arXiv:2305.01699v1 [math.NA] 2 May 2023

关于一次 Fekete 点的 Lebesgue 常数随维数的增长研究

Len Bos 维罗纳大学计算
机科学系 意大利

电子邮箱：leonardpeter.bos@univr.it

2023年5月4日

摘要

我们讨论在固定次数（一）和变化维数下，对于底层集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ a 为单纯形、球或立方体时，费克特点处多项式插值的 Lebesgue 常数的增长。

假设 $K \subset \mathbb{R}^d$ 是其内部的闭包且为紧集。我们注意到，在 d 个变量中，次数不超过 n 的多项式空间的维数为

$$\dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^d)) = N_n(= N) := \binom{n+d}{d}.$$

对于 $\mathbb{R}^d$ 的 $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^d)$ 的一组基 $\{p_1, \cdots, p_N\}$ 以及 N 个点 $\mathbf{x}_1$，$\cdots$，$\mathbf{x}_N$，在 K 中，我们可以构造范德蒙德行列式

$$\mathrm{vdm}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_N) := \det([p_j(\mathbf{x}_i)]_{1 \le i,j \le N}).$$

若范德蒙德行列式非零，则使用次数至多为 n 的多项式在这些点处进行插值的问题是适定的，

2010 数学主题分类：主要分类 41A17；次要分类 41A63。关键词和短语：Fekete 点、最优测度、最优实验设计、单纯形。

特别地，我们可以构造次数为 n 的基本拉格朗日多项式ℓ_i(**x**)，使其满足

$$\ell_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}.$$

基于 X, 点的插值算子

$$\pi_X : C(K) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^d); \quad \pi_X(f) = \sum_{i=1}^{N} f(\mathbf{x}_i))\ell_i(\mathbf{x})$$

其算子范数即定义为勒贝格常数】【。

$$\Lambda_n(X;K) := \max_{\mathbf{x}\in K} \sum_{i=1}^{N} |\ell_i(\mathbf{x})|.$$

当 $K \subset \mathbb{R}^d$ 是一个单纯形时， [1] 中证明，对于 X，所谓的次数为 n 的等距点（或单纯形点），Lebesgue 常数存在一个与维数无关 的上界。具体而言，

$$\Lambda_n(X;K) \leq \binom{2n-1}{n}, \quad \forall d \geq 1.$$

由此可知，对于勒贝格点也存在这样的界，即勒贝格常数取最小值的那些点（因此，对于任何良好的插值点集合，这种情况也很可能成立）。

这篇短文旨在研究：对于固定的 $n = 1$ 和 K 的单纯形、球或立方体上的一组一次 Fekete 点， $\Lambda_n(X)$ 随维数 d变化的增长情况。我们将看到，对于球或立方体，Lebesgue 常数确实会随维数增长，这使得单纯形的这一性质显得独特而值得关注。

定义 0.1. 若一组由 N 个互异点组成的集合 $F \subset K$ 能使 $|\mathrm{vdm}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_N)|$ 在 K^N. 上取最大值，则称其为 n 次 $Fekete$ 点集

定义 0.2. 若一组由 N 个互异点组成的集合 $F \subset K$ 满足下式，则称其为 Fejèr 集

$$\max_{x\in K} \sum_{i=1}^{N} \ell_i^2(x) = 1.$$

文献 [1] 中证明了，Fejèr 集自动也是 Fekete 集，但反向推论并不成立。文献 [2] 对这一问题进行了较为详细的讨论。

在一次情形下，我们有 $N_1 = d+1$ 个点 $X = \{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_N\} \subset \mathbb{R}^d$构成一个单纯形的顶点。记作

$$\mathbf{x}_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_d^{(i)}) \in \mathbb{R}^d$$

单项式基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_d\}$ 的范德蒙德行列式变为

$$\mathrm{vdm}(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_d) = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdot & \cdot & x_d^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdot & \cdot & x_d^{(2)} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 1 & x_1^{(d)} & x_2^{(d)} & \cdot & \cdot & x_d^{(d)} \\ 1 & x_1^{(d+1)} & x_2^{(d+1)} & \cdot & \cdot & x_d^{(d+1)} \end{vmatrix}$$

它等于 $\pm d!$ 乘以顶点为 $X.$ 中各点的单纯形体积。因此，在一次情形下，Fekete 点对应于包含在 $K.$ 中的最大体积单纯形的顶点。

1 K 单纯形

在这种情况下，Fekete 点就是单纯形的顶点，而与之对应的次数为一的拉格朗日多项式是线性多项式，它们在各自对应的顶点处取值为 1，并且在与该顶点相对的面上恒等于零。因此，它们在单纯形上均为非负函数，并且

$$\sum_{i=1}^{d+1} |\ell_i(x)| = \sum_{i=1}^{d+1} \ell_i(x) = 1, \quad x \in K.$$

特别是

$$\Lambda_n(X; K) \equiv 1, \quad \forall d \geq 1.$$

2 K 单位球

我们按如下方式递归地构造内接于单位球面中的正则单纯形的 $d+1$ 个顶点。设

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}.$$

然后，对于 $d > 1$ ，并定义了 $X_{d-1} \in R^{d\times(d-1)}$，令

$$X_d := \begin{bmatrix} & & & -1/d \\ & R_d X_{d-1} & & -1/d \\ & & & -1/d \\ 0 & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times d}$$

其中

$$R_d := \frac{\sqrt{d^2-1}}{d}.$$

X_d 的每一行表示 $\mathbb{R}^d$. 中一个点的笛卡尔坐标。从几何上看， X_d 是通过将 X_{d-1}， 经过适当缩放的点放置在 $\mathbb{R}^{d-1}$ 中的球面上得到的，其中该球面由 $\mathbb{R}^d$ 中的球与水平集 $x_d = -1/d$ 的交集确定，并添加了“北极”（0，$\cdots$， 0， 1）$\in \mathbb{R}^d$. 我们声称，这些点构成了内接于单位球面的一个正则单纯形的顶点。以下引理将证明这一点。

引理 2.1。由 X_d 给出的点的质心是 $\mathbf{0}_d \in \mathbb{R}^d$，即，$X_d^t \mathbb{1}_{d+1} = \mathbf{0}_d$.

证明 （对 d 使用归纳法）。对于 $d = 1$,

$$X_1^t \mathbb{1}_2 = [-1\ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

因此假设 $X_{d-1}^t \mathbb{1}_d = \mathbf{0}_{d-1}$ 并计算

$$\begin{aligned} X_d^t \mathbb{1}_{d+1} &= \begin{bmatrix} & R_d X_{d-1}^t & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ -1/d & \cdot & -1/d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_d X_{d-1}^t \mathbb{1}_d \\ d(-1/d) + 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{0}_d. \end{aligned}$$

□

引理 2.2。我们有

$$X_d^t X_d = \frac{d+1}{d} I_d.$$

证明 （按维数 d 归纳）。对于 $d = 1$,

$$X_1^t X_1 = [-1\ 1] \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} = 2 = \frac{1+1}{1} I_1.$$

那么假设该引理对维数 $d-1$. 成立。接下来

$$\begin{aligned}
X_d^t X_d &= \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & R_d X_{d-1}^t & & 0 \\ & & & 0 \\ -1/d & \cdot & -1/d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & -1/d \\ & R_d X_{d-1} & & -1/d \\ & & & -1/d \\ 0 & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} & & R_d X_{d-1}^t \begin{bmatrix} -1/d \\ \cdot \\ \cdot \\ -1/d \end{bmatrix} \\ R_d^2 X_{d-1}^t X_{d-1} & & \\ & & \\ \begin{bmatrix} -1/d & \cdot & \cdot & -1/d \end{bmatrix} R_d X_{d-1} & & \frac{d}{d^2}+1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{d^2-1}{d^2}\frac{d}{d-1} I_{d-1} & \mathbf{0}_{d-1} \\ \mathbf{0}_{d-1}^t & 1+1/d \end{bmatrix} \\
&= \frac{d+1}{d} I_d
\end{aligned}$$

as

$$X_{d-1}^t \begin{bmatrix} -1/d \\ \cdot \\ \cdot \\ -1/d \end{bmatrix} = -\frac{1}{d} X_{d-1}^t \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{d-1}$$

由引理 2.1。 □

引理 2.3。我们有

$$X_d X_d^t = \frac{d+1}{d} I_{d+1} - \frac{1}{d} \mathbb{1}_{d+1} \mathbb{1}_{d+1}^t \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}.$$

证明 （对维数 d 进行归纳法）。对于 $d=1$,

$$\begin{aligned}
X_1 X_1^t &= \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} [-1 \ +1] = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1+1}{1} I_2 - \frac{1}{1} \mathbb{1}_2 \mathbb{1}_2^t.
\end{aligned}$$

因此，假设引理对 $d-1.$ 成立。那么

$$
\begin{aligned}
X_dX_d^t &= \begin{bmatrix} & & & -1/d \\ & R_dX_{d-1} & & -1/d \\ & & & -1/d \\ 0 & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & R_dX_{d-1}^t & & 0 \\ & & & 0 \\ -1/d & \cdot & -1/d & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} & & -1/d \\ R_d^2X_{d-1}X_{d-1}^t + \frac{1}{d^2}\mathbb{1}_d\mathbb{1}_d^t & & \cdot \\ & & -1/d \\ -1/d & \cdot\ \cdot\ -1/d & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} & & -1/d \\ \frac{d^2-1}{d^2}\left(\frac{d}{d-1}I_d - \frac{1}{d-1}\mathbb{1}_d\mathbb{1}_d^t\right) + \frac{1}{d^2}\mathbb{1}_d\mathbb{1}_d^t & & \cdot \\ & & -1/d \\ -1/d & \cdot\ \cdot\ -1/d & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} & & -1/d \\ \frac{d+1}{d}I_d - \frac{1}{d}\mathbb{1}_d\mathbb{1}_d^t & & \cdot \\ & & -1/d \\ -1/d & \cdot\ \cdot\ -1/d & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{d+1}{d}I_{d+1} - \frac{1}{d}\mathbb{1}_{d+1}\mathbb{1}_{d+1}^t.
\end{aligned}
$$

□

注。矩阵 $X_dX_d^t$ 是 $X_d.$ 各点（行）内积的格拉姆矩阵。对角线上的元素全为 **1**，表明每个点都位于单位球面上。非对角线上的元素全为 $-1/d$ ，表明这些点两两等角。$\mathbf{x}_i$ 与 $\mathbf{x}^j$ 之间距离的平方为

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2^2 &= (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^t(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\
&= \mathbf{x}_i^t\mathbf{x}_j - 2\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j + \mathbf{x}_j^t\mathbf{x}_j \\
&= 1 - 2(-1/d) + 1 = 2\frac{d+1}{d}, \quad \forall i \neq j.
\end{aligned}
$$

□

相对于 X_d 中各点的$\mathbf{y}\ \in \mathbb{R}^d$ 的重心坐标由向量 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{d+1}$ 给出，使得

（a） $X_d^t\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{y}$，以

及（b） $\mathbb{1}_{d+1}^t\boldsymbol{\lambda} = 1.$

引理 2.4. 对于$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$，有：

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{d+1}\mathbb{1}_{d+1} + \frac{d}{d+1}X_d\mathbf{y}.$$

证明。我们只需验证性质 (a) 和 (b)。对于 (a),

$$\begin{aligned} X_d^t\boldsymbol{\lambda} &= X_d^t\left\{\frac{1}{d+1}\mathbb{1}_{d+1} + \frac{d}{d+1}X_d\mathbf{y}\right\} \\ &= \frac{1}{d+1}X_d^t\mathbb{1}_{d+1} + \frac{d}{d+1}(X_d^tX_d)\mathbf{y} \\ &= \mathbf{0}_{d+1} + \frac{d}{d+1}\left(\frac{d+1}{d}I_d\right)\mathbf{y} \quad \text{(by Lemmas 1 and 2)} \\ &= \mathbf{y}. \end{aligned}$$

对于 (b),

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{d+1}^t\boldsymbol{\lambda} &= \mathbb{1}_{d+1}^t\left\{\frac{1}{d+1}\mathbb{1}_{d+1} + \frac{d}{d+1}X_d\mathbf{y}\right\} \\ &= \frac{1}{d+1}\left(\mathbb{1}_{d+1}^t\mathbb{1}_{d+1}\right) + \frac{d}{d+1}\left(X_d^t\mathbb{1}_{d+1}\right)^t\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{d+1}(d+1) + 0 \quad \text{(by Lemma 1)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

很容易验证，拉格朗日多项式（一次）恰好就是重心坐标。因此，勒贝格函数是

$$\Lambda_1(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{d+1}|\lambda_j(\mathbf{y})| = \|\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y})\|_1$$

且 Lebesgue 常数为

$$\Lambda_1 = \max_{\|\mathbf{y}\|_2\le 1}\Lambda_1(\mathbf{y}) = \max_{\|\mathbf{y}\|_2\le 1}\|\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y})\|_1.$$

引理 2.5. 对于

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{d+1}\mathbb{1}_{d+1} + \frac{d}{d+1}X_d\mathbf{y}$$

我们有

$$\sum_{j=1}^{d+1}\lambda_j^2 = \frac{1+d\|\mathbf{y}\|_2^2}{d+1} \le 1,\ \|\mathbf{y}\|_2 \le 1.$$

证明。我们计算

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{d+1}\lambda_j^2 &= \boldsymbol{\lambda}^t\boldsymbol{\lambda}\\ &= \frac{1}{(d+1)^2}\left\{\mathbb{1}_{d+1}^t + d\mathbf{y}^t X_d^t\right\}\left\{\mathbb{1}_{d+1} + dX_d\mathbf{y}\right\}\\ &= \frac{1}{(d+1)^2}\left\{\mathbb{1}_{d+1}^t\mathbb{1}_{d+1} + 2d(\mathbb{1}_{d+1}^t X_d)\mathbf{y} + d^2\mathbf{y}^t(X_d^t X_d)\mathbf{y}\right\}\\ &= \frac{1}{(d+1)^2}\left\{(d+1) + 0 + d^2\mathbf{y}^t\big(\frac{d+1}{d}I_d\big)\mathbf{y}\right\}\\ &= \frac{1}{(d+1)^2}\left\{(d+1) + d(d+1)\|\mathbf{y}\|_2^2\right\}\\ &= \frac{1+d\|\mathbf{y}\|_2^2}{d+1}.\end{aligned}$$

□

由此可知， X_d 中的点构成 Féjer 集，因而也是 Fekete 集，特别是，

$$\Lambda_1 \le \sqrt{d+1}.$$

我们声称，事实上，这个上界给出了正确的增长阶。

命题 2.6。对于 K 单位球，我们有

$$\sqrt{d} \le \Lambda_1 \le \sqrt{d+1}.$$

证明。我们可以写成

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \max_{\|\mathbf{y}\|_2\le 1} \|\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y})\|_1 \\
&= \max_{\|\mathbf{y}\|_2\le 1} \max_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{\pm 1\}^{d+1}} \boldsymbol{\epsilon}^t \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}) \\
&= \max_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{\pm 1\}^{d+1}} \max_{\|\mathbf{y}\|_2\le 1} \boldsymbol{\epsilon}^t \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{y}) \\
&= \max_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{\pm 1\}^{d+1}} \max_{\|\mathbf{y}\|_2\le 1} \boldsymbol{\epsilon}^t \big\{ \frac{1}{d+1} \mathbb{1}_{d+1} + \frac{d}{d+1} X_d \mathbf{y} \big\} \\
&= \max_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{\pm 1\}^{d+1}} \max_{\|\mathbf{y}\|_2\le 1} \big\{ \frac{s}{d+1} + \frac{d}{d+1} (\boldsymbol{\epsilon}^t X_d) \mathbf{y} \big\} \\
&\qquad (\text{with } s := \sum_{j=1}^{d+1} \epsilon_j) \\
&= \max_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{\pm 1\}^{d+1}} \frac{1}{d+1} \big\{ s + d \|\boldsymbol{\epsilon}^t X_d\|_2 \big\} \\
&\qquad (\text{with } \mathbf{y} = (\boldsymbol{\epsilon}^t X_d)^t / \|\boldsymbol{\epsilon}^t X_d\|_2) \\
&= \max_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{\pm 1\}^{d+1}} \frac{1}{d+1} \big\{ s + d \sqrt{\boldsymbol{\epsilon}^t (X_d X_d^t) \boldsymbol{\epsilon}} \big\} \\
&= \max_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{\pm 1\}^{d+1}} \frac{1}{d+1} \left\{ s + d \sqrt{\boldsymbol{\epsilon}^t \Big\{ \frac{d+1}{d} I_{d+1} - \frac{1}{d} \mathbb{1}_{d+1} \mathbb{1}_{d+1}^t \Big\} \boldsymbol{\epsilon}} \right\} \\
&\qquad (\text{by Lemma 3}) \\
&= \max_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{\pm 1\}^{d+1}} \frac{1}{d+1} \left\{ s + d \sqrt{\frac{d+1}{d} \|\boldsymbol{\epsilon}\|_2^2 - \frac{s^2}{d}} \right\} \\
&= \max_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{\pm 1\}^{d+1}} \frac{1}{d+1} \Big\{ s + \sqrt{d} \sqrt{(d+1)^2 - s^2} \Big\} \\
&\qquad (\text{as } \|\boldsymbol{\epsilon}\|_2^2 = d+1)
\end{aligned}$$

再次，其中

$$s := \sum_{j=1}^{d+1} \epsilon_j \in \{-(d+1), \cdots, 0, \cdots, (d+1)\}.$$

然而，若 $s \le 0$，我们可以用 $-\boldsymbol{\epsilon}$ 替换 $\boldsymbol{\epsilon}$，因此可以假设 $s \ge 0$，即 $s \in \{0, 1, \cdots, (d+1)\}$.

对于连续函数

$$\begin{aligned}
f(s) &:= \frac{1}{d+1} \big\{ s + \sqrt{d} \sqrt{(d+1)^2 - s^2} \big\},\ s \in [0, d+1], \\
f'(s) &= \frac{1}{d+1} \big\{ 1 - \sqrt{d} \frac{s}{\sqrt{(d+1)^2 - s^2}} \big\}
\end{aligned}$$

并在给定的临界点处取得唯一最大值

$$\begin{aligned} &\sqrt{(d+1)^2 - s^2} = \sqrt{d}\, s \\ \iff\ &(d+1)^2 - s^2 = d s^2 \\ \iff\ &s = \sqrt{d+1} \end{aligned}$$

对于这些情况

$$f(s) = \sqrt{d+1}.$$

因此，正如已经指出的

$$\Lambda_1 \le \sqrt{d+1}.$$

然而，$s = \sqrt{d+1}$ 很少是整数，因此只有在特殊情况下才能达到这个上界。

现在注意，对于 d 奇数，$s = 0$ 是可实现的（一半为 $\epsilon_j = +1$，另一半等于 -1），因此

$$\Lambda_1 \ge \frac{1}{d+1}\big\{0 + \sqrt{d}\sqrt{(d+1)^2 - 0}\big\} = \sqrt{d}.$$

由此可知，对于 d 为奇数的情况，

$$\sqrt{d} \le \Lambda_1 \le \sqrt{d+1}.$$

若 d 为偶数，则 $s = 1$ 可达到，因此对于 d 偶数

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &\ge \frac{1}{d+1}\big\{1 + \sqrt{d}\sqrt{(d+1)^2 - 1}\big\} \\ &= \frac{1 + d\sqrt{d+2}}{d+1} \\ &\ge \sqrt{d} \end{aligned}$$

这很容易验证。 □

3 $K = [-1, 1]^d$ 立方体的情形

由于范德蒙德行列式分别对每个点都是线性的，因此其最大值将在立方体的某个顶点子集上取得$[-1, 1]^d$，也就是说，最优的范德蒙德矩阵是一个所有元素均为 ± 1 的矩阵。确定这类 ± 1 矩阵的最大行列式，就是著名的哈达玛行列式问题（1893年），其一般维数下的解目前尚不知晓。不过，在某些特殊维数下，哈达玛问题已有已知解，该解由所谓的

阿达玛矩阵给出，其行与列彼此正交。相应地，对于存在阶数为 $n = d + 1$ 的阿达玛矩阵的维数 d， $d + 1$ Fekete 点可以用阿达玛矩阵的各行显式表示。

定义 3.1。 若矩阵 $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的元素为 $H_{ij} \in \pm 1$，且其行和列彼此正交，即

$$H_n H_n^t = nI_n$$

则称其为阿达玛矩阵。

Sylvester 构造为所有 n 为 2 的幂的情形给出了一个阿达玛矩阵，但许多其他 n 值对应的阿达玛矩阵也已知存在。

现在设 d 满足：存在一个阿达玛矩阵 H_{d+1}， 其维数为$d + 1$。通过在左侧和右侧乘以适当的对角矩阵，我们可以假设 H_{d+1} 的第一行和第一列均为 $1s.$。令 $X_d \in \mathbb{R}^{(d+1)\times d}$ 表示删去 $H_{d+1}.$ 的第一列后得到的矩阵。 X_d 的 $d + 1$ 行给出了立方体 $[-1, 1]^d$， 的$d + 1$ 个顶点所组成的子集的坐标，我们所考虑的正是这些点。特别地， $V_d := H_{d+1}$ 是这些点以及以如下基为基的次数至多为一的多项式的范德蒙德矩阵

$$\{1, x_1, \cdots, x_d\}.$$

因此，根据哈达玛矩阵的定义，点 X 使其对应的范德蒙德矩阵的行列式（绝对值）达到最大，因此它们是 Fekete 点。

例。对于 $d = 3$,

$$H_{d+1} = H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

使得这四个点是

$$(1, 1, 1),\ (-1, 1, -1),\ (1, -1, -1),\ (-1, -1, 1).$$

这些顶点构成的单纯形如下面的图 1 所示。

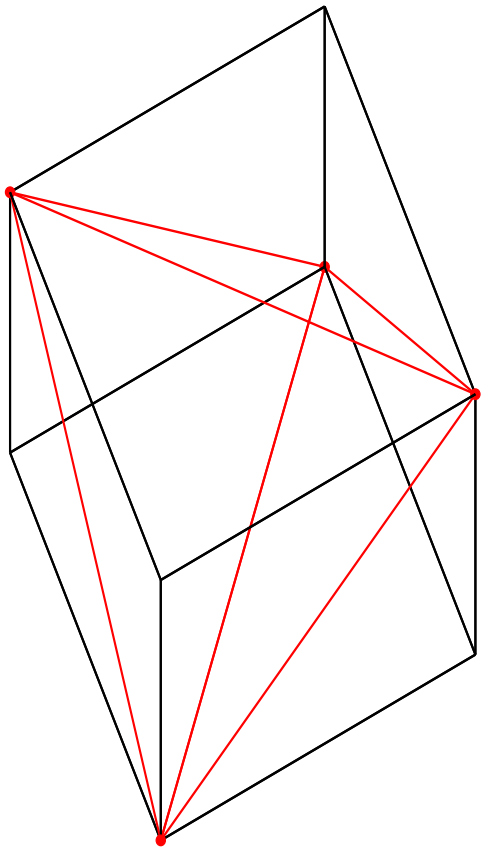

图 1：内接于立方体的正则单纯形

相应的基本拉格朗日多项式为

$$[\ell_1(\mathbf{x}), \cdots, \ell_{d+1}(\mathbf{x})] = [1, \mathbf{x}^t]V_d^{-1} = \frac{1}{d+1}[1, \mathbf{x}^t]V_d^t.$$

它们具有如下性质

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d+1} \ell_i^2(\mathbf{x}) &= [\ell_1(\mathbf{x}), \cdots, \ell_{d+1}(\mathbf{x})] \times \begin{bmatrix} \ell_1(\mathbf{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \ell_{d+1}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(d+1)^2}[1, \mathbf{x}^t]V_d^t V_d \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1 + \|\mathbf{x}\|_2^2}{d+1} \leq 1\end{aligned}$$

对所有 $\mathbf{x}_ \in [-1, 1]^d$.

换言之，它们也是一组费耶尔点。我们再次指出，如 [1], 所示，这也足以证明点 X_d 是 Fekete 点。

备注。此类点 X_d 构成正单纯形的顶点。由于范德蒙德行列式是该单纯形体积的一个（维数相关的）倍数，因此其体积最大。此外，由于拉格朗日多项式的平方和在外接球 $B_d := \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{d}$,$X_d$ 上有界于 1， B_d. □也构成一个 Fekete 集】【。

特别地，我们再次得到

$$\Lambda_1 \leq \sqrt{d+1}.$$

我们声称，在某些维数中，这个上界也能达到。

命题 3.2。 如果 $d = m^2 - 1$ 使得哈达玛矩阵 H_m 和 $H_{d+1} = H_m \otimes H_m$ 存在，那么

$$\Lambda_1 = \sqrt{d+1}.$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \max_{\mathbf{x}\in[-1,1]^d} \sum_{j=1}^{d+1} |\ell_j(\mathbf{x})| \\
&= \max_{\mathbf{x}\in\{\pm 1\}^d} \sum_{j=1}^{d+1} |\ell_j(\mathbf{x})| \\
&= \max_{\mathbf{x}\in\{\pm 1\}^d} \max_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{\pm 1\}^{d+1}} \sum_{j=1}^{d+1} \epsilon_j \ell_j(\mathbf{x}) \\
&= \max_{\mathbf{x}\in\{\pm 1\}^d} \max_{\boldsymbol{\epsilon}\in\{\pm 1\}^{d+1}} \frac{1}{d+1} [1\ \mathbf{x}^t] H_{d+1}^t \boldsymbol{\epsilon}.
\end{aligned}$$

因此，只需展示存在$\mathbf{x} \in \{\pm 1\}^d$, $\boldsymbol{\epsilon} \in \{\pm 1\}^{d+1}$ 使得

$$\frac{1}{d+1} [1\ \mathbf{x}^t] H_{d+1}^t \boldsymbol{\epsilon} = \sqrt{d+1}.$$

现在按列写出,

$$H_m = [\mathbf{h}_1\ \mathbf{h}_2, \cdots, \mathbf{h}_m],$$

其中 $\mathbf{h}_j \in \mathbb{R}^m$，并设

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{h}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m^2}.$$

注意， $H_m^t H_m = mI_m$ 表示的是

$$H_m^t \mathbf{h}_j = m\mathbf{e}_j$$

标准基向量。

此外，由于 $H_{d+1} = H_{m^2} = H_m \otimes H_m,$ ，我们可以写成分块形式，

$$H_{d+1}^t = [H_{ij}]_{1\le i,j\le m}, \ \ H_{ij} = \pm H_m^t.$$

由此可得， $H_{d+1}^t \boldsymbol{\epsilon}$ 的第 i 个块为

$$\begin{aligned}(H_{d+1}^t \boldsymbol{\epsilon})_i &= \sum_{j=1}^{m} (\pm 1) {H_m}^t \mathbf{h}_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} (\pm m)\mathbf{e}_j\end{aligned}$$

其所有分量均为 $\pm m.$ 的一个向量。特别地， $H_{d+1}^t \boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^{m^2}$ 也是一个所有分量均为 $\pm m.$ 的向量。不失一般性，我们可以假设第一个分量为 $+1.$ 。于是取得

$$x_j := \operatorname{sgn}(H_{d+1}\boldsymbol{\epsilon})_{j+1}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{d+1}[1 \ \mathbf{x}^t] H_{d+1}^t \boldsymbol{\epsilon} &= \frac{1}{d+1} \|H_{d+1}^t \boldsymbol{\epsilon}\|_1 \\ &= \frac{1}{d+1}(d+1)m \\ &= m = \sqrt{d+1}.\end{aligned}$$

□

4 K 复环面

立方体的复数版本——环面，也有类似的结果。考虑

$$K = \mathbb{T}^d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d \, : \, |z_j| = 1, \ 1 \le j \le d\}.$$

在这种情况下，经典傅里叶矩阵扮演阿达玛矩阵的角色。

定义 4.1. 傅里叶矩阵 $F_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 定义为

$$F_n := [\omega^{jk}]_{1\le j,k\le n}, \quad \omega := \exp(2\pi i/n)$$

称为傅里叶矩阵。

众所周知，傅里叶矩阵的行和列相互正交，即，

$$F_n^* F_n = nI_n$$

有时也称为复阿达玛矩阵，因为其所有元素的模均为 1。

与立方体和阿达玛矩阵的情况类似，我们令 $X_d \in \mathbb{C}^{(d+1)\times d}$ 为通过删除 F_{d+1}. 的第一列得到的矩阵。 X_d 的 $d+1$ 行给出了环面上 $\mathbb{T}^d$. 的一个子集中的 $d+1$ 个点的坐标。特别地，$V_d := F_{d+1}$ 是这些点对应的范德蒙德矩阵，其对应的多项式次数至多为一，基为

$$\{1, z_1, \cdots, z_d\}.$$

相应的基本拉格朗日多项式为

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ell_1(\mathbf{z}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \ell_{d+1}(\mathbf{z}) \end{bmatrix} &= V_d^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \\
&= V_d^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (\text{as } F_n^t = F_n) \\
&= \frac{1}{d+1} V_d^* \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

它们具有以下性质：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d+1} |\ell_i(\mathbf{z})|^2 &= \begin{bmatrix} \ell_1(\mathbf{z}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \ell_{d+1}(\mathbf{z}) \end{bmatrix}^* \times \begin{bmatrix} \ell_1(\mathbf{z}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \ell_{d+1}(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(d+1)^2} [1, \mathbf{z}^*] V_d V_d^* \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1 + \|\mathbf{z}\|_2^2}{d+1} \leq 1
\end{aligned}$$

对所有 $\mathbf{z} \in \mathbb{T}^d$.

换言之，它们也是一组费耶尔点。这足以证明点集 X_d 是 Fekete 点。

命题 *4.2. </style}*对于 $K = \mathbb{T}^d$，复环面，以及 $d = m^2 - 1$ 对于任意正整数 m,

$$\Lambda_1 = \sqrt{d+1}.$$

证明。由 X_d 是费耶尔点这一事实，我们得到上界，

$$\Lambda_1 \leq \sqrt{d+1}.$$

为证明下界，我们仿照实立方体的情形，令 H_{d+1} 替换为 F_{d+1}，并利用以下事实：对于 $d+1=m^2$， $F_{d+1}=F_m \otimes F_m$. 特别是

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \max_{\mathbf{z}\in\mathbb{T}^d} \sum_{j=1}^{d+1} |\ell_j(\mathbf{z})| \\ &= \max_{\mathbf{z}\in\mathbb{T}^d} \max_{|\epsilon_j|\leq 1,\, 1\leq j\leq (d+1)} \sum_{j=1}^{d+1} \epsilon_j \overline{\ell_j(\mathbf{z})} \\ &= \max_{\mathbf{z}\in\mathbb{T}^d} \max_{|\epsilon_j|\leq 1,\, 1\leq j\leq (d+1)} \frac{1}{d+1}[1\ \mathbf{z}^*] F_{d+1}\boldsymbol{\epsilon}.\end{aligned}$$

因此，只需找出 $\mathbf{z}\in\mathbb{T}^d$和 $\boldsymbol{\epsilon}\in\mathbb{C}^{d+1}$，使得 $|\epsilon_j|\leq 1$， $1\leq j\leq d+1$，满足

$$\frac{1}{d+1}[1\ \mathbf{z}^t] F_{d+1}\boldsymbol{\epsilon} = \sqrt{d+1}.$$

容易验证， $\boldsymbol{\epsilon}$ 由 F_m^* 和$\mathbf{z}$ 一个适当选取的复符号向量组成的堆叠列具有这一性质。 □

致谢

RITA“意大利近似研究网络”。

参考文献

[1] L.Bos，单纯形上拉格朗日插值的 *Lebesgue* 函数界，《逼近理论杂志》，38（1983），43 – 59。

[2] Bos, L.，关于多变量拉格朗日插值 *Fejér* 问题的一些评述，