arXiv:2305.01691v1 [math.NA] 2 May 2023

避免非线性特征值问题中的离散化问题

马修·J·科尔布鲁克* 和亚历克斯·汤森†

摘要。 求解无限维特征值问题时，第一步通常是对其进行离散化。我们通过实例说明，对非线性特征值问题进行离散化时必须格外谨慎。我们展示了离散化可能会：（1）引入伪特征值；（2）完全遗漏谱；（3）导致严重的病态性。尽管已有许多用于求解矩阵非线性特征值问题的特征值求解器，我们提出了一种适用于一般全纯无限维非线性特征值问题的求解器，可避免离散化问题，并证明了它的稳定性和收敛性。此外，我们还提供了一种算法，可在明确的误差控制下计算问题的伪谱，从而验证计算得到的谱。该算法和数值示例可在 `infNEP` 中公开获取； `infNEP` 是一个以 MATLAB 编写的软件包。

关键词。非线性　　特征值问题、谱污染、无限维　　线性代数

AMS 主题分类。35P30, 65N25,65N30, 47A10

1. 引言。 许多非线性特征值问题（NEP）源自对无限维问题的离散化。事实上，NLEVP 集合中的 52 个 NEP 有 25 个是通过对连续问题（例如微分特征值问题）进行离散化而得到的 [3]。分析通常着重于如何求解离散化后得到的有限维 NEP。然而，正如本文所示，对无限维 NEP 进行离散化可能会引发严重问题。它可能改变、扰乱或破坏所需的特征值，导致计算所得的特征值无法准确反映原连续问题的特征值（本文在表 1.1中列出了我们在第 4 节 通过六个示例展示的问题）。

给定一个非空开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 以及一个矩阵值函数 $F : \Omega \to \mathbb{C}^{n\times n}$，矩阵非线性特征值问题是求特征值 $\lambda \in \Omega$和非零特征向量 $v \in \mathbb{C}^n$，使得 $F(\lambda)v = 0$。非线性特征值问题在机械振动 [42], 流固相互作用 [65], 光子晶体 [53], 时滞系统 [35],共振 [7], 以及许多其他领域 [41, 45, 58]中有广泛应用。许多这类矩阵非线性特征值问题源自对微分算子的离散化，其中非线性来源于依赖特征值的边界条件 [9], 材料参数 [23], 特定基函数 [4], ，或通过透明边界条件截断无限定义域 [43]。

本文提出了一种用于求解无限维非线性特征值问题的算法。该算法是基于轮廓的算法 Beyn 方法的一种变体 [5]。我们的算法并不先对非线性特征值问题进行离散化，而是将离散化推迟到最后可能的时刻（见第 2.2 小节）。通过推迟离散化，我们避免了对特征值进行修改、造成其不稳定或将其破坏，并且能够以可证明的精度计算特征值（见第 3 节）。

我们重点研究涉及求解特征值 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零特征函数[1] $u \in \mathcal{H}$ 的问题，使其满足

$$T(\lambda)u = 0, \qquad T(\lambda) : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathcal{H}. \tag{1.1}$$

对于每个固定的 λ， $T(\lambda)$ 是作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的闭线性算子。为了涵盖微分算子等无界算子，我们假设 $T(\lambda)$

*剑桥大学 DAMTP，剑桥，CB3 0WA。（m.colbrook@damtp.cam.ac.uk）
†康奈尔大学数学系，纽约州伊萨卡，14853。（townsend@cornell.edu）[1]尽管它们未必属于某个函数空间，我们仍称其为“特征函数”。

TABLE 1.1
Discretization issues encountered in our six examples from the NLEVP collection. Our proposed InfBeyn algorithm avoids these issues using an infinite-dimensional approach (see subsection 2.2). 。

示例	观测到的离散化难题
一维声波	伪特征值 收敛缓慢
二维声波	伪特征值 重数错误
蝴蝶	谱污染 遗漏的谱 错误的伪谱
阻尼梁	收敛缓慢 已解析的特征函数与不准确的特征值
受载弦	离散化导致的病态性
平面波导	塌缩到虚假本质谱上 聚集特征值失效 谱污染

具有稠密定义域 $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H}$。对于非空开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$，我们假设 $\Omega \ni \lambda \mapsto T(\lambda)u$ 对每个固定的 $u \in \mathcal{D}(T)$ [38, p. 375]这些理论假设扩展了矩阵非线性特征值问题的常规假设 [29]，使我们能够为(1.1)(参见第 2 节开发一种基于轮廓的特征值求解器）。有许多微分非线性特征值问题族满足我们的理论假设，例如偏微分方程的边界非线性特征值问题，其中变系数和边界条件关于特征值参数 λ [48, 57]全纯。[2]

T 的谱记为 $\Lambda(T)$，它是由满足 $T(\lambda)$ 不可逆的点 $\lambda \in \Omega$ 构成的集合。预解集 $\rho(T) = \Omega \setminus \Lambda(T)$ 在 Ω 中是相对开集，并且对于 $z \in \rho(T)$ [38, p. 367]，$T(z)^{-1}$ 有界且全纯。由于我们研究的是作用于无限维空间的算子，$\Lambda(T)$ 可能包含一些并非满足 (1.1) 的特征值的点。然而，如果对每个 $z \in \Omega$，$T(z)$ 都是 Fredholm 算子，并且 $\Lambda(T) \neq \Omega$，那么 $\Lambda(T)$ 由孤立点组成，这些点是具有有限代数重数和几何重数 [27] 的特征值。在这种情况下，谱是离散的（ [29,第 2 节），许多有限维非线性特征值问题定理都有无限维类比 [36]。特别是，当对每个 $z \in \Omega$，$T(z)$ 都是 Fredholm 算子，并且 $\Lambda(T) \neq \Omega$ 时，存在一个适用于无限维非线性特征值问题的 Keldysh 定理（见定理 2.1），它为我们的基于围道的非线性特征值问题求解器提供了理论基础。由于 Fredholm 算子在小扰动下仍是 Fredholm 算子 [37, 定理 1]，我们的假设并不脆弱，也允许设计数值方法。使 $T(\lambda)$ 不是 Fredholm 算子的点 $\lambda \in \Omega$ 的集合称为本质谱。

虽然离散化引发的问题似乎已是众所周知的现象，但对其影响尚无系统研究。我们通过若干示例进行清晰说明（见 第 4 节）。离散化非线性特征值问题所引发的若干令人担忧的问题值得认真关注：

- **伪特征值**。与无限维问题无关的伪特征值

[2]虽然假设 $\lambda \mapsto T(\lambda)u$ 对每个 λ 都是全纯的，并且使用固定定义域 $\mathcal{D}(T)$，但它通过将微分算子和边界算子组合成定义在固定空间 [54] 上的二分量算子，从而涵盖了依赖特征值的边界条件。

高维问题可能会因离散化而产生。这些伪特征值即使在离散化规模增大至无穷时仍可能存在，这种现象称为谱污染。即使谱完全是离散的，也可能发生这种情况。

- **谱不可见性**。 谱不可见性是指，随着离散化规模增至无穷大，非线性特征值问题中的某些（或全部）特征值仍会被离散化遗漏。谱的某些区域可能对离散化“不可见”。

- **病态性**。无限维非线性特征值问题可能具有条件良好的特征值，而离散化问题的特征值却可能具有病态性。因此，即使是稳定的有限维求解器，也无法在离散化后克服这一问题。

- **超慢收敛**。在实际应用中，我们希望离散化问题的特征值能够快速收敛到无限维问题的特征值。如果收敛缓慢，计算代表无限维问题特征值的特征值可能会耗费过多计算资源。即使特征函数得到了精确求解，相应的特征值也可能不准确。

- **重数错误**。 无限维问题的特征值可以通过离散化得到较好的近似，但重数可能错误。

- **聚集特征值**。 离散谱可能在本质谱处聚集。这给离散化方法准确解析这些特征值带来了挑战。

- **幽灵本质谱**。许多具有离散谱的无限维非线性特征值问题源自具有本质谱的底层谱问题。例如，在共振计算中，区域截断常会遇到这种情况。离散化后的非线性特征值问题的特征值可能会聚集到该底层问题的“幽灵”本质谱上。

为克服这些离散化问题，我们引入了 Beyn 方法的无限维类比（见 第 2.2 小节）。我们将算法称为 InfBeyn（见 第 2.2 小节），该算法基于围道积分，仅对线性方程进行自适应离散化。它通过沿区域边界进行积分，计算复平面中某个区域内的特征值。该算法构造一个小型广义矩阵特征值问题，其特征值与围道内无限维非线性特征值问题的特征值相匹配。尽管以往针对无限维非线性特征值问题的方法主要针对具体问题，InfBeyn 提供了一种通用方法，可在谱为离散的区域内对任意全纯非线性特征值问题收敛。此外，我们利用无限维随机数值线性代数中的技术证明了该方法具有稳定性。对于有限维问题，证明稳定性是基于围道的方法中一个众所周知的问题，但在无限维中则是可处理的。

除了计算无限维非线性特征值问题的特征值外，我们还计算伪谱集，以便更全面地了解系统谱的稳定性（见第 2.3 小节）。离散化非线性特征值问题也可能带来问题（见第 4.3 小节），而离散化得到的伪谱集可能会产生误导，即使没有发生谱污染或不可见现象（见第 2.3.1 小节）。我们提出了首个通用算法，即使谱不是离散的，也能收敛到非线性特征值问题的伪谱。此外，该算法的输出保证位于真实伪谱集之内，从而可以直接验证计算结果；我们正是通过这种方式验证 InfBeyn 计算出的特征值。

本文的结构安排如下：第 2 节介绍非线性特征值问题的无限维工具，包括 Keldysh 定理、我们的 InfBeyn 算法，以及如何计算伪谱。在第 3 节中，我们通过推导伪谱集包含关系来分析 InfBeyn 的稳定性。在第 4 节中，我们介绍 NLEVP 集合中源自无限维非线性特征值问题的六个示例，并展示离散化难题。最后，我们在第 5 节中总结全文并展望未来发展。为配合本文，

我们开发了一个名为 `infNEP` 的公开 MATLAB 软件包，可通过以下地址获取： [16], 其中包含了本文中的所有示例和图表。

2. 无限维非线性特征值问题的计算工具。 我们先陈述 Keldysh 定理（见定理 2.1），然后介绍 Beyn 方法的无限维类比（见 第 2.2 小节）以及计算伪谱的步骤（见 第 2.3 小节）。我们不直接对非线性特征值问题进行离散化，而是将离散化推迟到尽可能晚的时刻，并且只对线性方程进行离散化。

2.1. Keldysh 定理。 对于非线性特征值问题的基于围道的方法，Keldysh 定理是一个重要的展开式 [39, 40] ，可用于证明非线性特征值问题能够化为线性广义矩阵特征值问题。该定理可表述如下：

THEOREM 2.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个非空定义域，且 T 属于 (1.1) 满足$\Omega \ni \lambda \mapsto T(\lambda)u$ 对于每个固定的 $u \in \mathcal{D}(T)$都是全纯的。如果 $T(\lambda)$ 对所有$\lambda \in\Omega$ 都是 ***Fredholm***算子，且 m 是 m Ω 内特征值代数重数之和，

$$T(z)^{-1} = V(zI - J)^{-1}W^* + R(z), \quad \forall z \in \rho(T). \tag{2.1}$$

其中， V、W 是拟矩阵，其列分别为经过适当归一化的广义右特征向量和左特征向量；$J \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 是由Ω内部每个特征值对应的***Jordan***块组成的分块对角矩阵； $R(z)$ 是一个全纯余项。

.....的具体形式 V、W 和 J 可见 [29, 第 2 节。4]展开表明， $T(z)^{-1}$ 可表示为（$zI - J$）$^{-1}$ 加上一个全纯余项。这使我们能够利用涉及 $T(z)^{-1}$ 的围道积分，构造一个 $m \times m$广义特征值问题，其特征值与(1.1)在 Ω 内的特征值相同。

2.2. Beyn 方法的无穷维类比。Beyn 方法对于求解矩阵非线性特征值问题非常高效，当希望计算已知区域内的特征值时尤其有用 [5]。这种基于轮廓的方法利用 Keldysh 展开(2.1) 来计算一个更小的线性铅笔，使其谱性质与轮廓所包围区域内原问题的谱性质相匹配。如果 $T(z) \in \mathbb{C}^{N\times N}$ 是一个矩阵非线性特征值问题，那么它首先计算以下两个矩阵：

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T(z)^{-1}V\,dz, \qquad A_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma zT(z)^{-1}V\,dz, \tag{2.2}$$

其中， Γ 是 Ω 内部的一条闭合可求长 Jordan曲线，包围 $T(z)$ 的 m 个特征值（按代数重数计数）。这里， $V \in \mathbb{C}^{N\times(m+p)}$ 是一个具有 $m \ll N$ 的矩阵，通常通过随机选取独立的标准高斯元素来构造； p是一个较小的过采样因子（例如 $p = 5$），我们建议采用该因子以提高方法的稳健性。在计算出 A_0 和 A_1 后，Beyn 方法求解一个与 A_0 和 A_1 相关的 $m \times m$ 广义矩阵特征值问题。

应用 Beyn 方法的常见做法是先对非线性特征值问题进行离散化，再对离散化后的问题使用 Beyn 方法。Beyn 方法的主要计算开销是求解线性方程组。然而，为了克服离散化带来的顾虑，我们更倾向于使用 Beyn 方法的无穷维类比形式，下面将对此进行介绍。Beyn 方法包含三个关键要素，我们依次对其进行了推广：

(i) 随机生成的测试函数。 Beyn 方法使用一个随机矩阵$V \in \mathbb{C}^{N\times(m+p)}$ ，其列向量是标准高斯测试向量。标准高斯向量的一个类似物是从高斯过程（GP） [10]中抽取的函数。一个从 GP 中抽取的函数 g，是从多元高斯分布中抽取的向量的无限维类似物，因为从 g 中抽取的样本服从多元高斯分布。我们描述以下情形下的过程：

算法 2.1 InfBeyn：针对非线性特征值问题的无限维 Beyn 方法。

输入： 非线性特征值问题 $T(z)u = 0$，包围 m 个特征值的轮廓 Γ。

1: 绘制一个 $\mathcal{X} \times (m+p)$ 拟矩阵，其列独立地从高斯过程 $\mathcal{GP}(0, K_{\mathrm{SE}})$ 中抽取。2: 使用求积公式 A_0 和 A_1 计算 (2.4) 中的拟矩阵 (2.7)。3: 计算 m 的截断奇异值分解：A_0 见 (2.5)。4: 构造并求解 $m \times m$ 中的广义特征值问题 (2.6)，得到特征值λ_j 和特征向量 $x_j \in \mathbb{C}^m$。

输出： Ω 中的特征值 λ_1，……，λ_m 和特征函数 $u_j = \mathcal{U}\Sigma_0 x_j$。

$\mathcal{H}$ 由定义域 $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ 上的 $L^2(\mathcal{X})$ 函数组成，对于其他希尔伯特空间，过程也类似。我们将 $g \sim \mathcal{GP}(0, K)$ 记为某个连续正定核 $K\colon \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$，如果对于任意 $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$，$(g(x_1) \ldots, g(x_n))$ 均服从均值为 $(0, \ldots, 0)$、协方差为 $K_{ij} = K(x_i, x_j)$（其中 $1 \le i, j \le n$）的多元高斯分布。我们通常使用以下平方指数协方差核：

$$K_{\mathrm{SE}}(x, y) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \exp\left(-(x-y)^2/(2\mu^2)\right), \qquad \mu > 0, \tag{2.3}$$

其中，$s_\mu = \mu\sqrt{2\pi}$ 是缩放因子。长度尺度参数记为μ，决定了 g样本之间的相关性。如果 μ 较大，则样本$g(x_1) \ldots, g(x_n)$高度相关，并且 g 接近常数函数。如果 μ 较小，则 g 的样本之间仅存在弱相关性，而 g 通常是高度振荡的函数。我们使用 $\mathcal{GP}(0, K_{\mathrm{SE}})$在 InfBeyn 中生成随机函数。

(ii) 围道积分。InfBeyn 计算以下两个拟矩阵：[3]

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma T(z)^{-1} \mathcal{V}\, dz, \qquad A_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z T(z)^{-1} \mathcal{V}\, dz, \tag{2.4}$$

其中 $\mathcal{V}$ 是一个 $\mathcal{X} \times (m+p)$ 拟矩阵，其列均为从 $\mathcal{GP}(0, K_{\mathrm{SE}})$ 中独立抽取的函数。

(iii) 求解广义矩阵特征值问题。在 InfBeyn 中，A_0 和 A_1是具有 $m+p$ 列的拟矩阵。相关的 $m \times m$ 线性铅笔通过对 A_0 [62, 第 4], 节中所述的经济型奇异值分解（SVD）进行构造，即，

$$A_0 = \mathcal{U}\Sigma_0 V_0^*, \tag{2.5}$$

其中 $\mathcal{U}$ 是一个拟矩阵，在 $L^2(\mathcal{X})$ 中具有 m 正交归一列；$V_0 \in \mathbb{C}^{(m+p)\times m}$ 是一个具有正交归一列的矩阵。然后我们求解 $m \times m$ 广义特征值问题。

$$\mathcal{U}^* A_1 V_0 x = \lambda \Sigma_0 x, \qquad x \neq 0. \tag{2.6}$$

在实际计算中，InfBeyn 使用求积公式（例如映射后的梯形公式）近似 (2.4)中的轮廓积分。给定一个求积公式，其节点为 $z_1, \ldots, z_\ell$，权重为 $w_1, \ldots, w_\ell$，可用下式对它们进行近似：

$$A_0 \approx \tilde{A}_0 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\ell} w_k T(z_k)^{-1} \mathcal{V}, \qquad A_1 \approx \tilde{A}_1 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\ell} w_k z_k T(z_k)^{-1} \mathcal{V}. \tag{2.7}$$

[3]拟矩阵是指列由函数而非向量构成的矩阵。$\mathcal{X} \times m$ 拟矩阵有 m 列，每一列都是定义在 $\mathcal{X}$上的函数。

˜由于 rank(A_j) $= m$ 对于 $j = 0,1$ 成立，因此我们知道 $\sigma_{m+1}(A_j) \approx 0$。通过执行$m$-截断奇异值分解，我们确保 A_j 的秩为 m ，对于 $j = 0,1$ 成立。该方法针对单特征值的情形总结于 算法 2.1。在更一般的情形下，InfBeyn 可恢复一个 $m \times m$ 线性铅笔 (2.6)，其谱性质与 T 内部 Γ 的 。

对于本文中的大多数示例， $T(z)^{-1}\mathcal{V}$ 涉及求解一个带有 $m+p$ 个右端项的线性微分方程。我们通过自适应离散化微分方程并求解线性方程组 [50]来完成这一过程。为在控制计算成本的同时提高最终计算所得特征值的精度，我们首先粗略估计特征值，以便将其隔离在一个小圆形围道内。然后，对每个特征值或一个较小的特征值簇重复运行 InfBeyn。这样做有两个原因。首先，我们的实验发现，与增大过采样参数 p 或求积节点的数量 ℓ相比，这种方法的计算效率更高。其次，第 3 节中的分析表明，对于非线性特征值问题，这是一项重要策略，因为如果围道过大， VW^* 式(2.1) 中的矩阵可能会变得病态或秩退化。

存在多种技术可用于估计特征值的数量 m。如果 $\Lambda(T)$ 在 Γ 的内部是离散的，且 Γ 不与 $\Lambda(T)$ 相交，那么

$$m = \operatorname{Trace}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T'(z)T(z)^{-1}\,dz\right). \tag{2.8}$$

这可以利用 Hutchinson 方法的无限维类比来进行迹估计 [67]。因此，在整篇论文中，我们假设 m 已知，并将重点放在 Beyn 方法的无限维类比的算法与理论方面。

2.3. 非线性特征值问题的伪谱。伪谱集是一种数学量，可深入揭示线性和非线性系统（包括特征值问题 [64]）的稳定性。考虑范数至多为 $\epsilon > 0$ 的 T 的有界全纯扰动集合，即，

$$\mathcal{A}(\epsilon) = \left\{ E : \Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ holomorphic} \,\middle|\, \sup_{z\in\Omega} \|E(z)\| < \epsilon \right\}. \tag{2.9}$$

T 的 ϵ-伪谱是以下受扰算子的谱的并集：

$$\Lambda_\epsilon(T) := \bigcup_{E\in\mathcal{A}(\epsilon)} \Lambda(T+E).$$

可以证明，如果去掉扰动是全纯的这一条件，该集合仍保持不变。人们也常考虑结构化扰动 [26,33, 49, 61, 66], ，利用本节所述的无限维技术，还可以进一步处理这些扰动。

对于线性矩阵特征值问题，如果某个特征值附近的伪谱很小，那么小扰动不会使该特征值发生很大偏移。然而，如果某个特征值附近的伪谱很大，那么小扰动就可能使该特征值远离其原始位置。对于非线性特征值问题，在 $\Lambda(T)$ 离散的区域内，也有类似的解释。也就是说，对于足够小的 ϵ （使得谱在扰动下仍保持离散）， $\Lambda_\epsilon(T)$ 可以等价地通过后向误差来定义，即

$$\Lambda_\epsilon(T) = \inf\left\{ z \in \Omega \,\middle|\, \eta_T(z) < \epsilon \right\},$$

其中 $\eta_T(z)$ 是在 [31,60]中定义的后向误差。即使谱不是离散的，$\Lambda_\epsilon(T)$ 也有另一种刻画方式。下面将 [6,命题 41] 和 [49, 定理 1] 直接推广到无限维情形：

THEOREM 2.2. 设 $\epsilon > 0$。按照 (2.9) 中的方法度量扰动，我们有

$$\Lambda_\epsilon(T) = \left\{ z \in \Omega \,\middle|\, \|T(z)^{-1}\|^{-1} < \epsilon \right\},$$

其中，我们定义 $\|T(z)^{-1}\|^{-1} = 0$ 若 $z \in \Lambda(T)$。

证明。 假设 $z \notin \Lambda(T)$ 和 $\|T(z)^{-1}\|^{-1} < \epsilon$。那么，存在一个$u \in \mathcal{H}$单位范数向量，使得 $\|T(z)^{-1}u\| > \epsilon^{-1}$。令 $v = T(z)^{-1}u$，并设 $E = -uv^*/\|v\|^2$。于是， $\|E\| = 1/\|v\| < \epsilon$且 $[T(z) + E]v = 0$，因此 $z \in \Lambda_\epsilon(T)$。由此可得

$$\left\{ z \in \Omega \,\middle|\, \|T(z)^{-1}\|^{-1} < \epsilon \right\} \subset \Lambda_\epsilon(T).$$

对于反向集合包含关系，反设 $z \in \Lambda_\epsilon(T)$，但$\|T(z)^{-1}\|^{-1} \geq \epsilon$。那么，对于某个 $E \in \mathcal{A}(\epsilon)$，有 $z \in \Lambda(T+E)$，因此

$$\|T(z)^{-1}E(z)\| \leq \|T(z)^{-1}\|\|E(z)\| \leq \|E(z)\|/\epsilon < 1.$$

注意到 $T(z) + E(z) = T(z)(I + T(z)^{-1}E(z))$，因此，通过纽曼级数论证，我们可知 $z \notin \Lambda(T+E)$，这与假设矛盾。 □

定理 2.2 给出了一种计算 $\Lambda_\epsilon(T)$ 的方法，可避免离散化问题。设 $\{\mathcal{P}_n\}$ 为一列递增的有限秩正交投影，且 $\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_n^*\mathcal{P}_n u = u$ 对任意 $u \in \mathcal{H}$均成立。令 $\mathcal{U}_n$ 为 $\mathcal{P}_n$ 的值域，并假设$\mathcal{U} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_n$ 构成 $T(z)$ 的核，对任意 $z \in \Omega$ 均成立。于是我们考虑函数

$$\gamma_n(z,T) := \min\left\{\sigma_{\inf}(T(z)\mathcal{P}_n^*), \sigma_{\inf}(T(z)^*\mathcal{P}_n^*)\right\}, \tag{2.10}$$

其中 $\sigma_{\inf}$ 表示最小奇异值。下述定理说明这些函数如何逼近 $\|T(z)^{-1}\|^{-1}$，因此可用于计算伪谱。

THEOREM 2.3. 这些函数 γ_n 满足

$$\gamma_n(z,T) \geq \|T(z)^{-1}\|^{-1} \quad and \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n(z,T) = \|T(z)^{-1}\|^{-1},$$

其中，收敛从上方单调进行，并且在Ω的紧子集上一致。此外，若 $z \in \rho(T) \cup \partial\Lambda(T)$，则 $\gamma_n(z,T) = \sigma_{\inf}(T(z)\mathcal{P}_n^*)$。

证明。 首先注意到， $\|T(z)^{-1}\|$ 可表示为

$$\|T(z)^{-1}\|^{-1} = \min\left\{\sigma_{\inf}(T(z)), \sigma_{\inf}(T(z)^*)\right\}, \tag{2.11}$$

其中，对于无界算子 S，

$$\sigma_{\inf}(S) = \inf\{\|Su\| \,|\, u \in \mathcal{D}(S), \|u\| = 1\}.$$

（2.11）的证明可由线性铅笔的情形直接沿用 [17, 引理 6.4] ，无需作任何修改。由于 $T(z)^{-1}$ 在 $\rho(T)$上有界且全纯， $\|T(z)^{-1}\|^{-1}$ 在 $\rho(T)$上连续。我们证明 $\|T(z)^{-1}\|^{-1}$ 在整个 Ω 上连续。设 $z_n \in \rho(T)$，且 $z_n \to z \in \Lambda(T)$。对任意 $\epsilon > 0$，存在单位范数的 $u_\epsilon \in \mathcal{D}(T)$，使得 $\min\{\|T(z)u_\epsilon\|, \|T(z)^*u_\epsilon\|\} \leq \epsilon$。但是，$\min\{\|T(w)u_\epsilon\|, \|T(w)^*u_\epsilon\|\}$关于 w连续，因此 $\limsup_{n\to\infty} \|T(z_n)^{-1}\|^{-1} \leq \epsilon$。由于 $\epsilon > 0$是任意的，且 $\|T(z)^{-1}\|^{-1}$在 $\Lambda(T)$上恒等于零，所以 $\|T(z)^{-1}\|^{-1}$连续。

由（2.11）可得 $\gamma_n(z,T) \geq \|T(z)^{-1}\|^{-1}$。给定 $z \in \Omega$ 和 $\epsilon > 0$，令$u \in \mathcal{D}(T)$为单位范数，使得 $\|T(z)u\| \leq \sigma_{\inf}(T(z)) + \epsilon$. 由于 $\mathcal{U}$构成$T(z)$的核，我们可以假设 $u \in \mathcal{U}$，从而对于较大的 n，有 $u = \mathcal{P}_n u$。由此可得 $\limsup_{n\to\infty} \sigma_{\inf}(T(z)\mathcal{P}_n^*) \leq \sigma_{\inf}(T(z)) + \epsilon$。我们可以完全以相同的方式进行论证。

对于 $T(z)^*$，由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，我们有 $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(z,T) = \|T(z)^{-1}\|^{-1}$。由于投影 $\mathcal{P}_n$ 递增，函数 $\gamma_n(z,T)$ 关于 n 单调递减。由于 $\|T(z)^{-1}\|^{-1}$ 连续，Dini定理意味着 $\gamma_n(z,T)$ 在 Ω 的紧子集上一致收敛。

最后，如果 $z \in \rho(T)$，那么 $\sigma_{\inf}(T(z)) = \sigma_{\inf}(T(z)^*)$。这一结论的证明可由线性铅笔情形直接得到。$\sigma_{\inf}(T(z))$ 和 $\sigma_{\inf}(T(z)^*)$ 的连续性表明，对于 $z \in \partial\Lambda(T)$，这一等式同样成立。 □

结合定理 2.2 和 2.3，我们发现，对于任意整数 n 都有

$$\left\{ z \in \Omega \,\middle|\, \gamma_n(z,T) < \epsilon \right\} \subset \Lambda_\epsilon(T). \tag{2.12}$$

此外，由于 $\gamma_n(z,T)$ 到 $\|T(z)^{-1}\|^{-1}$ 的收敛是局部一致的，这些近似在 $n \to \infty$ 时收敛到 $\Lambda_\epsilon(T)$，且不存在谱污染或谱不可见性。[4] 通常有两种方法可以将其转化为实际计算：

- 如果我们拥有有限秩算子 $T(z)\mathcal{P}_n^*$ 和 $T(z)^*\mathcal{P}_n^*$ 的离散化，并且它们具有有限的下带宽（或可由此类矩阵良好近似），那么我们取能够涵盖完整值域 [18] 的矩形截断。相对于适当的范数（定义域空间和陪域空间中的范数可能不同），所得矩阵的最小奇异值分别与 $T(z)\mathcal{P}_n^*$ 和 $T(z)^*\mathcal{P}_n^*$ 的最小奇异值相同。本文所研究的微分算子的具有有限下带宽的离散化由超球谱方法 [50] 提供。

- 如果我们有 $\mathcal{P}_n T(z)^* T(z) \mathcal{P}_n^*$ 和 $\mathcal{P}_n T(z) T(z)^* \mathcal{P}_n^*$ 的离散化，那么我们可以计算它们的最小奇异值，并开平方以计算 γ_n [17]。在可能的情况下，应优先采用第一种方法，而不是第二种方法，因为后者会因开平方而导致精度损失。在某些情况下，第二种方法似乎不可避免 [19]。可以证明，通过使用 $\mathcal{P}_n T \mathcal{P}_n^*$ 的方形有限截断对 T [15] 进行离散化，并不总能计算出 $\Lambda_\epsilon(T)$。如果希望通过先进行离散化来计算 $\Lambda_\epsilon(T)$，则必须谨慎。

2.3.1. 示例：Orr–Sommerfeld。作为包含关系(2.12)的一个示例，我们考虑经典的 Orr–Sommerfeld方程。在分析流体流动的时间稳定性时，该方程是一个线性特征值问题 。然而，如果考察空间稳定性分析，它就会变成一个非线性特征值问题 [55, 第 7]章。

我们考虑一个背景平面泊肃叶流 $U(y) = 1 - y^2$，其位于 $y = \pm 1$ 处的两壁之间，雷诺数为 $R > 0$，并具有固定的实数扰动频率$\omega \in \mathbb{R}$。为了定义一个非线性特征值问题（NEP），我们需要以下两个算子：

$$\mathcal{A}(\lambda)\phi = \left[\frac{1}{R}\mathcal{B}(\lambda)^2 + i\left(\lambda U(y) - \omega\right)\mathcal{B}(\lambda) + i\lambda U''(y) \right]\phi, \quad \mathcal{B}(\lambda)\phi = -\frac{d^2\phi}{dy^2} + \lambda^2\phi.$$

Orr–Sommerfeld 算子形式上定义为 $T(\lambda) = \mathcal{B}(\lambda)^{-1}\mathcal{A}(\lambda)$。定义边界条件、定义域和适当的空间时需要格外谨慎。此外，非线性特征值问题的谱性质取决于范数的选择 [63]。我们赋予 $\mathcal{B}(\lambda)$ Dirichlet 边界条件 $\psi(\pm 1) = 0$，并赋予 $T(\lambda)$ 边界条件 $\psi(\pm 1) = 0$ 以及 $\psi'(\pm 1) = 0$。适当的希尔伯特空间是 $\mathcal{D}(\mathcal{B}(1))$，其能量内积定义为 [21]

$$\langle \phi, \psi \rangle_E = \int_{-1}^{1} [\mathcal{B}(1)\phi]\overline{\psi}\, dy = \int_{-1}^{1} \phi\overline{\psi} + \frac{d\phi}{dy}\frac{d\overline{\psi}}{dy}\, dy. \tag{2.13}$$

[4]这可以用所谓的 Attouch–Wets 拓扑来精确表述，它将 Hausdorff 度量推广到了 $\mathbb{C}$ [2] 的闭子集（包括无界子集）。

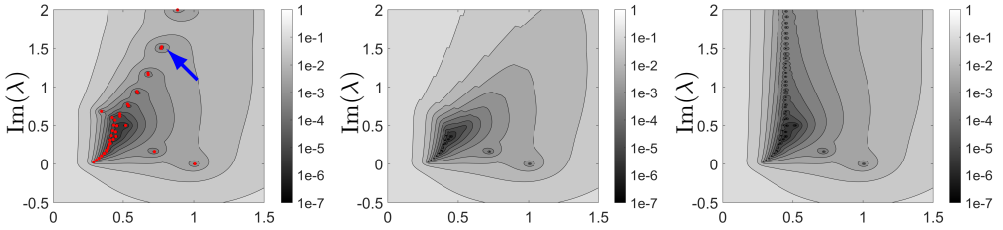


FIGURE 2.1. *The computed pseudospectra for the Orr–Sommerfeld NEP. Left: The pseudospectra is computed by first discretizing with $n = 64$ and then computing the pseudospectra of the matrix NEP with an appropriate weight matrix. The eigenvalues are shown as red dots and include a spurious branch labeled by a blue arrow. Middle: The computed pseudospectra using the functions γ_n from* 2 10 (。)

for $n = 64$. These pseudospectral sets are guaranteed to be inside the pseudospectral sets of the infinite-dimensional problem and converge as $n \to \infty$. Right: The computed pseudospectra using γ_n for $n = 128$.

我们考虑 $\omega = 0.264002$ 和 $R = 5772.22$，它们对应于稳定性的临界中性点。在这种情况下，谱是离散的。[5] 我们主要关注第一复平面象限中的特征值，这些特征值具有正的相速度，并且与计算原点处强迫项所产生的下游响应有关。然而，其他象限中的特征值也具有物理意义 [55, 第 7] 章。

这个问题在 `orr sommerfeld` NLEVP 集合中称为 Orr–Sommerfeld 问题，其中采用切比雪夫配置法进行离散化 [61]。我们使用适当的权重矩阵计算这些离散化的伪谱，以考虑由 (2.13)诱导的范数。对于此问题，随着离散化规模增大，离散化算子的伪谱会收敛到正确的伪谱。然而，要判断计算所得伪谱中的哪些区域可信，可能颇具挑战。我们还使用 γ_n 中的函数 (2.10)计算伪谱，采用勒让德伽辽金谱方法，并通过基重组施加边界条件。对于这一基，$\mathcal{AP}_n^*$ 和 $\mathcal{BP}_n^*$ 均为下带状算子。因此，我们使用矩形截断计算 $\gamma_n(z,\ T)$，并应用 定理 2.3。[6]

图 2.1 （左）展示了使用 $n = 64$（NLEVP 集合默认设置）得到的离散化算子的伪谱；图 2.1 （中）展示了 γ_n 在 $n = 64$下的结果。两组伪谱有一个区域彼此吻合。然而，随着 Im(λ) 增大，伪谱集之间的差异也随之增大。根据 (2.12)，我们可以信任 γ_n 提供的结果，并据此判断切比雪夫配置法的哪些谱区域已经收敛。 图 2.1 （右）展示了使用 γ_n 在 $n = 128$下计算的伪谱。这证实了我们的猜测：当 $n = 64$ 时，离散化的非线性特征值问题中存在一支伪特征值。在 第 4.3 小节中，我们还将看到一个令人瞩目的例子，其中离散化算子的伪谱并不收敛。

3. 无限维 Beyn 方法的稳定性分析。本节旨在利用 Keldysh 定理（参见 算法 2.1）为 InfBeyn 推导伪谱集包含关系（参见 定理 2.1）。InfBeyn 计算

[5] Blasius 边界层流动等其他例子具有连续谱分量 [28]。对于这类问题，也可以使用函数计算伪谱 γ_n。
[6] 在此例中，谱是离散的，且 $\partial\Lambda(T) = \Lambda(T)$。因此 定理 2.3 告诉我们 $\gamma_n(z, T) = \sigma_{\inf}(T(z)\mathcal{P}_n^*)$，这意味着计算伪谱时不需要 $T(z)^*\mathcal{P}_n^*$。

通过计算得到的矩阵铅笔，求出闭合轮廓 Γ 内的非线性特征值问题的特征值。该矩阵铅笔定义为

$$\tilde{F}(z) = \tilde{\mathcal{U}}^* \tilde{A}_1 \tilde{V}_0 - z\tilde{\mathcal{U}}^* \tilde{A}_0 \tilde{V}_0, \tag{3.1}$$

其中，$\tilde{A}_0 = \tilde{\mathcal{U}}\tilde{\Sigma}_0 \tilde{V}_0^*$ 是 $\tilde{A}_0$ 的奇异值分解。这里，$\tilde{A}_0$ 和 $\tilde{A}_1$ 分别是通过 InfBeyn 使用求积公式和截断奇异值分解计算得到的 A_0 和 A_1 的近似值（参见(2.7)）。为了理解 InfBeyn 的伪谱集包含关系，我们首先将 $\tilde{F}$ 与以下矩阵铅笔联系起来：

$$F(z) = A_1 V_0 - z A_0 V_0, \tag{3.2}$$

这涉及理解求积公式所产生的误差（见第 3.2 小节）。在 (3.2) 中，V_0 表示 A_0 的右奇异向量矩阵。另请注意，F 的值域包含于 $\mathcal{H}$，而其定义域为 $\mathbb{C}^m$。

其次，我们将 F 与 T 联系起来，后者讨论的是在采用精确积分时如何控制 InfBeyn 的误差（见 第 3.3 小节）。对于线性特征值问题的 FEAST 方法，已有类似的伪谱集包含关系 [34]；然而，对于非线性特征值问题（NEP），其分析更具挑战性。

3.1. 问题设置。 假设 Γ 是一条不与 $\Lambda(T)$ 相交的闭曲线，并围成一个单连通区域 int(Γ)，其中包含特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$（计入代数重数）。若 f 是在 int(Γ) 的邻域内的全纯函数，则根据柯西积分公式，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)T(z)^{-1}\,dz = V f(J) W^*,$$

其中，J 是一个分块若当矩阵，而 V 是 W 在 T 中的广义右特征向量和左特征向量，见定理 2.1。我们假设 InfBeyn 所用的求积公式足够精确，即我们的近似值（记为 A_j）对 A_j 满足

$$\|A_j - \tilde{A}_j\| \le \epsilon, \qquad j = 1, 2, \tag{3.3}$$

其中 $\epsilon > 0$。回顾一下，A_0、A_1、$\tilde{A}_0$ 和 $\tilde{A}_1$ 的秩均为 m（见第 2.2 小节）。在整个分析过程中，我们还假设 $VW^*\mathcal{V}_0$ 的秩为 m。

3.2. 控制求积公式引入的误差。 我们首先控制 InfBeyn 的求积公式误差对其线性铅笔谱性质的扰动，即控制 $\tilde{F}$ 与 F（见(3.1)）和 F（见(3.2)）之间的差异。这些矩阵铅笔映射到不同的空间，因此我们对 $\sigma_{\inf}(\tilde{F})$ 与 $\sigma_{\inf}(F)$ 之间的差异进行界定，从而直接界定伪谱的差异。由于 $\tilde{\mathcal{U}}$ 和 $\tilde{V}_0$ 的列正交归一，且 $\tilde{A}_1$ 和 $\tilde{A}_0$ 的秩为 m，

$$\sigma_{\inf}(\tilde{F}(z)) = \sigma_m(\tilde{F}(z)) = \sigma_m\left(\tilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{U}}^*\tilde{A}_1\tilde{V}_0 - z\tilde{\mathcal{U}}^*\tilde{A}_0\tilde{V}_0)\tilde{V}_0^*\right) = \sigma_m(\tilde{\mathcal{U}}\tilde{\mathcal{U}}^*\tilde{A}_1\tilde{V}_0\tilde{V}_0^* - z\tilde{A}_0),$$

其中，最后一个等式成立，是因为 $\tilde{\mathcal{U}}\tilde{\mathcal{U}}^*$ 和 $\tilde{V}_0\tilde{V}_0^*$ 分别在 $\tilde{A}_0$ 的列空间和行空间上充当恒等映射。通过类似的论证，我们还可得 $\sigma_{\inf}(F(z)) = \sigma_m(\mathcal{U}\mathcal{U}^* A_1 V_0 V_0^* - z A_0)$。由此可得

$$\left|\sigma_{\inf}(\tilde{F}(z)) - \sigma_{\inf}(F(z))\right| \le \|P_1 A_1 P_2 - \tilde{P}_1\tilde{A}_1\tilde{P}_2\| + |z|\|A_0 - \tilde{A}_0\|,$$

其中 $P_1 = \mathcal{U}\mathcal{U}^*$、$\tilde{P}_1 = \tilde{\mathcal{U}}\tilde{\mathcal{U}}^*$、$P_2 = V_0 V_0^*$ 和 $\tilde{P}_2 = \tilde{V}_0\tilde{V}_0^*$。根据三角不等式，我们得到

$$\|P_1 A_1 P_2 - \tilde{P}_1\tilde{A}_1\tilde{P}_2\| \le \|A_1\|(\|P_1 - \tilde{P}_1\| + \|P_2 - \tilde{P}_2\|) + \|A_1 - \tilde{A}_1\|.$$

˜由于 A_0 和 A_0 的秩相同，我们知道 [14]:

$$\|P_1 - \tilde{P}_1\| + \|P_2 - \tilde{P}_2\| \leq 2\min\{\|A_0^\dagger\|, \|\tilde{A}_0^\dagger\|\}\|A_0 - \tilde{A}_0\| \leq 2\|A_0^\dagger\|\|A_0 - \tilde{A}_0\|,$$

其中 $A_0^\dagger$ 表示 A_0的伪逆。由 (3.3)，我们得出

$$\left|\sigma_{\inf}(\tilde{F}(z)) - \sigma_{\inf}(F(z))\right| \leq (2\|A_0^\dagger\|\|A_1\| + |z| + 1)\epsilon. \tag{3.4}$$

˜可以将 (3.4) 理解为： $F(z)$ 与 $F(z$的伪谱集彼此接近。具体接近到何种程度，取决于计算 A_0˜ ˜和 A_1时采用求积公式所产生的误差，即 $\|A_0 - A_0\|$ 和 $\|A_1 - A_1\|$，以及与 $\|A_0^\dagger\|\|A_1\|$ 的内在谱性质相关的量 T (见 (3.8))。

3.3. 使用精确积分进行稳定性分析。 由于(3.4)告诉我们，˜的伪谱集与 F 的 F 相对接近，因此我们现在转而研究 F 与 T的伪谱集之间的关系。最终，我们旨在证明˜之间的伪谱集包含关系，其中 F （用于在 InfBeyn 中计算特征值的矩阵铅笔）和 T （原始非线性特征值问题）均位于 Γ内部。我们有如下伪谱集包含关系：

THEOREM 3.1. 在与定理 T 中相同的假设 *Theorem* 2.1 以及第 *subsection* 3.1 节的问题设置下，对于足够小的 $\delta > 0$，我们有以下位于 Γ 内的伪谱集合包含关系：

$$\Lambda_{\delta_1}(T) \cap \text{int}(\Gamma) \subset \Lambda_\delta(F) \cap \text{int}(\Gamma) \subset \Lambda_{\delta_2}(T) \cap \text{int}(\Gamma), \tag{3.5}$$

其中 V 和 W 是定理 *Theorem* 2.1 中的广义特征向量， $\mathcal{V}$ 是第*subsection* 2.2 节中的随机拟矩阵，

$$\delta_1 = \frac{\delta}{\|VW^*\|\|VW^*\mathcal{V}\| + M\delta}, \qquad \delta_2 = \frac{\delta}{\sigma_m(VW^*)\sigma_m(VW^*\mathcal{V}) - M\delta},$$

且 $M =$ 上确界$_{z\in\text{int}(\Gamma)}\|R(z)\|$。

证明。我们首先证明包含关系的右侧。令 $z \in$ 内部(Γ)，使得$\sigma_{\inf}(F(z)) < \delta$，并定义 $L_1 = (VW^*)^\dagger$。若 $z \in \Lambda(T)$，则 (3.5) 立即成立，无需证明。若存在 $T(z)^{-1}$，则有

$$T(z)^{-1}L_1F(z) = -VW^*\mathcal{V}V_0 + R(z)L_1F(z) \tag{3.6}$$

其中我们用到了定理 2.1 中的事实 $F(z) = V(J - zI)W^*\mathcal{V}V_0$。由于$\sigma_{\inf}(F(z)) < \delta$，存在一个单位范数的 $x \in \mathbb{C}^m$，满足 $\|F(z)x\| < \delta$。此外，$u = L_1F(z)x \neq 0$；否则，$VW^*\mathcal{V}V_0x = 0$ 和 $VW^*\mathcal{V}V_0$ 的秩将不为 m。我们还有

$$\|u\| \leq \|L_1\|\|F(z)x\| < \delta/\sigma_m(VW^*).$$

这意味着

$$\left\|T(z)^{-1}\frac{u}{\|u\|}\right\| \geq \frac{\|VW^*\mathcal{V}V_0x\|}{\|u\|} - M > \frac{\sigma_m(VW^*)\sigma_m(VW^*\mathcal{V})}{\delta} - M,$$

其中 $M =$ $_{z\in\text{int}(\Gamma)}\|R\ z\ \|$ δ $M\delta <$上确界 ( )。由此可知，如果足 σ_m VW^* σ_m $VW^*\mathcal{V}$ $z \in \Lambda_{\delta_2}$ T Λ_δ F $\cap$ Γ $\subset \Lambda_{\delta_2}$ T $\cap$ Γ
够小，使得 ( ) ( )，那么 ( )。因此，( ) 内部( ) ( ) 内部( )。

对于包含关系的左侧，令 $z \in$ int(Γ)，其中 $\|T(z)^{-1}\| > 1/\delta_1$，且$\delta_1 = \delta/($ $\|VW^*\|\|VW^*\mathcal{V}\| + M\delta)$，并定义 $L_2 = (VW^*\mathcal{V}V_0)^\dagger$。若 $\sigma_{\inf}(F(z)) = 0$,

则包含关系显然成立。因此我们假设 $\sigma_{\inf}(F(z)) > 0$，这意味着 $T(z)^{-1}$ 存在，并且

$$F(z)L_2[T(z)^{-1} - R(z)] = V(J - zI)W^*\mathcal{V}V_0(W^*\mathcal{V}V_0)^\dagger V^\dagger V(z - J)^{-1}W^* = -VW^*.$$

存在一个单位范数的元素 u，使得 $\|T(z)^{-1}u\| > 1/\delta_1$。只要$\delta_1$ 足够小，使得 $\delta_1 < 1/M$，我们就知道

$$\|T(z)^{-1}u - R(z)u\| > 1/\delta_1 - M > 0.$$

由于 $\left(T(z)^{-1} - R(z)\right)u = V(z - J)^{-1}W^*u$属于 V 的值域，因此 $x = L_2\left(T(z)^{-1} - R(z)\right)u$ 满足以下不等式：

$$\|x\| \geq \sigma_m(L_2)\|\left(T(z)^{-1} - R(z)\right)u\| > \frac{1/\delta_1 - M}{\|VW^*\mathcal{V}V_0\|} = \frac{1/\delta_1 - M}{\|VW^*\mathcal{V}\|}.$$

这意味着我们有

$$\left\|F(z)\frac{x}{\|x\|}\right\| = \frac{\|VW^*u\|}{\|x\|} < \frac{\|VW^*\mathcal{V}\|}{1/\delta_1 - M}\|VW^*u\| \leq \frac{\|VW^*\mathcal{V}\|\|VW^*\|}{1/\delta_1 - M} = \delta.$$

因此，我们得出结论：$\Lambda_{\delta_1}(T) \cap$内部(Γ) $\subset \Lambda_\delta(F) \cap$内部(Γ)，证明完毕。 □

定理 3.1 告诉我们，当使用精确积分执行 InfBeyn 时，只要 T 以及 VW^*和 $VW^*\mathcal{V}$条件良好，并且 M不太大，所构造的矩阵铅笔就非常适合用于计算

3.4. 伪谱集包含关系及其解释。现在可以将(3.4) 与定理 3.1 结合起来，得出以下伪谱集包含关系：

$$\Lambda_{\delta_-}(T) \cap \mathrm{int}(\Gamma) \subset \Lambda_\delta(\tilde{F}) \cap \mathrm{int}(\Gamma) \subset \Lambda_{\delta_+}(T) \cap \mathrm{int}(\Gamma), \tag{3.7}$$

其中 $\gamma_\pm = \delta \pm (2\|A_0^\dagger\|\|A_1\| + 1 +$上确界$_{z\in\mathrm{int}(\Gamma)}|z|)\epsilon$ 以及

$$\delta_- = \frac{\gamma_-}{\|VW^*\|\|VW^*\mathcal{V}\| + M\gamma_-}, \quad \delta_+ = \frac{\gamma_+}{\sigma_m(VW^*)\sigma_m(VW^*\mathcal{V}) - M\gamma_+}.$$

˜由于 InfBeyn 使用矩阵铅笔 F 来计算 T 内部的特征值，(3.7)说明，只要满足以下条件，InfBeyn 就能稳健地计算 T 的特征值：(1) VW^*的条件数良好；(2) $VW^*\mathcal{V}$的条件数良好；[7]（3）全纯余项在 int(Γ) 内不会过大，即 M 不会过大；（4）$\|A_0^\dagger\|\|A_1\|$ 相对较小；以及（5） ϵ 较小。

条件（1）由非线性特征值问题本身直接决定，可视为衡量 T 在 Ω 内非正规性的一种指标。一旦条件（1）成立，只要 InfBeyn 执行的草图化足以捕捉 $\mathcal{A}_0$ 和 $\mathcal{A}_1$ 的值域，实际中条件（2）便随之成立。条件（3）衡量 T 在 Ω 内的正则性，而（4）涉及矩阵铅笔 F 的正则性，前提是不产生求积误差。由 Keldysh 展开可知，

$$\|A_0^\dagger\|\|A_1\| \leq \sigma_m(VW^*\mathcal{V})\|VJW^*\mathcal{V}\| \leq \sigma_m(VW^*\mathcal{V})\|VJW^*\|\|\mathcal{V}\|. \tag{3.8}$$

[7]可以证明，对于 $p = 5$，我们有 $\sigma_m(VW^*\mathcal{V}) \leq 50\sigma_m(VW^*)$Trace$((W^*KW)^{-1})$，其概率为 $> 99.999\%$（见 [11, 引理 3]，其中 $p = 5$和 $t = 10$）。这里，K是 $\mathcal{GP}$ 0 K $\mathcal{V}$ $p = 5$ $\|VW^*\mathcal{V}\| \leq 9$ $m +$(,) 中的协方差核，用于随机生成 5 $\|VW^*\|$ K > 99.999 [11, 4] $p = 5$ $s = 3$ 的各列。此外，对于，( ) Trace( ) 的概率为 %（见引理，其中 和 ），其中 Trace(K) 是 K的特征值之和。在实践中，当 $p \geq 5$时，$VW^*\mathcal{V}$的条件数良好；VW^* $\mathcal{GP}$ 0 K 的条件数良好，且 (,) 中的协方差核选择得较为合理。

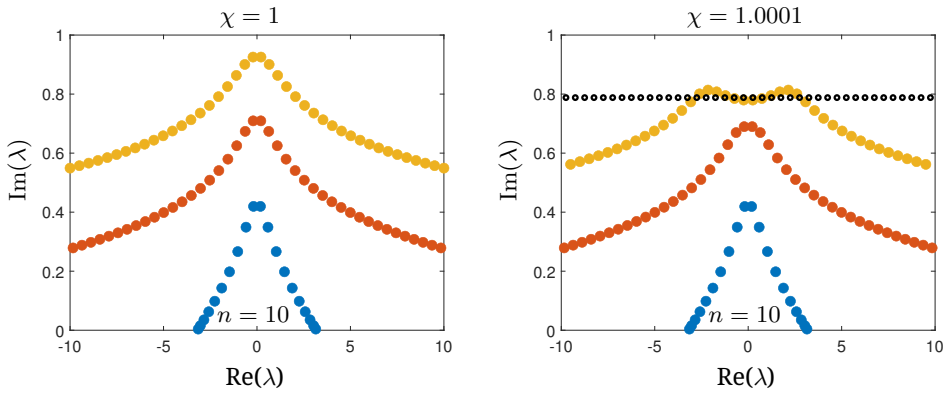


FIGURE 4.1. *Computed eigenvalues for the discretized acoustic wave 1D example labeled as* `acoustic-wave-1d` *in the NLEVP collection with discretization size* $n = 10$ *(blue),* $n = 100$ *(red), and* $n = 500$ *(yellow). Left: The spectrum of the infinite-dimensional problem is empty and all the computed eigenvalues are spurious. Right: The computed eigenvalues are correctly converging as* $n \to \infty$ *to the spectra of the infinite-dimensional problem (black dots) but the convergence is slow.* ,

同样，只要 InfBeyn 执行的草图化足够充分，我们便预期（4）成立。最后，（5）表明 InfBeyn 的求积公式应当具有较高的精度。简言之，(3.7) 告诉我们，应将 InfBeyn 视为一种稳健的方法，用于计算复平面紧区域内非线性特征值问题的特征值。

4. 六个存在令人不安的离散化问题的非线性特征值问题。事实证明，NLEVP 集合中的 52 个矩阵非线性特征值问题有 25 个是通过对无限维非线性特征值问题进行离散化得到的。为展示令人不安的离散化效应，我们从 NLEVP 集合中选取六个示例，说明离散化如何改变、破坏稳定性并摧毁谱。为确保报告的问题仅由离散化造成，我们使用扩展精度验证了离散化后的非线性特征值问题所计算出的特征值。

4.1. 示例 1：一维声波。这是定义在 $L^2([0,1])$ 上的微分边界特征值问题，其形式为

$$\frac{d^2p}{dx^2} + 4\pi^2\lambda^2 p = 0, \qquad p(0) = 0, \quad \chi p'(1) + 2\pi i\lambda p(1) = 0. \tag{4.1}$$

其中，p 是声压，λ 是频率，χ 是（可能为复数的）阻抗 [13]。特征值对应于系统的共振频率，可以显式计算（对于使 $\tan^{-1}(i\chi)$ 有限的 χ 值）：

$$\lambda_k = \tan^{-1}(i\chi)/(2\pi) + k/2, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

这个问题名为一维声波，是 NLEVP 集合中列出的第一个问题。通常使用有限元法（有限元方法）[30] 进行离散化，从而构成一个二次矩阵非线性特征值问题。

我们首先考虑默认值 $\chi = 1$，它同时也是 χ 的一个取值，使得 $\tan^{-1}(i\chi)$ 在 (4.2) 中为无穷大。[8] 我们计算三个离散化规模下离散化问题的特征值 $n = 10$、100 和 500（见 图4.1 （左））。我们计算

[8]更准确地说，我们考虑算子 $T(\lambda)\colon H^2(0,1) \to L^2(0,1) \times \mathbb{C}^2$，其定义为 $T(\lambda)p = (-p'' - (2\pi\lambda/c)^2 p, p(0)$ $\chi p'(1) + 2\pi i\lambda p(1))$。算子 $\lambda^2 T(1/\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 处具有本质谱。因此，对于任意 χ，该问题在无穷远处具有本质谱（而非特征值）。

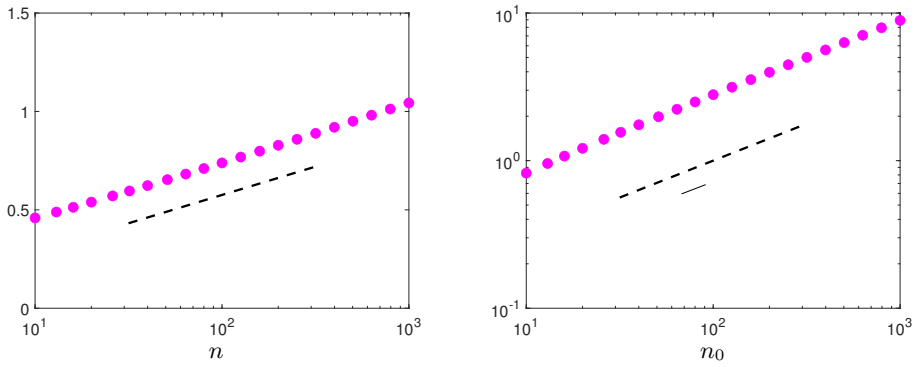


FIGURE 4.2 *The minimum absolute value of the spurious eigenvalues as a function of n. Left: . , The acoustic wave 1D example. Right: The acoustic wave 2D example where the true discretization size is* $n = n_0\ n_0 - 1$. ( )

这些特征值是使用 MATLAB 中的 `polyeig` 命令计算的。容易证明，对于 (4.1) ，当 $\chi = 1$ 时，谱为空。这意味着，所有这些计算得到的特征值都是伪特征值，对于 (4.1) 中的原问题而言毫无意义。 图4.2 （左）显示了特征值绝对值的最小值随 n 的变化情况。特征值逐渐趋于无穷大，但速度慢得惊人。

我们用该值重复实验 $\chi = 1.0001$ ，使得 (4.1)不再具有空谱。同样，我们使用有限元方法 [30] ，取 $n = 10$、100 和 500，对 (4.1) 进行离散化，并使用 `polyeig`计算矩阵非线性特征值问题的特征值。现在，计算得到的特征值随着 $n \to \infty$而收敛；然而，收敛速度非常慢（见 图4.1（右））。此例表明，即使离散化得到的特征值正在收敛，如果收敛速度很慢，计算成本也可能高得难以承受。

4.2. 示例2：二维声波。在 NLEVP 集合中，有一个二维声波示例，名为 acoustic wave 2d，并使用有限元方法进行离散化。该非线性特征值问题定义在 $L^2([0,1]^2)$ 上，其形式为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 4\pi^2\lambda^2 p = 0 \\ &p(0,y) = p(x,0) = p(x,1) = 0, \quad \chi\frac{\partial p}{\partial x}(1,y) + 2\pi i\lambda p(1,y) = 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

参数的含义与(4.1)中相同。

我们首先选择 $\chi = 1$。对于这个 χ，(4.3) 的谱非空，与一维情形不同。然而，(4.3) 在复平面上的区域 $[-10,10] \times [0.6,4]$ 内没有特征值，这一点可利用(2.8)中的迹公式证明。尽管如此，针对 $n = 56$、240 和 506 的矩阵非线性特征值问题在该区域内却出现了由离散化导致的伪特征值（见图4.3 （左））。图4.2 （右）显示了这一问题的严重程度：只有当离散化规模超过 10^6后，伪特征值才会移出半径为 10 的圆盘。在复平面上，靠近实轴的某个区域内，离散化确实能够正确逼近谱（见图4.3 （右））——要确定哪些区域会出现伪特征值、哪些区域内计算出的特征值值得信赖，似乎颇具挑战性。[9] 相比之下，

[9]为了说明这有多难，直到最近，人们才以某种普遍意义刻画出线性特征值问题中谱污染的位置 [8]。

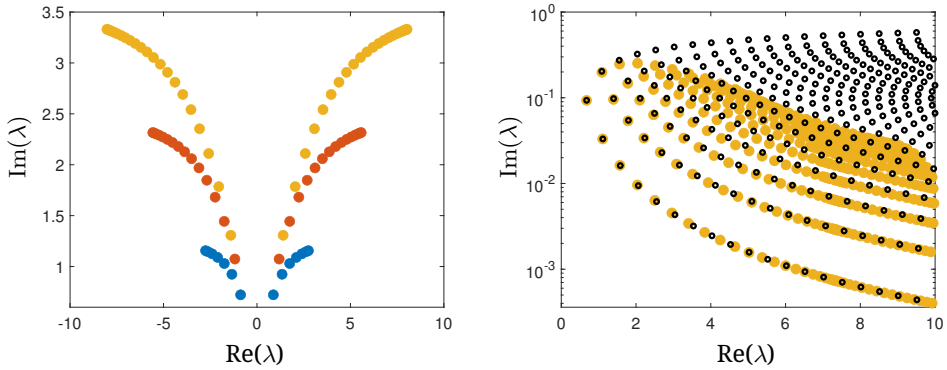


FIGURE 4.3　*The spectra of the acoustic wave 2D example for* $\chi = 1$. *Left: Eigenvalues* 。、、、、 *of the discretized problem* `acoustic wave 2d` *for discretization sizes* $n = 56$ 240 *and* 506. *The* （） *discretization sizes are constrained to be of the form* $n = n_0\ n_0 - 1$. *There are no eigenvalues* （。） *of* 4 3 *in this region. Right: A region in the complex plane close to the real axis that does contain* （。） *eigenvalues of* 4 3 . *These are shown as black dots and are computed using InfBeyn. The yellow dots are eigenvalues of the discrete problem for* $n = 506$ *showing convergence to a proportion of , them. We only show a region in the right-half plane because the spectrum of the infinite-dimensional NEP and eigenvalues of the discretization are symmetric about the imaginary axis.*

InfBeyn 在复平面上的区域 $[-10, 10] \times [0.6, 4]$ 内正确地返回无特征值的结果，并准确计算出靠近实轴的特征值。总之，离散化在一个区域内产生伪特征值，而在另一个区域内则收敛缓慢。我们认为这个例子令人担忧，因为这两个区域在复平面上相距较近，因而离散化后很难识别谱污染。

当 $\chi \notin (-\infty,\ -1] \cup [1, \infty)$ 时，谱的一个子集由无穷多个单特征值组成，它们满足以下渐近公式：

$$\lambda_k \sim \text{sign}\left[\text{Re}\left(i\sqrt{\frac{1}{\chi^2 - 1}}\right)\right] k/(2\sqrt{1 - 1/\chi^2}), \qquad k \to \infty,$$

其中需要使用符号函数来处理支割。现在取 $\chi = 0.8$，对于这个 χ 的取值，满足上述渐近公式的 (4.3) 的特征值为纯虚数。图 4.4 展示了采用不同离散化规模的离散问题对这些特征值的近似结果。同样，无限维问题的特征值以黑色圆圈表示，并使用 InfBeyn 计算得到。离散问题的特征值关于虚轴对称。当第 k 对特征值趋近虚轴时，它们会发生碰撞，随后分裂。其中一个特征值收敛到 λ_k，另一个则趋于无穷大。换言之，离散问题高估了实际重数。

4.3. 例3：蝴蝶。作为下一个例子，我们进一步说明验证式(2.12)中近似伪谱的重要性，并表明我们的方法并不限于微分算子。我们考虑 NLEVP 集合中的非线性特征值问题蝴蝶，它是一种有理非线性特征值问题，由 $\ell^2(\mathbb{Z})$ [47]上的双边移位算子截断构造而成。该矩阵铅笔依赖于向量 $c \in \mathbb{C}^{10}$，我们取

$c = [0.2i, 0, 1.3, 0, 0.1, 0, 1, 0, 0, 0]$。

图 4.5（左）展示了使用矩阵维数 $n = 500$对离散化问题求得的特征值和伪谱。随着 $n \to \infty$，特征值似乎趋于复平面中的四条弧线。在图 4.5的右侧，我们展示了计算得到的伪谱

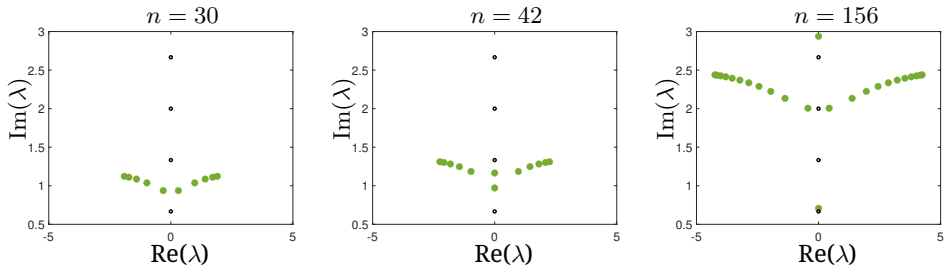


FIGURE 4.4. *As the discretization size increases, we observe the eigenvalues of the discretization (green dots) collide onto the imaginary axis and a few converge to the eigenvalues of the infinite-dimensional problem (black dots). The eigenvalues of the discretization are potentially misleading because the eigenvalues of the infinite-dimensional problem are simple. Still it appears that two eigenvalues of the discretization are converging to each one.*

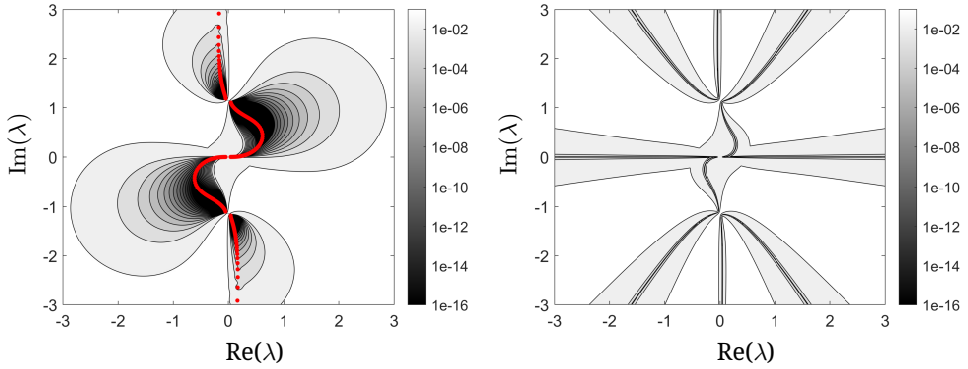


FIGURE 4.5 *The computed pseudospectra of the butterfly NEP. Left: The pseudospectra of the discretized pencil using matrices of size $n = 500$. The eigenvalues are shown as red dots and converge to the union of four arcs as $n \to \infty$. Right: The pseudospectra computed using the functions γ_n from 2 10 and an adaptive truncation size. These pseudospectra are guaranteed to be inside the pseudospectra of the infinite-dimensional problem and converge as $n \to \infty$.*

使用函数 γ_n，它们来自 (2.10)。这些算子是作用于 $l^2(\mathbb{Z})$ 上的无限带状矩阵，因此可以直接使用矩形截断来计算 γ_n。我们采用 λ自适应截断规模来确保图像收敛。图像清楚地显示，离散化算子存在谱污染、不可见性和不稳定性。对于这个特定示例，将离散化改为用循环矩阵逼近移位算子效果更好。然而，一般而言，这种做法并不能保证避开离散化带来的问题。

4.4. 示例 4：阻尼梁。现在我们来考虑 NLEVP 集合中名为阻尼梁的 NEP。其表达式为

$$\frac{d^4v}{dx^4}(x) - \alpha_0\lambda^2 v(x) = \beta\lambda v(x)\delta(x-1/2), \quad v(0) = \frac{d^2v}{dx^2}(0) = v(1) = \frac{d^2v}{dx^2}(1) = 0, \tag{4.4}$$

其中 α_0，$\beta < 0$ 是固定的物理常数，而 v 表示梁的横向位移。我们采用 NLEVP 的默认参数值 $\alpha_0 = -0.018486857142857$ 和 $\beta = -0.137142857142857$。函数 $\delta(\cdot)$ 在 (4.4) 中是狄拉克 delta 函数，其含义是 v、v'和 v'' 在 $x = 1/2$处连续，但

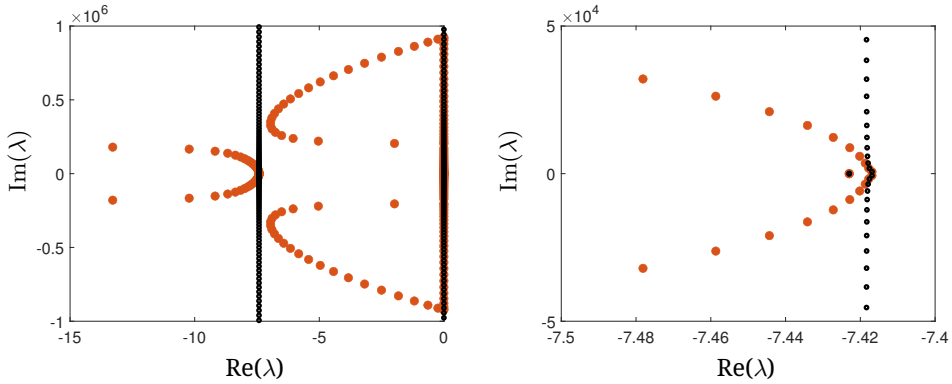


FIGURE 4.6。

Computed eigenvalues of discretization (red dots) compared to the eigenvalues computed from InfBeyn (black dots). Left: Eigenvalues in the region $[-15,0]\times[-10^6,10^6]$. *Right: A magnified picture of the eigenvalues in the region* $[-7.5,-7.4]\times[-5\times10^4,5\times10^4]$. *The eigenvalues of the discretized NEP show significant errors.*

v'''发生跳跃，即，

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\left[\frac{d^3v}{dx^3}(1/2+\epsilon)-\frac{d^3v}{dx^3}(1/2-\epsilon)\right]=\beta\lambda v(1/2).$$

该非线性特征值问题是一个二次特征值问题，源于对两端支撑且中部设有阻尼的梁进行振动分析 [32]。

我们使用有限元法进行离散化(4.4)，并采用三次 Hermite 多项式作为插值形函数 [20]。(4.4) 的特征值分为两组。第一组为纯虚特征值，其公式如下：

$$\lambda_k^{(1,\pm)}=\pm 4\pi^2k^2i/\sqrt{-\alpha_0},\quad k\geq 0,$$

相应的特征函数在 $x=1/2$ 处为零。第二组具有以下渐近公式：

$$\lambda_k^{(2,\pm)}=\frac{4}{\sqrt{\alpha_0}}\left[\pm\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)i+\frac{\beta}{8k\pi\sqrt{-\alpha_0}}\right]^2+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right),\qquad k\to\infty. \tag{4.5}$$

渐近公式对于基于围道的方法很有益处，因为它们能告知我们应将围道中心置于何处。此外，如果渐近公式附带明确的误差估计，我们便可以选择围道的大小。(4.5) 中的渐近公式使我们能够使用半径为 1、中心位于 $\lambda_k^{(2,\pm)}$ 的圆形围道，通过 InfBeyn 计算大 k。定位定理是渐近方法的替代方案，对于非线性特征值问题 [6]，而言同样非常有用，也适用于基于围道的方法。

图 4.6 显示了离散化尺寸为 $n=100$时离散化问题的特征值，以及使用 InfBeyn 计算得到的特征值。将 InfBeyn 对 $\lambda_k^{(2,+)}$ 在 $1\leq k\leq 100$ 处的近似与渐近展开的前四项进行比较可知，InfBeyn 已计算出图 4.7 中的所有特征值，且相对误差小于 10^{-12}。离散化对第一组特征值 $\{\lambda_k^{(1,\pm)}\}$实部的近似效果很好，但由于虚部存在误差，只有少数特征值是准确的。令人惊讶的是，离散化对相应特征函数的解析效果很好。例如，图 4.7 展示了对应于 $\lambda_{10}^{(1,+)}$ 和

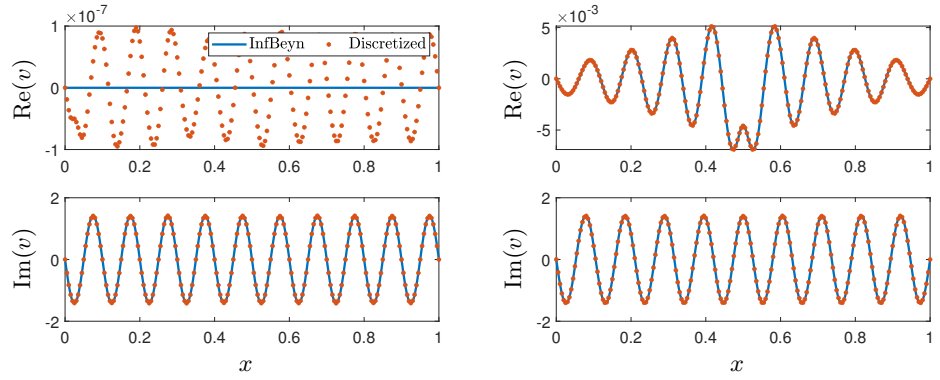


FIGURE 4.7. *The real (top row) and imaginary (bottom row) of the eigenfunctions corresponding to* $\lambda_{10}^{(1,+)}$ *(left) and* $\lambda_{10}^{(2,+)}$ *(right). Surprisingly, the eigenfunctions are well-resolved by the discrete NEP while the corresponding eigenvalues* $\lambda_{10}^{(1,+)}$ *and* $\lambda_{10}^{(2,+)}$ *are not.*

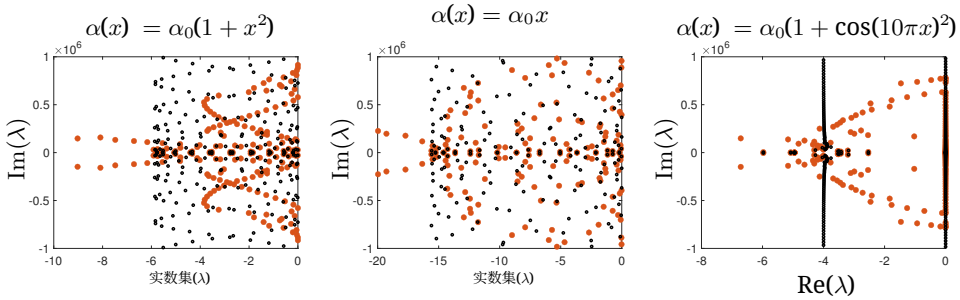


FIGURE 4.8。 *Same as Figure 4。6 but with the shown variable coefficient* $\alpha(x)$ *replacing* α_0 *in* (4.4)。

$\lambda_{10}^{(2,+)}$。该 $L^2([0,1])$近似特征函数与真实特征函数之间的子空间夹角（使用 InfBeyn 计算）约为 10^{-3}。然而， $\lambda_{10}^{(1,+)}$ 和 $\lambda_{10}^{(2,+)}$ 的近似误差分别为 48.1040 和 35.5109。因此，与线性特征值问题不同，仅仅解析出特征函数并不足以准确计算相应的特征值。我们对此感到极为不安。图 4.8 展示了将 α_0 (4.4) 替换为变系数 $\alpha(x)$ 后计算得到的特征值。[10] 复平面中计算所得特征值可靠的区域以非平凡的方式取决于该系数。

4.5. 例5：受载弦。接下来，我们来看看 NLEVP 集合中的另一个非线性特征值问题，名为“受载弦”。该非线性特征值问题定义为

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u, \qquad u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx}(1) + \frac{\lambda\kappa M}{\lambda - \kappa}u(1) = 0. \tag{4.6}$$

它描述了一个弦的振动，该弦上附加了质量为 M 的负载，并连接到刚度为 κ [57]的弹性弹簧上。我们使用默认参数 $M = \kappa = 1$。其特征值

[10]对于由常系数耦合偏微分方程组成的非线性特征值问题（NEPs），我们有时可以求出每个定义域上的特征值相关解，并将问题简化为一个描述边界值之间关系的有限维非线性特征值问题 [1]。对于(4.4)，当所有系数均为常数时，可以采用这种方法，但对于变系数问题，通常无法做到这一点。

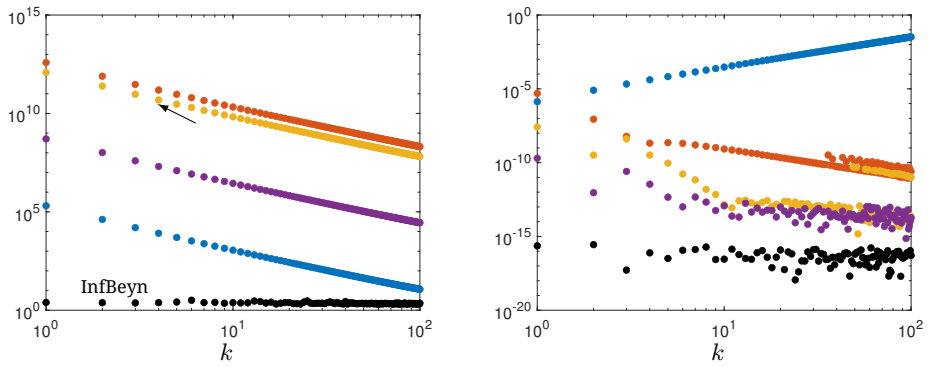


FIGURE 4.9 *A comparison of four discretization methods and InfBeyn for 4 6 . Left: A 。 (。) discretization method can construct a NEP that has severely ill-conditioned eigenvalues. Right: The relative accuracy of the computed eigenvalues.*

物理关注区间位于区间 $(\kappa, \infty) \subset \mathbb{R}$ 内，并且是以下方程的解：

$$\cos\left(\sqrt{\lambda}\right) + \frac{\sqrt{\lambda}\kappa M}{\lambda - \kappa} \sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0. \tag{4.7}$$

由于无限维非线性特征值问题的瑞利商随谱参数单调递增，因此可以证明，线性有限元法构造的离散非线性特征值问题，其特征值会收敛到 (4.6) 的谱，不会出现谱污染或特征值遗漏 [56]。然而，离散化仍可能引入严重的病态性，进而可能（但不一定）导致浮点运算中计算出的特征值不准确。

我们考虑四种离散化方法，并将其与 InfBeyn 进行比较。第一种离散化方法采用文献 [57], 中提出的有限元方法；第二种采用切比雪夫配置法 [22], ；第三种采用基于勒让德多项式的标准伽辽金法；第四种采用超球谱方法 [50]。为了计算每种离散化方法的精度，我们使用由渐近公式提供初始猜测的牛顿法，求解(4.7)$\lambda_k \sim (k - 1/2)^2\pi^2$ ，其中 $k \to \infty$。该渐近公式还指导我们选择 InfBeyn 中轮廓线的中心。图 4.9 （左）展示了所得离散非线性特征值问题的前 100 个特征值的相对条件数（条件数公式见 [29, 定理 2。20]），对应于 500×500 种离散化方法。我们还展示了 InfBeyn 对应的条件数。尽管这些条件数颇具参考价值，但它们对于理解所计算特征值的最终精度几乎没有帮助（见图 4.9 （右）），这可能是因为浮点舍入误差引发了高度结构化的扰动。此外，所计算特征值的相对精度还取决于离散化所得特征值的收敛速度。

4.6. 示例 6：平面波导。最后一个示例中，我们来看看 NLEVP 集合中称为平面波导的非线性特征值问题。该非线性特征值问题描述电磁波在多层介质中的传播特性，其折射率 η 沿 x方向变化 [59]。原问题是在无界区域 $\mathbb{R}$ 上的线性特征值问题，同时具有离散谱和本质谱 [44]。

更准确地说，考虑一种由 $J + 1$ 层组成的材料，其结构由以下内容描述。

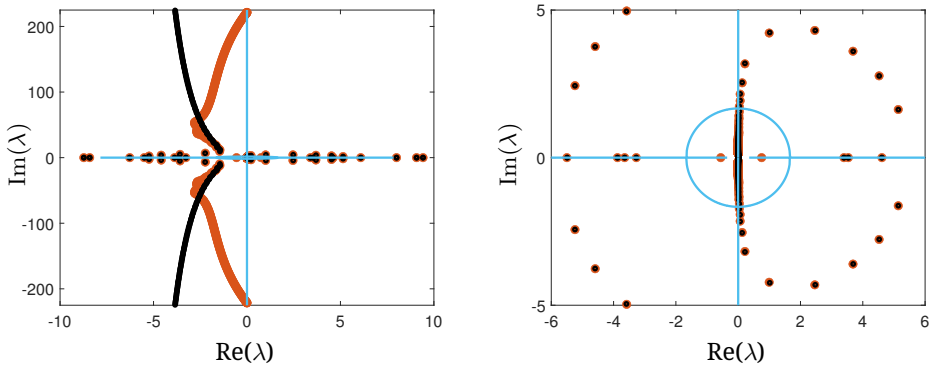


FIGURE 4.10 *Spectra of the planar waveguide problem in the λ plane. Left: The eigenvalues of , the discretized planar waveguide problem are shown in red. The eigenvalues computed by InfBeyn are shown as black circles and verified using infinite-dimensional residuals. Right: A magnified region near λ = 0. The discretized problem has spurious modes*

and several branches of the modes collapse onto the essential spectrum of the underlying problem posed on ℝ (shown in light blue).

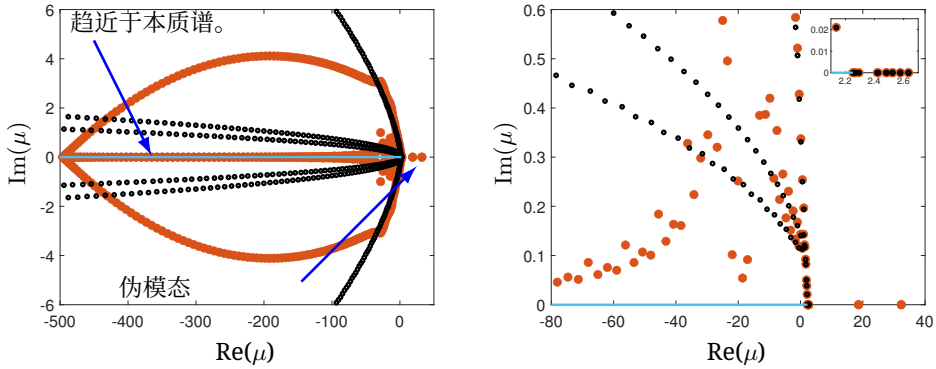


FIGURE 4.11 *Same as Figure 4 10 but in the μ λ plane. The essential spectrum of the。 。() (, 最大值 underlying problem posed on ℝ is the semi-infinite interval μ ∈ −∞ {η₀², η_J²}].*

折射率 $\eta_0, \ldots, \eta_J$和界面的位置 $x_1 = 0 < x_2 < \cdots < x_J = L$，使得 $\eta(x) = \eta_0$ 若 $x < x_1$，$\eta(x) = \eta_j$ 若 $x_j < x < x_{j+1}$，且 $\eta(x) = \eta_J$若 $x > x_J$。截断域为 $[x_1, x_J] = [0, L]$。对于频率 k，我们定义$\delta_\pm = k^2(\eta_0^2 \pm \eta_J^2)/2$。该非线性特征值问题由以下给出。

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) + k^2[\eta^2(x) - \mu(\lambda)]\phi(x) = 0, \quad \mu(\lambda) = \frac{\delta_+}{k^2} + \frac{\delta_-}{8k^2\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{k^2}, \\ &\frac{d\phi}{dx}(0) + \left(\frac{\delta_-}{2\lambda} - \lambda\right)\phi(0) = 0, \quad \frac{d\phi}{dx}(L) + \left(\frac{\delta_-}{2\lambda} + \lambda\right)\phi(L) = 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

我们采用默认参数 $J = 5$, $\eta_0 = 1.5$, $\eta_1 = 1.66$, $\eta_2 = 1.6$, $\eta_3 = 1.53$, η_4 =1。66, $\eta_5 = 1.0$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1.0$, $x_4 = 1.5$, $x_5 = 2.0$和 $k = 2\pi/0.6328$。

我们使用分段线性有限元对 (4.8) 进行离散化。图 4.10 展示了使用有限元和离散化规模 $n = 129$（NLEVP 的默认值）计算得到的特征值，以及使用 InfBeyn 计算得到的特征值。我们还展示了无界区域上线性问题的本质谱，其表达式为

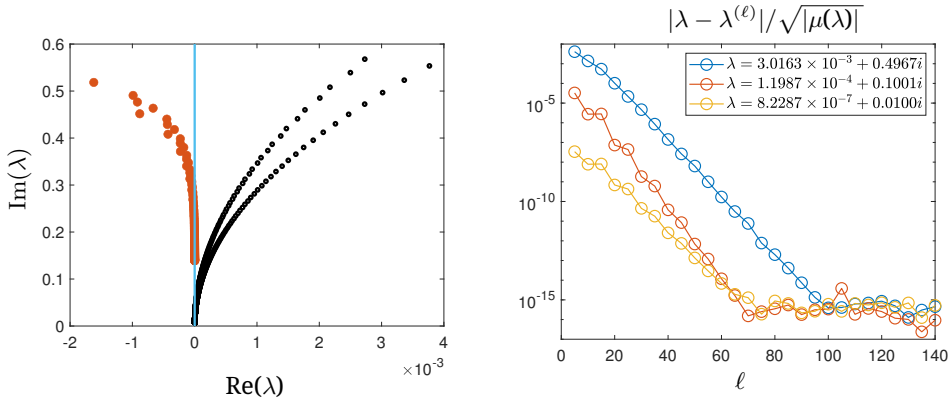


FIGURE 4.12. *Left: Eigenvalues accumulating at the essential spectral point* $\lambda = 0$. *Right: Relative accuracy of the computed eigenvalues* $\lambda^{(\ell)}$ *for* ℓ *quadrature points in* (2.7). *We have relativized by* $\sqrt{|\mu(\lambda)|}$ *to capture the different rational scalings of* λ *in the NEP.*

由 λ给出，其中 $\mu(\lambda) \in (-\infty,$ 最大值$\{\eta_0^2, \eta_J^2\}]$。[11] 离散化 NEP 的大多数特征值都不准确，而且还存在伪导模。许多模态都塌缩到了定义在 $\mathbb{R}$上的线性特征值问题的本质谱上。这类离散化问题中常见这一现象 [24, 图 3]。相比之下， $\lambda = 0$ 是 NEP 本质谱中的唯一点。在图 4.10的右图中，我们可以看到离散谱在 $\lambda = 0$处聚集，这也给离散化问题带来了困难。 图 4.11展示了在$\mu(\lambda)$ 平面中的类似图像。

作为最后一项实验，我们展示了一个靠近本质谱的区域，位置在 $\lambda = 0$(见 图 4.12(左图))。我们看到，使用 InfBeyn 计算得到的谱在此处聚集。右图展示了随着求积节点数量增加，结果收敛到三个特征值的情况，其中使用了一个包围若干特征值的圆形围道。这表明，对于具有聚集谱的问题，InfBeyn 等无限维围道方法十分有效，这得益于它们的局部性、可并行性和快速收敛。

5. 结论。 正如六个示例所示，对无限维非线性特征值问题进行离散化可能会改变、破坏稳定性，甚至消除特征值。通过延后离散化，我们提出了用于计算无限维非线性特征值问题的谱和伪谱的实用算法，避免了这些问题，并证明了其稳定性和收敛性。我们希望本文能成为无限维非线性特征值问题求解器研究的开端。例如，虽然 InfBeyn 处理谱为离散的区域，而我们用于计算伪谱的方法可以处理本质谱，但我们设想未来能够直接计算非线性特征值问题本质谱的无限维算法。我们也十分关注这对后续应用的影响，例如降阶模型 [12, 25, 46] 以及保结构无限维求解器的开发。无限维非线性特征值问题求解器有望在具有挑战性的应用中，为具有物理意义的谱提供更加稳健的计算。

参考文献

[11]为此，考虑 $\mathbb{R}$ 上的修改后的线性问题，其满足 $\eta_1 = \cdots = \eta_J$，其中本质谱为 $\mu(\lambda) \in (-\infty,$ $\max\{\eta_0^2, \eta_J^2\}]$。随后证明，修改后问题的预解算子与原问题的预解算子之差是一个紧算子 [38, p。 244]。

[1] J. P. Baker, M. Embree, and J. N. Green, *Networks of vibrating strings: A model nonlinear eigenvalue problem* 2023 , 编写中, （）。[2] G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*, 第 268 卷, Springer Science & Business Media, 1993 年。[3] T. Betcke, N. J. Higham, V. Mehrmann, C. Schröder, and F. Tisseur, *NLEVP: A collection of nonlinear eigenvalue problems* 39 2013 1 28 , ACM Trans. Math. Soft., （）, 第 – 页。[4] T. Betcke and L. N. Trefethen, *Reviving the method of particular solutions*, SIAM Rev., 47（2005）, 第 469–491 页。[5] W.-J. Beyn, *An integral method for solving nonlinear eigenvalue problems*, Lin. Alg. Appl., 436（2012）, 第 3839–3863 页。[6] D. Bindel and A. Hood, *Localization theorems for nonlinear eigenvalue problems*, SIAM Rev., 57（2015）, 第 585–607 页。[7] D. Bindel and M. Zworski, *Theory and computation of resonances in 1-d scattering* （2006）。[8] S. BöGli, M. Marletta, and C. Tretter, *The essential numerical range for unbounded linear operators* 279 2020 108509 , J. Func. Anal., （）, 第 页。

[9] M. Botchev, G. Sleijpen and A. Sopaheluwakan *An SVD-approach to Jacobi–Davidson* , , , Lin. *solution of nonlinear Helmholtz eigenvalue problems* 431 2009 427 Alg. Appl., （）, 第 – 440 页。[10] N. Boulle and A. Townsend, *A generalization of the randomized singular value decomposition* 2022 , 载于国际学习表征会议, 。

[11] N. Boullé and A. Townsend, *Learning elliptic partial differential equations with randomized linear algebra* 2022 1 31 , 《计算数学基础》, （）, 第 – 页。[12] M. C. Brennan, M. Embree, and S. Gugercin, *Contour integral methods for nonlinear eigenvalue problems: A systems theoretic approach* 2012 14979, 2020 , arXiv 预印本 arXiv: 。（）。

[13] F. Chaitin-Chatelin and M. B. van Gijzen, *Analysis of parameterized quadratic eigenvalue problems in computational acoustics with homotopic deviation theory* , Numer. Lin. Alg. Appl., 13（2006）, 第 487–512 页。[14] Y. M. Chen, X. S. Chen, and W. Li, *On perturbation bounds for orthogonal projections*, Numer. Algor., 73（2016）, 第 433–444 页。[15] M. Colbrook, *The foundations of infinite-dimensional spectral computations*, 博士论文, 剑桥大学, 2020 年。[16] M. J. Colbrook, *infNEP*。https://github.com/MColbrook/infNEP, 2023 年。[17] M. J. Colbrook and A. C. Hansen, *The foundations of spectral computations via the solvability complexity index hierarchy* 2022 , J. Euro. Math. Soc., （）。

[18] M. J. Colbrook, B. Roman, and A. C. Hansen, *How to compute spectra with error control*, Phys. Rev. Lett., 122（2019）, 第 250201 页。[19] M. J. Colbrook and A. Townsend, *Rigorous data-driven computation of spectral properties of Koopman operators for dynamical systems* 2111 14889, 2021 , arXiv 预印本 arXiv: 。（）。

[20] A. R. Collar and A. Simpson, *Matrices and engineering dynamics*, Ellis Horwood, 1987 年。
[21] R. Di Prima and G. Habetler, *A completeness theorem for non-selfadjoint eigenvalue problems in hydrodynamic stability*, 《理性力学与分析档案》, 34（1969）, 第 218–227 页。
[22] T. A. Driscoll and N. Hale, *Rectangular spectral collocation*, IMA J. Numer. Anal., 36（2016）, 第 108–132 页。
[23] C. Engström and M. Wang, *Complex dispersion relation calculations with the symmetric interior penalty method* 84 2010 849 863 , Inter. J. Numer. Meth. Eng., （）, 第 – 页。[24] J. Gopalakrishnan, B. Q. Parker, and P. Vandenberge, *Computing leaky modes of optical fibers using a FEAST algorithm for polynomial eigenproblems*, 《波动》, 108（2022）, 第 102826 页。[25] N. Gräbner, V. Mehrmann, S. Quraishi, C. Schröder, and U. von Wagner, *Numerical methods for parametric model reduction in the simulation of disk brake squeal* , ZAMM-J. Appl. Math. Mech., 96（2016）, 第 1388–1405 页。[26] K. Green and T. Wagenknecht, *Pseudospectra and delay differential equations*, J. Comput. Appl. Math., 196（2006）, 第 567–578 页。[27] R. D. Grigorieff and H. Jeggle, *Approximation von Eigenwertproblemen bei nichtlinearer Parameterabhängigkeit* 10 1973 245 271 , 《数学手稿》, （）, 第 – 页。

[28] C. E. Grosch and H. Salwen, *The continuous spectrum of the Orr–Sommerfeld equation. Part 1. The spectrum and the eigenfunctions* 87 1978 33 54 , J. Fluid Mech., （）, 第 – 页。
[29] S. Güttel and F. Tisseur, *The nonlinear eigenvalue problem*, Acta Numer., 26（2017）, 第 1–94 页。
[30] I. Harari, K. Grosh, T. Hughes, M. Malhotra, P. Pinsky, J. Stewart, and L. Thompson, *Recent developments in finite element methods for structural acoustics* , Arch. Comput. Meth. Eng., 3（1996）, 第 131–309 页。[31] D. J. Higham and N. J. Higham, *Structured backward error and condition of generalized eigenvalue problems* 20 1998 493 512 , SIAM J. Matrix Anal. Appl., （）, 第 – 页。[32] N. J. Higham, D. S. Mackey, F. Tisseur, and S. D. Garvey, *Scaling sensitivity and stability in the numerical solution of quadratic eigenvalue problems* , , Inter. J. Numer. Meth. Eng., 73（2008）, 第 344–360 页。[33] N. J. Higham and F. Tisseur, *More on pseudospectra for polynomial eigenvalue problems and applications in control theory* 351 2002 435 453 , Lin. Alg. Appl., （）, 第 – 页。

[34] A. Horning and A. Townsend, *Feast for differential eigenvalue problems*, SIAM 数值分析杂志, 58 (2020), 第 1239–1262 页。[35] E. Jarlebring, *The spectrum of delay-differential equations: Numerical methods stability and perturbation* , , 2008 博士论文, 。[36] H. Jeggle and W. Wendland, *On the discrete approximation of eigenvalue problems with holomorphic parameter dependence* 78 1977 1 , 爱丁堡皇家学会会刊 A 辑：数学, ( ), 第 – 29 页。[37] T. Kato, *Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators*, J. d' Analyse Math., 6 (1958), 第 261–322 页。[38] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 第 132 卷, Springer Science & Business Media, 第二版, 1976。[39] M. V. Keldysh, *On the characteristic values and characteristic functions of certain classes of non-self-adjoint equations* 77, 1951, 11 14 , 载于 Dokl. Akad. Nauk SSSR, 第 卷, 第 – 页。[40] , *On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators* 26 1971 15 41 , Uspekhi matematicheskikh nauk, ( ), 第 – 页。[41] Z. Kukelova, M. Bujnak, and T. Pajdla, *Polynomial eigenvalue solutions to the 5-pt and 6-pt relative pose problems.* 2, 2008, 2008 , 载于 BMVC, 第 卷, 第 页。

[42] P. Lancaster, *Lambda-matrices and vibrating systems*, Courier Corporation, 2002。[43] B.-S. Liao, Z. Bai L.-Q. Lee and K. Ko *Nonlinear Rayleigh–Ritz iterative method for* , , , , Taiwanese J. Math., ( ), 第 – *solving large scale nonlinear eigenvalue problems* 14 2010 869 883 页。[44] D. Marcuse, *Theory of dielectric optical waveguides*, Elsevier, 2013。[45] V. Mehrmann and C. Schröder, *Nonlinear eigenvalue and frequency response problems in industrial practice* 1 2011 1 18 , J. Math. Ind., ( ), 第 – 页。

[46] V. Mehrmann and C. Schroder, *Eigenvalue analysis and model reduction in the treatment of disc brake squeal* 49 2016 1 3 , SIAM 新闻, ( ), 第 – 页。

[47] V. Mehrmann and D. Watkins, *Polynomial eigenvalue problems with Hamiltonian structure.*, Electr. Trans. Numer. Anal., 13 (2002), 第 106–118 页。[48] R. Mennicken and M. Möller, *Non-self-adjoint boundary eigenvalue problems*, 第 192 卷, Gulf Professional Publishing, 2003。[49] W. Michiels, K. Green, T. Wagenknecht, and S.-I. Niculescu, *Pseudospectra and stability radii for analytic matrix functions with application to time-delay systems* , Lin. Alg. Appl., 418 (2006), 第 315–335 页。[50] S. Olver and A. Townsend, *A fast and well-conditioned spectral method*, SIAM Rev., 55 (2013), 第 462–489 页。[51] S. A. Orszag, *Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation*, J. Fluid Mech., 50 (1971), 第 689–703 页。[52] S. C. Reddy, P. J. Schmid and D. S. Henningson *Pseudospectra of the Orr–Sommerfeld* , , , *operator* 53 1993 15 47 SIAM J. Appl. Math., ( ), 第 – 页。[53] K. Sakoda, N. Kawai, T. Ito, A. Chutinan, S. Noda, T. Mitsuyu, and K. Hirao, *Photonic bands of metallic systems. I. Principle of calculation and accuracy* 64 2001 , Phys. Rev. B, ( ), 第 045116 页。

[54] F. W. Schäfke and A. Schneider, *S-hermitesche rand-eigenwertprobleme. I*, Mathematische Annalen, 162 (1965), 第 9–26 页。[55] P. J. Schmid, D. S. Henningson and D. Jankowski *Stability and transition in shear flows.* , , , , *applied mathematical sciences vol. 142* 55 2002 57 59 Appl. Mech. Rev., ( ), 第 B –B 页。[56] S. I. Solov'ev, *The finite-element method for symmetric nonlinear eigenvalue problems*, Zhur- nal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki, 37 (1997), 第 1311–1318 页。[57] S. I. Solov'ëv, *Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems*, Lin. Alg. Appl., 415 (2006), 第 210–229 页。[58] O. Steinbach and G. Unger, *A boundary element method for the Dirichlet eigenvalue problem of the Laplace operator* 113 2009 281 298 , Numer. Math., ( ), 第 – 页。[59] D. Stowell and J. Tausch, *Variational formulation for guided and leaky modes in multilayer dielectric waveguides* 7 2010 564 , Comm. Comput. Phys., ( ), 第 页。[60] F. Tisseur, *Backward error and condition of polynomial eigenvalue problems*, Lin. Alg. Appl., 309 (2000), 第 339–361 页。[61] F. Tisseur and N. J. Higham, *Structured pseudospectra for polynomial eigenvalue problems, with applications* 23 2001 187 208 , SIAM J. Matrix Anal. Appl., ( ), 第 – 页。[62] A. Townsend and L. N. Trefethen, *Continuous analogues of matrix factorizations*, Proc. Roy. Soc. A: Math., Phys. Eng. Sci., 471 (2015), 第 20140585 页。[63] L. N. Trefethen, *Computation of pseudospectra*, Acta Numer., 8 (1999), 第 247–295 页。[64] L. N. Trefethen and M. Embree, *Spectra and pseudospectra: the behavior of nonnormal matrices and operators* 2005 , 普林斯顿大学出版社, 。

[65] H. Voss, *A rational spectral problem in fluid-solid vibration*, 数学研究所预印本, (2002)。[66] T. Wagenknecht, *Structured pseudospectra for nonlinear eigenvalue problems* 212 2008 245 259 , J. Comput. Appl. Math., ( ), 第 – 页。[67] J. Zyonek, A. Horning, and A. Townsend, *contourlr++: Stochastic trace estimation for functions* 2023 , 编写中, ( )。