arXiv:2305.01683v1 [astro-ph.EP] 2 May 2023

内太阳系混沌的时间尺度：李雅普诺夫谱与准运动积分

Federico Mogavero、* Nam H. Hoang、† 和 Jacques Laskar‡*IMCCE, CNRS UMR 8028, Observatoire de Paris, Université PSL, Sorbonne Université 77 Avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France*（日期：2023年5月4日）

对太阳系进行数值积分，显示内行星的轨道在数十亿年间具有显著的稳定性，尽管其变化呈现混沌特征，李雅普诺夫时间仅为 500 万年，且不存在能够约束其动力学的运动积分。为了探索这种长期行为，我们计算了内行星受迫长期模型的完整李雅普诺夫谱。我们发现一系列特征指数跨越两个数量级，呈现出慢快动力学以及宽广的时间尺度分离。基于计算机代数对哈密顿量傅里叶谐波进行系统分析，揭示了三种对称性，它们刻画了导致轨道混沌的最强共振。这些对称性仅被弱共振打破，由此产生准运动积分；研究表明，它们与最小的李雅普诺夫指数相关。对轨道解进行主成分分析，也独立证实这些准积分属于动力学中最慢的自由度。有力证据表明，它们有效地约束轨道的混沌扩散，在太阳系寿命尺度上的统计稳定性中发挥关键作用。

I. 引言

内太阳系（ISS）的行星轨道是混沌的，李雅普诺夫时间约为 500 万年（Myr）[1–4]。尽管如此，在长达其千倍的时间尺度上，它们在统计意义上仍非常稳定。未来 50 亿年（Gyr）[5–7]内，水星偏心率超过 0.7、从而引发灾变事件（即近距离遭遇、碰撞或行星抛射）的概率仅约为 1%。最近的估算表明，水星轨道的动力学半衰期为 300 亿至 400 亿年 [4, 7]。李雅普诺夫时间与动力学不稳定性时间尺度之间相差近四个数量级，这一点引人深思，因为内行星轨道的混沌变化无法先验地加以约束。虽然太阳系的总能量和角动量守恒，但外行星与内行星之间的质量悬殊意味着，原则上，通过这些量的交换，内太阳系的不稳定状态很容易实现。内太阳系令人惊讶的稳定性值得从整体上加以考察，使其成因能够更自然地显现出来。

据我们所知，唯一一项研究 ISS 长期动力学中时间尺度分离的工作，基于无质量水星 [8]的简化长期动力学：所有其他行星都固定在规则准周期轨道上；长期相互作用按质量的一阶项以及偏心率和倾角的四阶项展开；并且先验地选取哈密顿量中的相关项。然而，约 1 十亿年 [8, 9] 的典型不稳定时间过短，与太阳系的现实数值积分结果存在显著差异。系统显示，随着动力学模型复杂度的增加，不稳定率总体上升 [7]。我们发现，将 ISS 的世俗哈密顿量在偏心率和倾角上截断于四阶，会使动力学更加稳定；与完整系统相比，其在 50 亿年时的不稳定率会降低几个数量级 [10]。从这些最新发现来看，在太阳系的年龄跨度内发生不稳定的概率仅为 1%，自然可以视为六次项及更高阶项造成的微扰效应。显然，在当前语境下，四阶动力学表现出的显著稳定性更令人瞩目，仍有待解释。

在经典准可积系统中，动力学时间尺度显著分离并不少见 [例如11, 12]。费米-帕斯塔-乌拉姆-津戈问题尤能体现这一点，该问题研究的是一串耦合弱非谐振子 [13]。远离柯尔莫哥洛夫-阿诺德-莫泽（KAM）和内霍罗舍夫区域时（这可能与 ISS 有关，见第三节），通常可以认为，近邻轨迹在一个李雅普诺夫时间内发生的指数发散，大多沿着由底层可积问题的作用变量所定义的不变环面切向发展，因此对作用空间中的扩散贡献甚微 [14, 15]。换言之，李雅普诺夫时间与扩散/不稳定性时间尺度随破坏可积性的项的大小而以不同方式变化，因而可能对应截然不同的时间尺度 [12]。然而，对于像当前这样复杂的问题，这一论述虽具有普遍性，却难以令人满意地定量说明时间尺度为何会分离。此外，尽管对 ISS 中混沌扩散的数量级估算表明，到达导致不稳定性的世俗共振可能需要数亿年，但在 50 亿年内发生不稳定性的概率仍然很低，这一点尚未得到解释$g_1 - g_5$[16] [4]。建立更精确的.....

* 通讯作者：federico.mogavero@obspm.fr
† 通讯作者：nam.hoang-hoai@obspm.fr
‡ jacques.laskar@obspm.fr

准确理解 ISS 为何在与其年龄相当的时间尺度上保持统计稳定，是认识行星系统如何经由亚稳态实现长期演化的重要一步 [4, 17][18]。该系统具有 8 个长期演化自由度，也构成了一座独特的桥梁，连接了天体力学中常研究的低维动力学与统计力学中研究的大量天体系统：它无法直接应用这两个领域的标准方法 [例如 19，附录 A]。

本研究旨在揭示内行星轨道的长期统计行为。第二节简要回顾文献 [4]中引入的受迫长期 ISS 动力学模型。第三节介绍其李雅普诺夫谱的数值计算。第四节介绍哈密顿量共振谐波的准对称性，以及相应的运动准积分（QIs）。第五节通过对轨道解进行主成分分析（PCA），建立准积分与动力学中最慢自由度之间的几何联系。第六节阐述这些新发现对 ISS 长期稳定性的意义。最后，我们讨论本研究与其他经典准可积系统的联系，以及本研究所用的方法。

II. 动力学模型

太阳系行星的长期动力学主要表现为其近日点和交点的缓慢进动，这种进动由经长期轨道平均的引力相互作用驱动 [2, 20]。在行星质量的一阶近似下，计入广义相对论的主导贡献后，世俗哈密顿量可写为 [例如 4, 21]

$$\widehat{H} = -\sum_{i=1}^{8}\left[\sum_{l=1}^{i-1}\left\langle \frac{G m_i m_l}{\|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_l\|}\right\rangle + \frac{3G^2 m_0^2 m_i}{c^2 a_i^2\sqrt{1-e_i^2}}\right]. \quad (1)$$

行星按照半长轴递增的顺序编号 $(a_i)_{i=1}^{8}$，m_0 分别表示太阳和行星的质量，m_i 表示偏心率，e_i 表示引力常数，G 表示光速。向量 c 是行星的日心位置，而括号算子表示对平黄经进行平均，这一平均源于消除 $\boldsymbol{r}_i$ 体哈密顿量 N中的非共振傅里叶谐波。哈密顿量（1）生成开普勒环的高斯动力学 [4, 21]，其半长轴 [4, 22], 是长期动力学的运动常数。

在计算机代数系统 TRIP [25, 26] 中展开二体摄动函数 [23, 24] 后，久期哈密顿量便可系统地表示为庞加莱复形式直角坐标的级数，

$$\begin{aligned} x_i &= \sqrt{\Lambda_i}\sqrt{1-\sqrt{1-e_i^2}}\,\mathrm{E}^{j\varpi_i}, \\ y_i &= \sqrt{2\Lambda_i}\left(1-e_i^2\right)^{\frac{1}{4}}\sin(\mathcal{I}_i/2)\mathrm{E}^{j\Omega_i}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\Lambda_i = \mu_i[G(m_0+m_i)a_i]^{1/2}$、$\mu_i = m_0 m_i/(m_0+m_i)$ 是行星的约化质量，$\mathcal{I}_i$ 为倾角，ϖ_i 为近日点经度，而 Ω_i 为交点经度[27]。变量对 $(x_i, -jx_i)$ 和 $(y_i, -jy_i)$ 是正则共轭动量 — 坐标变量。当按偏心率和倾角的总次数 $2n$ 截断时，该展开给出哈密顿量 $\widehat{H}_{2n} = \widehat{H}_{2n}[(x_i, \bar{x}_i, y_i, \bar{y}_i)_{i=1}^{8}]$，它们是多元多项式。

最近提出的受迫内太阳系模型为深入了解内行星的动力学提供了有价值的洞见[4]。该模型利用外行星长期运动的高度规律性 [2, 20, 28]，预先将它们的轨道确定为准周期形式：

$$x_i(t) = \sum_{l=1}^{M_i}\tilde{x}_{il}\,\mathrm{E}^{j\boldsymbol{m}_{il}\cdot\boldsymbol{\omega}_\circ t},\; y_i(t) = \sum_{l=1}^{N_i}\tilde{y}_{il}\,\mathrm{E}^{j\boldsymbol{n}_{il}\cdot\boldsymbol{\omega}_\circ t}, \quad (3)$$

对于 $i\in\{5,6,7,8\}$，其中 t 表示时间，$\tilde{x}_{il}$ 和 $\tilde{y}_{il}$ 为复振幅，$\boldsymbol{m}_{il}$ 和 $\boldsymbol{n}_{il}$ 为整数向量，而 $\boldsymbol{\omega}_\circ = (g_5, g_6, g_7, g_8, s_6, s_7, s_8)$ 表示外行星轨道恒定基本频率的七元组。该傅里叶分解的频率和振幅通过对太阳系完整轨道解进行频率分析 [29, 30]，以数值方式确定[4, 附录 D]。将预先确定的时间依赖关系代入式 (1)，即可得到受迫内太阳系的高斯动力学，

$$\mathcal{H} = \widehat{H}[(x_i, y_i)_{i=1}^{4}, (x_i = x_i(t), y_i = y_i(t))_{i=5}^{8}], \quad (4)$$

从而得到 $\mathcal{H} = \mathcal{H}[(x_i, y_i)_{i=1}^{4}, t]$。所得动力学中，每颗内行星对应两个自由度，分别对应 x_i 和 y_i 变量。因此，受迫长期内太阳系由 8 个自由度和显含时间依赖来描述。由于受到外行星的强迫作用，不存在平凡的运动积分，其轨道解位于 16 维相空间中。

通过将式（3）代入整个太阳系的截断哈密顿量 H_{2n}，即可轻易得到受迫 ISS 的截断哈密顿量 $\mathcal{H}_{2n}$。在最低阶，$\mathcal{H}_2$ 产生线性的受迫拉普拉斯–拉格朗日（LL）动力学。通过引入复数本征模变量（u_i, v_i），可以对其进行解析积分；这可通过时间依赖的正则变换（x_i, $-jx_i$）$\to$（u_i, $-ju_i$）、（y_i, $-jy_i$）$\to$（v_i, $-jv_i$）[4]实现。作用量–角变量对（$\mathfrak{X}_i$, χ_i）、（Ψ_i, ψ_i）引入如下：

$$u_i = \sqrt{\mathfrak{X}_i}\mathrm{E}^{-j\chi_i},\; v_i = \sqrt{\Psi_i}\mathrm{E}^{-j\psi_i}. \quad (5)$$

用本征模态表示时，截断哈密顿量可以展开为有限傅里叶级数：

$$\mathbb{H}_{2n}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\theta},t) = \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell}}\widetilde{\mathbb{H}}_{2n}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell}}(\boldsymbol{I})\mathrm{E}^{j(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\phi}(t))}, \quad (6)$$

其中，$\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \boldsymbol{\Psi})$ 和 $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\psi})$ 分别是作用量变量和角变量的 8 维向量，并引入外部角变量 $\boldsymbol{\phi}(t) = -\boldsymbol{\omega}_\circ t$。

表 I. 本文所考虑的不同受迫长期 ISS 模型概述。高斯动力学是通过对行星平黄经上的 N 体哈密顿量进行一阶平均得到的。由 $\mathcal{H}_{2n}$ 和 $\mathbb{H}_{2n}$ 生成的动力学实际上等效，因此将其视为相同。 $\mathbb{H}^{\bullet}_{2n}$ 模型将在第IV D节中引入并讨论。

哈密顿量	描述	参考资料
$\mathcal{H}$	复 Poincar´e 变量中的高斯动力学	式 (4)
$\mathcal{H}_{2n}$	高斯动力学在偏心率和倾角上的总次数截断为 $2n$	参考文献 [4]
$\mathbb{H}_{2n}$	拉普拉斯–拉格朗日动力学 $\mathcal{H}_2$ 的作用-角变量中的截断动力学	方程（6）和参考文献 [4]
$\mathbb{H}^{\bullet}_{2n}$	涉及 g_5 以外外行星模态的傅里叶谐波从 $\mathbb{H}_{2n}$ 中删去	方程（24）

波矢 $(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{\ell})$ 属于 $\mathbb{Z}^8\times\mathbb{Z}^7$ 的一个有限子集。二次项为 $\mathbb{H}_2=-\boldsymbol{\omega}_{\rm LL}\cdot\boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{\omega}_{\rm LL}=(\boldsymbol{g}_{\rm LL},\ \boldsymbol{s}_{\rm LL})\in\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4$ 是内行星近日点和交点的 LL 基本进动频率。哈密顿量 $\mathbb{H}_{2n}$ 具有拟可积形式。

式 (3) 中外行星轨道的准周期形式包含一阶以上的谐波，即，对于某些 i 和 l，有 $\|\boldsymbol{m}_{il}\|_1>1$ 和 $\|\boldsymbol{n}_{il}\|_1>1$，其中 $\|\cdot\|_1$ 表示 1-范数。因此，$\mathcal{H}_{2n}$ 和 $\mathbb{H}_{2n}$ 的动力学并不完全相同 [4]。不过，这种差异与本文的结果无关，因此从现在起我们将这两个哈密顿量视为等价。尽管式 (1) 和式 (3) 背后进行了简化，已有研究表明，受迫长期 ISS 构成了一个现实的模型，与太阳系 [2, 5, 6, 20] 参考积分的预测一致。该模型能够正确再现有限时间最大李雅普诺夫指数（FT-MLE），以及水星在 50 亿年期间出现高偏心率的统计特征 [4]。表 I 总结了本文所考虑的不同哈密顿量及其对应的动力学。

III. 李雅普诺夫谱

遍历理论通过李雅普诺夫特征指数（LCEs），为定义在相空间 $\mathcal{P}\subseteq\mathbb{R}^P$[31–34] 上的任意可微动力系统 $\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z},t)$ 引入一组基本时间尺度。若 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z},t)$ 表示相应的流，而 $\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}_0,t)$ 表示从初始条件 $\boldsymbol{z}_0$ 出发的轨道，则李雅普诺夫特征指数 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_P$ 是矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{z}_0)$ 的特征值的对数，该矩阵定义为

$$\lim_{t\to\infty}\left(\mathbf{M}(\boldsymbol{z}_0,t)^{\rm T}\mathbf{M}(\boldsymbol{z}_0,t)\right)^{1/2t}=\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{z}_0),\qquad(7)$$

其中 $\mathbf{M}(\boldsymbol{z}_0,t)=\partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\boldsymbol{z}_0$ 是基本矩阵，T 表示转置 [32, 33]。引入雅可比矩阵 $\mathbf{J}=\partial\boldsymbol{F}/\partial\boldsymbol{z}$后，基本矩阵使我们能够将变分方程 $\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{J}(\boldsymbol{z}(t)\ t)\boldsymbol{\zeta}$ 的解写为 $\boldsymbol{\zeta}(t)=\mathbf{M}(\boldsymbol{z}_0,t)\boldsymbol{\zeta}_0$，其中 $\boldsymbol{\zeta}(t)\in\mathcal{T}_{\boldsymbol{z}(t)}\mathcal{P}$属于 $\mathcal{P}$ 在点 $\boldsymbol{z}(t)$处的切空间，且$\boldsymbol{\zeta}_0=\boldsymbol{\zeta}(0)$。奥塞莱德克的乘法遍历定理 [31]指出，如果 ρ 是时间演化的遍历（即不变且不可分解）测度，并且具有紧支撑，那么对于几乎所有ρ-测度意义下的 $\boldsymbol{z}_0$，方程（7）中的极限存在，且李雅普诺夫特征指数几乎处处（相对于 ρ）存在。

为常数，且仅取决于 ρ [32]。此外，有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|\mathbf{M}(\boldsymbol{z}_0,t)\boldsymbol{\zeta}_0\|=\lambda^{(i)}\ \text{ if }\ \boldsymbol{\zeta}_0\in E^{(i)}_{\boldsymbol{z}_0}\setminus E^{(i+1)}_{\boldsymbol{z}_0},\ (8)$$

对于几乎所有 ρ，其中 $\lambda^{(1)}>\lambda^{(2)}>\ldots$ 表示按重数不重复的李雅普诺夫特征指数，而 $E^{(i)}_{\boldsymbol{z}_0}$ 是 $\mathbb{R}^P$ 的子空间，对应于 $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{z}_0)$ 中小于或等于 $\exp\lambda^{(i)}$ 的特征值，其中$\mathcal{T}_{\boldsymbol{z}_0}\mathcal{P}=E^{(1)}_{\boldsymbol{z}_0}\supset E^{(2)}_{\boldsymbol{z}_0}\supset\cdots$。式（8）中 $\mathbb{R}^P$-范数 $\|\cdot\|$ 的具体选择无关紧要 [32, 34]。引入李雅普诺夫特征指数后，可以根据每个正指数定义一个特征时间尺度，即 λ_i^{-1}。对于最大李雅普诺夫指数 λ_1，相应的时间尺度通常称为李雅普诺夫时间。

对于具有 p 个自由度的哈密顿系统（即 $P=2p$），基本矩阵是辛的，李雅普诺夫特征指数的集合关于零对称，也就是说，

$$\Delta\lambda_i:=\lambda_i+\lambda_{2p-i+1}=0\ \text{ for all }\ 1\leq i\leq p.\qquad(9)$$

如果哈密顿量与时间无关，则有一对指数为零。一般而言，存在运动积分 $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}(\boldsymbol{z})$意味着有一对零指数，其中一个对应于切空间中垂直于常数 $\mathfrak{C}$ [（例如 33]）曲面的方向。

ISS 是一个明显的非平衡动力系统实例。在任何有意义的时间尺度 [5, 28] 上，其相空间密度都会持续扩散。因此，式（7）中的无限时间极限在物理上并不相关。内行星 [5, 6, 35, 36] 发生碰撞演化的概率非零，这意味着一般而言，这种极限甚至并不存在。根据当前对太阳系的认知得出的轨道解，大多数事实上在渐近意义上是不稳定的 [4, 7]。具有物理意义的量是有限时间李雅普诺夫特征指数（FT-LCEs），$\lambda_i(\boldsymbol{z}_0,\ t)$，它们由随时间变化的对称正定矩阵 $\mathbf{M}(\boldsymbol{z}_0,\ t)^{\rm T}\mathbf{M}(\boldsymbol{z}_0,\ t)$ 的特征值 $\mathfrak{m}_1\geq\mathfrak{m}_2\geq\cdots\geq\mathfrak{m}_P$ 定义，如下所示

$$\lambda_i(\boldsymbol{z}_0,t)=\frac{1}{2t}\log\mathfrak{m}_i(\boldsymbol{z}_0,t).\qquad(10)$$

相空间密度随时间变化，这意味着动力学并未实现任何遍历测度，而且有限时间李雅普诺夫特征指数以一种非平凡的方式取决于初始条件 $\boldsymbol{z}_0$ [37]。

受迫长期 ISS 的有限时间最大李雅普诺夫指数已针对一组稳定的哈密顿量 $\mathcal{H}$ 轨道解在 50 亿年内进行了数值计算。

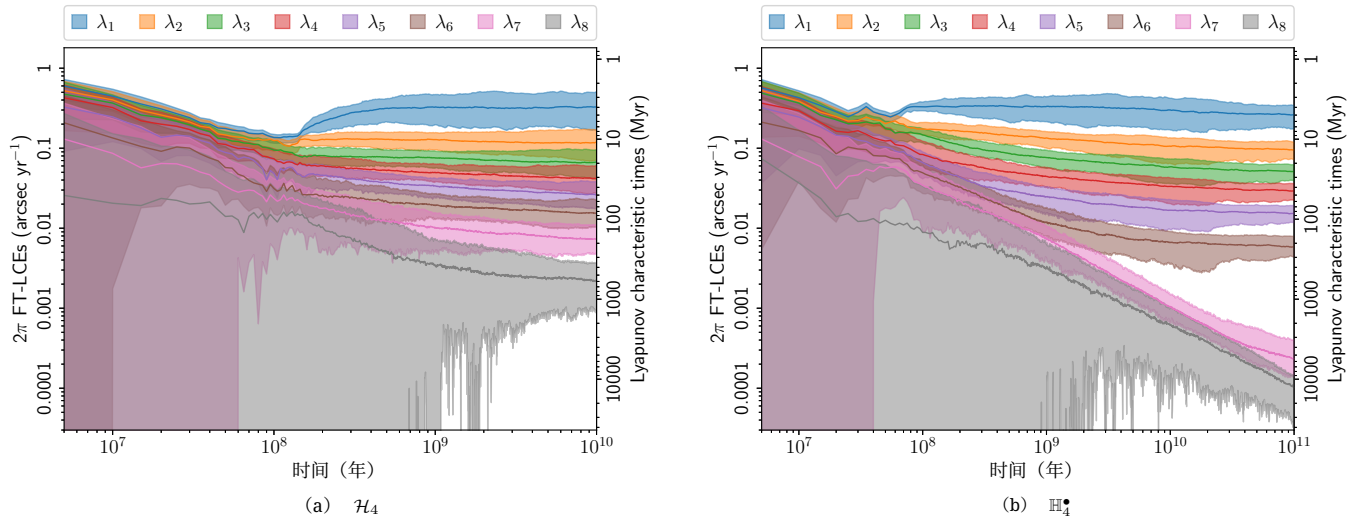


图 1. 受迫长期 ISS 的正有限时间李雅普诺夫特征指数 λ_i，分别由哈密顿量 $\mathcal{H}_4$ （a）和方程（24）] （b）得到，以及相应的特征时间尺度 λ_i^{-1} 。色带表示从一个包含 150 个初始条件极为接近的稳定轨道解的系综中估算的边缘概率密度函数的第 [5 至第 95] 百分位数范围。曲线表示分布中位数。 $\mathbb{H}_4^\bullet$ 模型将在第 IV D 节中介绍和讨论。

与其名义值非常接近的初始条件[38]。其长期分布相当宽广，并且不会随时间推移而收缩 [4, 图 3]。在 50 亿年时，李雅普诺夫时间的概率密度函数（PDF）峰值出现在约 400 万年处，在低于 200 万年的范围内迅速衰减，而其第 99 百分位数达到 1000 万年 [4, 图 4]。分布具有显著的宽度，这与前文提到的 ISS 非平衡动力学有关，因为每个轨道解的有限时间最大李雅普诺夫指数都会随时间持续变化。指数对初始条件的依赖性与动力学对相空间的非遍历探索有关。值得指出的是，根据 1000 多个解估算得到的有限时间最大李雅普诺夫指数分布，其下尾并未延伸至零，这意味着在标称初始条件附近，不变 KAM 环面十分罕见（如果确实存在的话）。这一事实排除了动力学处于 Nekhoroshev 状态的可能性 [12, 39], ，这与多维共振重叠是混沌起源的相关迹象一致 [19, 40]。在这种情况下，不应将 ISS 较长的动力学半衰期解释为由阿诺德扩散导致的指数级缓慢扩散。

太阳系行星的有限时间最大李雅普诺夫指数计算已有三十多年的报道[1, 3]。然而，获取完整的指数谱仍然是一项具有挑战性的任务。对太阳和八大行星进行跨度为 50 亿年的 N体轨道解积分，需要大约一个月的实际运行时间 [例如 41]。采用标准方法计算具有 p 自由度的系统的完整李雅普诺夫谱，还需要同时对一组 $2p$ 切向量进行时间演化 [42]。此外，对于非遍历动力学，最好还应针对一个轨道集合计算这些指数 [4]。这些考虑表明，计算太阳系行星的李雅普诺夫谱是多么复杂。相比之下，对受迫内太阳系进行一次跨度为 50 亿年的积分，在高斯动力学（$\mathcal{H}$）下只需几个小时，而在四阶（$\mathcal{H}_4$）下只需几分钟。因此，这一动力学模型为计算全部有限时间李雅普诺夫特征指数提供了独特机会；这些指数主要与内侧轨道的长期演化有关。

我们采用基于 Gram-Schmidt正交化的 Benettin 等人[43], 标准方法，计算截断受迫ISS的李雅普诺夫谱。对截断哈密顿量 $\mathcal{H}_{2n}$ 进行 TRIP 操作，使我们能够系统地推导运动方程及相应的变分方程；我们使用 12 阶 Adams PECE方法，以 250 年为时间步长对其进行积分。在 Benettin 等人的 [43]算法中，将相邻两次重新正交归一化步骤之间 16 个切向量的时间演化并行化，显著缩短了计算时间。图 1a 展示了四阶截断哈密顿量在未来100亿年内的正有限时间李雅普诺夫特征指数，并以角频率表示。我们针对 150 个稳定解计算了有限时间李雅普诺夫特征指数；这些解的初始条件非常接近高斯动力学的名义值，且初始切向量 [19, 采用随机组]（见附录 C）。图中给出了根据解系综估算的每个指数边缘概率密度函数的 [5至第 95]百分位数范围。对于较长时间，每个解的指数都不再受初始切向量、重整化时间以及所选相空间向量范数的影响（见附录 A 和图 8a）。在这一渐近区域中，Benettin等人的 [43] 算法得到的正是式（10）中定义的有限时间李雅普诺夫特征指数，而其分布宽度仅反映了.....

系统的平衡动力学。我们还通过验证式（9）中所述的谱的对称性（见附录 A 和图 8b），评估数值计算的收敛性。

图 1a 中的谱具有鲜明特征。一组中间指数位于最大李雅普诺夫指数之后，范围从 0.1 到 0.01″年$^{-1}$，而最小的指数则低于 0.01″年$^{-1}$。图 1a 揭示了指数及其对应时间尺度的层级结构，其跨度达两个数量级，中位数低至$\lambda_8^{-1} \approx 500$ 百万年。正指数的数量证实不存在运动积分，这与外行星的强迫作用所预示的情况一致。我们还计算了截断至六阶的哈密顿量的谱。如附录 A（图 9）所示，指数的渐近分布与四阶截断时非常相似。这一结果表明，在这两种情况下，相空间密度的长期扩散都非常接近。两种截断动力学的不稳定速率有所不同，主要与不稳定性边界的几何形状有关；对于 $\mathcal{H}_6$，该边界比对于 $\mathcal{H}_4$ [7]更接近系统的初始位置。

图 1a 中李雅普诺夫谱的重要性源于这样一个事实：运动积分的存在意味着存在一对趋于零的指数。这是一个关键点：根据连续性论证，存在远小于主导指数的正指数，强烈表明存在某些动力学量，它们在初始时彼此非常接近的轨迹上发生混沌退相干所需的时间尺度，远远长于李雅普诺夫时间。从长期来看，这些量的扩散速度应远慢于任何拉普拉斯–拉格朗日作用量变量。因此，图 1a 表明，内行星的长期轨道具有一种慢–快动力学特征，而且这种特征比拉普拉斯–拉格朗日可积近似所产生的、众所周知的时间尺度分离现象更加显著。这些慢变量的存在至关重要，它们是相空间变量的 先验 复杂函数。在有限时间稳定性的研究中，这些变量非常重要，因为它们能够有效限制相空间密度向不稳定状态的长期扩散。下一节将讨论这些慢变量如何从构成哈密顿量的傅里叶谐波的对称性中产生。

IV. 运动准积分

行星轨道出现混沌行为，可用哈密顿量（式（6））中每个傅里叶谐波所产生的类摆动力学来解释 [例如 44]。可以写作$\mathbb{H}_{2n}(\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{\theta},\ t) = \widetilde{\mathbb{H}}^{\mathbf{0}}_{,\ 2n}{}^{\mathbf{0}}(\boldsymbol{I}) + \sum_{i=1}^{\mathcal{M}_{2n}} \mathcal{F}_i(\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{\theta},\ t)$，其中

$$\mathcal{F}_i(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\theta},t) = \widetilde{\mathbb{H}}^{\boldsymbol{k}^i,\boldsymbol{\ell}^i}_{2n}(\boldsymbol{I})\,\mathrm{E}^{j\left(\boldsymbol{k}^i\cdot\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\ell}^i\cdot\boldsymbol{\phi}(t)\right)} + \text{c.c.}, \qquad (11)$$

其中（$\boldsymbol{k}^i,\ \boldsymbol{\ell}^i$）$\neq(\mathbf{0},\ \mathbf{0})$，$\mathcal{M}_{2n}$是 $\mathbb{H}_{2n}$ 中波矢非零的谐波数量，而 c。c。 表示

表 II. 排序前列 $\mathcal{R}_1$。沿高斯动力学的 5 吉年标称解，按共振半宽度$\Delta\omega$ （角秒/年$^{-1}$）的时间中位数递减排列的前 30 个共振谐波。改编自参考文献 [19] 的表 2。

i	傅里叶谐波 $\mathcal{F}_i$	$\mathcal{O}_i$	τ_i^{res}	$\Delta\omega_i$
1	$g_3 - g_4 - s_3 + s_4$	4	12%	$0.332^{0.526}_{0.093}$
2	$g_1 - g_2 + s_1 - s_2$	4	19%	$0.302^{0.611}_{0.154}$
3	$g_2 - g_5 - 2s_1 + 2s_2$	6	23%	$0.105^{0.223}_{0.041}$
4	$2g_3 - 2g_4 - s_3 + s_4$	6	70%	$0.076^{0.159}_{0.023}$
5	$g_1 - g_5 - s_1 + s_2$	4	10%	$0.074^{0.178}_{0.056}$
6	$g_2 - g_4 + s_2 - s_4$	4	6%	$0.066^{0.098}_{0.025}$
7	$g_1 - 2g_2 + g_4 + s_1 - 2s_2 + s_4$	8	5%	$0.061^{0.074}_{0.051}$
8	$g_1 - g_3 + s_2 - s_3$	4	17%	$0.056^{0.090}_{0.028}$
9	$g_1 + g_3 - 2g_4 + s_2 - s_3$	6	5%	$0.053^{0.061}_{0.037}$
10	$3g_3 - 3g_4 - s_3 + s_4$	8	9%	$0.052^{0.140}_{0.007}$
11	$g_2 - g_3 - s_1 + 2s_2 - s_3$	6	5%	$0.038^{0.047}_{0.028}$
12	$g_1 - 2g_3 + g_4 + s_2 - s_4$	6	36%	$0.038^{0.083}_{0.016}$
13	$2g_1 - g_3 - g_5 + s_2 - s_4$	6	5%	$0.037^{0.043}_{0.028}$
14	$g_4 - g_5 - s_2 + 2s_3 - s_4$	6	2%	$0.033^{0.036}_{0.031}$
15	$g_1 - 2g_3 + g_4 + s_1 + s_3 - 2s_4$	8	25%	$0.033^{0.045}_{0.014}$
16	$g_1 - g_4 + s_1 - s_4$	4	23%	$0.032^{0.054}_{0.017}$
17	$g_1 - 2g_2 + g_5 + 3s_1 - 3s_2$	10	6%	$0.032^{0.039}_{0.023}$
18	$g_1 - g_4 + s_2 - s_3$	4	18%	$0.031^{0.073}_{0.016}$
19	$3g_1 - g_2 - g_4 - g_5 + s_1 - s_3$	8	2%	$0.031^{0.042}_{0.023}$
20	$2g_1 - g_2 - g_3 + s_1 - s_3$	6	29%	$0.028^{0.051}_{0.016}$
21	$2g_1 - g_2 - g_4 + s_1 - s_3$	6	3%	$0.026^{0.028}_{0.021}$
22	$3g_3 - 3g_4 - 2s_3 + 2s_4$	10	8%	$0.025^{0.055}_{0.012}$
23	$2g_1 - g_2 - 2g_3 + g_4 + s_1 - s_4$	8	3%	$0.023^{0.036}_{0.012}$
24	$2g_3 - g_4 - g_5 - s_1 + s_4$	6	16%	$0.023^{0.048}_{0.010}$
25	$g_1 - 3g_3 + 2g_4 + s_2 - s_4$	8	7%	$0.021^{0.030}_{0.008}$
26	$g_1 - g_2 - g_3 + g_4 + s_1 - s_2$	6	6%	$0.021^{0.032}_{0.004}$
27	$g_1 + g_3 - 2g_4 + s_1 - s_4$	6	3%	$0.021^{0.022}_{0.017}$
28	$g_1 + g_2 - 2g_5 - 3s_1 + 3s_2$	10	4%	$0.020^{0.028}_{0.006}$
29	$3g_1 - g_2 - g_4 - g_5 + s_2 - s_3$	8	4%	$0.020^{0.027}_{0.008}$
30	$2g_1 - g_4 - g_5 + s_2 - s_4$	6	7%	$0.020^{0.029}_{0.007}$

[a] $\mathcal{O}$ 表示谐波的阶数。[b] τ^{res} 表示谐波处于共振状态的时间比例。仅显示满足 $\tau^{\mathrm{res}} > 1\%$ 的谐波。[c] 分别将时间分布的第 5 和第 95 百分位数作为 $\Delta\omega$ 的下标和上标。

复共轭。混沌源于共振谐波之间的相互作用，即其频率组合 $\mathcal{F}_i$ 在运动过程中的某个时刻满足 $\boldsymbol{k}^i\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\ell}^i\cdot\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)$ 为零的那些谐波。利用计算机代数系统 TRIP，系统地检索了在高斯动力学的 5 吉年标称解过程中进入共振的 $\mathbb{H}_{10}$ 的谐波，以及相应的共振半宽度 $\Delta\omega$ [19]的时间统计数据。随后，按照半宽度的时间中位数从大到小对这些共振进行了排序。以下将所得的共振排序记为 $\mathcal{R}_1$。表 II 列出了在轨道解的 5 吉年时间跨度内活跃时间超过 1% 的 30 个最强共振。每个谐波的波矢由相应的频率标签组合（$g_i,\ s_i$）$_{i=1}^{8}$标识，即 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{i}}+\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{o}}$，其中 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{i}} = (g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4)$。表 II 还显示了

各谐波的阶数，定义为偶数整数$\mathcal{O} = \|(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{\ell})\|_1$。图 1a 所示的有限时间最大李雅普诺夫指数的渐近系综分布支撑集，与最强共振半宽度的时间分布支撑集稳健地重叠。换言之，

$$2\pi\lambda_1 \approx \Delta\omega^{\mathcal{R}_1}, \tag{12}$$

其中，$\Delta\omega^{\mathcal{R}_1}$ 表示排序为 $\mathcal{R}_1$ 的最高阶共振的半宽度。方程（12）通过将李雅普诺夫谱的顶端与共振谱的前列联系起来，揭示了 ISS 中混沌的动力学来源。尽管动力学具有多维特性，计算机代数仍使我们能够以无偏的方式建立这种联系。我们强调，这种分析基于以下设想：沿着一条历时 5 十亿年的普通轨道解，统计得到的共振谐波时间统计，应能代表在某个数十亿年量级的较长时间内，其系综统计（由一组初始条件非常接近的稳定解定义）。这一假设源于一个观察：在 1 十亿年之后，最大李雅普诺夫指数的系综分布呈现出良好的平稳性 [4, 19], ，而且这一特性延伸至图 1a 中的整个谱。

我们指出，严格来说，排序 $\mathcal{R}_1$ 是根据李变换后的哈密顿量的傅里叶谐波确定的 $\mathbb{H}'_{2n}$ [19, 附录 G]。事实上，我们定义了新的正则变量，将 $\mathbb{H}_{2n}$ 变换为四阶毕克霍夫标准形。这样做的目的是让 $\mathbb{H}_{2n}$ 中四阶项之间的相互作用，在 $\mathbb{H}'_{2n}$中高阶谐波的振幅上表现得更加明确；其物理动机是，四阶谐波的非线性相互作用构成了混沌的主要来源 [19]。考虑到李变换近似保持恒等的性质，为简便起见，我们在此忽略两个哈密顿量之间的差异。此外，本文所有新的分析均采用方程（5）的原始变量。

A. 共振谐波的准对称性

除了导致轨道混沌行为的动力学相互作用外，表 II 还提供了作用量变量空间中动力学几何的信息。对傅里叶谐波进行排序，使我们能够考虑由数量有限的 m 个主导项 [7, 19]，构成的部分哈密顿量，即

$$\mathbb{H}_{2n,m} = \widetilde{\mathbb{H}}^{\mathbf{0},\mathbf{0}}_{2n} + \textstyle\sum_{i=1}^{m}\mathcal{F}_i. \tag{13}$$

由少量谐波构成的哈密顿量动力学通常具有若干对称性及相应的运动积分。我们关注的是，在式 (13) 中逐渐增加纳入的项数时，这些对称性如何逐步被破坏。

考虑一组 m 谐波 $\mathbb{H}_{2n}$，以及一个由作用量线性组合而成的动力学量。

变量，也就是说，

$$C_{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{I}, \tag{14}$$

$\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^8$ 为参数向量。根据式 (11)，沿着 $\mathbb{H}_{2n}$ 的流，$C_{\boldsymbol{\gamma}}$ 对时间的导数中由 m 个谐波产生的部分贡献为

$$\dot{C}_{\boldsymbol{\gamma},m} = 2\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}^i\,\mathrm{Im}\{\widetilde{\mathbb{H}}^{\boldsymbol{k}^i,\boldsymbol{\ell}^i}_{2n}(\boldsymbol{I})\,\mathrm{E}^{j\left(\boldsymbol{k}^i\cdot\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\ell}^i\cdot\boldsymbol{\phi}(t)\right)}\}, \tag{15}$$

和 $C_{\boldsymbol{\gamma}} = C_{\boldsymbol{\gamma},\ \mathcal{M}_{2n}}$，其中 $\mathcal{M}_{2n}$ 是 $\mathbb{H}_{2n}$ 中出现的波矢非零的谐波总数。对于满足 $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}^i = 0$ 的任意量 $C_{\boldsymbol{\gamma}}$，由单个谐波 $\mathcal{F}_i$ 生成的单自由度动力学会使其守恒。换言之，如果哈密顿量中只有谐波 $\mathcal{F}_i$，那么这样的量就是一个运动积分。现在考虑 m 个不同的谐波；若 $\boldsymbol{\gamma}\perp$ 属于由波矢 $(\boldsymbol{k}^i)_{i=1}^m$ 张成的 $\mathbb{R}^8$ 线性子空间的正交补，即 $\boldsymbol{\gamma}\perp$ 属于 $\mathrm{span}(\boldsymbol{k}^1,\ \boldsymbol{k}^2,\ \ldots\ldots,\ \boldsymbol{k}^m)$，它们就不会导致量 $C_{\boldsymbol{\gamma}}$ 的变化。我们还考虑量

$$C'_{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbb{H}_{2n} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{I}. \tag{16}$$

由于哈密顿量显含时间依赖，一组 m 谐波对沿着 $\mathbb{H}_{2n}$ 的流的 $C'_{\boldsymbol{\gamma}}$ 时间导数所作的部分贡献为

$$\dot{C}'_{\boldsymbol{\gamma},m} = 2\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}^i+\boldsymbol{\ell}^i\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{o}})\,\mathrm{Im}\{\widetilde{\mathbb{H}}^{\boldsymbol{k}^i,\boldsymbol{\ell}^i}_{2n}(\boldsymbol{I})\,\mathrm{E}^{j\left(\boldsymbol{k}^i\cdot\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\ell}^i\cdot\boldsymbol{\phi}(t)\right)}\}, \tag{17}$$

，且有 $C'_{\boldsymbol{\gamma}} = C'_{\boldsymbol{\gamma},\ \mathcal{M}_{2n\mathrm{o}}}$ 若对于 $i\in\{1,2,\ldots,m\}$，$\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k}^i+\boldsymbol{\ell}^i\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{o}}=0$，则量 $C'_{\boldsymbol{\gamma}}$ 不受 m 谐波影响。今后，将不受给定一组主导谐波影响的动力学量 $C_{\boldsymbol{\gamma}}$ 或 $C'_{\boldsymbol{\gamma}}$（即在式（15）或（17）中部分贡献为零）称为准运动积分。更具体地说，我们以对 $\mathcal{R}_1$ 的排序为基础展开分析，因为共振谐波会导致变化在较长时间尺度上随机累积，从而驱动混沌扩散。

在上述讨论的理论框架下，表 II 中列出的共振具有三种不同的对称性。

a. 第一种对称性。整个太阳系的旋转不变性意味着达朗贝尔规则 $\sum_{i=1}^{8}k_i+\sum_{i=1}^{7}\ell_i=0$，其中 $\boldsymbol{k}=(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_8)$ 和 $\boldsymbol{\ell}=(\ell_1,\ \ell_2,\ \ldots,\ \ell_7)$ [21, 24, 45, 46]。此外，由木星主导的偏心率模态 g_5 是外行星摄动的唯一一个出现在表 II 中的基本傅里叶模态。该量

$$\mathcal{E}_{2n} := C'_{g_5\mathbf{1}_8} = \mathbb{H}_{2n} + g_5\textstyle\sum_{i=1}^{4}(\mathfrak{X}_i+\Psi_i), \tag{18}$$

因此，带有 $\mathbf{1}_8=(1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1)\in\mathbb{R}^8$ 的量不受表 II 中所列共振的影响。等价地，

含时正则变换 $\boldsymbol{\theta} \to \boldsymbol{\theta} + g_5 t\, \mathbf{1}_8$ 保持作用变量不变，使我们能够消除这些谐波中的显含时间依赖。量 $\mathcal{E}_{2n}$ 与变换后的哈密顿量重合，而表 II 中的谐波不对其时间导数作出贡献。

b. 第二对称性。 我们明确写出谐波波矢的偏心率部分和倾角部分，即 $\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{k}^{\rm ecc}, \boldsymbol{k}^{\rm inc})$，其中 $\boldsymbol{k}^{\rm ecc}$, $\boldsymbol{k}^{\rm inc} \in \mathbb{R}^4$。可以直观地验证，表 II 中的谐波满足关系 $\sum_{i=1}^{4} k_i^{\rm inc} = 0$，其中 $\boldsymbol{k}^{\rm inc} = (k_1^{\rm inc}, \dots, k_4^{\rm inc})$。因此，记 $\boldsymbol{\gamma}_1 = (\mathbf{0}_4, \mathbf{1}_4)$，该量

$$\mathcal{C}_{\rm inc} := C_{\boldsymbol{\gamma}_1} = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 \tag{19}$$

被这些共振所守恒。 $\mathcal{C}_{\rm inc}$ 是倾角自由度中包含的角动量亏损（AMD） [47]。因此，这种对称性可以被解释为整个（长期摄动）太阳系角动量亏损守恒的残余。我们指出，由于木星主要通过模态 g_5施加的偏心率激励，偏心率自由度中包含的角动量亏损 $\mathcal{C}_{\rm ecc} = \sum_{i=1}^{4} \mathfrak{X}_i$在主导共振作用下并非不变量。 $\mathcal{C}_{\rm inc}$ 的守恒取决于两个事实：外部强迫的倾角模态 s_6, s_7, s_8 未出现在表 II 中；诸如 $2g_1 - s_1 - s_2$、$2g_1 - 2s_1$和 $2g_1 - 2s_2$ 之类的低阶谐波从不发生共振（即使它们可能产生较大的准周期贡献），因此，两个角动量亏损库 $\mathcal{C}_{\rm ecc}$ 和 $\mathcal{C}_{\rm inc}$ 在表 II 中彼此解耦。我们回顾一下，外部强迫中不存在倾角模态 s_5，这与整个太阳系角动量的固定方向 [2, 21, 46]有关。

c. 第三对称性。 根据对外行星与内行星相互作用的物理直觉，可以在一定程度上预期前两种对称性。然而，甚至很难从表 II 中直观猜出第三种对称性。考虑矩阵 $\mathbf{K}_{30}$，其各行是所列共振的波矢 $(\boldsymbol{k}^i)_{i=1}^{30}$。奇异值分解表明$\mathbf{K}_{30}$ 的秩等于 6。因此，由这些波矢张成的线性子空间$V_{30} = \mathrm{span}(\boldsymbol{k}^1, \boldsymbol{k}^2, \dots, \boldsymbol{k}^{30})$的维数为 6。格拉姆–施密特正交化可用于确定张成其正交补 $V_{30}^{\perp}$的两个线性无关向量。一种选择是 $V_{30}^{\perp} = \mathrm{span}(\boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_2^{\perp})$，其中

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 &:= C_{\boldsymbol{\gamma}_2} = -\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_4 + \Psi_1 + \Psi_2 + 2\Psi_3 + 2\Psi_4, \\ \mathcal{C}_2^{\perp} &:= C_{\boldsymbol{\gamma}_2^{\perp}} = \ \ \mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_4 + \Psi_1 + \Psi_2. \end{aligned} \tag{20}$$

由于第二对称性显然要求 $\boldsymbol{\gamma}_1 \in V_{30}^{\perp}$，因此这三个量 $\mathcal{C}_{\rm inc}, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_2^{\perp}$并非独立的，并且确有 $\mathcal{C}_{\rm inc} = (\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_2^{\perp})/2$。我们指出，$(\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_2^{\perp})/2 = -\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_4 + \Psi_3 + \Psi_4$。因此，这种额外的对称性可以解释为自由度 3、4 与自由度 1、2 之间的某种解耦；在本征模态中，它们分别代表地球-火星和水星-金星子系统。

上述对称性精确地表征了表 II 中列出的共振，自然地代表了当考虑整个共振谱 $\mathcal{R}_1$时，呈现出准对称性。事实上，它们最终会被弱共振打破（见第四节 C）。量$\mathcal{E}_{2n}$、 $\mathcal{C}_{\rm inc}$和 $\mathcal{C}_2$ 是相应的运动准不变量。在 30 个主导共振作用下，这三种对称性仍然存在，这多少有些令人惊讶。例如，关于$\mathcal{C}_{\rm inc}$ 和 $\mathcal{C}_2$，人们或许会合理地预期，由于 ISS 有 8 个自由度，仅十几个谐波的波矢所张成的子空间就足以达到最大维数，从而破坏所有可能的对称性。

我们指出，与 $\mathcal{C}_{\rm inc}$ 和 $\mathcal{C}_2$不同， $\mathcal{E}_{2n}$ 是作用角变量的非线性函数。然而，对于稳定的轨道演化，哈密顿量级数展开的收敛速度足够快，因此线性 LL 近似 $\mathcal{E}_2 = \mathbb{H}_2 + g_5 \mathbf{1}_8 \cdot \boldsymbol{I} = C_{\boldsymbol{\gamma}_3}$（其中 $\boldsymbol{\gamma}_3 = -\boldsymbol{\omega}_{\rm LL} + g_5 \mathbf{1}_8$）能够沿着 $\mathbb{H}_{2n}$ 的流，在$n > 1$下较好地再现 $\mathcal{E}_{2n}$。在第 V 节中，向量 $\boldsymbol{\gamma}_3$ 与$\boldsymbol{\gamma}_1$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_2$一同用于处理由准不变量张成的线性作用量子空间的几何性质。这些向量的显式表达式见附录B。我们还提到，与 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_2$不同， $\boldsymbol{\gamma}_3$ 的分量不是整数，且具有频率的量纲。

B. 慢变量

运动准不变量 $\mathcal{E}_{2n}$，$\mathcal{C}_{\rm inc}$，$\mathcal{C}_2$ 沿轨道解求值后，显然是慢变量的有力候选。下文中，为了评估某个动力学量的变化相对于作用变量典型变化的缓慢程度，我们考察其沿数值解的时间序列方差。

我们定义无量纲准不变量

$$\widehat{\mathcal{C}}_{\rm inc} = \frac{\mathcal{C}_{\rm inc}}{\|\boldsymbol{\gamma}_1\| \mathsf{C}_0}, \quad \widehat{\mathcal{C}}_2 = \frac{\mathcal{C}_2}{\|\boldsymbol{\gamma}_2\| \mathsf{C}_0}, \quad \widehat{\mathcal{E}}_{2n} = \frac{\mathcal{E}_{2n}}{\|\boldsymbol{\gamma}_3\| \mathsf{C}_0}, \tag{21}$$

其中，C_0 表示内行星当前的总角动量亏损，也就是 $\mathcal{C}_{\rm ecc} + \mathcal{C}_{\rm inc}$ 在时间零点的值。我们强调，引入 $i \in \{1, 2, 3\}$ 的单位向量 $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_i = \boldsymbol{\gamma}_i / \|\boldsymbol{\gamma}_i\|$^后，有 $\mathcal{C}_{\rm inc} = C_{\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_1}/\mathsf{C}_0$ 和 $\mathcal{C}_2 = C_{\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_2}/\mathsf{C}_0$。^在二阶时，也有 $\mathcal{E}_2 = C_{\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_3}/\mathsf{C}_0$。随后，我们考察文献 [7]中介绍的 $\mathcal{H}_4$ 和$\mathcal{H}_6$ 数值积分系综；这些积分的初始条件极为接近，并覆盖未来 100 十亿年。图 2 顶排展示了两个系综的名义轨道解上，无量纲准不变量以及^无量纲作用量向量 $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}/\mathsf{C}_0$ 的两个分量在 50 亿年内的时间演化。我们从每条时间序列中减去其在所绘时间跨度内的平均值。时间序列采用 Kolmogorov-Zurbenko（KZ）滤波器进行低通滤波，移动平均迭代三次 [4, 48]。截止频率设为 1 百万年$^{-1}$，以突出长期扩散；这种扩散可能会被短周期准周期振荡掩盖。这与我们对准积分的定义一致，即仅考虑共振谐波的贡献

...

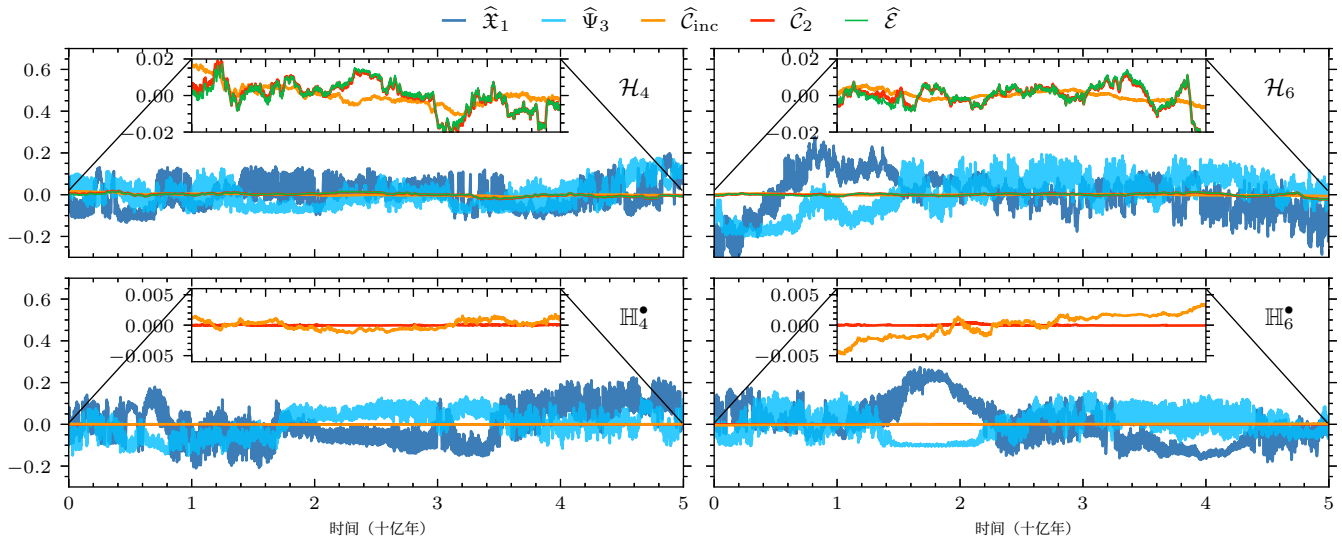


图 2. 不同模型的名义轨道解上，无量纲准不变量（$\widehat{\mathcal{C}}_{\rm inc}$，$\widehat{\mathcal{C}}_2$，$\widehat{\mathcal{E}}$）以及两个无量纲作用变量代表项（$\widehat{\mathfrak{x}}_1$，$\widehat{\Psi}_3$）在 50 亿年内的时间演化。 *Top row*: $\mathcal{H}_4$ 和 $\mathcal{H}_6$（$\widehat{\mathcal{E}}$ 分别表示 $\widehat{\mathcal{E}}_4$ 和 $\widehat{\mathcal{E}}_6$）。 *Bottom row*: 方程（24）中的 $\mathbb{H}_4^\bullet$和 $\mathbb{H}_6^\bullet$（$\widehat{\mathcal{E}}_{2n}^\bullet$严格守恒，因此未显示）。时间序列经过截止频率为 1 百万年$^{-1}$的低通滤波，并减去其 50 亿年平均值。插图放大显示了准不变量的变化。 $\mathbb{H}_{2n}^\bullet$模型的介绍和讨论见第IV D节。

。图 2 清楚地表明，与作用变量的任意函数相比，准不变量是缓慢扩散变量。附录 C 中的统计分析证实了图 2 所示准不变量沿名义轨道解的行为。图 10 展示了文献 [7] 中全部系综的 1080 个数值积分的稳定轨道解上，与图 2 相同各量的分布随时间的演化。图 11 详细展示了准不变量离散度随时间的增长。

我们注意到，沿稳定轨道解，$\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{E}_{2n}$ 呈现出非常相似的时间演化，这一点从图 2上排可以看出。对此，一个有趣的观察可以作出解释：如附录B所示，单位向量 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2$和 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_3$ 的分量彼此仅相差几个百分点。不过，我们强调，这两个向量实际上是线性无关的： $\mathcal{C}_2$ 不依赖于作用量 $\mathfrak{x}_1$ 和 $\mathfrak{x}_2$，而 $\mathcal{E}_{2n}$ 则依赖于它们。当水星的偏心率达到较高值时，这两个准积分会彼此远离，也就是说，此时由水星主导的作用量 $\mathfrak{x}_1$会出现大幅变化。

C. 弱共振与李雅普诺夫谱

表 II 的一个基本结果是，在第四节 IVA 中引入的对称性仍然受到共振的保持，而这些共振的半宽度比最强项的半宽度小一个数量级。自然可以从排序 $\mathcal{R}_1$ 中提取出打破三种对称性的弱共振。新的排序共振-共振 $\mathcal{R}_2$ 以这种方式定义。表 III 报告了分别改变$\mathcal{E}_{2n}$，$\mathcal{C}_{\rm inc}$，$\mathcal{C}_2$的 10 个最强对称性破缺共振。与表 II 一样，这里仅展示在高斯动力学的标称解的 50 亿年时间跨度中，共振持续时间超过 1% 的谐波。最主要的对称性破缺共振的半宽度约为 0.01″年$^{-1}$。对于每个准不变量，主要贡献来自包含不同于 g_5 的外行星摄动傅里叶模态的谐波：由土星主导的模态 g_6，s_6 以及主要与天王星相关的模态 g_7，s_7。对于 $\mathcal{C}_{\rm inc}$，还存在一个贡献，其起始于约 0.006″年$^{-1}$，包含 $\mathcal{F}_8 = 4g_1 - g_2 - g_3 - s_1 - 2s_2 + s_4$，并来自高阶内部共振，即仅涉及内行星自由度的共振。我们注意到，表 III 中共振半宽随谐波序号的下降，对于 $\mathcal{C}_{\rm inc}$ 比对于 $\mathcal{E}_{2n}$，$\mathcal{C}_2$ 更为陡峭，并且伴随着高阶共振更频繁的出现。这或许可以显著解释为什么在图 2 的顶行中，$\mathcal{C}_{\rm inc}$ 的长期变化略小一些。最后，我们指出模态 g_7，s_7所起的重要对称性破缺作用，它们代表了主要由天王星施加的摄动。与人们可能的设想不同，在研究 ISS 的长期扩散时，不能完全忽略这些模态。这使人联想到模态 s_7 和s_8 在金星自旋动力学 [49], 中的作用，而这基本上是引力相互作用长程性质的一种体现。

正如我们在第 III 节所述，如果存在精确的运动积分，一对李雅普诺夫指数就会为零。

表 III。排序 $\mathcal{R}_2$ 的前列。沿着高斯动力学的 5 吉年标称解，$\mathbb{H}_{10}$ 的前 10 个对称性破缺共振分别改变 $\mathcal{E}_{2n}$、$\mathcal{C}_{\mathrm{inc}}$ 和 $\mathcal{C}_2$（详细信息见表 II）。

i	傅里叶谐波 $\mathcal{F}_i$	$\mathcal{O}_i$	τ_i^{res}	$\Delta\omega_i$
	$\mathcal{E}_{2n}$			
1	$g_1+g_2-2g_5+s_2-s_7$	6	1%	$0.018^{0.020}_{0.016}$
2	$g_1-2g_2+g_6-s_2+s_6$	6	4%	$0.017^{0.024}_{0.008}$
3	$g_3-g_6+s_2-s_4$	4	10%	$0.017^{0.022}_{0.009}$
4	$g_5-g_7+s_3-s_4$	4	5%	$0.017^{0.024}_{0.010}$
5	$g_4-g_6+s_2-s_4$	4	4%	$0.016^{0.021}_{0.007}$
6	$g_2-2g_4+g_6$	4	12%	$0.016^{0.027}_{0.009}$
7	$g_1-g_3-g_5+g_6-s_1+s_4$	6	6%	$0.015^{0.024}_{0.011}$
8	$2g_3-2g_4+g_5-g_7$	6	25%	$0.014^{0.022}_{0.006}$
9	$g_2+g_3-3g_4+g_6$	6	3%	$0.014^{0.017}_{0.010}$
10	$g_2-2g_3+g_6+s_3-s_4$	6	3%	$0.011^{0.018}_{0.003}$
	$\mathcal{C}_{\mathrm{inc}}$			
1	$g_1+g_2-2g_5+s_2-s_7$	6	1%	$0.018^{0.020}_{0.016}$
2	$g_1-2g_2+g_6-s_2+s_6$	6	4%	$0.017^{0.024}_{0.008}$
3	$g_2-g_6+s_1-s_6$	4	8%	$0.011^{0.017}_{0.003}$
4	$g_4-g_6-2s_3+3s_4-s_6$	8	5%	$0.010^{0.012}_{0.002}$
5	$2g_1-2g_5+s_1-s_7$	6	1%	$0.007^{0.008}_{0.005}$
6	$4g_1-3g_2-g_5-s_2+s_7$	10	7%	$0.006^{0.015}_{0.003}$
7	$g_3-g_6-2s_3+3s_4-s_6$	8	2%	$0.006^{0.011}_{0.003}$
8	$4g_1-g_2-g_3-s_1-2s_2+s_4$	10	2%	$0.006^{0.009}_{0.001}$
9	$2g_1-g_2-g_5+3s_1-2s_2-s_7$	10	3%	$0.006^{0.008}_{0.002}$
10	$3g_1-3g_2+s_1-2s_2+s_7$	10	19%	$0.006^{0.009}_{0.002}$
	$\mathcal{C}_2$			
1	$g_1+g_2-2g_5+s_2-s_7$	6	1%	$0.018^{0.020}_{0.016}$
2	$g_1-2g_2+g_6-s_2+s_6$	6	4%	$0.017^{0.024}_{0.008}$
3	$g_3-g_6+s_2-s_4$	4	10%	$0.017^{0.022}_{0.009}$
4	$g_4-g_6+s_2-s_4$	4	4%	$0.016^{0.021}_{0.007}$
5	$g_2-2g_4+g_6$	4	12%	$0.016^{0.027}_{0.009}$
6	$g_1-g_3-g_5+g_6-s_1+s_4$	6	6%	$0.015^{0.024}_{0.011}$
7	$g_2+g_3-3g_4+g_6$	6	3%	$0.014^{0.017}_{0.010}$
8	$g_2-2g_3+g_6+s_3-s_4$	6	3%	$0.011^{0.018}_{0.003}$
9	$g_1-g_3-g_4+g_6+s_1-s_2$	6	4%	$0.011^{0.013}_{0.008}$
10	$g_2-g_6+s_1-s_6$	4	8%	$0.011^{0.017}_{0.003}$

如果对称性仅被轻微破缺，我们可以预期会出现一个较小的正李雅普诺夫指数，其值与驱动相应准不变量随时间变化的最强共振的半宽度有关。这一论证自然扩展了式（12）中给出的有限时间最大李雅普诺夫指数与共振谱顶端之间的对应关系。将表 III 与图 1a 中的李雅普诺夫谱进行比较可以发现，排序为 $\mathcal{R}_2$ 的对称性破缺共振的半宽度时间统计，与三个最小有限时间李雅普诺夫特征指数的系综分布相重合，即 λ_6，λ_7，λ_8。确实可以写成

$$2\pi\lambda_6 \approx \Delta\omega^{\mathcal{R}_2}, \tag{22}$$

其中，$\Delta\omega^{\mathcal{R}_2}$ 表示排序 $\mathcal{R}_2$ 中最高阶共振的半宽度。表 III 和图 1a 表明，准积分与最小李雅普诺夫指数：

$$\lambda_6, \lambda_7, \lambda_8 \longleftrightarrow \mathcal{E}_{2n}, \mathcal{C}_{\mathrm{inc}}, \mathcal{C}_2. \tag{23}$$

公式（23）并非一一对应，也不应被理解为精确关系，因为例如，λ_6 与较大的指数并未明显分离。其物理含义是，准积分属于 ISS 动力学中变化最缓慢的自由度之列。这一论断是本研究的核心观点之一。第五节中，我们展示了通过对轨道解进行主成分分析所建立的几何框架在统计意义上的有效性。此外，第四节 D 表明，对于构成 $\mathbb{H}_{2n}$ 基础的简化动力学，公式（23）可以表述得更加精确。我们指出，$\mathcal{E}_{2n}$、$\mathcal{C}_{\mathrm{inc}}$、$\mathcal{C}_2$ 构成一组三个彼此独立且近乎处于对合的准不变量，因此将三个不同的李雅普诺夫指数与它们分别关联是有意义的。一方面，在二次阶上很容易验证它们的独立性，因为向量 γ_1、γ_2、γ_3 线性无关。另一方面，由于这两个量仅是作用变量的函数，泊松括号为 $\{\mathcal{C}_{\mathrm{inc}}, \mathcal{C}_2\} = 0$。此外还有 $\{\mathcal{E}_{2n}, \mathcal{C}_{\mathrm{inc}}\} = \{\mathbb{H}_{2n}, \mathcal{C}_{\mathrm{inc}}\} = \dot{\mathcal{C}}_{\mathrm{inc}}$ 和 $\{\mathcal{E}_{2n}, \mathcal{C}_2\} = \mathcal{C}_2$。只有弱共振会对

表 IV。排序 $\mathcal{R}_3$ 的前列。沿着高斯动力学的 5 吉年标称解，$\mathbb{H}_{10}$ 的前 10 个对称性破缺共振仅涉及外部模态中的 g_5，并分别改变 $\mathcal{E}_{2n}$、$\mathcal{C}_{\mathrm{inc}}$ 和 $\mathcal{C}_2$。

i	傅里叶谐波 $\mathcal{F}_i$	$\mathcal{O}_i$	τ_i^{res}	$\Delta\omega_i$
	$\mathcal{E}_{2n}$			
	无共振			
	$\mathcal{C}_{\mathrm{inc}}$ [a]			
1	$4g_1-g_2-g_3-s_1-2s_2+s_4$	10	2.0%	$0.006^{0.009}_{0.001}$
2	$2g_1+g_2-g_4-2s_1-s_2+s_3$	8	2.5%	$0.003^{0.008}_{0.002}$
3	$3g_1-g_2-s_1-3s_2+s_3+s_4$	10	1.5%	$0.003^{0.005}_{0.001}$
4	$2g_1-g_4+g_5-s_1-2s_2+s_4$	8	1.3%	$0.003^{0.006}_{0.001}$
5	$4g_1-g_2-g_4-s_1-2s_2+s_4$	10	1.4%	$0.003^{0.004}_{0.001}$
6	$4g_1-g_2-g_4-3s_2+s_3$	10	1.3%	$0.003^{0.005}_{0.001}$
7	$3g_1-g_4-2s_1-s_2+s_4$	8	1.8%	$0.003^{0.004}_{0.001}$
8	$3g_1-g_3-2s_1-s_2+s_4$	8	1.6%	$0.002^{0.006}_{0.000}$
9	$2g_1-g_3+g_5-s_1-2s_2+s_4$	8	1.0%	$0.002^{0.004}_{0.000}$
10	$g_1+g_2-g_3+g_5-2s_1-s_2+s_3$	8	1.3%	$0.002^{0.003}_{0.001}$
	$\mathcal{C}_2$			
1	$g_1-3g_2+2g_5-s_1+2s_2-s_4$	10	0.01‰	$1\mathrm{e}{-4}^{1\mathrm{e}-4}_{1\mathrm{e}-4}$
2	$2g_1-4g_2+2g_5+s_2-s_4$	10	0.08‰	$8\mathrm{e}{-5}^{1\mathrm{e}-4}_{2\mathrm{e}-5}$
3	$3g_2-3g_5+s_1-2s_2+s_3$	10	0.01‰	$3\mathrm{e}{-5}^{3\mathrm{e}-5}_{3\mathrm{e}-5}$
4	$g_1-4g_2+g_3+2g_5-s_1+s_2$	10	0.13‰	$3\mathrm{e}{-5}^{5\mathrm{e}-5}_{2\mathrm{e}-6}$
5	$g_1+3g_2-4g_5-s_2+s_4$	10	0.56‰	$3\mathrm{e}{-5}^{4\mathrm{e}-5}_{2\mathrm{e}-5}$
6	$g_1-4g_2+3g_5+s_2-s_4$	10	0.01‰	$2\mathrm{e}{-5}^{2\mathrm{e}-5}_{2\mathrm{e}-5}$
7	$3g_2-3g_5+s_1-2s_2+s_4$	10	0.13‰	$1\mathrm{e}{-5}^{3\mathrm{e}-5}_{7\mathrm{e}-6}$
8	$4g_2-g_3-g_4-2g_5+s_1-s_3$	10	0.03‰	$1\mathrm{e}{-5}^{1\mathrm{e}-5}_{9\mathrm{e}-6}$
9	$2g_1-5g_2+g_4+2g_5$	10	0.02‰	$9\mathrm{e}{-6}^{9\mathrm{e}-6}_{9\mathrm{e}-6}$
10	$2g_1-5g_2+g_3+2g_5$	10	0.14‰	$6\mathrm{e}{-6}^{8\mathrm{e}-6}_{3\mathrm{e}-6}$

[a] 仅显示共振时间超过百分之一的谐波，即 $\tau^{\mathrm{res}} > 1\%$。

这些泊松括号产生贡献，因此这三个准不变量近乎处于对合。

D. 哈密顿量的新截断

外部模态g_6, g_7, s_6, s_7 在表 III 中起着根本作用，这引出了一个问题：如果排除所有涉及除 g_5以外的外部模态的傅里叶谐波，哪些对称性破缺共振仍会存在？因此，我们通过从排序 $\mathcal{R}_2$中提取这类共振，定义了一个新的排序 $\mathcal{R}_3$ 。表 IV 报告了每种破缺对称性中最强的 10 个共振。与表 III 相比，差异显而易见。由于 g_5 是唯一保留的外部模态，因此不再有共振能够对 $\mathcal{E}_{2n}$的时间演化作出贡献。对于其余两个准不变量，表 IV 中出现的谐波阶数均为 8 阶或更高，同时主导共振的半宽度也显著减小。对于$\mathcal{C}_{\rm inc}$，最高阶共振的半宽度现在约为 $0.005''$年$^{-1}$。可以看出，这些共振的激活时间 $\tau^{\rm res}$ 不超过百分之几，与表 III 的情况不同。然而，最显著的变化与 $\mathcal{C}_2$有关：表 IV 中只出现 10 阶谐波，最高阶共振的半宽度则降低了两个数量级。需要强调的是，在高斯动力学名义解所跨越的 50 亿年中，这类谐波仅在极短时间内处于共振状态。为了获取影响 $\mathcal{C}_2$的共振的时间统计特征，我们确实选择重复文献 [19] 中的计算，将应用于作用-角变量时间序列的低通滤波器的截止频率从 (5 百万年)$^{-1}$ 提高到 1 百万年$^{-1}$ [19, 附录 F.2 和 G.5]。随后，经过滤波的时间序列以 50 kyr 的时间步长重新采样。表 IV 中展示的许多与 $\mathcal{C}_2$ 有关的谐波仅在几个时间步长内处于共振状态，因此其时间统计结果仅供参考。应在一组不同的轨道解上（其时间跨度最好超过 50 亿年）对半宽度进行更精确的估算。无论如何，这里的关键在于，与表 III 相比，最高阶共振的尺度大幅减小，这是一个稳健的结果。我们指出，12 阶及更高阶的共振在这些尺度上也可能有重要贡献，但它们被文献 [19] 中用于确定共振谐波的 10次截断排除在外，因此没有出现在本文的表格中。

哈密顿量 $\mathbb{H}^{\bullet}_{2n}$。 表 IV 的含义提示我们在哈密顿量 $\mathbb{H}_{2n}$ 中引入额外的截断。这包括舍弃式 (6) 中涉及除 g_5 之外的外部模态的谐波：

$$\mathbb{H}^{\bullet}_{2n}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\theta},t)=\sum_{\boldsymbol{k},\ell_1}\widetilde{\mathbb{H}}^{\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell}^{\bullet}}_{2n}(\boldsymbol{I})\mathrm{E}^{j(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\theta}+\ell_1\phi_1(t))}, \tag{24}$$

其中 $\phi_1(t) = -g_5 t$和 $\boldsymbol{\ell}^{\bullet} = (\ell_1, 0, \ldots\ldots, 0)$，且 $\ell_1 \in \mathbb{Z}$。与不存在对称性破缺共振（与 $\mathcal{E}_{2n}$ 相关）在表 IV 中一致，相应的动力学具有精确的运动积分

$$\mathcal{E}^{\bullet}_{2n}=\mathbb{H}^{\bullet}_{2n}+g_5\textstyle\sum_{i=1}^{4}(\mathfrak{X}_i+\Psi_i), \tag{25}$$

它表示通过正则变量变换得到的变换后的哈密顿量，该变换消除了方程（24）中的显含时间依赖。我们指出，由于额外的截断是施加在方程（6）的作用量—角变量表述上的，除 g_5 之外的外部模态仍会进入受迫拉普拉斯-拉格朗日动力学本征模态 [4] 的定义。由 $\mathbb{H}^{\bullet}_{2n}$ 得到的轨道解，起初与 $\mathbb{H}_{2n}$ 的轨道解非常接近。对最初 20 百万年的频率分析表明，$\mathbb{H}^{\bullet}_{2n}$ 与 $\mathbb{H}_{2n}$ 之间运动的基本频率差异约为 10^{-3} 角秒 年$^{-1}$，比 $\mathcal{H}_4$ 与 $\mathcal{H}_6$ [4, 之间的典型频率差异小一个数量级（表 3]）。因此，尽管 $\mathbb{H}^{\bullet}_{2n}$ 是对 $\mathbb{H}_{2n}$ 的简化，但不应将其视为玩具模型。其动力学尤其仍具有 8 个自由度。

我们按照第 III 节中针对 $\mathcal{H}_{2n}$所述的相同方法，计算了哈密顿量 $\mathbb{H}^{\bullet}_4$ 的李雅普诺夫谱。由于其动力学表现得比 $\mathcal{H}_4$ 稳定得多（见第 VI 节和图 7），我们将计算时间跨度延长至 100 十亿年。正有限时间李雅普诺夫特征指数的边缘系综概率密度函数如图 1b 所示。与 $\mathcal{H}_4$的李雅普诺夫谱相比，可以发现主导指数的分布相当相似，只是它们的间隔更大，并且其中位数略有下降。然而，对于较小的指数，这种下降更加明显，而最小指数的下降则十分剧烈。最小的一个，即 λ_8，单调下降，这与方程（25）中的 $\mathcal{E}^{\bullet}_4$ 是一个精确的运动积分这一事实一致。指数 λ_7下降了一个数量级以上，并且显然开始稳定在几 10^{-4} 角秒 年$^{-1}$附近，而 λ_6 也显著减小，降至约 $0.005''$年$^{-1}$，降幅为三倍。最小指数的下降与从表 III 切换到表 IV 时主导对称性破缺共振的半宽度变化高度一致。确实可以写成

$$\begin{aligned} 2\pi\lambda_6 &\approx \Delta\omega^{\mathcal{R}_3,\mathcal{C}_{\rm inc}},\\ 2\pi\lambda_7 &\approx \Delta\omega^{\mathcal{R}_3,\mathcal{C}_2},\\ \lambda_8 &= 0, \end{aligned} \tag{26}$$

其中 $\Delta\omega^{\mathcal{R}_3,\ Q}$ 表示与准积分Q相关的排序 $\mathcal{R}_3$ 最高阶共振的半宽度。图 1b 的谱中三个最小指数的层级，与表 IV 中根据主导共振大小差异极大而提出的准积分层级一致。换言之，可以表述如下：

$$\begin{aligned} \lambda_6 &\longleftrightarrow \mathcal{C}_{\rm inc},\\ \lambda_7 &\longleftrightarrow \mathcal{C}_2,\\ \lambda_8 &\longleftrightarrow \mathcal{E}^{\bullet}_{2n}. \end{aligned} \tag{27}$$

这些一一对应关系是公式（23）的一个特例，并支持其背后的物理直觉。在第 V 节中，我们将在对 $\mathbb{H}_{2n}^{\bullet}$的轨道解进行主成分分析所建立的几何框架下，证明公式（27）的有效性。

数值积分。我们计算了动力学模型 $\mathbb{H}_4^{\bullet}$ 和$\mathbb{H}_6^{\bullet}$的 1080 组轨道解系综，其初始条件非常接近高斯动力学的标称初始条件，并覆盖未来 100 十亿年。这与我们在参考文献 [7]中针对模型 $\mathcal{H}_{2n}$所做的工作基本一致。图 2 最下排展示了两个模型的标称解在前 50 亿年内经过滤波的无量纲准不变量。公式（27）所述的准不变量层级显而易见。量 $\mathcal{C}_2$的长期变化远慢于 $\mathcal{C}_{\mathrm{inc}}$，而后者的变化又比模型 $\mathcal{H}_{2n}$轨道解中的对应量更慢。需要指出的是，由于 $\mathcal{E}_{2n}^{\bullet}$ 是模型 $\mathbb{H}_{2n}^{\bullet}$的精确运动积分，因此我们没有绘制它。图 2 还清楚地表明，如果解 $\mathbb{H}_{2n}^{\bullet}$ 仅覆盖数十亿年，就很难从中辨识出影响 $\mathcal{C}_2$的短暂共振。

附录 C 中的统计分析证实了准不变量层级。图 10 展示了由 1080 次数值积分构成的系综中，稳定轨道解上滤波后的无量纲准不变量分布的完整时间演化。图 11 详细展示了准不变量离散度随时间的增长。如表 IV 所示，从 $\mathcal{H}_{2n}$ 切换到 $\mathbb{H}_{2n}^{\bullet}$ 时，准不变量扩散率的下降十分明显。

V. 慢变量的统计检测

第四节展示了由哈密顿量共振谐波的准对称性所产生的 ISS 动力学慢快特性，而这一特性由李雅普诺夫谱揭示。运动准不变量可以通过半解析方法引入；沿稳定轨道解对其进行计算时，它们构成慢变量。本节将考察如何通过一种统计技术——主成分分析——从数值积分得到的轨道解中系统地提取慢变量。我们将展示，对于受迫长期 ISS，最慢变量与准不变量非常接近，并可在精确的几何框架中加以确立。

A. 主成分分析

PCA 是一种广泛使用的经典多变量分析技术 [50, 51]。对于给定的数据集，PCA 旨在寻找变量的一种正交线性变换，使新坐标能够以更精简、更具代表性的方式呈现数据。这些新变量称为主成分（PC）。它们彼此不相关，并按方差递减的顺序排列：第一个主成分和最后一个主成分，分别具有原始变量任意线性组合中最大的方差和最小的方差。人们通常关注方差最大的主成分，而在本研究中，我们利用动力学量时间序列的方差，评估其相对于作用变量典型变化的缓慢程度（见第四节 IVB）。因此，我们对作用变量 $\boldsymbol{I}$ 进行主成分分析，并关注最后几个主成分，因为它们为慢变量提供了恰当的统计定义。我们强调，对时间序列进行低通滤波后，统计方差可用作混沌扩散的度量。

实现。 我们的主成分分析过程简述如下 [有关一般细节，请参见例如52, 53]。令 $\boldsymbol{I}(t) = (\boldsymbol{\mathfrak{X}}(t)\ \boldsymbol{\Psi}(t))$ 为沿运动方程的数值解计算得到的作用量变量八维时间序列。与第四节 B 一样，我们对移动平均应用三次迭代的 KZ 低通滤波器，并采用 1 百万年的截止频率$^{-1}$ ，以获得滤波后的时间序列 $\hat{}\boldsymbol{I}(t)$ [4, 48]。这样可以大幅抑制短期准周期振荡，从而更清晰地呈现更长时间尺度上的混沌扩散。最后，我们将时间区间$[t_0, t_0+T]$ 内去均值后的滤波作用量变量定义为 $\tilde{\boldsymbol{I}}(t) = \hat{}\boldsymbol{I}(t) - n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\hat{}\boldsymbol{I}(t_0+i\Delta t)$, 其中均值通过以采样步长 Δt 对时间序列进行离散化来估计，使得 $T=(n-1)\Delta t$。给定区间内的离散时间序列存储在一个 $8\times n$ 矩阵中：

$$\mathbf{D} = [\tilde{\boldsymbol{I}}(t_0),\ \tilde{\boldsymbol{I}}(t_0+\Delta t),\ \ldots,\ \tilde{\boldsymbol{I}}(t_0+(n-1)\Delta t)]. \quad (28)$$

数据矩阵$\mathbf{D}$ 的主成分分析是一个线性变换$\mathbf{P} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}$, 其中$\mathbf{A}$ 是一个 8×8 正交矩阵（即$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$），定义如下。令$\mathbf{A} = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_8]$, 列向量 $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^8$ 选为样本协方差矩阵的归一化特征向量，并按特征值递减顺序排列：$(n-1)^{-1}\mathbf{D}\mathbf{D}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_8)$ 且 $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_8$。主成分定义为变换后的新变量，即主成分$_i = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{I}$, 其中 $i \in \{1, \ldots, 8\}$。从样本协方差矩阵的对角形式可以轻易看出主成分彼此不相关且按序排列：$(n-1)^{-1}\mathbf{P}\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Sigma}$, 由此可知主成分$_i$ 的方差为 σ_i。

在这些作用变量 $\boldsymbol{I}$的所有线性组合中，最后一个主成分，即主成分$_8$, , 在给定轨道解的时间区间 $[t_0, t_0+T]$ 内具有最小方差。倒数第二个主成分，即主成分$_7$, , 具有次小方差，且与主成分$_8$, 不相关，依此类推。因此，由最后 k 个主成分张成的线性子空间，是方差最小的 k维子空间：样本投影到该子空间上的方差，在所有维数相同的子空间中最小。这些性质表明，最后几个主成分为动力系统的数值积分解提供了一种恰当的慢变量统计定义。尤其是，主成分分析的线性结构似乎适用于接近.....的准可积系统。

对于类似 ISS 的二次哈密顿量。在这种情况下，可以合理地预期，慢变量在一阶近似下是作用量变量的线性组合。我们指出，相互正交性使我们能够将每个主成分与一个线性 自由度相关联。

聚合样本。 除了考察特定解之外，也可以从 m 个不同的解中选取相同的时间区间，并将它们堆叠在一起，形成聚合样本：$\mathbf{D}_{\text{agg}} = [\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_m]$，其中 $\mathbf{D}_i$ 是第 i个解对应的式（28）中的数据矩阵。由于本文研究的是非平稳动力学，ISS 在相空间中不断扩散，[7], 因此我们始终对每个解选取相同的时间区间。聚合样本有助于捕捉动力学的整体行为，因为它能够平均掉特定解中出现的暂时性和罕见事件。

B. 主成分和准积分

准积分和最后几个主成分都代表缓慢变量，但它们是通过两种不同的方法确定的。方程 (23) 和 (27) 表明，在第四节中以半解析方式求得的准积分属于 ISS 动力学中最慢的自由度。这自然促使我们比较这三个准积分与从数值积分轨道解中提取的最后三个主成分。在本部分中，我们首先介绍用于建立准积分与主成分之间一致且系统对应关系的过程。随后，我们对二者进行直观和定量的几何比较。

1. *Tweaking the QIs*

最后三个主成分 PC_8, PC_7, PC_6 由属于 $\mathbb{R}^8$ 的向量集合 $S_{\text{PCs}} = \{\boldsymbol{a}_8, \boldsymbol{a}_7, \boldsymbol{a}_6\}$ 表示。按照构造，这些主成分具有线性、层级化且正交的结构。换言之：主成分是作用变量 $\boldsymbol{I}$的线性组合；以 $\preceq$ 表示统计方差的次序，则有 $\text{PC}_8 \preceq \text{PC}_7 \preceq \text{PC}_6$；单位向量 $(\boldsymbol{a}_i)_{i=6}^{8}$ 彼此正交。另一方面，运动准不变量$\mathcal{C}_{\text{inc}}$，$\mathcal{C}_2$，$\mathcal{E}_{2n}$ 并不具备这些性质。因此，我们对它们进行调整，使其呈现相同的结构。

a. 线性。 虽然 $\mathcal{C}_{\text{inc}}$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是作用变量的线性函数，但当 $n > 1$时， $\mathcal{E}_{2n}$ 并非如此。尽管如此，正如我们在第四节 A 中所解释的，对于稳定轨道解，线性 LL 近似 $\mathcal{E}_2 = \boldsymbol{\gamma}_3 \cdot \boldsymbol{I}$ 能够相当准确地重现 $\mathcal{E}_{2n}$。因此，我们考虑三个线性运动准不变量 $\mathcal{C}_{\text{inc}}$，$\mathcal{C}_2$，$\mathcal{E}_2$，它们分别由 $\mathbb{R}^8$ 维向量组$S_{\text{QIs}} = \{\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3\}$表示。这样，便可以比较由集合 S_{QIs}和 S_{PCs} 张成的作用空间中的三维线性子空间。

b. 排序。我们定义一组按统计方差排序的准积分，与主成分的情况相同。根据方程（24）中的模型 $\mathbb{H}_{2n}^{\bullet}$或方程（6）中的模型 $\mathbb{H}_{2n}$，我们采用两种不同的方法（显然是 $n > 1$）。

$\mathbb{H}_{2n}^{\bullet}$**：** 运动准不变量的统计方差呈现出明显的层级关系，这可从表 IV 中主要对称性破缺共振的大小，以及图 2、10 和 11 中的轨道解看出。可得 $\mathcal{E}_{2n}^{\bullet} \prec \mathcal{C}_2 \prec \mathcal{C}_{\text{inc}}$。虽然 $\mathcal{E}_{2n}^{\bullet}$ 是一个精确的非线性运动积分，但我们预期其线性截断 $\mathcal{E}_2^{\bullet} = \mathcal{E}_2$ 的变化幅度大于 $\mathcal{C}_2$ 和$\mathcal{C}_{\text{inc}}$。因此，我们考虑由有序向量集合 $S'_{\text{QIs}} = \{\boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_3\}$ 表示的有序运动准不变量集合 $\{\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_{\text{inc}}, \mathcal{E}_2\}$。

$\mathbb{H}_{2n}$**：** 由于影响表 III 中准积分的主导共振规模相近，因此无法推断出统计方差的明确排序。于是，我们采用一种系统化的方法，仅通过继承主成分的排序来排列准积分。具体而言，我们通过将最后三个主成分投影到由准积分生成的线性子空间上，定义一组有序向量 $S'_{\text{QIs}} : S'_{\text{QIs}} = \{\text{proj}^{S_{\text{QIs}}}(\boldsymbol{a}_8), \text{proj}^{S_{\text{QIs}}}(\boldsymbol{a}_7), \text{proj}^{S_{\text{QIs}}}(\boldsymbol{a}_6)\}$[54]。因此，这组新的准积分体现了主成分的层级结构。需要强调的是，S'_{QI} 与 S_{QI}张成的子空间相同，因为有序准积分只是原准积分的线性组合。

c. 正交性。 我们对有序集合 S'_{QIs} 应用格拉姆–施密特过程，以得到标准正交基 $S''_{\text{QIs}} = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$。显然，集合 S''_{QIs} 张成与 S_{QIs} 相同的子空间。此外，格拉姆–施密特过程保持层级结构，也就是说，分别由 S'_{QIs} 和 S''_{QIs} 的前 $m \leq 3$ 个向量张成的两个 m 维子空间是相同的。

最终，我们得到一组线性、有序且正交的修正 运动准不变量 $\{$准不变量$_1$,准不变量$_2$,准不变量$_3\}$，其中准不变量$_i = \boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{I}$。

2. *Visual comparison*

现在，我们直观比较修正后的准不变量的向量 $\boldsymbol{\alpha}_{1,2,3}$ 与最后三个主成分对应的向量 $\boldsymbol{a}_{8,7,6}$。我们使用模型 $\mathcal{H}_4$ 和 $\mathbb{H}_4$ 的各1080个数值积分轨道解所组成的系综，分别见第 IV B 节和第 IV D 节。每组中的标称解下文均记为火星日 #1。对于模型 $\mathcal{H}_4$，我们还考虑另外两个解：火星日 #2，代表1080个解中一种典型的演化；火星日 #3，则代表较罕见的演化。这两个解的具体选择详见第 V B 3 节。

哈密顿量 $\mathbb{H}_4^{\bullet}$。在这种情况下，可以明确推导出修正的准不变量，它们由具有明确物理意义的

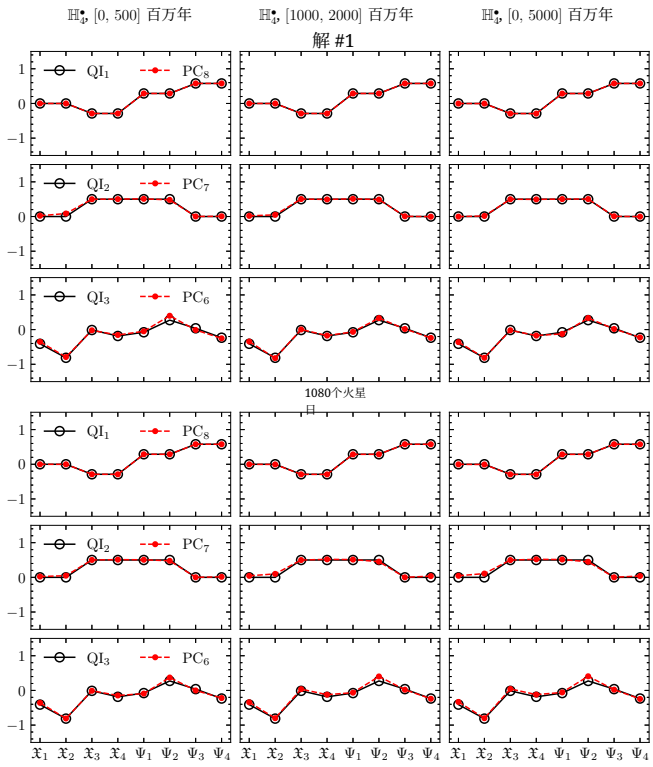


图3. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_{1,2,3}$ 表示三个修正的准不变量（$\mathrm{QI}_{1,2,3}$，黑色圆圈），并与最后三个主成分（$\mathrm{PC}_{8,7,6}$，红点）对应的向量$\boldsymbol{a}_{8,7,6}$ 进行比较；比较区间为火星日 #1 的 [0, 500] 百万年（左列）、[1000, 2000] 百万年（中列）和 [0, 5000] 百万年（右列），以及模型 $\mathbb{H}_4^\bullet$ 的 1080 个解的聚合样本。这里，QI_1 与 $\mathcal{C}_2$ 成正比，QI_2 与 $\mathcal{C}_2^\perp$成正比；见式（20）。

量组成。QI_1 与 $\mathcal{C}_2$ 成正比，QI_2 与 $\mathcal{C}_2^\perp$成正比。此外，QI_3 是 $\mathcal{E}_2$ 中同时垂直于 $\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{C}_2^\perp$的分量。图3比较了 $\mathbb{H}_4^\bullet$ 的解 #1 中三个不同时间区间的修正准不变量与相应主成分（见图 2 左下方的时间演化）。在不同区间内，(QI_1、PC_8)、(QI_2、PC_7)和(QI_3、PC_6)各组之间的一致性显而易见，甚至令人印象深刻。可以看出，主成分越“慢”，它与相应准不变量就越相似。修正准不变量与最后三个主成分的重合，意味着运动准不变量张成了作用空间中最慢的三维线性子空间。因此，在一阶线性近似下，它们代表 $\mathbb{H}_4^\bullet$ 动力学中最慢的三个自由度。准积分$\mathcal{C}_2$ 代表最慢的线性自由度：它与最后一个主成分 PC_8, 重合，而后者在所有作用量变量的线性组合中方差最小。 $\mathcal{C}_{\mathrm{inc}}$ 和 $\mathcal{E}_2$ 分别代表第二慢和第三慢的线性自由度： $\mathcal{C}_{\mathrm{inc}}$中垂直于 $\mathcal{C}_2$的分量，即 $\mathcal{C}_2^\perp$，与倒数第二个主成分 PC_7相符；$\mathcal{E}_2$ 中垂直于由($\mathcal{C}_2$、 $\mathcal{C}_{\mathrm{inc}}$)张成的子空间的分量与第三

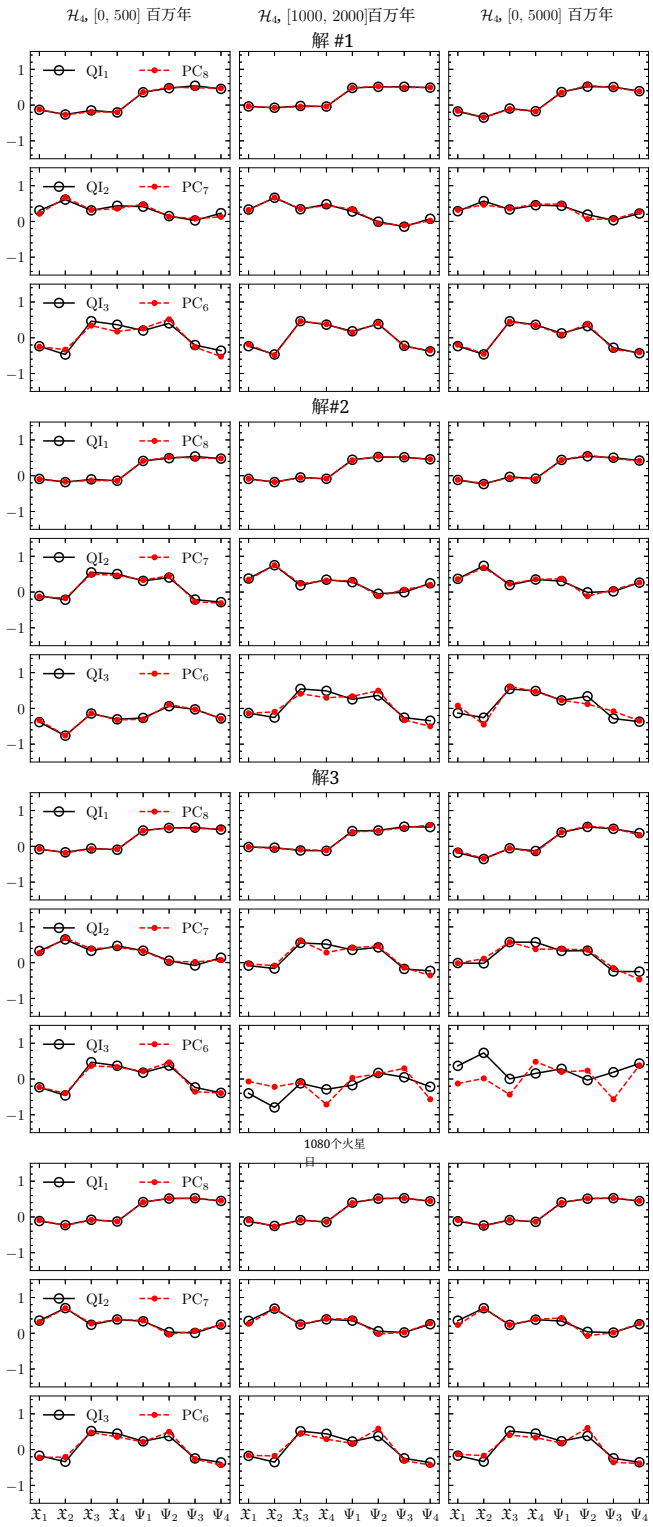


图4. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_{1,2,3}$ 表示三个修正的准不变量（$\mathrm{QI}_{1,2,3}$，黑色圆圈），并与最后三个主成分（$\mathrm{PC}_{8,7,6}$，红点）对应的向量 $\boldsymbol{a}_{8,7,6}$ 进行比较；比较区间为火星日 #1、解 #2 和解3，以及模型 $\mathcal{H}_4$ 的 1080 个解的聚合样本中的 [0, 500]百万年（左列）、[1000, 2000] 百万年（中列）和 [0, 5000] 百万年（右列）。

最后一个主成分 PC_6。简化动力学 $\mathbb{H}_4^{\bullet}$ 中慢变量的强层级结构，得到了主成分基向量几乎冻结这一现象的明确证实。

哈密顿量 $\mathcal{H}_4$。在这种情况下，运动准不变量$\mathcal{C}_{\mathrm{inc}}$，$\mathcal{C}_2$，$\mathcal{E}_2$ 在统计方差方面没有呈现出清晰的层级结构。因此，我们考察由三个准不变量张成的整个子空间，并将其与由最后三个主成分张成的子空间进行比较。由于难以直观比较 $\mathbb{R}^8$中的两个三维子空间，我们转而比较它们的基向量。根据第 V 节 B 1 中介绍的算法，计算修正准积分 $\mathrm{QI}^{1,2,3}$ 的基$\boldsymbol{\alpha}_{1,\ 2,\ 3}$。

图 4 展示了在 $\mathcal{H}_4$ 的三个解的三个不同时间区间内，修正后的准不变量与相应主成分之间的比较（其时间演化见图 5）。前两个解，即解#1 和解#2，在所有区间内准不变量与主成分成对之间都表现出充分的一致性，这表明两个子空间 $V_{\mathrm{QIs}} = \mathrm{span}(S_{\mathrm{QIs}})$ 和 $V_{\mathrm{PCs}} = \mathrm{span}(S_{\mathrm{PCs}})$ 彼此非常接近。可以看出，基向量的方向相当稳定。尤其是最后一个主成分 PC_8，，始终接近 $\mathcal{C}_{\mathrm{inc}}$。因此，可以推断出 $\mathcal{H}_4$ 中最慢的线性自由度接近 $\mathcal{C}_{\mathrm{inc}}$，这与第四节 C 部分的讨论一致。这一结果表明，通过主成分分析可以获得多么有趣的物理认识。不过，基向量也可能发生一些变化，例如解#2 的第一个时间区间。从动力学角度来看，这种情况是可以预期的。与 $\mathbb{H}_4^{\bullet}$ 不同，在图 1a 中李雅普诺夫谱底部最慢自由度之间没有明显的分离：相邻指数的边缘分布确实可能相互接触或重叠。因此，慢变量的层级不像 $\mathbb{H}_4^{\bullet}$ 中那样固定，并且可以沿着给定的轨道解发生变化。

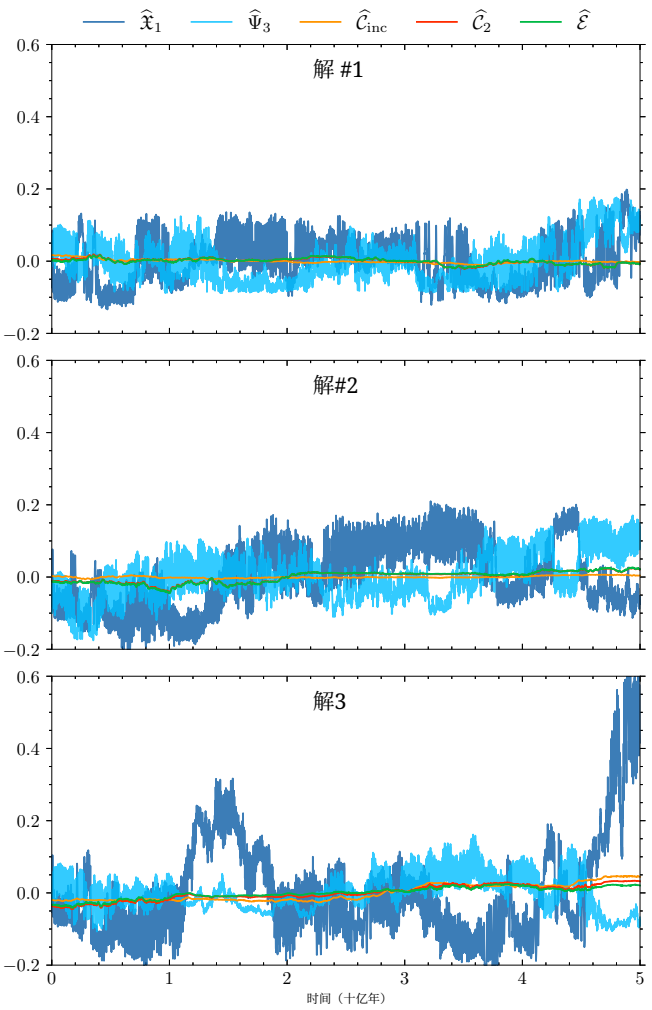


图 5. 三个 $\mathcal{H}_4$ 解的运动准不变量（$\mathcal{C}_{\mathrm{inc}}$，$\mathcal{C}_2$，$\mathcal{E}$）和两个无量纲作用量变量代表值（$\mathfrak{x}_1$，$\Psi_3$）在 50 亿年内的时间演化，分别对应解 #1（上）、解 #2（中）和解3（下）。 $\widehat{\mathcal{E}}$ 表示 $\widehat{\mathcal{E}}_4$。时间序列经过截止频率为 1 百万年的低通滤波，并减去了 50 亿年内的平均值。

解 #1 和解 #2 代表了典型的轨道演化。如果将全部 1080 个解的相同时间区间堆叠在一起，形成一个用于主成分分析（PCA）的聚合样本，则上述特征仍然存在：准不变量与主成分之间的一致性、基向量的稳定性，以及 PC_8和 $\mathcal{C}_{\mathrm{inc}}$ 之间的相似性（见图4）。再次，主成分分析证实，由三个准不变量张成的子空间总体上接近作用空间中最慢的三维线性子空间。因此，在一阶线性近似下，它们代表.....

表示 $\mathcal{H}_4$ 动力学中最慢的三个自由度。我们强调，由 QIs 张成的三维子空间具有缓慢变化的特性，这一约束远比仅仅观察到每个 QI 都是一个慢变量更为严格。举例来说，设 $Q = \widehat{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{I}$ 是一个慢变量，其单位向量为 $\widehat{\boldsymbol{q}}$。如果 $\boldsymbol{\epsilon}$ 是一个任意的小向量，即 $\|\boldsymbol{\epsilon}\| \ll 1$，那么 $Q' = (\widehat{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\epsilon}) \cdot \boldsymbol{I}$ 也可以被视为一个慢变量，而两个量之差的归一化结果 $\widehat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \boldsymbol{I}$ 通常则不然。因此，由 Q 和 Q' 张成的线性子空间，也就是由 $\widehat{\boldsymbol{q}}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}$ 张成的线性子空间，并不是一个缓慢变化的二维子空间。

图4中的解#3代表一种边缘情况（见图5（用于描述其时间演化）。通常，准不变量的方差至少比作用变量的方差小一个数量级，因此可以将它们清晰地区分开来。不过，在两种罕见情况下，准不变量与较快自由度之间的区别可能更难判断。首先，如果准不变量的变化持续朝一个方向累积，其方差可能会在较长的时间区间内增大。解3的 $[0,\ 5]$ 十亿年时间区间便是这种情况。其次，通常变化较快的变量，其方差可能会在某一段时间内骤然减小，例如解3的 $[1,\ 2]$十亿年时间区间内的 Ψ_3。这两种情况下，由于混入了通常变化较快的自由度，由最后三个主成分所定义的慢子空间可能会偏离准不变量子空间。

这反映在图4中解3最后两个时间区间内准不变量$_3$ 与主成分$_6$ 之间的不匹配上。值得注意的是，主成分$_{8,7}$ 仍与准不变量$_{1,2}$，相对接近，这表明由主成分$_{8,7}$ 张成的最慢二维子空间仍位于准不变量子空间内。需要强调的是，在这种情况下，准不变量与主成分之间存在这种不一致，并不意味着准不变量不是慢变量。相反，这种不匹配有明确的动力学原因。本文的共振表取自一个单一且极长的轨道解；这样做是为了让其时间统计能够代表一组初始状态极为接近的解 [19]的系综统计。因此，由这些表推导出的准不变量从整体上刻画了动力学。沿着特定解，共振网络可能暂时发生显著变化；在罕见轨道解中，共振网络也可能呈现非常特殊的状态。在这些情况下，最后几个主成分与当前准不变量之间自然可能出现不匹配。此外，前文提到慢变量缺乏明显的层级结构，因此准不变量也可能混入通常变化较快的自由度。图 1a 中的李雅普诺夫谱显示，例如指数 λ_5 和 λ_6的边缘分布并未彼此分离，而是相互重叠。

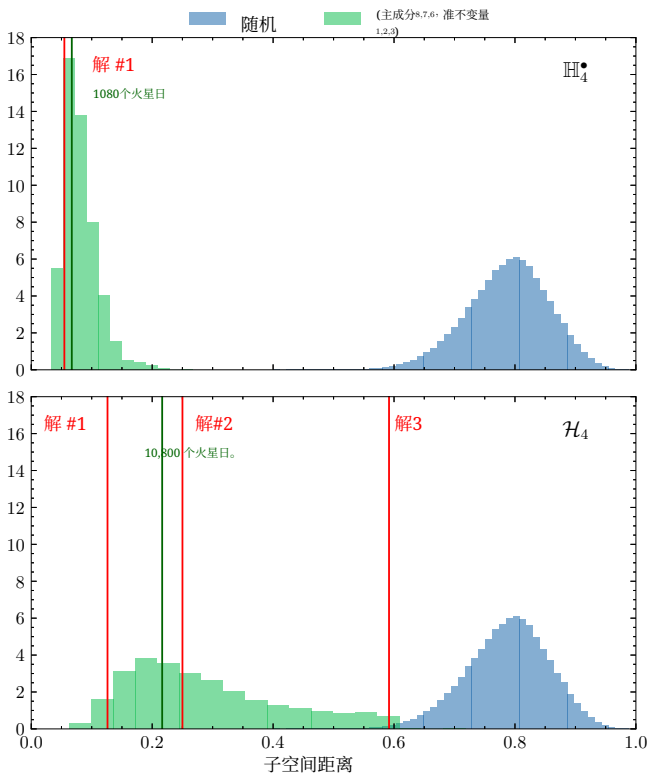


图6. $\mathbb{R}^8$ 中两个随机三维线性子空间之间距离的概率密度函数（蓝色， 10^5 次抽样）与由 [0, 5] 十亿年时间区间内的 $\mathbb{H}_4^\bullet$ 个解（上图）和 $\mathcal{H}_4$ 个解（下图）得到的 V_{PCs} （主成分$_{8,7,6}$）与 V_{QIs} （准不变量$_{1,2,3}$）这两个子空间之间距离的概率密度函数（绿色）的比较。对于每个模型，图中标出了代表性解在相同时间区间内的子空间距离（红色竖线），以及所有解的聚合样本的子空间距离（深绿色竖线）。子空间距离由式（31）给出。

3. *Distance between the subspaces of PCs and QIs*

由向量集合 S_{PCs} 和 S_{QIs} 分别张成的两个三维线性子空间V_{PCs}， $V_{\mathrm{QIs}} \subset \mathbb{R}^8$ 之间的接近程度，可以用几何距离定量衡量。这可以用主（典则）角 [55–57] 来表述。

设 A 和 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两组 $m \le n$ 独立向量。主向量 $(\boldsymbol{p}_k,\ \boldsymbol{q}_k)_{k=1}^{m}$ 递归定义为以下优化问题的解：

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} \\ &\text{subject to} && \left|\begin{array}{l} \boldsymbol{p}\in\operatorname{span}(A),\ \ \boldsymbol{q}\in\operatorname{span}(B), \\ \|\boldsymbol{p}\|=1,\ \ \|\boldsymbol{q}\|=1, \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}_i=0,\ \ \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}_i=0,\ \ i=1,\dots,k-1, \end{array}\right. \end{aligned} \tag{29}$$

对于 $k = 1, \dots, m$。主角 $0 \le \theta_1 \le \cdots \le \theta_m \le \pi/2$ 由两个子空间 span(A) 和 span(B) 之间的主角定义为

$$\cos\theta_k = \boldsymbol{p}_k\cdot\boldsymbol{q}_k, \quad k=1,\dots,m. \tag{30}$$

主角 θ_1 是 span(A) 和 span(B) 中所有单位向量对之间的最小夹角；主角 θ_2 是所有与第一对向量正交的单位向量对之间的最小夹角；依此类推。给定定义这两个子空间的矩阵，可以通过对它们的相关矩阵进行奇异值分解来计算主角。结果为

规范相关矩阵 diag(cos θ_1, ..., cos θ_m) 。这种基于余弦的方法通常条件不佳，因为

小角度。在这种情况下，可以采用基于正弦函数的算法 [58]。在本研究中，我们采用了参考文献 [59] 中详细介绍的组合技术。

引入主角后，可以定义不同的度量来衡量两个子空间之间的距离。在这项工作中，我们选择归一化弦距离 [57]:

$$d(A,B) = \left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\sin^2\theta_k\right)^{1/2}. \tag{31}$$

当 A 和 B 是相同的子空间时，距离为零；当它们正交时，距离等于1。我们使用这一度量来表明，图3和图4所显示的子空间接近性确实具有统计显著性。更准确地说，我们提供了证据反驳以下零假设：源自 $\mathbb{H}_4^\bullet$ 和 $\mathcal{H}_4$ 动力学的 V_{PCs} 与 V_{PCs}之间距离的分布，与从 $\mathbb{R}^8$中随机抽取的三维子空间之间距离的分布相同。两个随机三维子空间之间距离的概率密度函数

$\mathbb{R}^8$ 的子空间在图6中以蓝色显示（此类随机子空间可以通过在单位7维球面 [60]上均匀采样3个向量集来轻松生成）。虽然可能的距离范围为 [0,1], ，但其分布集中在区间的右侧，距离大于0.6的概率约为99.3%。对此，我们需要指出，高维空间中的距离概念与我们在三维世界中的直觉截然不同。如果我们在一个非常高维的空间中随机选取两个向量，那么它们极有可能接近相互正交。

图6上方的面板以绿色显示了模型$\mathbb{H}_4^\bullet$的1080个轨道解在 $[0,\,5]$ 十亿年的时间区间内， $V_{\rm PCs}$ 与 $V_{\rm QIs}$ 之间距离的概率密度函数。下方的面板则考虑了模型 $\mathcal{H}_4$ 的一个更大系综，其中包含10 800个解，覆盖相同的时间区间 [7], ，并绘制了 $V_{\rm PCs}$ 与 $V_{\rm QIs}$之间距离所对应的概率密度函数。在这两种情况下，所有解的聚合样本所产生的距离均以一条深绿色垂直线表示。我们还将图3和图4中所考虑的特定解对应的距离以红色垂直线标出。由于两种模型的概率密度函数均在较小距离处达到峰值，因此有充分证据表明，由主成分和准不变量所张成的子空间之间的距离分布并非随机子空间的分布。从这个意义上说，子空间 $V_{\rm PCs}$ 和 $V_{\rm QIs}$ 之间的接近程度在统计上是一个稳健的结果。对于简化动力学 $\mathbb{H}_4^\bullet$，概率密度函数的峰值位于中位数约为0.08的位置，且方差较小。切换到模型 $\mathcal{H}_4$后，中位数增加至约0.26，概率密度函数的分布也更加分散，并呈现出向较大距离延伸的长尾。两种模型的概率密度函数之间的差异与第 V 节 B 2 小节中的讨论十分吻合：对于$\mathbb{H}_4^\bullet$，最慢变量呈现出近乎冻结的层级结构；对于 $\mathcal{H}_4$ ，方差更大，这是由于通常变化较快的自由度造成的污染，以及相对于高斯动力学标称解的共振网络变化所致，而该标称解被用于推断准不变量。从这个意义上说，图4中的解#3代表了距离分布的一个边缘情况，而火星日#2则是一个典型解，其距离接近概率密度函数的中位数。

VI. 对长期稳定性的影响

慢变量的存在可能对 ISS 的稳定性产生至关重要的影响。运动准不变量可以以绝热方式有效地约束混沌的行星轨道在漫长时间尺度上的扩散，通常会阻止动力学不稳定性在有限时间跨度内发生，例如数十亿年。在此，我们为这种机制提供了有力论据。

图 7 显示了在第四节 D 中介绍的 $\mathbb{H}_4^\bullet$ 和 $\mathbb{H}_6^\bullet$ 的 1080 个轨道解系综中，水星偏心率首次达到 0.7 的时间的累积分布函数（CDF）。我们回顾一下

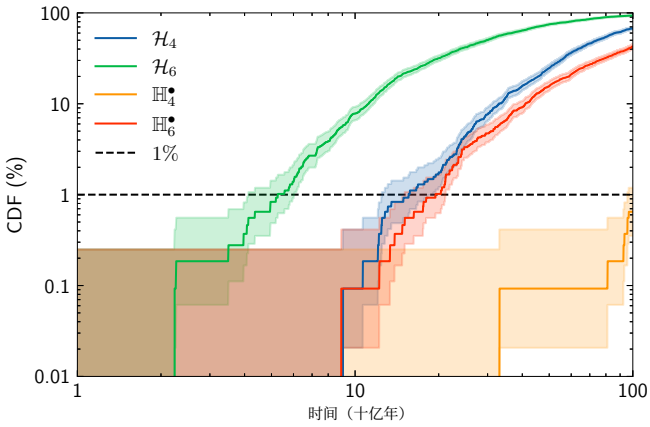


图 7. 在 100 十亿年内，来自不同模型的 1080 个轨道解中，水星偏心率首次达到 0.7 的时间的累积分布函数。阴影区域表示自助法得出的 90% 分段置信区间。

如此高的偏心率是 ISS [6] 发生动力学不稳定性（即行星近距离遭遇、碰撞或被抛射）的先兆。我们还报告了模型 $\mathcal{H}_4$ 和 $\mathcal{H}_6$ 的相同累积分布函数，这些模型是我们最近在参考文献 [7] 中计算的。可以看出，对于 $\mathbb{H}_4^\bullet$ 模型，不稳定概率达到 1% 所对应的时间超过 100 十亿年，而对于 $\mathcal{H}_4$，这一时间约为 15 十亿年。在 6 阶时，这一时间仍从 $\mathcal{H}_6$ 的 50 亿年增加到 $\mathbb{H}_6^\bullet$ 的约 20 十亿年。从天文学的角度来看，由 $\mathbb{H}_4^\bullet$ 和 $\mathbb{H}_6^\bullet$ 得出的动力学可视为稳定。回想一下，$\mathbb{H}_{2n}^\bullet$ 和 $\mathbb{H}_{2n}$ 之间的主要区别在于最小的李雅普诺夫指数（图 1），而且这还伴随着 $\mathbb{H}_{2n}^\bullet$ 的准积分扩散速度显著减慢（图 2、10 和 11）；图 7 表明，ISS 的动力学半衰期与这些缓慢变化的量的扩散速度有着至关重要的联系。我们强调， $\mathbb{H}_{2n}^\bullet$ 模型中向动力学不稳定性缓慢扩散，源于忽略了主要由土星、天王星和海王星施加的外部强迫。

我们还观察到，在一阶近似下，已知 $\mathcal{C}_{\rm inc}$ 和 $\mathcal{E}_2$ 便可对作用量变量 $\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \boldsymbol{\Psi}$ 的变化范围加以限制。鉴于作用量均为正量，由式（19）可知，固定 $\mathcal{C}_{\rm inc}$ 的取值即可为倾角作用量 $\boldsymbol{\Psi}$ 的变化设定上限。因此，在偏心率和倾角的二阶近似下，固定准不变量的取值即可.....

$$\mathcal{E}_2 = \boldsymbol{\gamma}_3 \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{\gamma}_3^{\rm ecc} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{X}} + \boldsymbol{\gamma}_3^{\rm inc} \cdot \boldsymbol{\Psi}, \tag{32}$$

在 $\boldsymbol{\gamma}_3 = (\boldsymbol{\gamma}_3^{\rm ecc},\ \boldsymbol{\gamma}_3^{\rm inc})$ 的条件下，也能限定偏心率作用量 $\boldsymbol{\mathfrak{X}}$ 的变化上限，因为 $\boldsymbol{\gamma}_3^{\rm ecc}$ 的各个分量符号相同，正如 $\boldsymbol{\gamma}_3^{\rm inc}$ 的各个分量一样（见附录 B）。这一点很重要，正如我们在第 I 节所述，混沌的行星轨道变化缺乏任何界限，是使我们难以理解其长期稳定性的原因之一。我们

值得注意的是，通过固定总角动量亏损的值，即 $\mathcal{C}_{\rm ecc}+\mathcal{C}_{\rm inc}$ [47]，即可限定长期行星相空间。随后可以对先验可达的态密度进行统计研究 [61]。然而，将 ISS 的总角动量亏损视为固定值并不完全令人满意，因为我们表明，哈密顿量的某些主导共振会改变 $\mathcal{C}_{\rm ecc}$，这主要是木星通过模态 g_5 施加偏心率激励所致。此外，ISS 的不稳定化确实包括偏心率角动量亏损 $\mathcal{C}_{\rm ecc}$ 从外部系统经由共振 g_1-g_5 [5, 6, 36, 62] 大量转移至内行星。应当指出，相对于作用变量的任意函数，$\mathcal{C}_{\rm ecc}$ 仍可视为一个缓慢变化的量，因为只有涉及外部模态 g_5 的那部分主导共振才会改变它。在太阳系的稳定轨道解中确实观察到了这种缓慢变化 [47]，这也支持了参考文献 [61] 中的统计假设；该假设可以对内行星偏心率和倾角的长期概率密度函数给出相当合理的初步估计。

由此形成的图景以一种符合物理直觉的方式，解释了 ISS 数十亿年来在统计意义上的稳定性。行星轨道的混沌行为源于哈密顿量中若干主要共振谐波的相互作用，这些谐波决定了李雅普诺夫时间。最强的共振具有某些精确对称性，而这些对称性只会被弱共振相互作用打破。这些准对称性自然产生运动准不变量，即扩散速度远慢于 LL 作用变量的量，从而限制轨道的变化。ISS 悠长的动力学半衰期与这种扩散的速度有关；扩散最终会使系统走向不稳定。需要强调的是，除了扩散速度之外，内侧轨道的寿命还取决于系统与由共振 g_1-g_5 定义的不稳定性边界之间的初始距离。这一几何因素包括广义相对论的稳定作用[5, 6], ，它使系统远离不稳定性边界，距离为 $0.43''$年$^{-1}$；还包括行星偏心率和倾角中的六次项所产生的 destabilizing effect [7]。

VII. 讨论

本文提出了一种理论框架，自然地解释了 ISS 在与其年龄相当的时间尺度内所表现出的统计稳定性。考虑内行星轨道的受迫长期模型，对李雅普诺夫谱的计算表明，存在差异极大的动力学时间尺度。我们利用计算机代数系统 TRIP，系统分析哈密顿量中的傅里叶谐波，找出它们在一条跨越 50 亿年的数值积分轨道解上发生共振的情形。我们发现了三种表征最强共振的对称性，而这些对称性会被弱共振相互作用打破。这些准对称性产生了三个运动准不变量，它们代表长期动力学中的慢变量。主导对称性破缺共振的强度表明，这些准不变量与最小的李雅普诺夫指数有关。本文的核心观点是，这些准不变量属于动力学中最慢的自由度。对此，一方面，分析底层哈密顿量$\mathbb{H}^{\bullet}_{2n}$为这一观点提供了支持：该分析主要忽略了土星、天王星和海王星施加的受迫作用，因此准不变量的扩散大幅减弱。另一方面，通过对轨道解进行主成分分析所建立的几何框架，也独立证实了这些准不变量在统计意义上是动力学中最慢的线性变量。我们有充分证据表明，运动准不变量通过绝热地约束轨道的长期混沌扩散，在太阳系寿命期间对 ISS 的统计稳定性发挥着关键作用。

A. 经典准可积系统中的内太阳系

将 ISS 的动力学置于经典准可积系统这一类别中加以考察是很有价值的。尤其值得将其与费米-帕斯塔-乌拉姆-辛古问题进行比较。该问题涉及由非线性弹簧耦合的相同质量组成的一维链的动力学。对于弱非线性，振荡的正规模态在很长时间内仍会显著偏离统计力学所预期的能量均分 [13]。费米及其合作者所报告的能量不均分现象，可以通过费米-帕斯塔-乌拉姆-辛古问题与可积的托达动力学之间的接近性来解释 [63–65]。这意味着，托达问题的作用变量以及相应运动积分沿 FPUT流的热化过程都极为缓慢 [15, 65–69]。在本研究的理论框架下，ISS 极长的动力学半衰期也很可能是某些动力学量，即运动准不变量缓慢扩散的结果。我们尤其发现了一个潜在的哈密顿量 $\mathbb{H}^{\bullet}_{2n}$，对于该哈密顿量，这种扩散大幅减弱，这是由于忽略了主要由土星、天王星和海王星施加的强迫作用。这导致的动力学在天文学意义上可以视为稳定的。我们强调，与 FPUT问题不同，$\mathbb{H}^{\bullet}_{2n}$ 并不像托达哈密顿量那样是可积的。它实际上是混沌的，并且与原始哈密顿量$\mathbb{H}_{2n}$ 共享主导李雅普诺夫指数。我们在本文中找到的准不变量，只是可积 LL动力学的作用-角变量的少数几个函数，并且与动力学中最小的李雅普诺夫指数相关。我们的研究表明，在 FPUT问题中，发生在李雅普诺夫时间之后的极慢热化过程，或许可以通过托达运动积分的组合在极为不同的时间尺度上发生扩散来理解。

混沌准可积系统中的长期扩散通常应具有广泛的时间尺度范围，这是由于共振相互作用逐步并以层级方式破坏了底层可积问题的对称性 [70–72]。尤其是在这类系统中，跨越数个数量级的李雅普诺夫指数层级应当是普遍现象 [，例如 73]。

B. 方法

ISS 的长期动力学由数量适中但并非很少的自由度描述，因此远离了天体力学和统计物理的典型应用领域。前者通常研究自由度极少的动力学模型，而后者则处理物体数量极大的极限情况。混沌也需要对内行星轨道进行统计描述。然而，系统缓慢却持续不断地扩散，导致其缺乏统计平衡，因此 ISS 不属于遍历理论的标准理论框架。我们在本文中采用的方法主要依赖计算机代数，包括对哈密顿量进行系统级数展开、处理截断后的运动方程、提取指定的傅里叶谐波、求取多项式根等。 [4, 19] 这使我们能够通过分析作用量空间的对称性如何在共振相互作用下逐渐破缺，在 16 维动力学中引入运动准不变量。我们提出的有效方法基于单次极长数值积分过程中出现的共振的时间统计，与通过级数展开定义准不变量的形式化方法不同 [例如 74, 75]。对于涵盖复杂高维共振网络的动力学而言，这类形式展开在实际应用中的价值确实令人怀疑。通过求取对称性破缺共振的半宽度，计算机代数还使我们能够将李雅普诺夫谱与共振谱之间的对应关系，扩展到远超将李雅普诺夫时间与最强共振联系起来的标准关系的范围[76]。

对于自由度不算少的动力系统，本研究还考虑了一种基于主成分分析的方法。这种统计技术可以发挥双重作用。我们将主成分分析用作独立的检验，以系统地验证准积分的缓慢变化特性。虽然准积分是以半解析方式引入的，被视为不受主导共振影响的动力学量，但它们确实可以与最后几个主成分联系起来。由此推而广之，最初几个主成分应能探测主要共振的方向。这引出了主成分分析的第二种潜在用途：它有望提供一种提取动力系统主导共振结构的方法。从这个意义上说，主成分分析是一种工具，可用于系统地探测复杂动力学的数值积分结果，并提炼出重要的隐藏信息。我们强调，主成分分析是这是最基础的线性降维技术，属于更广泛的无监督学习算法类别。还有一些更复杂的特征提取方法，它们可能具有更强的鲁棒性 [例如 77, 78] ，并且能够纳入非线性因素 [79]。与主成分分析相比，这些方法通常不太直观，应用起来不够简单，也更难解释。然而，它们可能更为有效，值得在未来的研究工作中进一步探索。

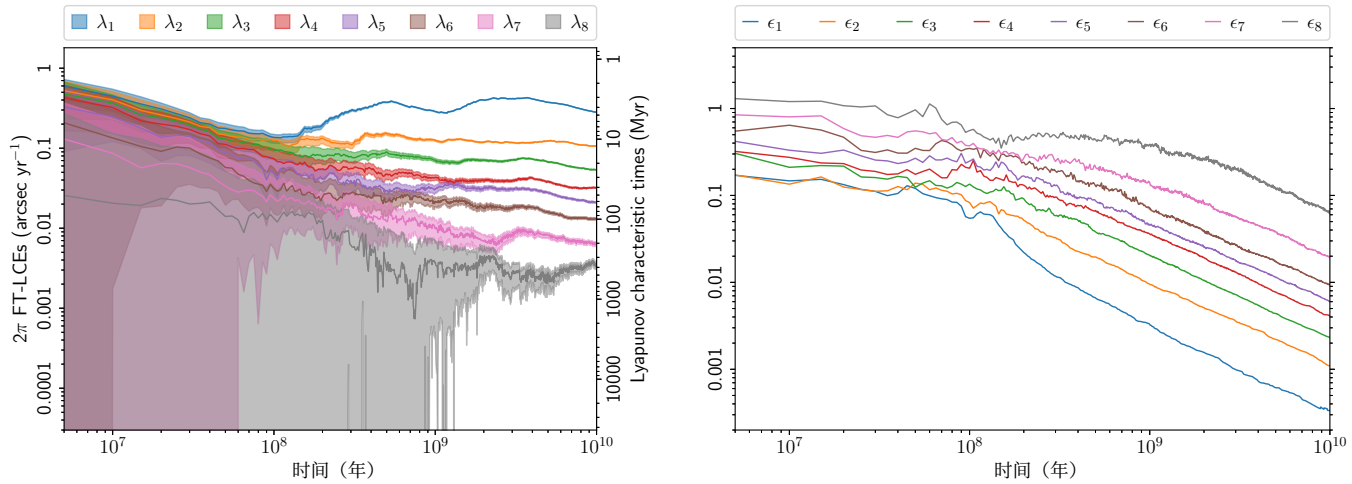
借助长期数值积分和计算机代数系统，原则上，我们在本文中提出的整套策略可应用于其他行星系统，以及具有适量自由度的准可积哈密顿动力学。

致谢

作者感谢 M. Gastineau 在 TRIP 方面提供的帮助。F.M. 获得法国国家研究署资助（AstroMeso ANR-19-CE31-0002-01）。N.H.H. 获得 Capital Fund Management（CFM）研究基金会提供的博士奖学金。本项目获欧洲研究委员会（ERC）在欧盟地平线2020研究与创新计划框架下资助（高级资助项目 AstroGeo-885250）。本研究获准使用 MesoPSL 的高性能计算资源；该资源由法兰西岛大区和未来投资计划中的 Equip@Meso 项目（编号 ANR-10-EQPX-29-01 ）提供资金支持，项目由法国国家研究署负责监督。

附录 A：李雅普诺夫谱

收敛。我们进行了两项测试，以检验 Benettin 等人 [43] 方法实现的收敛性。首先，我们针对 $\mathcal{H}_4$ 的一个初始条件，使用 150 组不同的随机初始切向量，计算有限时间李雅普诺夫特征指数。图 8a 展示了在 100亿年时间跨度内，正有限时间李雅普诺夫特征指数所得边缘分布的第 [5、第 95] 百分位数范围。随着时间增加，这些分布逐渐收窄，最终收敛为随时间变化的单一数值。在这一渐近区域，Benettin等人 [43] 算法不再受初始切向量的影响，而是仅得到式 (10) 中定义的有限时间李雅普诺夫特征指数。因此，图 1a 渐近地展示了有限时间李雅普诺夫特征指数对初始条件 z_0 的依赖关系，并表示了动力学以非遍历方式探索的相空间区域上的统计分布。指数越小，计算收敛越慢；但与图 1a 对比可见，即使在 λ_8的情况下，10 Gyr 时各轨道解的有限时间李雅普诺夫特征指数的数值不确定性，相对于其系综分布的宽度也可以忽略不计。



(a) $\mathcal{H}_4$：单轨道解　　(b) $\mathcal{H}_4$：相对数值误差

图 8. (a) 哈密顿量 $\mathcal{H}_4$ 的正有限时间李雅普诺夫特征指数及其对应的特征时间尺度，分别针对单个初始条件和由 150 组随机初始切向量构成的系综。色带表示边缘概率密度函数的 [5 至 95] 百分位数范围。曲线表示分布中位数。(b) 对于图 1a 所示的 150 个轨道解构成的系综，根据式 (A1) 定义的有限时间李雅普诺夫特征指数 λ_i 的相对数值误差 ϵ_i 的中位数。

为了定量估计计算所得有限时间李雅普诺夫特征指数的数值精度，我们利用了公式（9）中所述的谱的对称性。对于单轨道解，每个指数 λ_i 的相对数值误差可估计为

$$\epsilon_i = \left| \frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} \right|. \tag{A1}$$

我们在图 8b 中绘出了图 1a 中 150 个轨道解组成的系综的 ϵ_i 中位数。相对误差随时间渐近减小，符合预期。即使对于最小的指数 λ_8，在 100亿年时，中位数误差也小于 10%。

哈密顿量 $\mathcal{H}_6$。</style}我们计算了偏心率和倾角截断至六阶的受迫内太阳系的有限时间李雅普诺夫特征指数，以供比较，即 $\mathcal{H}_6$。我们考虑了 150 个稳定轨道解，其初始条件与高斯动力学的名义值非常接近，并采用随机选取的初始切向量组，与四阶截断时的做法相同。图 9 展示了从解的系综中估计得到的每个有限时间李雅普诺夫特征指数边缘概率密度函数的第 [5、第 95] 百分位数范围。除了略大一些之外，这些指数的渐近分布与图 1a 中所示 $\mathcal{H}_4$ 的渐近分布非常相似。

附录B：向量 γ_1、γ_2、γ_3

本文给出了向量 $(\boldsymbol{\gamma}_i)_{i=1}^{3}$的显式表达式。我们首先给出受迫拉普拉斯-拉格朗日动力学中内侧轨道基本进动频率向量 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{LL}}$ 的分量（包括广义相对论的主要修正项） [4]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{LL}} &= (\boldsymbol{g}_{\mathrm{LL}}, \boldsymbol{s}_{\mathrm{LL}}) \approx \\ &(5.87, 7.46, 17.4, 18.1, -5.21, -6.59, -18.8, -17.7),\end{aligned} \tag{B1}$$

单位为角秒/年$^{-1}$ （参见 [80–82]，以便与整个太阳系拉普拉斯–拉格朗日动力学的频率进行比较）。于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_1 &= (\mathbf{0}_4, \mathbf{1}_4) = (0,0,0,0,1,1,1,1),\\ \boldsymbol{\gamma}_2 &= (0,0,-1,-1,1,1,2,2),\\ \boldsymbol{\gamma}_3 &= -\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{LL}} + g_5 \mathbf{1}_8 \approx \\ &(-1.61, -3.20, -13.2, -13.9, 9.47, 10.8, 23.0, 22.0),\end{aligned} \tag{B2}$$

其分量的单位为角秒 年$^{-1}$。我们回顾一下，$g_5 \approx 4.257''$ 年$^{-1}$ 是 ISS 受迫模型中的一个常数。相应的单位向量 $(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_i)_{i=1}^{3}$如下所示

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_1 &= (0,0,0,0,1,1,1,1)/2,\\ \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_2 &= (0,0,-1,-1,1,1,2,2)/2\sqrt{3},\\ \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_3 &\approx (-0.04, -0.08, -0.33, -0.35, 0.24, 0.27, 0.58, 0.55).\end{aligned} \tag{B3}$$

由于 $1/2\sqrt{3} \approx 0.289$，$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_3$ 的各个分量与 $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_2$的相应分量仅相差几个百分点。因此，沿着具有典型有界变化的稳定轨道解，其中由水星主导的作用量变量 $\mathfrak{X}_1$，这两个量 $\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{E}_{2n}$ 的时间演化非常相似。但当水星轨道达到较高偏心率时，情况就不再如此。

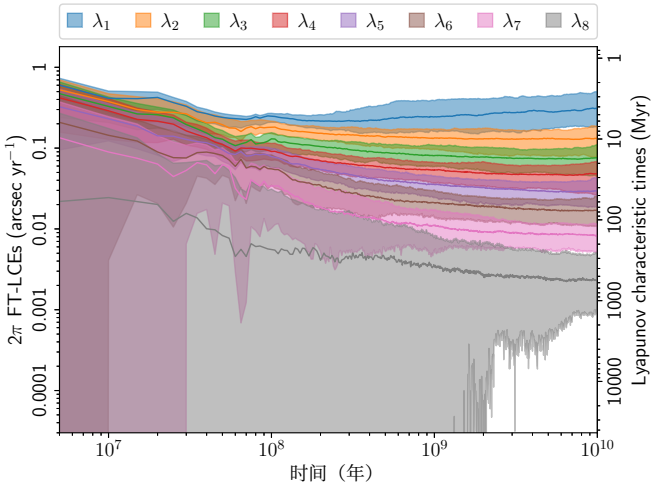


图 9. 哈密顿量 $\mathcal{H}_6$ 的正有限时间李雅普诺夫特征指数 λ_i 及对应的特征时间尺度 λ_i^{-1} 。色带表示由一组包含 150 个初始条件非常接近的稳定轨道解的系综估算得出的边缘概率密度函数的第 [5、第 95] 百分位数范围。线条表示分布中位数。

附录 C：准积分随时间的系综分布

为获取准不变量的长期统计行为，我们考察了文献[7]中介绍的动力学模型 $\mathcal{H}_4$ 和 $\mathcal{H}_6$的 1080 组数值积分系综。这些积分具有非常接近的初始条件，并向未来延伸 100 十亿年。我们还考察了简化哈密顿量 $\mathbb{H}_4^\bullet$ 和 $\mathbb{H}_6^\bullet$ 的类似解系综，这些哈密顿量将在第四节 D 中介绍。图 10 展示了不同模型下，低通滤波后的无量纲准不变量和无量纲作用量 $\mathfrak{X}_1$， Ψ_3 的集合概率密度函数随时间的演化（时间滤波器的截止频率设为 1 百万年$^{-1}$，与第 IV B 节相同）。更准确地说，为突出统计离散度的增长，我们考察每个时刻相对于集合均值的带符号偏差的概率密度函数，因此所有绘出的分布均值为零。每个时刻的概率密度函数估计仅纳入稳定轨道解，即水星偏心率的运行最大值小于 0.7[7]的解。图 10 表明，与 LL 作用变量相比，准不变量确实是缓慢变化的量。图 11 详细展示了准不变量离散度的增长，其中给出了其分布的四分位距（IQR）随时间的演化。在持续约 100 百万年、以邻近轨迹指数分离为特征的暂态阶段之后，四分位距随时间的增长遵循扩散过程的典型幂律。图 10 和图 11 清楚地表明，与 $\mathcal{H}_{2n}$相比，模型 $\mathbb{H}_{2n}^\bullet$ 中的$\mathcal{C}_{\rm inc}$ 和 $\mathcal{C}_2$ 扩散得更慢。需要指出的是， $\mathcal{E}_{2n}^\bullet$ 是模型 $\mathbb{H}_{2n}^\bullet$ 的一个精确运动积分（见第 IV D 节），其概率密度函数的离散度为零。

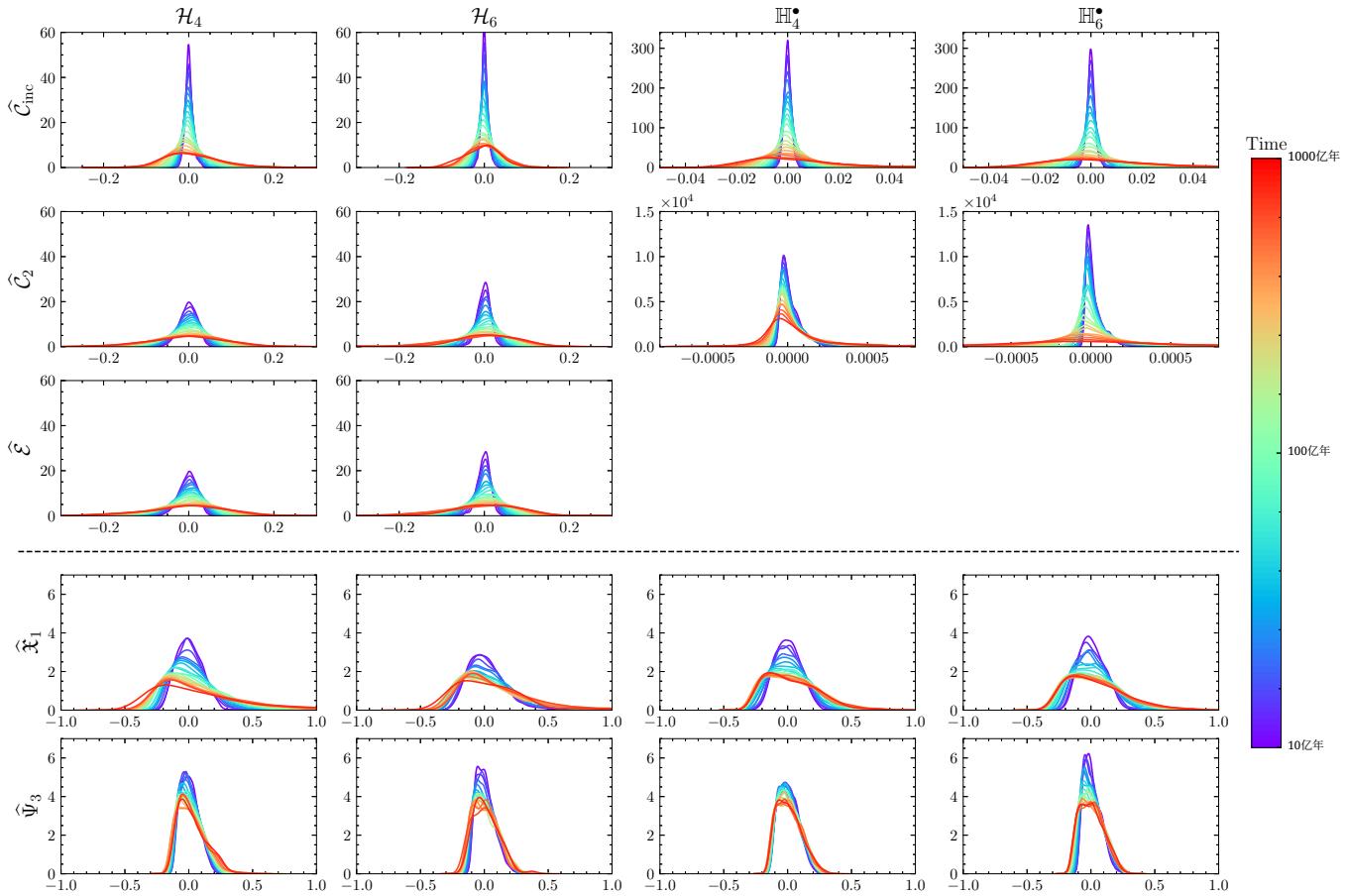


图 10. 在 100 十亿年间，低通滤波后的无量纲准不变量和无量纲作用量相对于其均值的带符号偏差的概率密度函数随时间的演化 $\mathfrak{X}_1$，Ψ_3。基于针对不同模型（$\mathcal{H}_4$、$\mathcal{H}_6$、$\mathbb{H}_4^\bullet$ 和 $\mathbb{H}_6^\bullet$）的 1080 个数值轨道解组成的系综进行估算。*First row*：$\widehat{\mathcal{C}}_{\mathrm{inc}}$。*Second row*：$\widehat{\mathcal{C}}_2$。*Third row*：$\widehat{\mathcal{E}}_4$ ($\mathcal{H}_4$) 和 $\widehat{\mathcal{E}}_6$ ($\mathcal{H}_6$)。*Fourth row*：$\widehat{\mathfrak{X}}_1$。*Fifth row*：$\widehat{\Psi}_3$。曲线按时间以不同颜色标示。在每个时刻，估算仅考虑稳定解，即水星偏心率的运行最大值小于 0.7 的解。量 $\widehat{\mathcal{E}}_{2n}^\bullet$ 是模型 $\mathbb{H}_{2n}^\bullet$ 的精确运动积分，其概率密度函数的离散度为零。

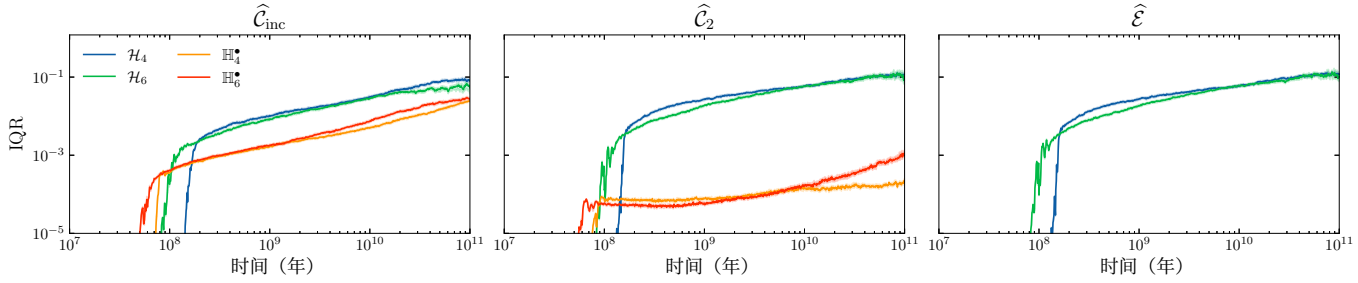


图 11. 图 10 所示准积分的集合概率密度函数四分位距（IQR）的时间演化。*Left*：$\widehat{\mathcal{C}}_{\mathrm{inc}}$。*Middle*：$\widehat{\mathcal{C}}_2$。*Right*：$\widehat{\mathcal{E}}_4$ ($\mathcal{H}_4$) 和 $\widehat{\mathcal{E}}_6$ ($\mathcal{H}_6$)。对于模型 $\mathbb{H}_{2n}^\bullet$，量 $\widehat{\mathcal{E}}_{2n}^\bullet$ 是一个精确的运动积分，其概率密度函数的四分位距为零。

[1]J. Laskar，《太阳系混沌行为的数值实验》，《自然》（伦敦）338，237（1989）。[2] J. Laskar，《太阳系的混沌运动——混沌区域范围的数值估计》，《伊卡洛斯》88，266（1990）。[3] G. J. Sussman 和 J. Wisdom，《太阳系的混沌演化》，《科学》257，56（1992）。[4] F. Mogavero 和 J. Laskar，《太阳系内行星的长期动力学》，《天文学与天体物理学》655，A1（2021），arXiv:2105.14976 [astro-ph.EP]。[5] J. Laskar，《太阳系中的混沌扩散》，《伊卡洛斯》196，1（2008），arXiv:0802.3371。[6] J. Laskar 和 M. Gastineau，《水星、火星和金星与地球发生碰撞的轨迹的存在性》，《自然》（伦敦）459，817（2009）。[7] N. H. Hoang、F. Mogavero 和 J. Laskar，《太阳系内行星的长期不稳定性：数值实验》，《皇家天文学会月报》514，1342（2022），arXiv:2205.04170 [astro-ph.EP]。[8] K. Batygin、A. Morbidelli 和 M. J. Holman，《内太阳系的混沌瓦解》，《天体物理学杂志》799，120（2015），arXiv:1411.5066 [astro-ph.EP]。[9] E. Woillez 和 F. Bouchet，《内太阳系失稳过程中的瞬子》，《物理评论快报》125，021101 2020 1910（），arXiv: .04005 [nlin.CD]。[10] 尽管动力学被截断在四阶，但其产生的混沌仍与完整系统中的混沌相同，这可通过有限时间最大李雅普诺夫指数来衡量 [19]。[11] A. Milani 和 A. M. Nobili，《太阳系中稳定混沌的一个实例》，《自然》（伦敦）357，569（1992）。[12] A. Morbidelli 和 C. Froeschl´e，《李雅普诺夫时间与宏观不稳定时间之间的关系》，《天体力学与动力天文学》63，227（1996）。[13] E. Fermi、P. Pasta、S. Ulam 和 M. Tsingou，*Studies of Nonlinear Problems*，技术报告（洛斯阿拉莫斯国家实验室，1955）。[14] K.-D. N. T. Lam 和 J. Kurchan，《可积系统的随机扰动：窥视弱混沌系统的窗口》，《统计物理学杂志》156，619（2014）。[15] T. Goldfriend 和 J. Kurchan，《准可积系统的平衡化》，《物理评论E辑》99，022146（2019），arXiv:1810.06121 [cond-mat.stat-mech]。[16] 这一共振涉及水星和木星近日点的基本进动频率 [5, 36, 62]。[17] J. Laskar，《太阳系中的大尺度混沌与边缘稳定性》，《天体力学与动力天文学》64，115（1996）。[18] “在系统演化的每个阶段，其稳定时间都应与其年龄相当” [17]。[19] F. Mogavero 和 J. Laskar，《通过计算机代数探究太阳系混沌的起源》，《天文学与天体物理学》662，L3（2022），arXiv:2205.03298 [astro-ph.EP]。[20] J. Laskar、P. Robutel、F. Joutel、M. Gastineau、A. C. M. Correia 和 B. Levrard，《地球日照量的长期数值解》，《天文学与天体物理学》428，261（2004）。[21] A. Morbidelli，*Modern celestial mechanics: aspects of solar system dynamics*，2002（泰勒与弗朗西斯，）。[22] C. F. Gauss，*Determinatio attrationis, quam in punctumquodvis positionis datae exerceret planeta, SI eius massaper tota orbitam, ratione temporis, quo singulae partesdescribuntur, uniformiter errat dispertita*（Heinrich Dieterich，哥廷根，1818）。[23] J. Laskar，《太阳系运动的庞加莱变量解析理论框架》，载于 *Predictability, Sta-bility, and Chaos in N-Body Dynamical Systems*，北约高级研究所（ASI）丛书 B 辑，第 272 卷，A. Roy 编（Plenum Press，纽约，1991），第 93–114 页。[24] J. Laskar 和 P. Robutel，《行星三体问题的稳定性。I. 行星哈密顿量的展开》，《天体力学与动力天文学》62，193（1995）。[25] M. Gastineau 和 J. Laskar，《专用于天体力学和摄动级数的计算机代数系统：Trip》，《ACM 通讯：计算机代数》44，194（2011）。[26] M. Gastineau 和 J. Laskar，《TRIP *1.4.120*》，TRIP 参考手册（IMCCE，巴黎天文台，2021）。[27] E 表示指数算子，j 表示虚数单位。变量上方的横线表示复共轭。[28] N. H. Hoang、F. Mogavero 和 J. Laskar，《太阳系基本频率的混沌扩散》，《天文学与天体物理学》654，A156（2021），arXiv:2106.00584 [astro-ph.EP]。[29] J. Laskar，《太阳系一千万年间的长期演化》，《天文学与天体物理学》198，341（1988）。[30] J. Laskar，《频率映射分析与拟周期分解》，载于 *Hamiltonian Systems and Fourier Analysis: New Prospects For Gravitational Dynamics*，D. Benest、C. Froeschlé 和 E. Lega 编（Cambridge Scientific Publishers Ltd，剑桥，2005），第 93–114 页，arXiv:math/0305364。[31] V. I. Oseledec，《乘法遍历定理：动力系统的李雅普诺夫特征数》，《莫斯科数学学会汇刊》19，197（1968）。[32] J. P. Eckmann 和 D. Ruelle，《混沌与奇异吸引子的遍历理论》，《现代物理学评论》57，617（1985）。[33] P. Gaspard，《*Chaos*》，*Scattering and Statistical Mechanics*，剑桥非线性科学丛书（剑桥大学出版社，1998）。[34] C. Skokos，《李雅普诺夫特征指数及其计算》，载于 *Dynamics of Small Solar System Bodies and Exoplanets*，J. J. Souchay 和 R. Dvorak 编（Springer Berlin Heidelberg，柏林、海德堡，2010），第 63–135 页。[35] J. Laskar，《太阳系中的大尺度混沌》，《天文学与天体物理学》287，L9（1994）。[36] K. Batygin 和 G. Laughlin，《论太阳系的动力学稳定性》，《天体物理学杂志》683，1207（2008），arXiv:0804.1946 [astro-ph]。[37] 有限时间李雅普诺夫特征指数不依赖于任何切向量 ζ_0。[38] 本研究中提及的所有初始条件均从一个多维高斯分布中采样，该分布以高斯动力学的标称初始条件为中心 [4, 附录 D]，相对宽度为10^{-9}（详见 [19, 附录 C] 和 [7, 第 3] 节）。

[39] A. Morbidelli 和 A. Giorgilli，关于 KAM 定理与 Nekhoroshev 定理之间联系的研究，《物理学 D：非线性现象》86，514（1995）。[40] J. Laskar，《关于太阳系稳定性的几点思考》（讲座），载于 *Chaos*， *Resonance*, *and CollectiveDynamical Phenomena in the Solar System*，IAU 第 152 卷研讨会论文集，由 S. Ferraz-Mello 编（克吕维尔学术出版社，荷兰多德雷赫特，1992 年），第 1 页。[41] G. Brown 和 H. Rein，《太阳系原版长期积分数据存储库》，《美国天文学会研究札记》4，221（2020），arXiv:2012.05177 [astro-ph.EP]。[42] G. Benettin、L. Galgani、A. Giorgilli 和 J. M. Strelcyn，所有李雅普诺夫特征数均可有效计算，《巴黎科学院物理科学报告》B 系列 286，431（1978）。[43] G. Benettin、L. Galgani、A. Giorgilli 和 J. M. Strelcyn，光滑动力系统和哈密顿系统的李雅普诺夫特征指数——一种计算所有特征指数的方法。I——理论。II——数值应用，《力学》15，9（1980）。[44] B. V. Chirikov，多维振子系统的一种普适不稳定性，《物理学报告》52，263（1979）。[45] J. Laskar，《变量与轨道根数系统》，载于，由 D. Benest 和 C. Froeschle 编（Frontières 出版社，吉夫-叙尔-伊维特，1990 年），第 63–87 页。[46] G. Bou´e 和 J. Laskar，两个相互作用天体的自旋轴演化，《伊卡洛斯》201，750（2009）。[47] J. Laskar，大尺度混沌与内行星的间距，《天文学与天体物理学》317，L75（1997）。[48] I. G. Zurbenko 和 D. Smith，时空分析中的 Kolmogorov–Zurbenko 滤波器，《WIREs 计算统计学》10，e1419（2018）。[49] A. C. M. Correia 和 J. Laskar，金星自旋的长期演化。II. 数值模拟，《伊卡洛斯》163，24（2003）。[50] K. Pearson，LIII. 关于空间点系的最佳拟合直线和平面，《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学期刊》2，559（1901）。[51] H. Hotelling，将一组复杂统计变量分解为主成分，《教育心理学杂志》24，417（1933）。[52] I. T. Jolliffe，*Principal component analysis*（施普林格，2002）。[53] I. T. Jolliffe 和 J. Cadima，主成分分析：综述与最新进展，《英国皇家学会哲学汇刊 A 辑：数学、物理与工程科学》374，20150202（2016）。[54] 向量 $\boldsymbol{q}$ 在由一组向量 S 张成的子空间上的投影，可以用向量形式表示为 $\mathrm{B}(\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{B})^{-1}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}$，其中矩阵 B 的列空间就是由集合 S张成的子空间。[55] C. Jordan，《关于 n 维几何的论文》，《法国数学会通报》3，103（1875）。[56] C. F. Van Loan 和 G. Golub，*Matrix computations*（约翰·霍普金斯大学出版社，伦敦，1996 年）。[57] K. Ye 和 L.-H. Lim，不同维数子空间之间的舒伯特簇与距离，《SIAM 矩阵分析与应用杂志》37，1176（2016）。[58] A. Bj¨orck 和 G. H. Golub，计算线性子空间间角度的数值方法，《数学》...

计算 27, 579 (1973). [59] A. V. Knyazev 和 M. E. Argentati，在基于 a 的标量积下子空间之间的主角：算法与扰动估计，SIAM《科学计算杂志》23, 2008 (2002). [60] M. E. Muller，关于一种在 n 维球面上均匀生成点的方法的注记，《美国计算机协会通讯》2, 19 20 1959– ( ). [61] F. Mogavero，探讨太阳系行星轨道的统计力学，《天文学与天体物理学》606, A79 (2017), arXiv:1703.09225 [astro-ph.EP]. [62] G. Bou´e、J. Laskar 和 F. Farago，水星混沌偏心率的简单模型，《天文学与天体物理学》548, A43 (2012), arXiv:1210.5221 [astro-ph.EP]. [63] M. H´enon，Toda格点的积分，《物理评论B》9, 1921 1974( ). [64] H. Flaschka，Toda格点。II. 积分的存在性，《物理评论B》9, 1924 (1974). [65] S. V. Manakov，离散动力系统的完全可积性与随机化，《实验与理论物理学杂志》67, 543 (1974). [66] J. Ferguson、W. E.、H. Flaschka 和 D. W. McLaughlin，Toda链的非线性正规模，《计算物理学杂志》45, 157 (1982). [67] G. Benettin、H. Christodoulidi 和 A. Ponno，费米-帕斯塔-乌拉姆问题及其背后的可积动力学，《统计物理学杂志》152, 195 (2013). [68] H. Christodoulidi 和 C. Efthymiopoulos，以第一个Toda积分为探针的费米-帕斯塔-乌拉姆系统动力学阶段，《工程数学》1, 359 2019( ). [69] T. Grava、A. Maspero、G. Mazzuca 和 A. Ponno，热力学极限下 FPUT 与 Toda 链的绝热不变量，《数学物理通讯》380, 811 (2020), arXiv:2001.08070 [math-ph]. [70] J. Ford，非线性系统的能量均分，《数学物理学杂志》2, 387 (1961). [71] M. Onorato、L. Vozella、D. Proment 和 Y. V. Lvov，α-费米-帕斯塔-乌拉姆系统中的热化路径，《美国国家科学院院刊》112, 4208 (2015), arXiv:1402.1603 [nlin.CD]. [72] L. Pistone、S. Chibbaro、M. D. Bustamante、Y. V. Lvov 和 M. Onorato，弱非线性一维链中的普适热化路径，《工程数学》1, 672–698 (2019). [73] M. Malishava 和 S. Flach，接近可积性的经典多体动力学的李雅普诺夫谱标度，《物理评论快报》**128**, 134102 2022 2109 01361 ( ), [ ] arXiv: . nlin.CD . [74] G. Contopoulos，星系中的第三个运动积分，《天体物理学杂志》49, 273 (1960). [75] M. Kruskal，哈密顿系统及其他所有解均近似周期系统的渐近理论，《数学物理学杂志》3, 806 (1962).[76]在这方面，需要指出的是，准不变量与李雅普诺夫指数之间的关系已在简单系统中得到强调 [43, 83]. [77] E. J. Cand`es、X. Li、Y. Ma 和 J. Wright，稳健的主成分分析？，《美国计算机协会学报》（JACM）58, 1 (2011). [78] P. P. Markopoulos、G. N. Karystinos 和 D. A. Pados，l {1}-子空间信号处理的最优算法，

IEEE 信号处理汇刊 **62**, 5046 (2014). [79] J. A. Lee 和 M. Verleysen, *Nonlinear dimensionality reduction* 1 2007 *Nonlinear dimensionality reduction* 1 2007，第卷（施普林格，[80]）。[80] V. A. Brumberg 和 J. Chapront，一阶一般行星理论的构建，《天体力学》**8**, 335 (1973). [81] P. Bretagnon，太阳系中的长周期项，《天文学与天体物理学》**30**, 141 (1974).

[82] J. Laskar，行星一般理论中的精确方法，《天文学与天体物理学》**144**，133（1985）。[83] G. Contopoulos、L. Galgani 和 A. Giorgilli，关于哈密顿系统中隔离积分的数量，《物理评论 A》**18**，1183（1978）。