arXiv:2305.01697v1 [math.OC] 2 May 2023

需要给出多少条线索？最小数独问题的双层建模

预印本

Gennesaret Tjusila
tjusila@campus.tu-berlin.de

Mathieu Besançon†
besancon@zib.de

Mark Turner*
turner@zib.de

Thorsten Koch*†
koch@zib.de

2023年5月4日

摘要

已有研究表明，任何 9×9 数独谜题至少需要 17 个提示数才能有唯一解。本文研究一个更具体的问题：给定一个已填完的数独网格，能够使该网格成为唯一解的数独谜题，最少需要多少个提示数？我们称此问题为数独最少线索问题（MSCP）。我们将 MSCP 建模为二元双层线性规划，提出一类全局有效不等式，并对 50 个 9×9 数独网格的 MSCP 实例进行计算研究。使用通用双层求解器，我们将 95% 的实例求至最优，并表明加入适量的不等式有助于求解过程。最后，我们将所提出的模型扩展至其他关注解的唯一性的组合问题。

1 引言

数独谜题最早刊登于*Dell Pencil Puzzle and Word Games* [5]的1979年5月刊。给定一个方形整数 n，谜题呈现在一个 $n \times n$ 网格上，该网格分为 n 个子网格，每个子网格的大小为$\sqrt{n} \times \sqrt{n}$。作为输入，部分单元格已填入 1–n 之间的数字。谜题的目标是填满其余单元格，使 1–n 之间的每个数字在每一行、每一列和每个子网格中都恰好出现一次。图1展示了一个数独谜题及其解。对于大多数数独谜题，解的唯一性是一项理想属性。我们称这类谜题为有效的。构造 9×9 含有77 个提示数且有多个解的数独谜题相当容易（例如，删除图1b中标记为绿色的数字）。我们还可以观察到，任何至少含有78 个提示数的谜题都必定有唯一解。

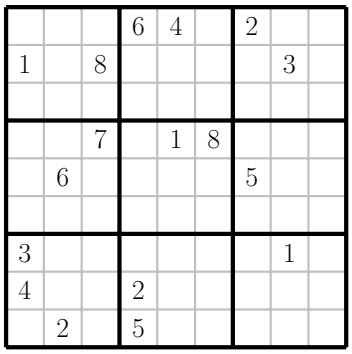
一个自然会产生的问题是：一个有效谜题最少可以有多少个线索？ [25] 表明，这个问题的答案是17个线索。但如果谜题设计者心中已经有一个解网格呢？由此引出了数独最少线索问题（MSCP）：对于给定的数独网格，任何有效谜题最少需要多少个线索？

本文有四项主要贡献。首先，我们将MSCP表述为一个二元双层线性规划，从而能够使用通用的整数双层方法和求解器；据我们所知，这是文献中的首次尝试。其次，我们提出不可避免集不等式，这是一组全局有效不等式，并在求解过程开始时将其加入模型，以提升求解器的性能。第三，我们针对一组数独网格给出计算结果，展示了我们方法的可行性。最后，我们将模型推广到满足 [6]中提出的最少提示数问题（FCP）类别的某些假设的其他问题。需要指出的是，本文是第一作者学位论文工作的扩展 [31]。

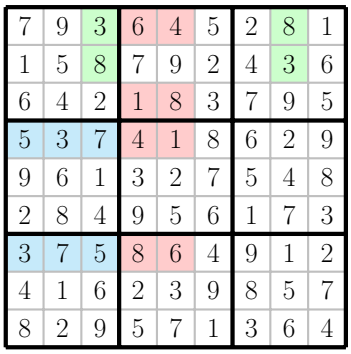
2 相关工作

统计 $n \times n$ 数独网格总数的问题仍未解决。对于 $n = 9$， [11] 证明了数独网格的数量约为 6.671×10^{21}。一个自然的上界可由以下事实得出：

*Zuse Institute Berlin，数学优化系，Takustr. 7, 141 95 柏林



（a）一个数独谜题



（b）解网格及其不可避免集

图 1：一个数独谜题及其解和不可避免集

数独网格是带有额外子网格约束的拉丁方的子集。文献中对拉丁方枚举进行了广泛研究 [26], , 推动了对数独开展类似研究 [1, 17]。许多这类网格在数字重新标记和旋转等变换下彼此等价。我们将与给定网格在这些变换下等价的数独网格中，按字典序最小的网格称为该数独网格的 Minlex Form [22]。考虑这些变换后，9×9 数独网格的数量减少到约 5.47×10^9个本质上不同的网格 [29]。虽然我们的工作关注给定数独网格所需的最少线索数，但通过计算机辅助证明已证明，任何数独网格所需的最少线索数为 17 [25]。Gordon Royle 收集了近 50000 个含有 17个线索的数独谜题 [27]。这批谜题仅占所有可能数独网格的一小部分，这有力地表明，大多数数独网格都不存在含有 17 个线索的有效谜题。4×4最少线索数的下界已在 [14]中通过代数过程推导得出：将组合问题编码为多项式，并分析其结构。针对9×9 网格的这一研究方向，主要通过分析数独网格的底层图结构 [4, 23] ，并利用形式逻辑刻画有效数独谜题 [24]。

求解一般的 $n \times n$ 数独谜题是 ASP 完全的，这意味着该判定问题是 NP 完全的，同时计数解的问题是 #P 完全的 [32]。不过，文献中已有求解规模为 9×9 的数独谜题的实用方法 [3]。近期也有研究致力于开发能够向人类解释数独谜题解法的算法 [2]。给定一个数独网格，判定问题“是否存在一个至多包含k 个提示数的设置，使得给定网格是唯一解？”属于“最少提示数问题”（FCP）这一问题类别，并已证明是 Σ_2^P 完全的 [6]。文献 [7, 20] 也已证明，混合整数双层线性规划是 Σ_2^P 完全的。因此，将 MSCP 转化为二元双层线性规划会保留相同的复杂性，同时允许采用通用求解方法。

据我们所知，所有现有的用于求解 MSCP 的软件库都是由数独社区创建的、针对特定问题的软件库，示例见 [9] 。这些软件使用模式匹配算法来快速查找所谓的不可避免集，例如 [25]中所述。不可避免集定义为这样一组单元格：移除这些单元格中的内容后，会得到一个无效的数独谜题。图1b中以绿色、红色或蓝色标记的单元格就是这类集合的示例。给定一组不可避免集 S，如果对于 S 中的每个不可避免集，至少有一个单元格属于 H ，那么我们称单元格集合 为一个击中集。 H当生成了足够多的不可避免集后，可以枚举这些不可避免集的所有击中集，从基数最小的击中集开始，直到找到一个有效谜题为止。尽管从理论上说，枚举不可避免集的成本很高，但在实践中，专用算法往往速度很快，这得益于额外的特定问题方法，例如利用数独网格的等价类。我们还要指出，击中集的枚举，尤其是最小击中集的枚举，是一个活跃的研究领域 [15]。与现有软件不同，我们采用通用的数学优化方法来求解 MSC。我们将使用整数线性规划模型来查找不可避免集，并生成有效不等式，以加快双层求解过程。

3 数独最少线索问题的整数双层线性规划形式

现在，我们针对大小为 $n \times n$ 、其中 n 是平方数的数独网格来构建 MSCP。令 x_{ijk} 为一组二元决策变量，其中 $i, j, k \in [n] := \{1, \ldots, n\}$。若单元格 (i, j) 中填入数字 k，则变量 x_{ijk}取值为 1，并

否则为零。如果这些变量满足相应条件，则构成一个 $n \times n$ 数独网格。

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1, \qquad \forall\, i,\ \ j \in [n] \tag{$G0$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 1, \qquad \forall\, i,\ \ k \in [n] \tag{$G1$}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} = 1, \qquad \forall\, j,\ \ k \in [n] \tag{$G2$}$$

$$\sum_{i=sp-s+1}^{sp} \sum_{j=sq-s+1}^{sq} x_{ijk} = 1, \qquad \forall\, p, q \in [s] \text{ 和 } k \in [n] \tag{$G3$}$$

其中 $s := \sqrt{n}$。这是文献中常见的标准数独整数线性规划（整数线性规划）模型，参见[18, 21]。

令 G 为一个数独网格，它是一个 $n \times n$ 矩阵，其元素属于 $[n]$。我们的二元双层线性规划中的领导者问题将扮演“谜题设置者”的角色，并确定数独网格中的哪些元素作为提示数给出。跟随者问题将扮演“对手”的角色，尝试找到一个不同于给定数独网格的解。具体而言，我们的模型如下

$$\begin{aligned} \min_{x,y,z} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & z = 1 \\ & y_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall\, i,j \in [n] \\ & (x,z) \in S(y) \end{aligned} \tag{$V1$}$$

其中， $S(y)$ 是 y 参数化跟随者问题的最优解集合

$$\begin{aligned} \min_{x,z} \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & (G0) - (G3) \\ & x_{ijG_{ij}} \geq y_{ij}, \quad \forall\, i,j \in [n] && (F1) \\ & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijG_{ij}} - z \leq n^2 - 1 && (N1) \\ & x_{ijk}, z \in \{0,1\}, \quad \forall\, i,j,k \in [n]. \end{aligned}$$

领导者决策变量 y_{ij} 决定是否将单元格（$i,\ j$）中的数值作为线索提供给跟随者问题。领导者问题的目标函数是所提供线索的数量。约束（$F1$）要求跟随者问题遵守这些给定的线索。约束（$N1$）要求由决策变量集合 x_{ijk}（其中 $i,\ j,\ k \in [n]$）定义的数独网格不同于 G。通过将 z 设为 1 并施加惩罚，可以放宽该约束。领导者约束（$V1$）的直观含义如下：跟随者的目标是最小化该惩罚。如果领导者问题确定的谜题有多个解，跟随者可以找到一个惩罚为零的可行解。然而，如果无法做到这一点，那么领导者确定的谜题就是一个有效谜题，跟随者唯一的选择就是接受该惩罚。

最后需要指出的是，只需将 $z = 1$ $y_{ij} = 0$ 对所有 $i,\ j \in [n]$ 都设为与 G 不同的另一个数独网格（例如通过置换数字得到），并将 x 设为该网格，即可轻而易举地达到高点松弛。这种松弛的弱点表明，双层问题具有较高的难度。

4 通过有效不等式强化双层建模

考虑图 1b所示的数独网格。我们可以交换绿色标记单元格中的 3和 8，从而得到一个新的数独网格 G'，除了绿色标记的单元格外，其余单元格的数字都相同。因此，任何有效谜题 P都必须在线索绿色标记单元格中至少包含一个。类似地，我们观察到，也可以改变以下单元格中的数字：

蓝色或红色标记的单元格。因此，红色标记的单元格中也必须至少有一个线索，蓝色标记的单元格中也必须至少有一个线索。我们称单元格集合 U 为数独网格 G 的一个不可避免集，如果存在一个数独网格 $G' \neq G$，它与 G 的差异仅限于 U中的单元格。如果一个不可避免集不包含任何仍为不可避免集的真子集，我们就称它为极小不可避免集。下文中，我们将数独网格表示为元素取自 $[n]$ 的 $n \times n$ 矩阵，将数独谜题表示为元素取自 $[n] \cup \{0\}$ 的 $n \times n$ 矩阵，其中 0 表示空单元格。

命题1. 设 G 是一个网格， P是一个谜题，且 G 是 P的一个解。那么，当且仅当对于 G 的每个极小不可避免集 U，都存在一个单元格 $(i, j) \in U$ 被给定为线索，即 $P_{ij} \neq 0$时， P 才是一个有效谜题。

证明. 为证明充分性，假设存在一个极小不可避免集 U，使得对于所有单元格 $(i, j) \in U$。根据定义，存在一个数独网格 $G' \neq G$，它与 G的差异仅在于属于 U的单元格中的条目。由于对于所有单元格 $(i, j) \in U$，因此 G'也是 P的一个解。由此可知， P不是一个有效谜题。
为证明必要性，假设 P不是一个有效谜题，并且存在一个数独网格 G'，它是 P和 $G' \neq G$的一个解。我们定义

$$U := \{(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \mid G'_{ij} \neq G_{ij}\}$$

作为这样一组单元格：其中的元素在 G 中的值与在 G'中的值不同。根据构造， U 是一个不可避免集，并且对于所有 $(i, j) \in U$，都有$P_{ij} = 0$，否则，它们的值将完全相同。如果 U是极小不可避免集，那么问题就解决了；否则， U 的一个子集仍是不可避免集。由于 U 是有限的，我们可以不断重复这一过程，直到得到一个极小不可避免集。 □

推论 **2.** 设 G是一个数独网格， U 是任意一个极小不可避免集。那么，不等式 *lity*

$$\sum_{(i,j)\in U} y_{ij} \geq 1 \tag{U}$$

是我们双层规划中领导者的全局有效不等式。我们称这个不等式为对应于 U的不可避免集不等式

我们给出一种生成不可避免集集合 $\mathcal{U}$的方法。设 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $m \geq 1$。考虑由 m参数化的整数线性规划：

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & 0 \\ \text{s.t.} \quad & (G0) - (G3) \\ & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijG_{ij}} = n^2 - m \\ & x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall\, i, j, k \in [n], \end{aligned} \tag{$D1$}$$

该整数线性规划给出了一个数独网格 G'，它与 G恰好有 m 个单元格的值不同。由此可得

$$U := \{(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \mid G_{ij} \neq G'_{ij}\}.$$

是一个不可避免集 由构造可知。我们从 $m = 1$ 开始，并反复求解整数线性规划，在每次迭代中加入无解割约束

$$\sum_{(i,j)\in U} x_{ijG_{ij}} \geq 1 \tag{N2}$$

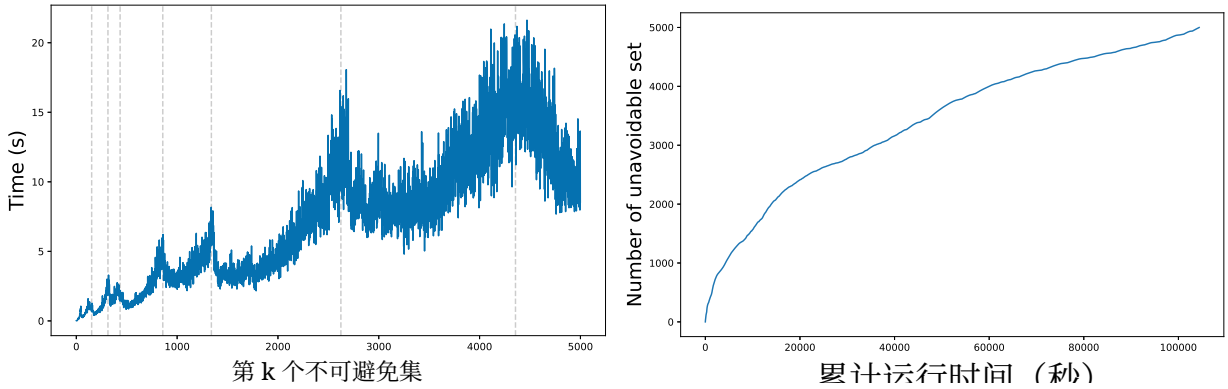
该约束禁止整数线性规划返回任何 G'，其对应的不可避免集是 U 的超集。因此，整数线性规划在每次迭代中都会返回一个大小为 m 的不同不可避免集。生成所有大小为 m 的不可避免集后，我们继续处理 $m + 1$。注意，这也可以等价地表述为一个最小化问题。

命题 3. 上述过程满足

(i) 在每次迭代中，得到的不可避免集始终是一个极小不可避免集 *et*

(ii) 重复该过程，最终会得到所有极小不可避免集

证明。 为证明 (i)，设 U 为一个非最小不可避免集，且 $U \subset U$ 为一个满足$m := |U|$的最小不可避免集。在生成所有大小为 m的不可避免集时，针对 U的禁用割也会被加入模型。因此，任何生成 U的 G' 都将不可行，因为 $U \subset U$。由构造可得 (ii)。 □



(a) 生成第 k 个不可避免集所需时间的几何平均值　(b) 生成的不可避免集数量随时间的变化

图 2：切平面生成的实验结果

5 计算结果

本节中，我们研究模型在求解 50 个 9×9 数独网格实例上的性能。所有计算均在一台配备 Intel Xeon E5-2630V4 2.2 GHz 处理器的单线程环境中运行。每次运行的墙钟时间限制为 4 天，内存限制为 16 GB。生成不可避免集割的算法使用 Gurobi 9.5。1 [16] 作为整数线性规划求解器；我们使用 [12] 中的双层求解器来求解主模型，作者在我们提出请求后授予了我们许可证。该求解器使用 CPLEX 12。7 [19] 用于求解线性规划松弛问题。本节所使用的代码以及计算结果可在 https://github.com/gtjusila/minimum-sudoku中找到。

这 50 个实例分为两组，每组 25 个。第一组从一份数独谜题列表中随机选取，这些谜题有 17 个提示数 [28]。第二组从难度评级高于 11 的数独谜题列表中随机选取（最高难度评级为 12），该列表由新数独玩家论坛维护[2]。第二组所有实例的已知谜题都包含超过 20 个线索。为获得多样化的实例集，我们还确保所选数独具有不同的 Minlex Form [22]。为了将数独网格转换为 Minlex Form，我们使用了 [8] 中的代码。

首先，我们评估不可避免集生成过程的性能。对于我们的每个 9×9 实例，我们生成了5000 个极小不可避免集。在所有实例中，我们都生成了大小为 16 或更小的所有极小不可避免集。我们没有观察到大小为5 和 7的不可避免集，因此推测任何实例中都不存在这类集合。在 50 个实例中，有 39 个实例生成了所有大小小于或等于 17 的极小不可避免集。我们在图 50 中绘出了所有2a个实例生成第 k 个不可避免集所需时间的几何平均值。总体来看，生成不可避免集所需的时间会随着 k 增大而增加。图中一个有趣的特征是周期性峰值。进一步查看各个实例的结果后，我们发现，在尝试枚举大小为 $n \in \mathbb{N}$的所有极小不可避免集时，每次迭代所需时间都会增加。这符合预期，因为每次迭代中，可用的大小为 n 的极小不可避免集越来越少，因此也越来越难以找到。为了直观展示这一现象，我们计算了大小小于或等于 n的不可避免集的平均数量，针对 $n = 11$、.....、17（对于尚未找到所有大小为17 的不可避免集的实例，我们假定大小小于17 的不可避免集数量为5000），并在图2a中以竖线标示。可以将这些线视为实例从搜索大小为 n 的不可避免集切换到搜索大小为 $n + 1$的不可避免集时的平均位置。最左侧的线表示 $n = 11$。

图 2a 未能体现这些峰值有多么极端。为展示这一现象，我们在表 1中给出了不可避免集生成时间的频数分布表。尽管大多数极小不可避免集（94.10%）可在不到 1 分钟内生成，但有些极小不可避免集很难找到，最耗时的接近 3 小时。

最后，重要的是　　需要记住，我们没有义务生成所有不可避免集，因为它们唯一的作用是
是为了帮助减少 the　我们双层规划的可行域，并提升性能。为此，我们发现 i　　t

[2] http://forum.enjoysudoku.com/the-hardest-Sudokus-new-thread-t6539-600.html#p277835

生成时间 [s]	不可避免集数量
≤ 1	30763
$1-10$	136009
$10-30$	42389
$30-60$	26092
$60-300$	13809
$300-600$	542
$600-1800$	298
$1800-3600$	62
$3600-7200$	31
≥ 7200	5

表1：生成不可避免集所需时间的频数分布表

绘制生成的割数量随时间变化的平均值很有帮助。为此，对于每个实例 I 以及每个$n \in [5000]$，我们计算模型生成 n 个实例的不可避免集 I所需的累计时间。然后，我们计算所有实例中每个 n 的累计时间的几何平均值，并绘制其随n变化的结果。所得图表见图2b。该图再次表明，生成不可避免集在开始时较快，也显示了随着时间推移，生成过程会变得更加困难。生成最初的20000 个不可避免集用时不到2000 秒，而生成接下来的40000 个则需要近2000秒。

现在，我们将通过改变所使用的不等式数量，测试不可避免集不等式对模型的影响。在初步分析中，我们不考虑生成不可避免集所需的时间。我们决定测试 500、1000、3000 和 5000 个不可避免集不等式，并使用不可避免集生成算法生成的前 n 个不等式。优化结果汇总见表 2。 45 个 50 个大小为 9×9 的实例至少在一种求解器设置下达到最优。值得注意的是，所有 17提示数数独谜题组中的实例至少在一种求解器设置下达到最优，而且通常比不含 17个提示数的谜题实例组求解得更快，见图 4。

不可避免集数量	实例数量	
	最优	时间限制
500	37	13
1000	43	7
3000	36	14
5000	29	21

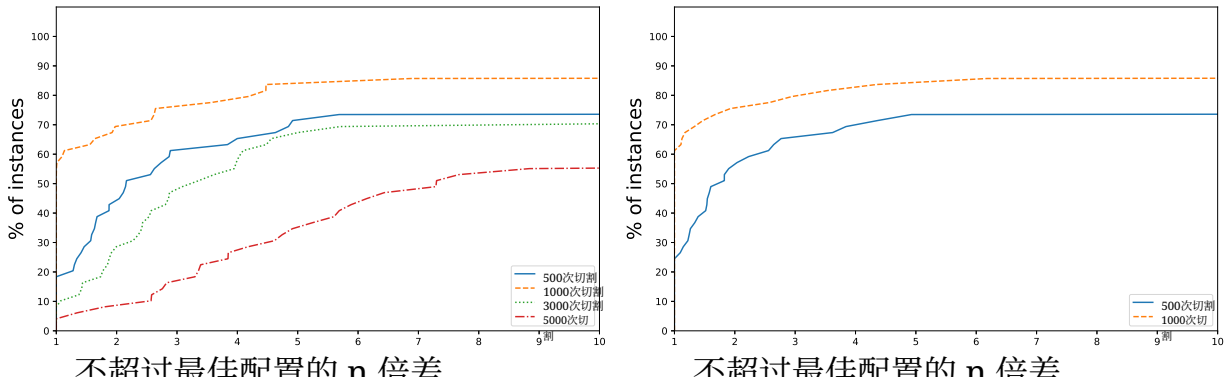
表 2：使用不同数量不可避免集割时 9×9 标准双层模型的最终结果汇总

我们绘制了所得性能剖面 [10]，如图3a所示。我们观察到，添加过少或过多的不等式都会导致优化时间变长。近60% 的实例在使用1000 个不可避免集不等式的模型上求解速度最快；其次，略低于20% 的实例在使用500 个不可避免集不等式的模型上求解速度最快。当使用1000 个不可避免集不等式时，大多数实例都能求得最优解，这也支持了这一结论。通过进一步查看表3所示的节点级数据，我们发现，不等式过少会导致为证明最优性而处理的节点数大幅增加，而不等式过多则会导致节点吞吐量大幅下降。因此，最佳选择很可能处于两者之间。

不可避免集数量	节点数	每节点时间 [s]	总运行时间 [s]
500	2503382	0.028	70312
1000	2097150	0.031	64941
3000	1126612	0.082	92931
5000	887962	0.139	123472

表3：不同设置下节点数、每节点时间和运行时间的几何平均值 s

最后，我们将生成这些不等式所需的时间考虑在内。请注意，我们只需要比较包含 500 个和 1000 个不等式的模型，因为包含 1000 个不等式的模型优于包含 3000 个和 5000 个不等式的模型割。



(a) 不同数量的不可避免集的性能剖面 (b) 增加时间后， 9×9 个实例与 9×9 个实例中不同数量的不可避免集的性能剖面

图3：求解9×9实例的实验结果

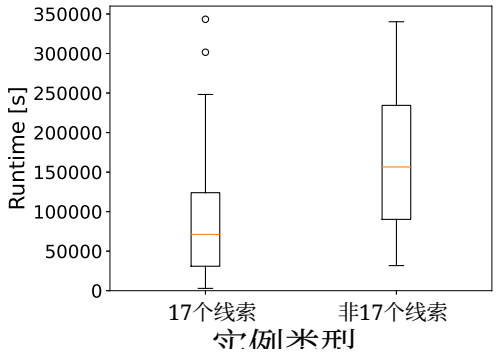


图4：17线索实例与非17线索实例的求解时间比较

<escape>模型。500 为了比较额外生成</escape><escape>500</escape><escape> </escape><escape>个不可避免集是否值得，我们计算求解双层实例所需的时间，以及生成不可避免集所需的时间，并绘制包含</escape><escape>500 </escape><escape>和 </escape><escape>1000 </escape><escape>个不等式的实例的性能曲线。计算采用生成不可避免集实验中的数据完成。所得曲线如 </escape><escape>3b</escape><escape>所示。我们可以看到，即使将不可避免集割平面的生成时间考虑在内，使用 </escape><escape>1000 </escape><escape>个不等式仍然优于使用</escape><escape>500</escape><escape>个不等式。</escape>

在我们的实验中，我们还使用 MiBS 求解器 [30]获得了初步结果。然而，即使对于简单实例，我们也很快发现， MiBS 所需的时间远多于来自 [13]的求解器。我们认为，这在很大程度上是由于 MiBS 无法为我们的问题找到原始解。

6 将模型推广到其他最少线索问题

追求唯一解不仅与数独有关，数环和交叉和也是此类问题的例子 [32]。这促使 [6]定义了“最少提示数问题”（FCP）这一问题类别。本节将展示如何将我们的模型改造后用于其他具有线性二元形式的谜题中的FCP问题。

我们重述 [6]中的最少提示数问题定义。设 A 是一个NP问题。我们用 R_A 表示实例-证书对的集合，其中证书是长度为 l的二进制串。对于 A的给定实例 I，如果存在证书 c^*，使得（I，c^*）$\in R_A$，且对于所有满足 $c_i \neq \perp$的索引 $i \in [k]$，$c_i = c_i^*$，则称字符串 $c \in \{0, 1, \perp\}$ 为线索。符号 $\perp$ 可解释为缺失或未指定的条目。我们称 c^* 为线索 c 的满足解。线索的大小是其中非 $\perp$ 字符的数量。

我们将 FCP A 定义为以下判定问题：给定一个实例 I、一个证书 c^* 和一个整数 k，是否存在一个大小至多为 k 的线索 c，使得唯一的满足解为 c^*？我们注意到，我们的定义与 [6]中提出的定义略有不同。

我们假设存在一个 l 维多面体 $\mathcal{Q}$，使得 c 是有效证书，当且仅当 $c \in \mathcal{Q}$ 且为二进制的。FCP A 可以表示为如下双层优化问题：

$$\begin{aligned} \min_{x,y,z} \quad & \sum_{i=1}^{l} y_i \\ \text{s.t.} \quad & z = 1 \\ & y_i \in \{0,1\}, \quad \forall\, i \in [l] \\ & (x,z) \in S(y) \end{aligned}$$

其中，$S(y)$ 是 y 参数化跟随者问题的最优解集合：

$$\begin{aligned} \min_{x,z} \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathcal{Q} \\ & x_i \geq y_i, \quad \forall\, i \in [l],\ c_i^* = 1 \\ & \sum_{i \in [l], c_i^* = 1} x_i + \sum_{i \in [l], c_i^* = 0} (1 - x_i) - z \leq l - 1 \qquad (NG) \\ & x_i, z \in \{0,1\}, \quad \forall\, i \in [l]. \end{aligned}$$

领导者程序决定哪些索引作为线索给出，而跟随者则试图寻找一个符合这些线索的替代解。约束（NG）是一个禁配约束，用于禁止赋值 $x = c^*$，前提是 $z = 0$。当 $z = 1$ 时，该约束显然成立；它是第 3 节中提出的数独专用模型的等价约束的推广。

7 结论与展望

本文表明，数独最少线索问题可以建模为二进制双层线性规划问题并加以求解。通过引入不可避免集不等式，我们证明了该模型可以收紧，且能够提升求解器的性能。我们的模型能够在 95% 的实例中计算出经证明的数独最少线索问题最优解。尽管取得了这些性能成果，数独最少线索问题以及更一般的最少提示数问题固有的复杂性，仍使其难以扩展到更大规模的实例。与数独文献中开发的专用临时枚举技术不同 [9]，我们的方法能够自然受益于混合整数规划求解器性能的持续提升。

我们认为，数独最少线索问题未来有三个主要研究方向。首先，可以采用更快的不可避免集搜索算法，例如 [25]提出的算法。其次，可以开发利用数独网格对称性的规划模型。第三，可以开发一种分支切割方法，利用不可避免集不等式，在整个分支定界过程中分离非可行解，而不是一开始就应用大量不等式。

致谢

本文的研究工作在德国联邦教育与研究部（BMBF）资助的MODAL研究园区开展（资助编号：05M14ZAM、05M20ZBM）。文中所述研究活动由联邦经济事务与能源部通过UNSEEN项目（编号：03EI1004-C）资助。我们感谢Markus Sinnl及其合作者提供双层优化求解器的使用许可，感谢柏林工业大学第二学院允许我们使用其高性能计算设施，也感谢Kai Hoppmann就整数规划 formulation提供的初步建议。

参考文献

[1] D. Berend，关于数独方阵的数量，《离散数学》, 341 (2018), 第 3241–3248 页。[2] J. B¨urger, *Sudoku Assistant*——结合机器学习与推理的 *AI* 助手 — *Leuven.AI* 故事 —*ai.kuleuven.be*。 https://ai.kuleuven.be/stories/post/2023-02-08-sudoku/，2023。 [访问日期：24- Apr-2023]。[3] L. C. Coelho 和 G. Laporte，几种数独枚举算法的比较，《运筹学会杂志》, 65 (2014), 第 1602–1610 页。

[4] J. Cooper 和 A. Kirkpatrick, 《数独及一般图着色的临界集》, 《离散数学》, 315-316 (2014), 第 112–119 页。[5] J.-P. Delahaye, 《数独背后的科学》, 《科学美国人》, 294 (2006), 第 80–7 页。[6] E. D. Demaine、F. Ma、A. Schvartzman、E. Waingarten 和 S. Aaronson, 《最少线索问题》, Theoretical Computer Science, 748 (2018), 第 28–39 页。[7] S. T. DeNegre, 《阻断与离散双层线性规划》, 博士论文, 利哈伊大学, 2011。[8]M. Deverin, Minlex Form：最小与最大列表／链式处理。http://forum.enjoysudoku.com/minlex-form-min-and-max-lists-chaining-t30325-15.html。[访问日期：24-Apr-2023]。[9]M. Dobrichev, GridChecker, 一款穷举式谜题枚举器。http://forum.enjoysudoku.com/gridchecker-an-exhaustive-puzzle-enumerator-t30071.html。[访问日期：26-Apr-2023]。[10] E. D. Dolan 和 J. J. Mor´e, 《使用性能剖面评测优化软件》, 数学规-划, 91 (2002), 第 201–213 页。[11] B. Felgenhauer 和 F. Jarvis, 数独数学 I, 《数学光谱》, 39 (2006), 第 15–22 页。[12] M. Fischetti、I. Ljubi´c、M. Monaci 和 M. Sinnl, 《一种用于混合整数双层线性规划的新型通用算法》, 运筹学, 65 (2017), 第 1615–1637 页。[13] ,《双层优化中交集割的应用》, 数学规划, 172 (2017), 第 77–103 页。[14] A. Forrow 和 J. R. Schmitt, 《通过多项式方法逼近数独最少线索数问题》, 2013。[15] A. Gainer-Dewar 和 P. Vera-Licona, 《最小击中集生成问题：算法与计算》, 《SIAM离散数学杂志》, 31 (2017), 第 63–100 页。[16] Gurobi Optimization, LLC, 《Gurobi 优化器参考手册》, 2022。[17] A. M. Herzberg 和 M. R. Murty, 《数独方阵与色多项式》, 《美国数学学会通报》, 54 (2007), 第 708–717 页。[18] T. H¨urlimann, 《谜题与游戏：一种数学建模方法》, 信息学系, 弗里堡大学, 弗里堡, 瑞士, 第 4 版, 2016。[19] IBM, 《IBM ILOG CPLEX 12.8 用户手册》, IBM ILOG CPLEX 部门, 因克莱恩村, 内华达州, 2017。[20] R. G. Jeroslow, 《多项式层次与竞争分析的简单模型》, 数学规划, 32 (1985), 第 146–164 页。[21] T. Koch, 《快速数学规划, 或如何在几秒钟内解数独谜题》, 载于《2005年运筹学会议论文集》, H.-D. Haasis、H. Kopfer 和 J. Sch¨onberger 编, 柏林、海德堡, 2006, 施普林格·柏林·海德堡, 第 21–26 页。[22] C. Lass, 《数独的最少线索数》, 《开放计算机科学》, 2 (2012), 第 143–151 页。[23]G.-C. Lau、J. M. Jeyaseeli、W.-C. Shiu 和 S. Arumugam, 《图的数独数》, arXiv 预印本 arXiv:2206.08106, (2022)。[24] D. Ma˘sulovi´c, 《数独中的可推导性》, arXiv 预印本 arXiv:2212.01053, (2022)。[25] G. McGuire、B. Tugemann 和 G. Civario, 《不存在只有 16 个提示数的数独：通过击中集枚举求解数独最少线索问题》, 《实验数学》, 23 (2014), 第 190–217 页。[26] B. D. McKay 和 I. M. Wanless, 《关于拉丁方的数量》, 《组合数学年刊》, 9 (2005), 第 335–344 页。[27] G. Royle, 最小数独。https://web.archive.org/web/20120730100322/http://mapleta.maths.uwa.edu.au/~gordon/sudokumin.php。[访问日期：23-Apr-2023]。[28] , 最小数独。https://web.archive.org/web/20060220092603/http://w ww.csse.uwa.edu.au/~gordon/sudokumin.php。[29] E. Russell 和 F. Jarvis, 数独数学 II, 《数学光谱》, 39 (2006), 第 54–58 页。[30] S. Tahernejad、T. K. Ralphs 和 S. T. DeNegre, 《混合整数双层线性优化问题的分支割平面算法及其实现》, 《数学规划计算》, 12 (2020), 第 529–568 页。[31] G. K. Tjusila, 《数独最少线索问题的双层模型》, 学士学位论文, Technische Uni- versit¨at Berlin, 2022。可在 https://github.com/gtjusila/minimum-sudoku/blob/main/Bachelorarbeit˙Gennesaret˙Tjusila˙407687.pdf获取。[32] T. Yato 和 T. Seta, 《寻找另一解的复杂性与完备性及其在谜题中的应用》, 《电子信息通信学会电子学基础汇刊》, 86 (2003), 第 1052–1060 页。