），我们可以明确证明这一点，因为直接计算表明 $\dot{H}/a^2$是常数。

另一个例子（可见 [31]）是

$$a(t) = \frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}\,. \tag{B.62}$$

对此可进行解析求逆，得到

$$t(a) = \ln\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right), \qquad \frac{\dot{H}}{a^2} = -\frac{2}{1+e^{2t}} = -2(1-a^2)\,.$$

这是关于 $a$ 的光滑函数，因此在这种情况下可以进行光滑延拓。

作为一个更具物理动机的例子，我们来考虑一个严格的暴胀场论实现。可以探讨的例子不胜枚举，但我们只重新考察一个特定的小场暴胀案例； [27] 发现，其中不存在妨碍 $C^2$ 度规可延拓性的障碍。标量场 $\varphi$ 的势由$V(\phi) = V_0(1-(\frac{\varphi}{2m})^2)^2$, 给出，其中场在渐近情况下从不稳定点 $\varphi = 0$（速度为零）开始，并沿势缓慢滚向其中一个极小值。 [27]中推导了慢滚解，并将其表示为 $\varphi$ 的函数；不过，我们来重新推导它，并将其表示为$t$的函数。在慢滚近似下，标量场的速度满足 $\dot{\varphi} \simeq -\frac{1}{3H}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}\varphi$，而哈勃参数满足约束条件 $3H^2 \simeq V(\varphi)$。我们采用的单位制使牛顿引力常数等于 $1/(8\pi)$（或者说约化普朗克质量取为1）。结合上述势，所得方程为 $\dot{\varphi} \simeq (\varphi/m^2)\sqrt{V_0/3}$，其解为 $\varphi(t) \simeq \varphi_{\mathrm{e}}\exp\left(\sqrt{\frac{V_0}{3}}\frac{t}{m^2}\right)$，其中 $\varphi_{\mathrm{e}}$ 是某个积分常数。然后，解出$\dot{a}(t)/a(t) \simeq \sqrt{V(\varphi(t))/3}$后，我们得到

$$a(t) \simeq a_{\mathrm{e}}\exp\left[-\frac{\varphi_{\mathrm{e}}^2}{8}\exp\left(\frac{2}{m^2}\sqrt{\frac{V_0}{3}}t\right)\right]\exp\left(\sqrt{\frac{V_0}{3}}t\right),$$

对于某个积分常数 $a_{\mathrm{e}}$。当 $t \to -\infty$ 时，它与 $e^{ht}+o(e^{ht})$ 并非渐近相等，但它满足 $H \to \sqrt{V_0/3}$, 因此这是 $C^0$ 可延拓的。事实上，它是 $C^2$ （如 [27] 所示）。此外，可以证明它是 $C^\infty$ 可延拓的：对上述尺度因子求逆后，可以计算出 $\dot{H}/a^2$，并将其表示为 $a$ 的函数：

$$\frac{\dot{H}}{a^2} \simeq \frac{2V_0}{3m^2a^2}W(-x(a)^2)\,, \qquad \text{with } x(a) = \frac{\varphi_{\mathrm{e}}}{2m}\left(\frac{a}{a_{\mathrm{e}}}\right)^{1/m^2},$$

其中 $W$ 是 Lambert $W$ 函数。在 $a = 0^+$ 渐近区域附近，上式可展开为

$$\frac{\dot{H}}{a^2} \simeq -\frac{2V_0}{3m^2}\left[\left(\frac{\varphi_{\mathrm{e}}}{2ma_{\mathrm{e}}^{1/m^2}}\right)^2 a^{\frac{2}{m^2}-2} + \left(\frac{\varphi_{\mathrm{e}}}{2ma_{\mathrm{e}}^{1/m^2}}\right)^4 a^{\frac{4}{m^2}-2} + \cdots\right].$$

在给定 $m < 1$ （这是场的质量低于普朗克尺度所必须满足的条件）时，上述结果在 $a \searrow 0$下收敛，从而证实了光滑性。不过，正如第6.2节所讨论的，这个例子

属于无穷多种经过精细调节的初始条件之一，使场渐近地停留在 $\varphi = 0$ 势的不稳定点上。因此，从动力学视角来看，这种情形不太可能发生。这是小场暴胀中一个众所周知的初始条件问题 [93, 94]，但正如我们在第6.2节中所论证的，这一评论适用范围更广。

# 参考文献


[1] A.H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, *Phys. Rev. D* **23** 1981 347 ( ) .[2] A.D. Linde, *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity Isotropy and Primordial Monopole Problems* *Phys. Lett. B* **108** 1982 389 , , ( ) .[3] V.F. Mukhanov 和 G.V. Chibisov, *Quantum Fluctuations and a Nonsingular Universe* *JETP Lett.* , ( ) **33** 1981 532, 1510 _23079 http://www.jetpletters.ru/ps/ /article .shtml.[4] A.H. Guth 和 S.Y. Pi, *Fluctuations in the New Inflationary Universe*, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1110.[5] J.M. Bardeen, P.J. Steinhardt 和 M.S. Turner, *Spontaneous Creation of Almost Scale-Free Density Perturbations in an Inflationary Universe* *Phys. Rev. D* **28** 1983 679 , ( ) .[6] R.H. Brandenberger, *Inflationary cosmology: Progress and problems* *IPM School on Cosmology* , *1999: Large Scale Structure Formation* 1 1999 9910410 in , , , hep-ph/ .[7] R.Bean, D.J.H.ChungandG.Geshnizjani, *Reconstructing a general inflationary action* *Phys. Rev.* , ( ) 023517 [*D* **78** 2008 0801 arXiv: .0742].[8] J. Martin, C. Ringeval 和 V. Vennin, *Encyclopædia Inflationaris* *Phys. Dark Univ.* **5 6** 2014 75 , - ( ) arXiv: . . [ 1303 3787]
[9] Planck collaboration, Y. Akrami et al., *Planck 2018 results. X. Constraints on inflation* *Astron.* , ( ) A arXiv: . . *Astrophys.* **641** 2020 10 [ 1807 06211]
[10] S. Hawking, *The Occurrence of singularities in cosmology*, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **294**(1966) 511.[11] S. Hawking, *The Occurrence of singularities in cosmology. II*, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **295** (1966) 490.[12] S. Hawking, *The occurrence of singularities in cosmology. III. Causality and singularities* *Proc.* , ( ) .[13] *Roy. Soc. Lond. A* **300** 1967 187
S.W. Hawking 和 R. Penrose, *The Singularities of gravitational collapse and cosmology* *Proc. Roy.* , ( ) .[14] A. *Soc. Lond. A* **314** 1970 529
Borde 和 A. Vilenkin, *Eternal inflation and the initial singularity*, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 3305 [gr-qc/9312022].
[15] A. Borde 和 A. Vilenkin, *The Impossibility of steady state inflation* *8th Nishinomiya-Yukawa* , in , p. gr-qc/ .[16] *Memorial Symposium: Relativistic Cosmology* 111, 3, 1994, 9403004
A. Borde, *Open and closed universes, initial singularities and inflation*, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 3692 [gr-qc/9403049].
[17] A. Borde 和 A. Vilenkin, *Singularities in inflationary cosmology: A Review* *Int. J. Mod. Phys. D* , ( ) 813 [gr-qc/ **5** 1996 9612036].[18] G. Galloway 和 E. Ling, *Topology and singularities in cosmological spacetimes obeying the null energy condition* *Comm. Math. Phys.* **360** 2017 611 [ 1705 06705] , ( ) arXiv: . .[19] A. Borde, A.H. Guth 和 A. Vilenkin, *Inflationary space-times are incomplete in past directions*, *Phys. Rev. Lett.* **90** 2003 151301 [ 0110012] ( ) gr-qc/ .[20] J.M.M. Senovilla 和 D. Garfinkle, *The 1965 Penrose singularity theorem*, *Class. Quant. Grav.* **32** (2015) 124008 [arXiv:1410.5226].

[21] M. Spradlin, A. Strominger 和 A. Volovich, *Les Houches lectures on de Sitter space*, in *Les Houches Summer School: Session 76: Euro Summer School on Unity of Fundamental Physics: Gravity Gauge Theory and Strings* 423, 10, 2001, 0110007 , , p. hep-th/ .[22] A. Aguirreand S.Gratton, *Steady state eternal inflation* 2002 083507 , [ 0111191] *Phys. Rev. D* **65** ( ) astro-ph/ .[23] A. Aguirreand S.Gratton, *Inflation without a beginning: A Null boundary proposal* *Phys. Rev. D* , ( ) 083515 [ **67** 2003 gr-qc/0301042].[24] A. Aguirre, *Eternal Inflation, past and future*, arXiv:0712.0571.[25] A. Vilenkin, *Arrows of time and the beginning of the universe* 2013 043516 , *Phys. Rev. D* **88** ( ) [ 1305 3836] arXiv: . .[26] A. Vilenkin 和 A.C. Wall, *Cosmological singularity theorems and black holes*, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 064035 [arXiv:1312.3956].[27] D. Yoshida 和 J. Quintin, *Maximal extensions and singularities in inflationary spacetimes* *Class.* , ( ) arXiv: . .[28] *Quant. Grav.* **35** 2018 155019 [ 1803 07085] T. Numasawaand D. Yoshida, *Global Spacetime Structure of Compactified Inflationary Universe*, *Class. Quant. Grav.* **36** 2019 195003 [ 1901 03347] ( ) arXiv: . .[29] K. Nomura andD. Yoshida, *Past extendibility and initial singularity in Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker and Bianchi I spacetimes* *JCAP* **07** 2021 047 , ( ) arXiv: . .[30] K. Nishii 和 [ 2105 05642] D. Yoshida, *String excitation by initial singularity of inflation* *JHEP* **10** 2021 025 , ( ) [ 2105 12339] arXiv: . .[31] K. Nomura andD. Yoshida, *Implications of the singularity theorem for the size of a nonsingular universe* *Phys. Rev. D* **106** 2022 124016 [ 2206 09404] , ( ) arXiv: . .[32] T. Harada,T. Igata,T. Sato andB. Carr, *Complete classification of Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker solutions with linear equation of state: parallelly propagated curvature singularities for general geodesics* *Class. Quant. Grav.* **39** 2022 , ( ) 145008 [ 2110 13421] arXiv: . .[33] C.J.S. Clarke, *Local extensions in singular space-times*, *Commun. Math. Phys.* **32** (1973年) 205–214.[34] G.F.R. Ellisand A.R. King, *Was the big bang a whimper?*, *Commun. Math. Phys.* **38** (1974年) 119–156.[35] G.F.R. Ellisand B.G. Schmidt, *Singular space-times*, *Gen. Rel. Grav.* **8** (1977年).[36] C.J.S. Clarke, *Local extensions in singular space-times II*, *Commun. Math. Phys.* **84** (1982) 329–331.[37] C.J.S. Clarke, *The Analysis of space-time singularities*, 剑桥物理学讲义, Cambridge UniversityPress, 英国剑桥 (1994年).[38] G. Galloway 和 E. Ling, *Some Remarks on the $C^0$-(in)extendibility of Spacetimes* *Annales Henri* , ( ) 3427 [arXiv: . *Poincaré* **18** 2017 1610 03008].[39] G.J. Galloway, E. Ling 和 J. Sbierski, *Timelike Completeness as an Obstruction to $C^0$-Extensions*, *Commun. Math. Phys.* **359** 2018 937 [ 1704 00353] ( ) arXiv: . .[40] J. Sbierski, *Lorentzian geometry* *J. Diff. Geom.* **108** 2018 319 [ 1507 00601] , ( ) *The $C^0$-inextendibility of the Schwarzschild spacetime and the spacelike diameter in* arXiv: . .[41] J. Sbierski, *On the proof of the $C^0$-inextendibility of the Schwarzschild spacetime* *J. Phys. Conf.* , ( ) 012012 [ *Ser.* **968** 2018 1711 arXiv: .11380].[42] J. Sbierski, *On holonomy singularities in general relativity and the $C^0$ inextendibility of* , loc , ( ) arXiv: . .[43] M. *space-times* *Duke Math. J.* **171** 2022 2881 [ 2007 12049] Graf 和 E. Ling, *Maximizers in Lipschitz spacetimes are either timelike or null* *Class. Quant.* , *Grav.* **35** 2018 1712 ( ) 087001 [arXiv: .06504].

[44] E. Minguzzi 和 S. Suhr,
*Some regularity results for Lorentz-Finsler spaces* *Annals Global Anal.* , （） 597 [
*Geom.* **56** 2019 1903
arXiv: .00842].[45] D. Klein 和 J. Reschke,
*Pre-big Bang Geometric Extensions of Inflationary Cosmologies* *Annales* , （） 565 [
*Henri Poincaré* **19** 2018 1604
arXiv: .06372].[46] E. Ling, *Milne-like Spacetimes and their Symmetries*, arXiv:1803.00174。[47] E. Ling,
*The Big Bang is a Coordinate Singularity for $k = -1$ Inflationary FLRW Spacetimes*,
*Found. Phys.* **50** 2020 385 [ 1840 06789] （） arXiv: . .[48] E.
Ling, *Remarks on the cosmological constant appearing as an initial condition for Milne-like spacetimes* *Gen. Rel. Grav.* **54** 2022 68 [ 2202 04014] , （） ar
Xiv: . .[49] E. Ling 和 A. Piubello,
*On the asymptotic assumptions for Milne-like spacetimes* *Gen. Rel. Grav.* , （） 53 [
**55** 2023 2208
arXiv: .07786].[50] M. Novello 和 S.E.P. Bergliaffa,
*Bouncing Cosmologies* 2008 127 , *Phys. Rept.* **463** （）
[ 0802 1634]
arXiv: . .[51] Y.F. Cai,
*Exploring Bouncing Cosmologies with Cosmological Surveys* *Sci. China Phys. Mech.* , （） 1414 [
*Astron.* **57** 2014 1405
arXiv: .1369].[52] D. Battefeld 和 P. Peter, *A Critical Review of Classical Bouncing Cosmologies*,
*Phys. Rept.* **571** （2015年） 1 [arXiv:1406.2790].[53] R. Brandenberger 和 P. Peter,
*Bouncing Cosmologies: Progress and Problems*, *Found. Phys.* **47** （2017年） 797 [arXiv:1603.05834].[54] S.S.
Boruah、H.J. Kim、M. Rouben 和 G. Geshnizjani,
*Cuscuton bounce* *JCAP* **08** 2018 031 , （） arXiv: . .[55]
[ 1802 06818]
J.D. Barrow, *Varieties of expanding universe*, *Class. Quant. Grav.* **13**（1996年）2965。[56] J.D. Barrow 和 N.J.
Nunes, *Dynamics of Logamediate Inflation* 2007 043501 ,
[ 0705 4426]
*Phys. Rev. D* **76** （） arXiv: . .[57] S.F. Bramberger 和 J.L. Lehners, *Nonsingular bounces catalyzed by dark energy*,
*Phys. Rev. D* **99** （2019年） 123523 [arXiv:1901.10198].[58] A. Anabal
´ *Kerr-NUT-de Sitter as an Inhomogeneous* on、S.F. Bramberger
*Non-Singular Bouncing Cosmology* *JHEP* **09** 2019 096 [ 1904 07285]
和 J.L. Lehners, , （） arXiv: . .[59] M.I. Letey、Z. Shumaylov、F.J. Agocs、W.J. Handley、M.P. Hobson 和 *Quantum*
A.N. Lasenby, *Initial Conditions for Curved Inflating Universes* 2211 17248 ,
arXiv: . .[60] J.E. Lesnefsky、D.A. Easson 和 P.C.W.Davies, *Past-completeness of inflationary spacetimes*, *Phys*
*Rev. D* **107**(2023年) 044024 [arXiv:2207.00955].[61] A. Ijjas 和 P.J. Steinhardt,
*A new kind of cyclic universe* 2019 666 , *Phys. Lett. B* **795** （）
[ 1904 08022]
arXiv: . .[62] W.H. Kinney 和 N.K. Stein,
*Cyclic cosmology and geodesic completeness* *JCAP* **06** 2022 011 , （） arXiv: . .[63]
[ 2110 15380]
H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets* *Trans. Amer.* , （） .
*Math. Soc.* **36** 1934 63
[64] R.T. Seeley, *Extension of $C^\infty$ functions defined in a half space*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15**(1964年) 625。
[65] P. van Nieuwenhuizen 和 C.C. Wu, *On Integral Relations for Invariants Constructed from Three*
*Riemann Tensors and their Applications in Quantum Gravity* *J. Math. Phys.* **18** 1977 182 , （） .[66] R.R.
Metsaev 和 A.A.Tseytlin,
*Curvature Cubed Terms in String Theory Effective Actions* *Phys.* , （） .[67] S.
*Lett. B* **185** 1987 52
W. Hawking 和 G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, 剑桥数学物理专著，剑桥大学出版社，英国
剑桥（1973年），10.1017/CBO9780511524646。

[68] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Cambridge University Press, 剑桥大学出版社，英国剑桥（2019）。10.1017/9781108770385。[69] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, 剑桥大学出版社，英国剑桥（2005），10.1017/CBO9780511790553。[70] J. Sbierski, *Uniqueness and non-uniqueness results for spacetime extensions*, arXiv:2208.07752。[71] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, *Pure and Applied Mathematics*第103卷，Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 纽约（1983）。[72] E. Ling, *Aspects of $C^0$ causal theory*, *Gen. Rel. Grav.* **52** （2020） 57 [arXiv:1911.04438]。[73] G.F.R. Ellis, *Republication of: Relativistic cosmology*, *Gen. Rel. Grav.* **41** （2009） 581。[74] C. Ganguly和J. Quintin, *Microphysical manifestations of viscosity and consequences for anisotropies in the very early universe* *Phys. Rev. D* **105** 2022 023532 [2109 , （） arXiv: 。11701].[75] G.F.R. Ellis、R. Maartens和M.A.H. MacCallum, *Relativistic Cosmology*，剑桥大学出版社，英国剑桥（2012），10.1017/CBO9781139014403。[76] V.A. Belinsky、I.M. Khalatnikov和E.M. Lifshitz, *Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology* *Adv. Phys.* **19** 1970 525 , （）。[77] C.W. Misner, *Mixmaster universe*, *Phys. Rev. Lett.* **22** （1969）1071。[78] V. Belinski和M. Henneaux, *The Cosmological Singularity*，剑桥数学物理专著，剑桥大学出版社，英国剑桥（2017），10.1017/9781107239333。[79] R.M. Wald, *Asymptotic behavior of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant* *Phys. Rev. D* **28** 1983 2118 , （）。[80] J.D. Barrow和J. Stein-Schabes, *Inhomogeneous cosmologies with cosmological constant* *Phys.* , （）。[81] *Lett. A* **103** 1984 315 Y. Kitada和K.i. Maeda, *Cosmic no hair theorem in homogeneous space-times. 1. Bianchi models*, *Class. Quant. Grav.* **10** 1993 703 （）。[82] A. Maleknejad和M.M. Sheikh-Jabbari, *Revisiting Cosmic No-Hair Theorem for Inflationary Settings* *Phys. Rev. D* **85** 2012 123508 [1203 0219] , （） arXiv: 。.[83] H. Andr ´ ¨ *Proof of the cosmic no-hair conjecture in the $\mathbb{T}^3$-Gowdy symmetric Einstein–Vlasov setting* *J. Eur. Math. Soc.* **18** 2016 1565 [1306 6223] easson和H. Ringstrom, , （） arXiv: 。.[84] M. Kleban和L. Senatore, *Inhomogeneous Anisotropic Cosmology* *JCAP* **10** 2016 022 , （） arXiv: 。.[1602 03520] [85] M. Mirbabayi, *Topology of Cosmological Black Holes*, *JCAP* **05** （2020） 029 [arXiv:1810.01431]。[86] P. Creminelli、L. Senatore和A. Vasy, *Asymptotic Behavior of Cosmologies with $\Lambda > 0$ in 2+1 Dimensions* *Commun. Math. Phys.* **376** 2020 1155 [1902 00519] , （） arXiv: 。.[87] P. Creminelli、O. Hershkovits、L. Senatore和A. Vasy, *A de Sitter no-hair theorem for 3+1d cosmologies with isometry group forming 2-dimensional orbits* *Adv. Math.* **434** 2023 , （） 109296 [2004 10754] arXiv: 。.[88] J. Wang和L. Senatore, *On the asymptotics of 3+1D cosmologies with bounded scalar potential and isometry group forming 2-dimensional orbits* 2111 09257 , arXiv: 。.[89] F.Azhar和D.I. Kaiser, *Flows into de Sitter space from anisotropic initial conditions: An effective field theory approach* *Phys. Rev. D* **107** 2023 043506 [2207 08355] , （） arXiv: 。.[90] R. Bousso, *A Covariant entropy conjecture*, *JHEP* **07** （1999） 004 [hep-th/9905177]。[91] R. Bousso, *The Holographic principle*, *Rev. Mod. Phys.* **74** （2002） 825 [hep-th/0203101]。[92] R. Bousso和A. Shahbazi-Moghaddam, *Singularities from Entropy*, *Phys. Rev. Lett.* **128** （2022）231301 [arXiv:2201.11132]。[93] D.S. Goldwirth和T. Piran, *Initial conditions for inflation*, *Phys. Rept.* **214** （1992）223。

[94] R. Brandenberger, *Initial conditions for inflation — A short review*, *Int. J. Mod. Phys. D* **26** (2016) 1740002 [arXiv:1601.01918]。[95] R. Easther、L.C. Price和J. Rasero, *Inflating an Inhomogeneous Universe* *JCAP* **08** 2014 041 , ( ) arXiv: 。.[96] [ 1406 2869] W.E. East、M. Kleban、A. Linde和L. Senatore, *Beginning inflation in an inhomogeneous universe* *JCAP* **09** 2016 1511 , ( ) 010 [arXiv: 。05143].[97] K. Clough、E.A. Lim、B.S. DiNunno、W. Fischler、R. Flauger和S. Paban, *Robustness of Inflation to Inhomogeneous Initial Conditions* *JCAP* **09** 2017 025 [ 1608 04408] , ( ) arXiv: 。.[98] K. Clough、R. Flauger和E.A. Lim, *Robustness of Inflation to Large Tensor Perturbations* *JCAP* , ( ) 065 [arXiv: 。 **05** 2018 1712 07352].[99] J.C. Aurrekoetxea、K. Clough、R. Flauger和E.A. Lim, *The Effects of Potential Shape on Inhomogeneous Inflation* *JCAP* **05** 2020 030 [ 1910 12547] , ( ) arXiv: 。.[100] C. Joana和 S. Clesse, *Inhomogeneous preinflation across Hubble scales in full general relativity*, *Phys. Rev. D* **103** 2021 083501 [ 2011 12196] ( ) arXiv: .[101] M. Corman和W.E. East, *Starting inflation from inhomogeneous initial conditions with momentum* *JCAP* **10** 2023 2212 , ( ) 046 [arXiv: 。04479].[102] D. Garfinkle、A. Ijjas和P.J. Steinhardt, *Initial conditions problem in cosmological inflation revisited* *Phys. Lett. B* **843** 2023 138028 [ 2304 12150] , ( ) arXiv: 。.[103] J.L. Lehners和K.S. Stelle, *A Safe Beginning for the Universe?* 2019 083540 , [ 1909 01169] *Phys. Rev. D* **100** ( ) arXiv: 。.[104] C. Jonas、J.L.Lehners和J.Quintin, *Cosmological consequences of a principle of finite amplitudes*, *Phys. Rev. D* **103** 2021 103525 [ 2102 05550] ( ) arXiv: 。.[105] J. D. Barrow和S. Hervik, *On the evolution of universes in quadratic theories of gravity* *Phys.* , *Rev. D* **74** 2006 ( ) 124017 [gr-qc/0610013]。[106] J.D. Barrow和S. Hervik, *Anisotropically inflating universes* 2006 023007 , *Phys. Rev. D* **73** ( ) [ 0511127] gr-qc/ 。[107] J.D. Barrow和S. Hervik, *Simple Types of Anisotropic Inflation* 2010 023513 , *Phys. Rev. D* **81** ( ) [ 0911 3805] arXiv: 。.[108] J. Middleton, *On The Existence Of Anisotropic Cosmological Models In Higher-Order Theories Of Gravity* *Class. Quant. Grav.* **27** 2010 225013 [ 1007 4669] , ( ) arXiv: 。.[109] D. M ¨ uller、A. Ricciardone、A.A. Starobinsky和A. Toporensky, *Anisotropic cosmological solutions in $R + R^2$ gravity* *Eur. Phys. J. C* **78** 2018 311 [ 1710 08753] , ( ) arXiv: 。.[110] S. Hofmann和M. Schneider, *Classical versus quantum completeness*, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 125028 [arXiv:1504.05580]。[111] S. Hofmann、M. Schneider和M. Urban, *Quantum complete prelude to inflation*, *Phys. Rev. D* **99** (2019) 065012 [arXiv:1901.04492]。[112] M. Kunzinger、R. Steinbauer、M. Stojkovic和J.A. Vickers, *Hawking's singularity theorem for $C^{1,1}$-metrics* *Class. Quant. Grav.* **32** 2015 075012 [ 1411 4689] , , ( ) arXiv: 。.[113] M. Kunzinger、R. Steinbauer和J.A. Vickers, *The Penrose singularity theorem in regularity $C^1$*, 1, *Class. Quant. Grav.* **32** 2015 155010 [ 1502 00287] ( ) arXiv: 。.[114] M. Graf、J.D.E. Grant、M. Kunzinger和R. Steinbauer, *The Hawking–Penrose Singularity* , , ( ) arXiv: 。08426]。[115] *Theorem for $C^{1,1}$-Lorentzian Metrics* *Commun. Math. Phys.* **360** 2018 1009 [ 1706 J.D.E. Grant、M. Kunzinger和C. S ¨ amann, *Inextendibility of spacetimes and Lorentzian length spaces* *Annals Global Anal. Geom.* **55** 2019 133 [ 1804 10423] , , ( ) arXiv: 。. [116] S.B. Alexander、M. Graf、M. Kunzinger和C. S ¨ amann, *Generalized cones as Lorentzian length spaces: Causality curvature and singularity theorems* , , *to appear in Comm. Anal. Geom* arXiv: 。 [ 1909 09575]

[117] M. Graf, *Singularity theorems for $C^1$-Lorentzian metrics* *Commun. Math. Phys.* **378** 2020 1417 , [ 1910 13915]
( ) arXiv: . . [118] M. Kunzinger、A. Ohanyan、B. Schinnerl 和 R. Steinbauer,
*The Hawking–Penrose Singularity* , ( ) arXiv: .
*Theorem for $C^1$-Lorentzian Metrics* *Commun. Math. Phys.* **391** 2022 1143 [ 2110
09176]. [119] R. Steinbauer, *The Singularity Theorems of General Relativity and Their Low Regularity*
*Extensions* *Jahresber. Dtsch. Math. Ver.* 2022 2206 , ( ) [arXiv: . 05939].

[120] F. Cavalletti 和 A. Mondino, *A review of Lorentzian synthetic theory of timelike Ricci curvature*
*bounds* *Gen. Rel. Grav.* **54** 2022 2204 , ( ) 137 [arXiv: .
13330]. [121] R.J. McCann, *A synthetic null energy condition*, arXiv:2304.14341。[122] J.B. Hartle 和 S.W.
Hawking, *Wave Function of the Universe*, *Phys. Rev. D* **28** (1983) 2960。[123] C. Jonas、J.L. Lehners 和 J.
Quintin, *Uses of complex metrics in cosmology* *JHEP* **08** 2022 284 , ( )
[ 2205 15332]
arXiv: . . [124] D. Jia, *Is singularity resolution trivial?*, arXiv:2204.12304。[125] J. Cotler 和 K. Jensen,
*Isometric evolution in de Sitter quantum gravity*, arXiv:2302.06603。[126] L. Boyle、K. Finn 和 N. Turok,
*The Big Bang*, *CPT*, *and neutrino dark matter*, *Annals Phys.* **438** (2022年) 168767 [arXiv:1803。08930]。
[127] L. Boyle、K. Finn 和 N. Turok,
*CPT-Symmetric Universe* 2018 251301 ,
[ 1803 08928]

*Phys. Rev. Lett.* **121** ( ) arXiv: . . [128] L. Boyle 和 N. Turok, *Two-Sheeted Universe*,
*Analyticity and the Arrow of Time*, arXiv:2109.06204。[129] L. Boyle、M. Teuscher 和 N. Turok,
*The Big Bang as a Mirror: a Solution of the Strong CP*
*Problem* 2208 10396 , arXiv: . .