arXiv:2305.01717v1 [math.GT] 2 May 2023

詹金斯-施特雷贝尔微分的临界图分布

FRANCISCO ARANA–HERRERA 和 AARON CALD ERON

ABSTRACT. 根据 Jenkins 和 Strebel 的研究，对于黎曼曲面 X 及其上的简单闭合多曲线 α，存在唯一的二次微分q 定义在 X 上，其水平叶状结构与 α在测度意义下等价。我们研究当多曲线的极值长度趋于无穷时，这些微分的临界图在度量带状图模空间中的分布，并证明无论初始选择 X如何，它们都等分布于 Kontsevich 测度。

1. INTRODUCTION

概述。 Jenkins 和 Strebel 的著名独立研究 [Jen57、Str66、Str75、Str76] 表明，对于黎曼曲面 X 及其上的简单闭合多曲线 α，存在唯一的二次微分 q 定义在 X 上，其水平叶状结构用高度为一的圆柱表示 α 中的每条曲线。对于每个这样的二次微分 q，都可以关联一个临界图：它是一个带状图，其顶点为 q 的奇点，边为 q 的水平鞍连接。这个带状图继承了由 q 在 X上诱导的奇异平坦度量所给出的度量。粗略地说，临界图编码了 X 除去 α之外的共形几何。参见图 1。

根据 Mirzakhani[1] [Mir08b], 的研究，给定一个闭、连通、定向的黎曼曲面 X，其上极值长度为$\leq L^2$的简单闭（多重）曲线数量渐近于一个次数为 $6g-6$ 的多项式。每条这样的曲线都会产生一个如上所述的临界图。本文证明，经过适当缩放后，这些临界图等分布于度量带状图模空间上的 Kontsevich 测度。特别是，极限分布与 X的初始选择无关。

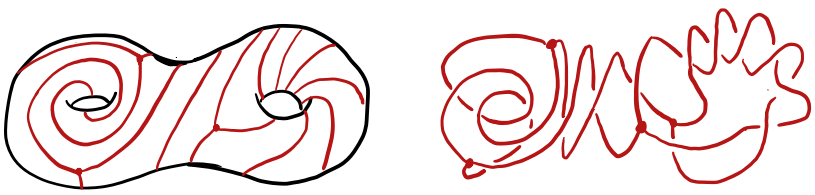


FIGURE 1. 一个 Jenkins-Strebel 微分及其临界图。

Date: 2023 年 5 月 4 日。[1]虽然文中未明确说明，但这可由 [Mir08b，定理 1.3]直接推出。另见 [MGT21，推论 5.13]，该推论从测地流的角度给出了另一种证明。

当前问题深受双曲曲面领域类似结果的启发。在 [AHC22], 中，作者证明，对于一个闭、连通、定向的双曲曲面 X，与简单闭多重测地线互补子曲面对应的度量带状图脊，随着测地线长度趋于无穷，也会等分布于相应模空间上的 Kontsevich 测度。这一结果延续了一条研究脉络，其源头可追溯至其他几位作者的工作 [Mir16, Liu19, AH20a, ES22]。齐性动力系统领域中的类似问题也已得到解答 [AES16a, AES16b, ERW19]。

沿用我们在 [AHC22], 中的方法，我们将问题归结为一个关于 Teichm¨üller 测地线流在二次微分模空间上动力学的遍历性问题。这些归约结合了 Margulis 著名的平均与展开技巧 [Mar70] 以及 Teichm¨üller 理论近年来的若干发展。其中尤为重要的是 Masur 和 Smillie [MS91], 所研究的二次微分的 Delaunay 三角剖分、由 Avila、Gouzel 和 Yoccoz[AGY06, AG13], 在二次微分模空间上发展出的 AGY 度量，以及 Athreya、Bufetov、Eskin 和 Mirzakhani [ABEM12]对 Masur-Veech 测度投影到黎曼曲面模空间的研究。

本文的主要结果还提供了一种对随机度量带状图进行采样的新方法。具体而言，任意单个共形曲面的几何性质都反映了随机度量带状图的几何性质。

主要结果。为使论述简洁明了，我们暂且仅在非分离简单闭曲线这一（具有代表性的）情形下陈述主要结果。一般情形的陈述见下文定理 6.2。

在本节其余部分，固定一个整数 $g \geq 2$，并记 S_g 为亏格为 g 的闭连通定向曲面。令 Mod$_g$ 为 S_g 的映射类群，$\mathcal{T}_g$ 为 S_g 上标记共形结构的 Teichm¨üller 空间，$\mathcal{M}_g$ 为 S_g 上共形结构的模空间。S_g 上无向简单闭曲线的自由同伦类称为简单闭曲线。给定 S_g 上的一条简单闭曲线 α 和一个标记共形结构 $X \in \mathcal{T}_g$，记 $\mathrm{Ext}_X(\alpha) > 0$ 为相对于 X 的 α 的极值长度；关于极值长度的不同定义，见下文第 2 节。

设 γ 是 S_g 上的一条非分离简单闭曲线，$X \in \mathcal{T}_g$ 是 S_g 上的一个标记共形结构。对于每个 $L > 0$，考虑计数函数

$$s(X, \gamma, L) := \#\{\alpha \in \mathrm{Mod}_g \cdot \gamma \mid \mathrm{Ext}_X(\alpha) \leq L^2\}.$$

此函数不依赖于 $X \in \mathcal{T}_g$ 的标记，而仅取决于其底层共形结构 $X \in \mathcal{M}_g$。事实上，它等于 X 上极值长度为 $\leq L^2$ 的非分离简单闭曲线的数量。根据 Mirzakhani 的开创性工作 [Mir08b],，此计数函数渐近呈多项式增长（见下文 (6.1)）。

给定 $X \in \mathcal{T}_g$ 上的非分离简单闭曲线 α，记 JS(X, α) 为 X 上唯一的 Jenkins–Strebel 微分，其水平测度叶状结构等价于 α（其中每个分支赋予权重 1）；特别地，JS(X, α) 的水平叶状结构由一个高度为 1 的圆柱组成。考虑该微分的临界图，即 JS(X, α) 的所有奇异水平轨线的并集，并赋予其从嵌入 S_g 中继承的底层奇异平坦度量的限制以及带状结构。

其每条边界的长度均为 $\mathrm{Ext}_X(\alpha)$，因此，为了理解这些图的分布，我们需要对其进行重新缩放（见 §2）。

将$\mathcal{MRG}_{g-1,2}(1,1)$记为亏格为$g-1$、有两个边界分支且每个边界长度均为 1 的度量带状图的模空间。对于上述的 X 和 α，令

$$\Xi^1(X,\alpha) \in \mathcal{MRG}_{g-1,2}(1,1)$$

表示 $\mathrm{JS}(X,\alpha)$ 的临界图按 $1/\mathrm{Ext}_X(\alpha)$ 缩放后的结果。需要指出的是，$\Xi^1(X,\alpha)$ 并非水平叶状结构与 α射影等价的单位面积 Jenkins–Strebel 微分的临界图；这是因为临界图按线性比例缩放，而极值长度按平方比例缩放。

在$\mathcal{MRG}_{g-1,2}(1,1)$上考虑计数测度

$$\eta^L_{X,\gamma} := \sum_{\alpha\in \mathrm{Mod}_g\cdot\gamma} \mathbb{1}_{[0,L^2]}(\mathrm{Ext}_X(\alpha))\cdot \delta_{\Xi^1(X,\alpha)}.$$

与计数函数 $s(X,\gamma,L)$一样，该测度不依赖于 $X\in\mathcal{T}_g$ 的标记，而只取决于其底层共形结构。将η_{Kon} 记为由$\mathcal{MRG}_{g-1,2}(1,1)$上的 Kontsevich 辛形式诱导的测度，并将 $c_g>0$ 记为其总质量（见下文第 5 节或 [AHC22，第2]节）。

下面的定理是本文主要结果的一个实例，它表明，非分离简单闭曲线的 Jenkins– Strebel 微分的重标度临界图在模空间 $\mathcal{MRG}_{g-1,2}(1,1)$ 上等分布。一般版本见定理 6.2；关于同时等分布的更强版本则见定理 6.12。

定理 1.1. 设 γ 是一条非分离简单闭曲线，且 $X\in\mathcal{M}_g$。则

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\eta^L_{X,\gamma}}{s(X,\gamma,L)} = \frac{\eta_{\mathrm{Kon}}}{c_g}$$

关于 $\mathcal{MRG}_{g-1,2}(1,1)$ 上测度的弱-$\star$ 拓扑，

证明思路。 我们对定理 1.1 的证明遵循双曲情形下类似结果的相同思路 [AHC22，定理 1.1]。具体而言，我们将 $\mathcal{MRG}_{g-1,2}(1,1)$ 上所需的等分布结果归结为曲线计数结果，再将其转化回 $\mathcal{M}_g$ 上的等分布结果。

首先，考虑以下重新表述。设 $f\colon \mathcal{MRG}_{g-1,2}(1,1)\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个连续紧支撑函数。那么，对于任意非分离简单闭曲线 γ、任意 $X\in\mathcal{T}_g$ 以及任意 $L>0$，定义 f 加权计数

$$\begin{aligned} c(X,\gamma,f,L) &:= \sum_{\alpha\in\mathrm{Mod}_g\cdot\gamma} \mathbb{1}_{[0,L^2]}(\mathrm{Ext}_X(\alpha))\cdot f(\Xi^1(X,\alpha)) \\ &= \int_{\mathcal{MRG}_{g-1,2}(1,1)} f(\mathbf{x})\, d\eta^L_{X,\gamma}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

定理 1.1 等价于以下计数结果。

定理 1.2。 设 γ 是 S_g上的一条非分离简单闭曲线， $X\in\mathcal{M}_g$是 S_g上的一个共形结构，且 $f\colon \mathcal{MRG}_{g-1,\,2}(1,\,1)\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个连续紧支撑函数。那么，

$$\lim_{L\to\infty}\frac{c(X,\gamma,f,L)}{s(X,\gamma,L)} = \frac{1}{c_g}\int_{\mathcal{MRG}_{g-1,2}(1,1)} f(\mathbf{x})\, d\eta_{\mathrm{Kon}}(\mathbf{x}).$$

在此设定下，我们运用 Margulis 的“平均化与展开”技巧[Mar70] ，将当前的计数问题化为关于 $\mathcal{M}_g$的等分布问题。与 [AHC22], 中一样，在平均化步骤中，需要对度量带状图 $\Xi^1(X,\ \alpha)$ 随着 $X \in \mathcal{T}_g$ 变化的情形进行一致控制。基本问题在于，如果 JS$(X,\ \alpha)$ 位于（或接近）非主层，那么对 X 的小幅形变就可能改变临界图的拓扑。为解决这一问题，我们在命题 3.6 中证明，对于大多数 α，微分 JS$(X,\ \alpha)$ 都远离非主层。随后，命题 4.3 表明，对于这样的 α ，我们可以实现对临界图几何所需的一致控制。

这一控制使我们能够完成论证中的平均化和展开步骤。此后，原始问题便归结为一个关于模空间 $\mathcal{M}_g$ 中某些子集的等分布问题，我们将这些子集称为“临界 JS horoball”。为了解决这一问题，我们利用 Te-ichm¨uller 测地线流和测地线流的丰富动力学。更具体地说，我们采用了 Forni[For21] 的研究成果，而该成果又关键性地依赖于 Eskin、Mirzakhani 和 Moham-madi [EM18, EMM15] 的研究成果。

相关结果。 如上所述，本文的主要结果与 [AHC22]的主定理直接平行。事实上，作为我们研究结果的推论，我们发现，双曲测地线的补曲面与 Jenkins–Strebel 微分的临界图的极限分布完全相同。这反映了一种现象：随着双曲曲面的边界长度趋于无穷大，它们的形态越来越接近带状图（参见 [Do10] 和[Mon09]）。

长期以来，人们一直同时利用模空间的共形体现和双曲体现来探究其结构，并且常常由此得到相应的定理。与本文尤其相关的是，将带有标点的黎曼曲面的模空间与度量带状图空间对应起来的两种不同方法。第一种方法由 Harer、Mumford、Penner 和 Thurston 提出，使用带有指定的极点与留数的 Jenkins– Strebel 微分；这一对应关系被用于计算 $\mathcal{M}_{g,n}$ [HZ86] 的轨形欧拉示性数，以及 Kontsevich 对 Witten猜想的证明 [Kon92]。第二种方法由 Do 和 Luo 提出，使用带边界的双曲曲面的骨架（参见 [Luo07], [Do10], 以及 [Mon09]）。这可以将 Mirzkahani 对 Witten猜想的证明[Mir07]与 Kontsevich 的证明联系起来（参见 [Do10]）。我们先前的工作 [AHC22] 处理了这第二种对应关系，而本文则对应于第一种范式。

我们的定理也与模空间上的其他均匀分布结果相呼应。由对角矩阵的作用表示的泰希米勒测地流

$$g_t := \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

会将水平分离轨迹的长度扩大 e^t 倍，因此对于每条简单闭曲线 α ，重标度临界图 $\Xi^1(X,\ \alpha)$ 与 $g_{-\log \mathrm{Ext}_X(\alpha)}$ 詹金斯-施特雷贝尔$(X,\ \alpha)$ 的临界图相同。记 $\|q\|$ 为二次微分 q 的面积。通过这一对应，定理 1.1 表明，临界图上的点质量

$$\{g_{-\log\|q\|}q \,|\, q = \mathrm{JS}(X,\alpha) \text{ for } \alpha \in \mathrm{Mod}_g \cdot\gamma \text{ and } \|q\| \le L\} \tag{1.1}$$

当 $\mathcal{MRG}_{g-1,2}$(1,1) 中的 L 趋于无穷时均匀分布。

这应与 [ABEM12] 和第一作者 [AH21a], 的工作进行比较，他们证明了模空间中扩张的 Teichm¨uller 球的平均等分布定理。更准确地说，对于每个 $X \in \mathcal{T}_g$, 都可以考察扩张球中的底层黎曼曲面。

$$\{g_{\log \|q\|} q \mid q \in Q(X) \text{ and } \|q\| \leq L\}, \tag{1.2}$$

其中 $Q(X)$ 是 X 上全纯二次微分构成的向量空间；这也就是与 X 的 Teichmüller 距离至多为 $\log L$ 的点集。 [ABEM12] 的定理 1.2 进一步指出，当 L 趋于无穷时，这些球在 $\mathcal{M}_g$ 中的像平均而言会等分布。式 (1.1) 与 (1.2) 的这些等分布结果之间的联系，在于 S_g [上奇异测度叶状结构空间 $\mathcal{MF}_g$ 中简单闭曲线的均匀分布（Mir08b，定理 1.3]）。

最后，将我们的定理与 [DS21] 的主要结果进行对比也很有意思。在那里，Dozier 和 Sapir 表明， $\mathcal{Q}^1\mathcal{M}_g$ 的某些层投影到 $\mathcal{M}_g$ 后并非粗稠密；尤其是，水平周期且面积为单位的微分的临界图几何可能受到严格限制。例如，如果 $X \in \mathcal{M}_g$ 不在最小分层投影附近，那么它不支持任何临界图含有度数为 $4g-2$ 的顶点的水平周期单位面积微分，也不支持任何临界图接近此类图的微分。

另一方面，我们的主定理意味着，对于固定的 X，将其缩放至长度为 1 后得到的临界图集合在度量带状图空间中稠密。由于临界图会随 Teichm¨uller 测地流缩放，我们的结果也可以解释为：任意 X 都支持一个 Jenkins–Strebel 微分$q = \mathrm{JS}(X, \alpha)$，使得 $g_{-\log \|q\|} q$ 任意接近最小分层。

论文结构。在第 2 节中，我们汇集了理解本文主要结果的陈述与证明所需的预备材料。除标准背景知识外，我们重点讨论如何通过取 Jenkins–Strebel 微分的临界图，构造一个映射到度量带状图模空间的映射。在第 3 节中，我们证明，大多数简单闭多曲线对应的 Jenkins–Strebel 微分都位于主分层的深处；这使我们能够在随后的第 4 节中运用有关 AGY 度量的结果，证明对于大多数曲线，当底曲面变化时，其 Jenkins–Strebel 微分的临界图呈一致变化。在第 5 节中，我们定义“临界 JS horoball”，计算其总质量，并证明它们在模空间上等分布。本节的结果依赖于在 $\mathcal{T}_g$ 与二次微分空间之间传递测度，并利用了 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 在后者空间上的作用的遍历理论。最后，在第 6 节中，我们运用 Margulis 的平均与展开策略证明定理 6.2，这是定理 1.1 对任意多重曲线的推广。

致谢。 作者谨此感谢 Vincent Delecroix 提出了本文所回答的问题，并感谢 Curt McMullen 提供的宝贵意见。作者还要感谢 Giovanni Forni 进行的富有启发性的交流。AC 感谢美国国家科学基金会通过资助项目 DMS-2202703 提供的支持。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 6 3. 多重零点轨迹附近 10 4. 一致几何估计 14 5. Horoball 测度 17 6. 临界图的等分布 24 参考文献 32

2. Preliminaries

本节概述。 本节简要概述本文其余部分将使用的基本对象和定理。我们首先讨论詹金斯-施特雷贝尔微分理论，重点介绍 Hubbard 和 Masur 的工作 [HM79]。随后，我们简要回顾度量带状图的模空间；关于这些空间的更详细讨论，参见 [AHC22]。最后，我们详细讨论詹金斯-施特雷贝尔微分的临界图构造如何定义从（商）Teichm¨uller 空间到适当的度量带状图模空间的映射。

极值长度。 给定一个黎曼曲面 X 及其上的一条简单闭曲线 γ， γ 相对于 X 的极值长度有两个等价的定义。首先，它可以解析地定义为

$$\operatorname{Ext}_X(\gamma) := \sup_{\rho} \frac{\ell_\rho(\gamma)^2}{\operatorname{Area}(\rho)}, \tag{2.1}$$

其中，上确界取遍 ρ 上所有面积非零且有限的共形度量， $\ell_\rho(\gamma)$表示与 γ同伦的简单闭曲线的 ρ-长度的下确界。等价地，它也可以几何地定义为

$$\operatorname{Ext}_X(\gamma) := \inf_{C} \frac{1}{\operatorname{mod}(C)}, \tag{2.2}$$

其中，下确界取遍所有嵌入圆柱 C on X ，其核心曲线与 γ 同伦，而 mod(C) 表示圆柱 C 的模数。

Jenkins 和 Strebel 独立地开展研究 [Jen57, Str66, Str75, Str76] ，通过构造所谓的詹金斯-施特雷贝尔微分，证明了这两种先验 不同的极值长度概念是等价的；见下文定理 2.1。

二次微分。 黎曼曲面 X 上的一个（全纯）二次微分 q ，在局部坐标下具有形式 $f(z)\,dz^2$，其中 $f(z)$ 是某个全纯函数。这种微分有一个定义良好的面积概念，

$$\|q\| := \operatorname{Area}(q) := \int_X |q|.$$

更准确地说，微分 q 在 X 上诱导出一种奇异平坦度量。若在局部坐标 $z = x + iy$ 中，则该度量由 $dx^2 + dy^2$ 给出；微分的零点对应于度量的奇点。 q 的面积是该度量的总面积。我们用 $Q(X)$ 表示黎曼曲面 X 上所有二次微分构成的复向量空间，并用 $S(X) \subseteq Q(X)$ 表示所有单位面积二次微分构成的球面

在 X 上。我们有时将二次微分记作 (X, q)，以标明它们定义所在的黎曼曲面 X 。

$Q(X)$ 和 $S(X)$ 这两个空间，当 X 遍历 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}_g$ 时，可以组织成位于 $\mathcal{T}_g$ 上、由带标记（单位面积）二次微分构成的丛 $\mathcal{QT}_g$ 和 $\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$；请注意，此处的“标记”仅指对底层曲面 S_g 的标记，而不包括二次微分的零点。这些丛带有由标记变换给出的自然 Mod$_g$ 作用。商空间 $\mathcal{Q}^1\mathcal{M}_g := \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g/\text{Mod}_g$ 是位于模空间上的单位面积二次微分丛。

丛 $\mathcal{QT}_g$ 带有一种自然的勒贝格类测度，称为 马苏尔–韦奇测度，它由一个积分格诱导而来，该格对应于由单位面积正方形铺砌的微分。这一测度在超曲面 $\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 上诱导出测度 ν_{MV}，也称为马苏尔–韦奇测度。这两种形式的测度均在 Mod$_g$ 作用下保持不变，相应的推前 $\widehat{\nu}_{\text{MV}}$ 在 $\mathcal{Q}^1\mathcal{M}_g$ 上是有限的勒贝格类测度。本文中，我们将其总质量记为 b_g。

奇异测度叶状结构。将 $\mathcal{MF}_g$ 记为 S_g 上奇异测度叶状结构在同痕与 Whitehead 变换下的空间。S_g 上带权简单闭曲线的同痕类集合在 $\mathcal{MF}_g$中稠密嵌入。此外，几何交数连续延拓为 $\mathcal{MF}_g$上的一个配对。轨道坐标（见 §3）在 $\mathcal{MF}_g$上诱导出自然的分段线性积分结构。特别地，$\mathcal{MF}_g$ 带有自然的 Lebesgue 类测度 μ_{Th}，称为 Thurston测度；该测度在自然的 Mod$_g$对 $\mathcal{MF}_g$的作用下保持不变。将 $\mathcal{PMF}_g$ 记为 $\mathcal{MF}_g$ 在缩放横截测度的作用下的射影化，并将 $\lambda \in \mathcal{MF}_g$ 的射影类记为 $[\lambda] \in \mathcal{PMF}_g$ 。

黎曼曲面 X 上的每个二次微分 q 都会在 X上导出一对奇异测度叶状结构 $\Re(q)$ 和 $\Im(q)$。若在局部坐标 $z = x + iy$下，微分 q 对应于 dz^2，则 $\Re(q)$对应于由 $|dx|$ 诱导的测度叶状结构，而 $\Im(q)$对应于由 $|dy|$诱导的测度叶状结构；q 的零点对应于这些叶状结构的奇点。我们将 $\Re(q)$ 和 $\Im(q)$称为 q的垂直叶状结构和水平叶状结构。这些构造导出了 Mod$_g$-等变映射 $\Re$, $\Im$: $\mathcal{QT}_g \to \mathcal{MF}_g$。

詹金斯-施特雷贝尔微分。自然会提出这样的问题：给定一个带标记的黎曼曲面 $X \in \mathcal{T}_g$ 以及其上的一条简单闭曲线 γ，是否可能找到一个带标记的二次微分 $q \in Q(X)$，使得 $\Im(q) = \gamma$。Jenkins 和 Strebel[Jen57, Str66, Str75, Str76] 分别证明了这总是可行的，而且解是唯一的。我们将相应的二次微分 JS$(X, \gamma) \in Q(X)$称为 X 上 γ 的詹金斯 - 施特雷贝尔微分。以下结果有助于进一步理解 Jenkins 和 Strebel 的研究动机。

定理 2.1。给定一个标记复结构 $X \in \mathcal{T}_g$ 以及 S_g上的一条简单闭曲线γ，由 $\text{JS}(X, \gamma) \in Q(X)$ 所诱导的奇异平坦度量实现了 (2.1)中的上确界。此外，$\text{JS}(X, \gamma) \in Q(X)$ 的垂直叶状结构的临界叶的补集是一个圆柱，它实现了 (2.2)中的下确界。特别地，(2.1) 和 (2.2) 中的上确界与下确界相等。

Hubbard-Masur 定理。Jenkins 和 Strebel 的工作所探讨的问题，同样可以推广到更一般的奇异测度叶状结构。事实上，在 [HM79] 中，Hubbard 和 Masur 证明了以下结构性结果。

定理 2.2。 给定 $X \in \mathcal{T}_g$ 和一个奇异测度叶状结构 $\lambda \in \mathcal{MF}_g$，存在唯一的二次微分 $q = q(X, \lambda) \in Q(X)$，使得 $\Im(q) = \lambda$。此外，映射 $q \in Q(X) \mapsto \Im(q) \in \mathcal{MF}_g$ 是一个同胚。

换句话说，将简单闭曲线映射到其詹金斯-施特雷贝尔微分的映射可延拓为一个同胚 JS：$\mathcal{T}_g \times \mathcal{MF}_g \to \mathcal{QT}_g$。

定理 2.2 提示我们可将极值长度的概念推广到奇异测度叶状结构：$\lambda \in \mathcal{MF}_g$ 相对于 $X \in \mathcal{T}_g$ 的极值长度 $\mathrm{Ext}_X(\lambda)$，定义为 $\mathrm{JS}(X, \lambda) \in Q(X)$ 的面积。根据此定义，极值长度关于横截测度的缩放作用是 2 次齐次的；因此，我们通常使用极值长度的平方根，而非极值长度本身。关于将极值长度推广到奇异测度叶状结构（以及更一般对象）的其他方法，参见 [Ker80、MGT21、AH21b]。

我们还可以探讨哪些奇异测度叶状结构对能够作为二次微分的垂直和水平叶状结构出现。结果表明，只要这对叶状结构适当地填充曲面，这总是可能的[GM91]。若一对奇异测度叶状结构 $(\lambda, \mu) \in \mathcal{MF}_g \times \mathcal{MF}_g$ 与任意奇异测度叶状结构的几何交数均为正，则称它们绑定该曲面 S_g。记 $\Delta \subseteq \mathcal{MF}_g \times \mathcal{MF}_g$ 为非绑定奇异测度叶状结构对的集合。

定理 2.3. 给定一对相互填充的奇异测度叶状结构 $\mu, \lambda \in \mathcal{MF}_g$，存在唯一的二次微分 $q \in \mathcal{QT}_g$，使得 $\Re(q) = \mu$ 且 $\Im(q) = \lambda$。此外，映射 $(\Re, \Im)\colon \mathcal{QT}_g \to \mathcal{MF}_g \times \mathcal{MF}_g \setminus \Delta$ 是一个同胚。

Teichm¨uller 度量。 Teichm¨uller 度量 d_{Teich} 量化了 $\mathcal{T}_g$ 上标记复结构之间的拟共形映射的最小膨胀系数。更确切地说，对于每个 $X, Y \in \mathcal{T}_g$，

$$d_{\mathrm{Teich}}(X, Y) := \frac{1}{2} \log \left(\inf_{f\colon X \to Y} K(f) \right),$$

其中，下确界取遍所有拟共形映射 $f\colon X \to Y$，这些映射属于由 X 和 Y 的标记所确定的同伦类；$K(f)$ 表示此类映射的膨胀系数。更详细的定义参见 [FM12, 第 11] 章。映射类群在 Teichm¨uller 空间上的作用就是 Teichm¨uller 度量的等距变换群 [Roy71]。Teichm¨uller 度量是完备的，其测地线可用自然的 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$-作用在 $\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 上的对角部分来明确描述。

Kerckhoff 证明了 Teichmüller 度量的如下公式；该公式根据两个标记复结构之间的 Teichmüller 距离，控制奇异测度叶状结构的极值长度。

定理 2.4。 对于任意一对标记复结构 $X, Y \in \mathcal{T}_g$，

$$d_{\mathrm{Teich}}(X, Y) = \frac{1}{2} \max_{\lambda \in \mathcal{MF}_g} \log \left(\frac{\mathrm{Ext}_Y(\lambda)}{\mathrm{Ext}_X(\lambda)} \right). \tag{2.3}$$

此外，若 $q = q(X, Y) \in S(X)$ 是对应于从 X 到 Y 的唯一 *Teichmüller* 测地线的单位面积二次微分，则 $\Im(q)$ 在 (2.3) 中取到最大值。

$\Im(q)$取得上确界（而非 $\Re(q)$）这一事实，是因为 Teichm¨uller 映射会拉伸 $\Im(q)$ 的叶片，同时缩小其测度。

例如，假设 $q \in S(X)$；那么 $\lambda = \Im(q)$ 的极值长度为 1。随后，在 Teichm¨uller 测地流作用下得到的像 $g_t q$ 仍具有面积 1，且 $\Im(g_t q) = e^{-t}\lambda$。因此， λ 在 $g_t q$上的极值长度为 e^{2t} 。

度量带状图。 带状图是带边界曲面的变形收缩所对应的组合数据。更正式地说，它是一个（单纯）图Γ ，其每个顶点处的边都配有循环排序；将每条边加粗为一条带，并依照循环排序粘合这些带的边缘，即可将这一概念与前述概念对应起来。 Γ 的亏格和边界分支数就是所得拓扑曲面的亏格和边界分支数。可以为带状图 Γ赋予度量$\mathbf{x}$ ，即为其每条边指定长度，从而得到所谓的度量带状图（Γ，$\mathbf{x}$）。

对于 $b \geq 0$ 一个非负整数，记$\mathcal{MRG}_{g,\ b}$ 为所有亏格为 g 且具有 b 个可区分标记边界分支的度量带状图所构成的模空间，其中所有顶点的度数均至少为三。给定一个正数元组$\mathbf{L} = （L_1，\ldots，\ L_b）$，定义$\mathcal{MRG}_{g,\ b}（\mathbf{L}）\subseteq \mathcal{MRG}_{g,\ b}$ 为所有带有标记的边界分支长度分别为 $L_1，\ldots，\ L_b$的带状图所组成的子集。这些切片$\mathcal{MRG}_{g,\ b}（\mathbf{L}）$拼接起来构成一个纤维化$\mathcal{MRG}_{g,\ b} \to \mathbb{R}^b_{>0}$。

临界图。 给定 $X \in \mathcal{T}_g$ 上的一个标记复结构和一条简单闭曲线 γ ，Jenkins-Strebel微分 $q = \mathrm{JS}(X，\ \gamma) \in Q(X)$的临界图，是由$\Im(q)$的临界叶的并集构成的度量带状图，并赋予由 q在 X上诱导的奇异平坦度量的限制。对于一般的多重曲线，也可以进行类似的构造；但为了得到一个良定义的映射，将其映射到相应的度量带状图模空间，需要谨慎处理该构造的对称性。

在以下讨论中，设 $\vec{\gamma} := (\vec{\gamma}_1，\ \ldots\ldots，\ \vec{\gamma}_k)$是 S_g上的一条有序定向简单闭多曲线，设$\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma}) \subseteq \mathrm{Mod}_g$ 为其定向稳定子，即保持 $\vec{\gamma}$ 的每个分支及其定向不变的映射类集合；并设 $\gamma \in \mathcal{MF}_g$ 为其作为奇异测度叶状结构的等价类。沿 $\vec{\gamma}$ 的各个分支切割 S_g，得到一个（可能不连通的）带边界曲面$S_g \setminus \vec{\gamma}$。将 $S_g \setminus \vec{\gamma}$ 的各个分支标记为$(\Sigma_j)_{j=1}^c$；由于 γ的各个分支均已标记并带有定向，这样的标记是可能的。对于每个 $j \in \{1, \ldots, c\}$，令$g_j，\ b_j \geq 0$为非负整数，使得 Σ_j同胚于$S_{g_j,\ b_j}$。

对于任意长度向量 $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^k_{>0}$，我们定义

$$\mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma}; \mathbf{L}) := \prod_{j=1}^{c} \mathcal{MRG}_{g_j, b_j}\left(\mathbf{L}^{(j)}\right)$$

其中 $\mathbf{L}^{(j)}$ 表示与 Σ_j 的边界分支相对应的长度。

这些切片共同构成一个更大的模空间 $\mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma})$，它可通过自然嵌入到由边界长度可变的组合模空间之积中而赋予拓扑。记开单纯形为 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^k_{>0}$

$$\Delta := \{\mathbf{L} \in \mathbb{R}^k_{>0} | L_1 + \cdots + L_k = 1\}$$

并令 $\mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma}; \Delta)$ 表示纤维化在 Δ 上的全空间，其在 $\mathbf{L} \in \Delta$ 上方的纤维为 $\mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma}; \mathbf{L})$；这可以看作完整模空间 $\mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma})$ 在自然缩放作用下的“射影化”。

对于任意标记复结构 $X \in \mathcal{T}_g$，$\mathrm{JS}(X，\ \gamma)$ 的临界图是由 $\Im(q) \in \mathcal{MF}_g$ 的临界叶并集构成的度量带状图

其上赋予由 q 在 X 上诱导的奇异平坦度量的限制。注意，该图的每个分支都对应 $S_g \setminus \vec{\gamma}$ 的一个连通分支。利用这些分支的标记，可以定义临界图映射

$$\Xi(\cdot, \vec{\gamma}) \colon \mathcal{T}_g \to \mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma}).$$

此外，将临界图 $\Xi(X, \vec{\gamma}) \in \mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma})$ 的度量按 $1/\mathrm{Ext}_X(\gamma)$ 重新缩放后，可得到单位长度的临界图映射

$$\Xi^1(\cdot, \vec{\gamma}) \colon \mathcal{T}_g \to \mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma}; \Delta).$$

由于 $\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})$ 保持补曲面的标记不变，因此映射 $\Xi(\cdot, \vec{\gamma})$ 和 $\Xi^1(\cdot, \vec{\gamma})$ 都是 $\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})$-不变的。

3. Near the multiple zero locus

本节概述。本节证明，大多数简单闭多曲线的 Jenkins–Strebel 微分都深处于主分层之中；精确表述见命题 3.6。这一控制结果对于应用 §4 中证明的临界图变化界至关重要；可与命题 4.3 对照。本节使用的主要工具是 Masur 和 Smillie [MS91] 的相关工作中发展的二次微分 Delaunay 三角剖分理论，以及三角剖分的对偶轨道。

二次微分的三角剖分。在本文余下部分中，固定 $g \geq 2$，并令 S_g 为亏格 $g \geq 2$ 的紧致、连通、定向曲面。所谓二次微分 q 的三角剖分，是指其底层黎曼曲面的一个三角剖分，其中各边均为 q 的鞍连接（因此其顶点均为 q 的零点）。若某个 L 满足一定条件，则称二次微分 q 的一个三角剖分是-有界的，其中 $L > 0$，当且仅当其各边的平坦长度为 $\leq L$。

给定一个带标记的二次微分 $q \in \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 及其三角剖分 Δ'，可以通过标记映射将 Δ' 拉回，从而得到 S_g 上的一个三角剖分同痕类 Δ。特别地，由于我们没有标记 q 的零点，三角剖分 Δ 的顶点并非固定。回顾一下，映射类群 Mod_g 通过改变标记，在 $\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 和 $\mathcal{T}_g$ 上适当不连续地作用。它也作用于 S_g 的三角剖分同痕类集合；通过施加映射类，上述对应关系是等变的。

回想一下，$\pi : \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g \to \mathcal{T}_g$ 表示遗忘映射。

引理 3.1。设 Δ 是 S_g 的三角剖分的一个同痕类，设 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}_g$ 是一个紧子集，且 $L > 0$。则具有一个 L-有界三角剖分 Δ' 的标记二次微分子集 $q \in \pi^{-1}(\mathrm{Mod}_g \cdot \mathcal{K})$，该三角剖分经由 q 的标记拉回至 Δ，在 $\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 中具有紧闭包。

证明。令 $q \in \pi^{-1}(\mathrm{Mod}_g \cdot \mathcal{K})$，且 Δ' 是 q 的一个 L-有界三角剖分，它经由 q 的标记拉回后成为 Δ。在 S_g上固定一条简单闭曲线 α。由于 Δ' 是 L-有界的，且经由 q的标记拉回后成为 Δ，因此可以用 α、$\chi(S_g)$ 和 L一致地界定 q 上 α 的任意测地代表的平坦长度$\ell_\alpha(q)$。再结合 $q \in \pi^{-1}(\mathrm{Mod}_g \cdot \mathcal{K})$这一事实，可知相对于由 $\pi(q) \in \mathcal{T}_g$ 经一致化诱导的 S_g 上的带标记双曲结构，α 唯一测地代表的双曲长度$\ell_\alpha(\pi(q))$，可以用 α、$\chi(S_g)$、L和 $\mathcal{K}$一致地界定。由于丛 π: $\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g \to \mathcal{T}_g$ 的纤维是紧的，且在 $\mathcal{T}_g$ 中趋于无穷远的唯一方式是出现一条双曲长度无界的简单闭曲线，故证明完毕。□

二次微分的 Delaunay 三角剖分。对于每个二次微分 q，记其最短鞍连接的长度为 $\ell_{\min}(q)$，并记其直径为 diam(q)。每个二次微分 (X, q) 都存在一个由鞍连接构成的三角剖分；相对于 q 的奇点以及 X [上由 q 诱导的奇异平坦度量，该三角剖分是 Delaunay 的（MS91，第 4] 节）。我们将任何此类三角剖分称为 q的 ***Delaunay*** 三角剖分。在本讨论中，我们无需借助这些三角剖分的显式构造，只需知道它们存在并满足以下性质即可。

引理 3.2。 [ABEM12，引理 3。11] 设 $q \in \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 和 Δ 是 q的 ***Delaunay*** 三角剖分。设 γ 是 q的一条鞍连接。

(1) 如果 γ 属于 Δ，那么 $\ell_\gamma(q) \preceq_g$ 直径(q)。

(2) 如果 $\ell_\gamma(q) \leq \sqrt{2} \cdot \ell_{\min}(q)$，那么 γ 属于 Δ。

由引理 3.1 和引理 3.2 可直接推出以下结果。

命题 3.3。 对于每个紧子集 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}_g$，都存在常数 $L = L(\mathcal{K}) > 0$，以及 S_g 上有限个三角剖分同痕类的集合 $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$，满足以下性质。设 $q \in \pi^{-1}(\mathcal{K})$，且 γ 是 q的一条鞍连接，其平坦长度在 q的所有鞍连接中最小。则存在$i \in \{1, \ldots, n\}$，以及 q 的一个 L-有界三角剖分 Δ'，使得 γ是其一条边，并且该三角剖分经由 q 的标记拉回到 Δ_i 。

证明。 固定一个紧子集 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}_g$。由引理 3.2.1，存在常数$L = L(\mathcal{K}) > 0$，使得 $\pi^{-1}(\mathcal{K})$中的二次微分的每个德劳内三角剖分都是 L-有界的。此外，由引理 3.2.2，这些三角剖分总是包含 q的最短鞍连接。因此，只需证明这些三角剖分在 S_g上的原像仅有有限多个三角剖分。这是因为 $\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 中的二次微分的三角剖分至多有 $4g-4$ 个顶点，所以在映射类群的作用下， S_g 上可能出现的三角剖分只有有限多个组合类型。应用引理 3.1 以及 Mod$_g$ 在 $\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$上的适当不连续性，我们可知，在某个 $q \in \pi^{-1}(\mathcal{K})$上 L-有界的 S_g 上的三角剖分同痕类只有有限多个。证毕。□

注记 3.4. 请注意，如果我们同时标记 q 的零点和底层曲面，这一结论便不成立。这些零点可以彼此绕行，而 q 仍留在 $\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 的某个紧子集中，从而产生无穷多个不同的三角剖分，它们在曲面辫群的作用下彼此不同。这反映了这样一个事实：$\pi^{-1}(\mathcal{K})$ 与任意（非极小）层的交集都不是紧的。

轨道坐标。现在我们讨论轨道坐标理论的若干方面。有关更多详细信息，请参阅 [PH92]。 S_g 上的一个轨道 τ是一个嵌入的 1-复形，满足以下条件：

(1) τ 的每条边都是一条光滑路径，在每个端点处都有定义良好的切向量。给定顶点处的所有边彼此相切。(2) 对于 $S_g \setminus \tau$的每个分支 R，沿边界光滑部分 ∂R 将 R 双化后，其欧拉示性数为负。

τ中三条或更多边相交的顶点称为切换点。通过考察与切换点相连的各边指向内侧的切向量，可以将这些边分为流入边和流出边。若轨道 τ 位于 S_g 上，则称其为

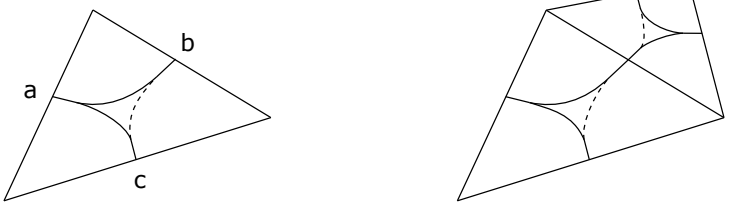
若 $S_g \setminus \tau$ 的所有分支都是三角形区域，即一个圆盘的内部，且其边界上有三个非光滑点，则称其为极大。

如果一个奇异测度叶状结构 $\lambda \in \mathcal{MF}_g$ 可以通过压缩 S_g 中某个管状邻域的测度叶状结构的补区域得到，且该叶状结构的叶片平行于 τ 的边，则称它被τ 上的某个轨道τ 承载，其中 S_g 。在这种情况下， λ 的不变横向测度对应于 τ 各边上的计数测度 v ，并满足切换条件：在 τ 的每个切换点，流入边的测度之和等于流出边的测度之和。每个 $\lambda \in \mathcal{MF}_g$ 都被 S_g上的某个极大轨道 τ 所承载。

给定 S_g 上的一条极大轨道 τ，记 $V(\tau) \subseteq (\mathbf{R}^{\geq 0})^{18g-18}$ 为 τ 的边上满足切换条件的非负计数测度所构成的 6 维闭锥。集合 $V(\tau)$ 可以与由 τ 承载的奇异测度叶状结构的闭锥 $U(\tau) \subseteq \mathcal{MF}_g$ 等同。这些等同关系在 $\mathcal{MF}_g$ 上引入了称为 轨道坐标 的坐标系。这些坐标的过渡映射是分段整线性的。特别地， $\mathcal{MF}_g$ 可以赋予一种自然的 $6g-6$ 维分段整线性结构，其中整点 $\mathcal{MF}_g(\mathbb{Z})$ 对应于带整数权的简单闭多曲线。

与三角剖分对偶的轨道。 现在，我们利用关于 $q \in \pi^{-1}(\mathcal{K})$ 的三角剖分的讨论，控制水平叶状结构的大致形态。首先回顾与三角剖分对偶的轨道的构造；比较 [Mir08a], [AH22], [CF21], 和 [CF]。

设 Δ 是 S_g 上的一个三角剖分同痕类。在 Δ 的每个三角形上，如图2a所示考虑一个1-复形；该复形中不与三角形边相交的边将被称为内部边。按照图2b所示沿 Δ 的边连接这些复形，从而在 S_g 上得到一个复形。如果 τ 在 S_g 上，并且可以通过在 Δ 的每个三角形中删除一条内部边而从该复形得到，我们就称轨道 τ 对偶 于 Δ。我们指出，尽管我们只考虑同痕类，这一操作仍然定义良好：两个同痕的三角剖分将给出同痕的对偶轨道集合。



(a) 三角形中的对偶1-复形和对偶轨道。

(b) 将对偶一维复形与轨道连接起来。

FIGURE 2. 与三角剖分对偶的1-复形和轨道。通过从1-复形中去掉虚线边得到该轨道。

令 $q \in \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 和 Δ' 为 q的一个三角剖分。将通过 q的标记拉回 Δ' 所得到的 S_g 的三角剖分记为 Δ 。水平叶状结构

$\Im(q) \in \mathcal{MF}_g$ 由与 Δ对偶的轨道承载。事实上，设 T' 是Δ'的一个三角形。将 T' 的边标记为 a、b、c，使得

$$\int_a d\Im(q) = \int_b d\Im(q) + \int_c d\Im(q)$$

这种标记是唯一的，除非 T' 的某条边是水平的；在这种情况下，存在两种这样的标记。在 T' 上考虑一个如图2a所示的 1-复形，并删去该复形中与 a 相对的内部边。考虑 Δ' 的所有三角形上对应的 1-复形。按照图2b所示，沿着 Δ' 的边将这些复形连接起来，再将所得复形拉回到 S_g，便得到一条与 Δ 对偶的轨道 τ。这条轨道承载 $\Im(q) \in \mathcal{MF}_g$；对于 Δ' 的每条边 e，τ 中对应边的计数测度等于 $\int_e d\Im(q)$。如果 q 属于二次微分的主分层，那么通过此构造得到的轨道 τ 是极大的；一般而言，q 的奇点结构反映在 τ 的组合结构中。

由上述讨论和命题 3.3 可直接推出以下结论，它与 [AH22，命题 2.7] 以及 [CF21，第 10] 节的结果类似。

命题 3.5。对于每个紧子集 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}_g$，都存在有限个轨道 $\{\tau_i\}_{i=1}^n$，位于 S_g 上，并具有以下性质。设 $q \in \pi^{-1}(\mathcal{K})$，且 γ 是 q 的一条鞍连接，其平坦长度在 q 的所有鞍连接中最短。那么，存在 $i \in \{1, \dots, n\}$，使得 τ_i 承载 $\Im(q)$，并且相应的边计数测度 τ_i 将权重 $\int_\gamma d\Im(q)$ 赋予 τ_i 的一条边。

关键估计。现在我们可以证明本节的主要估计了。该估计将使我们能够以足够强的方式控制所关注的多重零点轨迹附近的等分布问题。

令 JS: $\mathcal{T}_g \times \mathcal{MF}_g \to \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 表示定理 2.2 中的 Hubbard–Masur 映射，它将每个 $(X,\ \lambda) \in \mathcal{T}_g \times \mathcal{MF}_g$ 映射为唯一的带标记二次微分$q \in \pi^{-1}(X)$，使得 $\Im(q) = \lambda$。该微分的面积为 $\mathrm{Ext}_X(\lambda)$，因此将其缩放为原来的极值长度平方根的倒数，即可得到单位面积微分。令$K_\sigma \subseteq \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 表示属于主分层且满足 $\ell_{\min}(q) \geq \sigma$ 的带标记单位面积二次微分集合 $q \in \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$。给定 $X \in \mathcal{T}_g$，考虑集合

$$F(X,\sigma) := \left\{ \alpha \in \mathcal{MF}_g(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ext}_X(\alpha)}}\,\mathrm{JS}(X,\alpha) \notin K_\sigma \right\}$$

对于任意紧集 $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}_g$，定义 $F(\mathcal{K},\ \sigma) := \bigcup_{X \in \mathcal{K}} F(X,\ \sigma)$。

命题 3.6。设 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}_g$ 是一个紧子集。那么存在常数$C > 0$，使得对于每个 $X \in \mathcal{K}$、每个 $\sigma > 0$和每个 $L > 1$,

$$\#\{\alpha \in F(\mathcal{K},\sigma) \mid \mathrm{Ext}_\alpha(X) \leq L^2\} \leq C \cdot L^{6g-7} + C \cdot \sigma \cdot L^{6g-6}.$$

证明。设 $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ 为命题 3.5 所给出的 S_g 上的有限轨道集。现在考虑满足 $\mathrm{Ext}_\alpha(X) \leq L^2$ 的 $\alpha \in \mathcal{MF}_g(\mathbb{Z})$，并且

$$q := \mathrm{JS}(X, \alpha/\sqrt{\mathrm{Ext}_\alpha(X)}) \in \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g \setminus K_\sigma.$$

首先，假设 q 不属于主分层。于是，根据构造，承载 $\alpha = \sqrt{\mathrm{Ext}_\alpha(X)} \cdot \Im(q)$ 的轨道 τ_i 不是极大的。现在假设 q 属于主分层，并且 q 的一条鞍连接 γ 达到了 $\ell_{\min}(q)$。

由构造可知，当由相应的 τ_i 承载时， α 的一个相应权重至多为 $\sigma \cdot \sqrt{\mathrm{Ext}_\alpha(X)} \leq \sigma \cdot L$。由于轨道 $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ 的集合是有限的，利用标准的格点计数论证即可得到所需的界。□

4. Uniform geometric estimates

本节概述。本节将证明，在模空间中适当选取的邻域内，度量带状图 $\Xi^1(X, \vec{\alpha})$ 的权重会随 X 的变化而一致变化；精确表述见命题 4.3。证明基于一致连续性论证，并以 Avila、Gou¨ezel 和 Yoccoz [AGY06] 引入的二次微分分层上的 AGY 度量为关键工具。在证明命题 4.3 之前，我们将参照 [AGY06] 和 [AG13]，讨论 AGY 度量的一些基本性质。

AGY 度量。令 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{QT}_g$ 为标记二次微分的主分层，即仅含单零点的微分所构成的子集。用 (X, q) 表示 $\mathcal{Q}$ 中的点，其中 X 是一个标记黎曼曲面，而 q 是定义在 X 上的二次微分。令 $(Z, \omega) \to (X, q)$ 为 (X, q) 的全纯表示双覆盖。$\mathcal{Q}$ 在 (X, q) 处的切空间可识别为相对上同调群 $H^1_{\mathrm{odd}}(Z, \Sigma; \mathbf{C})$，其中 $\Sigma \subseteq Z$ 表示 ω 的零点集，下标 odd 表示 $Z \to X$ 的典范对合的 -1 特征子空间。对于 $v \in H^1_{\mathrm{odd}}(Z, \Sigma; \mathbf{C})$，考虑范数

$$\|v\|_q := \sup_{s \in \mathcal{S}} \left| \frac{v(s)}{\mathrm{hol}_\omega(s)} \right|,$$

其中，$\mathcal{S}$ 表示 ω 的鞍连接集合，而 $\mathrm{hol}_\omega(s) \in \mathbf{C}$ 表示鞍连接 s 关于 ω 的全纯性；我们有时将这一全纯性记作 $|s|_\omega$。根据 Avila、Gou¨ezel 和 Yoccoz [AGY06]，的工作，这一定义确实在 $H^1_{\mathrm{odd}}(Z, \Sigma; \mathbf{C})$ 上给出了一个范数，且相应的芬斯勒度量在 $\mathcal{Q}$ 上是完备的。我们将此度量称为 $\mathcal{Q}$ 的 AGY 度量，并记作 d_{AGY}。对于任意路径 $\mathcal{C}^1$： κ $[0, 1] \to \mathcal{Q}$，将其 AGY 长度记为

$$\mathrm{length}(\kappa) := \int_0^1 \|\kappa'(t)\|_{\kappa(t)}\, dt.$$

我们观察到，对于 $r \in \mathbb{R}_{>0}$，缩放作用 $q \mapsto rq$ 是 AGY 度量的等距变换。事实上，给定 $v \in H^1_{\mathrm{odd}}(Z,$ $\Sigma; \mathbf{C})$，我们有 $\|rv\|_{rq} = \|v\|_q$，因此，给定任意一条从 q 到 q' 的路径 C^1 path $\kappa(t)$，我们可以计算从 rq 到 rq' 的对应路径 $r\kappa(t)$ 的长度：

$$\mathrm{length}(r\kappa) = \int_0^1 \|r\kappa'(t)\|_{r\kappa(t)}\, dt = \int_0^1 \|\kappa'(t)\|_{\kappa(t)}\, dt = \mathrm{length}(\kappa).$$

基本性质。固定 $(X, q) \in \mathcal{Q}$，并令 $\Psi = \Psi_q$ 为上述通过其切平面 $H^1_{\mathrm{odd}}(Z, \Sigma; \mathbf{C})$ 对 $\mathcal{Q}$ 进行的局部参数化。更正式地，对于 $v \in H^1_{\mathrm{odd}}(Z, \Sigma; \mathbf{C})$，如下定义 $\Psi(v)$。考虑一条从 (X, q) 出发的路径 κ，满足对所有时刻 t， $\kappa'(t) = v$。当 t 足够小时，路径 $\kappa(t)$ 有定义。对于较大的 t， $\kappa(t)$ 可能没有定义。如果路径 κ 对所有 $t \in [0, 1]$ 均有定义，则定义 $\Psi(v) := \kappa(1) \in \mathcal{Q}$。

用 $B(0,r)$ 表示 $H^1_{\mathrm{odd}}(Z,\Sigma;\mathbf{C})$ 中以原点为中心、半径为 r 的球，其中采用范数 $\|\cdot\|_q$。以下结果将在后续各节中起关键作用，它们对“指数映射” Ψ 的像给出了控制。

命题 4.1. 映射 Ψ 在 $B(0,1/2)$上定义良好。此外，

(1) 对于 $v\in B(0,\ 1/2)$，

$$d_{\mathrm{AGY}}(q,\Psi(v))\le 2\cdot\|v\|_q.$$

(2) 对于每个 $v\in B(0,1/2)$ 以及每个 $w\in H^1_{\mathrm{odd}}(Z,\Sigma;\mathbf{C})$，

$$1/2\le\frac{\|w\|_q}{\|w\|_{\Psi(v)}}\le 2.$$

(3) 对于 $v\in B(0,1/25)$，

$$d_{\mathrm{AGY}}(q,\Psi(v))\ge\|v\|_q/2.$$

特别地，任何满足 $d_{\mathrm{AGY}}(q,q')<1/50$ 的 $q'\in\mathcal{Q}$，都等于某个 $\Psi(v)$，其中 $v\in B(0,1/25)$。

除（3）的最后一项断言外，这只是将 [AG13 命题 5.3] 推广到任意向量后的表述；我们概述最后一项断言的证明。

证明概要。考察 $B(0,1/25)$ 在 Ψ 下的像。根据区域不变性定理，它是开集；特别地，它包含一个半径为某个最大值 $r>0$ 的开 AGY 球 B_{AGY}。由（3）的第一项断言可知，$\Psi^{-1}(B_{\mathrm{AGY}})$ 包含于 $B(0,2r)$。特别地，如果 $r<1/50$，那么我们可以找到一个稍大的球 $B(0,2r+\varepsilon)$，其 Ψ 像严格包含 B_{AGY}（再次由（3）的第一项断言可知），因此 r 起初就不是最大的。所以 $r\ge 1/50$。□

其余结论的证明可通过紧密遵循 [AG13]中的论证得到。事实上，命题 4.1 证明中的关键依据是 [AG13，命题 5.5]，，该命题给出了向量平行移动后的增长量与其沿之移动的路径长度之间的界，而且对任意 v都成立，并不局限于不稳定分布中的向量。

我们记录一个类似的结果以备后用，该结果讨论鞍连接的长度如何沿路径变化；可与 [AG13，引理 5.6]对照。

引理 4.2。设 $\kappa:\ [0,1]\to\mathcal{Q}$ 是一条 C^1 路径，且 s 是一条鞍连接，在所有 $t\in[0,1]$时都存在于 $\kappa(t)$ 中。那么

$$e^{-\mathrm{length}(\kappa)}\le\frac{|s|_{\kappa(0)}}{|s|_{\kappa(1)}}\le e^{\mathrm{length}(\kappa)}.$$

我们指出，[AG13], 中只陈述了上界，但其中的证明也给出了所需的下界。

权重的变化。完成这些预备工作后，我们现在可以证明，当 X 在 $\mathcal{T}_g$中的一个小球内变化时，对于大多数简单闭合多曲线 α，水平带状图的几何结构都受到一致控制。可与 [AHC22]中的引理 4.1 和命题 4.2 对照。

回忆一下，若 $\vec{\alpha}$ 是 S_g 上的一条有序定向简单闭多曲线，则 $\alpha\in\mathcal{MF}_g(\mathbb{Z})$ 表示它作为奇异测度叶状结构的等价类。回忆一下，对于紧集 $\mathcal{K}\subseteq\mathcal{T}_g$ 和 $\sigma>0$，集合 $F(\mathcal{K},\ \sigma)$ 表示满足以下条件的整系数简单闭多曲线 $\alpha\in\mathcal{MF}_g(\mathbb{Z})$：存在某个 $X\in\mathcal{K}$，使得微分 JS$(X,\ \alpha)$ 要么不属于 $\mathcal{Q}$，要么具有一条短于 $\sigma\sqrt{\mathrm{Ext}_X(\alpha)}$ 的鞍连接。

命题 4.3。 固定一个紧子集 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}_g$。那么，对每个 $\varepsilon > 0$ 和每个 $\sigma > 0$，都存在 $\delta = \delta(\mathcal{K}, \varepsilon, \sigma) > 0$，使得对于任意满足 $\alpha \notin F(\mathcal{K}, \sigma) \leq \delta$ 的、位于 S_g 上的有序定向简单闭多曲线 $\vec{\alpha}$，以及任意两个满足 $d_{\mathrm{Teich}}(X, X') \leq \delta$ 的 X、$X' \in \mathcal{K}$，下列结论均成立。

(1) Ξ水平带状图$(X, \vec{\alpha})$ 和 $\Xi(X', \vec{\alpha})$ 具有相同的拓扑类型，即，位于 $\mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\alpha})$的同一个面中。(2) 对于 $\Xi(X, \vec{\alpha})$ 和/或 $\Xi(X', \vec{\alpha})$的每条边 e，我们有

$$e^{-\varepsilon} \leq \frac{|e|_{\Xi^1(X,\vec{\alpha})}}{|e|_{\Xi^1(X',\vec{\alpha})}} \leq e^{\varepsilon}.$$

该命题的证明分为两步：我们先证明这些假设蕴含微分 JS(X, α) 和 JS(X', α) 在 AGY 度量下彼此接近，然后利用该度量的性质得出所需结论。

第一步利用 Hubbard–Masur 映射的一致连续性来完成。为此，我们需要将范围限制在一个紧集内。去掉 K_σ可以让我们避开多重零点轨迹的一个邻域，但我们还必须对所考虑的微分的面积施加上界。因此，我们首先记录当底曲面在一个紧集内变化时，测叶状结构的极值长度的一个先验上界。以下结论直接由定理 2.4 得出。

引理 4.4。 对于每个紧集 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}_g$，存在一个 $c_{\mathcal{K}} > 1$，使得对于每个$\lambda \in \mathcal{MF}_g$ 以及每个 X，$X' \in \mathcal{K}$，

$$c_{\mathcal{K}}^{-1} \leq \frac{\sqrt{\mathrm{Ext}}_{X'}(\lambda)}{\sqrt{\mathrm{Ext}}_{X}(\lambda)} \leq c_{\mathcal{K}}.$$

现在我们证明，如果 X 和 X' 在 Teichm¨uller 度量下彼此接近，那么它们的大多数 Jenkins–Strebel 微分在 AGY 度量下也彼此接近。

引理 4.5。 固定命题 *4.3* 中的 $\mathcal{K}$、σ。对于任意 $\zeta > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得对于任意满足 $d_{\mathrm{Teich}}(X$、$X') < \delta$ 的 X、$X' \in \mathcal{K}$，以及任意 $\alpha \notin F(\mathcal{K}$、$\sigma)$，

$$d_{\mathrm{AGY}}(\mathrm{JS}(X, \alpha), \mathrm{JS}(X', \alpha)) < \zeta.$$

证明。 任取 $d_{\mathcal{MF}_g}$ 上的一个度量，使其诱导标准拓扑。由定理 2.2 可知，映射 JS：$\mathcal{T}_g \times \mathcal{MF}_g \to \mathcal{QT}_g$ 是一个同胚，因此在紧集上均匀连续

$$J := (\mathcal{K} \times \mathcal{MF}_g) \cap \mathrm{Ext}^{-1}([c_{\mathcal{K}}^{-2}, c_{\mathcal{K}}^{2}]) \cap \mathrm{JS}^{-1}(\mathbb{R}_{>0} \cdot K_\sigma).$$

也就是说，对于任意 $\zeta > 0$，都存在一个 $\delta > 0$，使得对于任意 $(X,\ \lambda)$，$(X',\ \lambda) \in J$，满足

$$d_{\mathrm{Teich}}(X, X') < \delta \text{ and } d_{\mathcal{MF}_g}(\lambda, \lambda') < \delta$$

那么我们有

$$d_{\mathrm{AGY}}(\mathrm{JS}(X, \lambda), \mathrm{JS}(X', \lambda')) < \zeta.$$

特别地，引理 4.4（或者说定理 2.4）意味着

$$\sqrt{\mathrm{Ext}}_{X'}\left(\alpha / \sqrt{\mathrm{Ext}}_{X}(\alpha)\right) = \frac{\sqrt{\mathrm{Ext}}_{X'}(\alpha)}{\sqrt{\mathrm{Ext}}_{X}(\alpha)} \in [c_{\mathcal{K}}^{-1}, c_{\mathcal{K}}]$$

因此设 $\lambda = \lambda' = \alpha / \sqrt{\mathrm{Ext}_X}(\alpha)$，我们有：JS$(X, \lambda)$ 与 JS(X', λ) 相距 ζ。关于 α 本身的结论则由重缩放是 AGY 度量的等距变换这一事实得出。□

现在，由于 JS(X,α) 与 JS(X',α) 很接近，且位于不稳定叶状结构的同一叶中，我们可以使用指数映射 Ψ 将它们连接起来，所经过的路径完全包含在不稳定叶 $\{$JS$(X,\alpha)\ |X\in\mathcal{T}_g\}$ 中。对该映射的分析给出了本节主要结果的证明。

命题 *4.3* 的证明。我们首先注意到，根据 Ξ^1 映射的定义，

$$\frac{|e|_{\Xi^1(X,\vec{\alpha})}}{|e|_{\Xi^1(X',\vec{\alpha})}}=\frac{|e|_{\Xi(X,\vec{\alpha})}}{|e|_{\Xi(X',\vec{\alpha})}}\cdot\frac{\mathrm{Ext}_{X'}(\alpha)}{\mathrm{Ext}_X(\alpha)}.$$

根据定理 2.4，只要取足够小的 δ，极值长度之比就可以任意接近 1，因此只需比较未归一化临界图的几何形状。为方便记号，在证明余下部分中，我们记

$$q:=\mathrm{JS}(X,\alpha)\text{ and }q':=\mathrm{JS}(X',\alpha).$$

固定 $0<\varepsilon<2/25$。引理 4.5 告诉我们，取足够小的 δ，即可确保 q 与 q' 在 AGY 度量下足够接近，因此由命题 4.1.3 可知，对于某个 $v\in B$，有 $q'=\Psi(v)$（0，$\varepsilon/2$）。但现在我们知道 q 和 q' 具有相同的水平叶状结构，因此垂直周期也相同。因此，v 必须是实数，即相对于自然分解有 $v\in H^1_{\mathrm{odd}}(Z,\ \Sigma;\mathbb{R})$

$$H^1_{\mathrm{odd}}(Z,\Sigma;\mathbb{C})\cong H^1_{\mathrm{odd}}(Z,\Sigma;\mathbb{R})\oplus H^1_{\mathrm{odd}}(Z,\Sigma;i\mathbb{R}).$$

特别地，这意味着沿着 $\kappa(t)$，每个水平鞍点的周期都保持为实数。由于指数映射 Ψ 有定义（且是适当映射），我们可以看出，每个水平鞍点都必须沿整条路径 $\{\kappa(t)\}_{t=0}^1$ 持续存在（否则某个鞍点会收缩至零，但这会使其离开该层）。因此，$\kappa(0)=q$ 与 $\kappa(1)=q'$ 的水平鞍连接图具有相同的拓扑类型，从而证明了命题的第一部分。

对于第二部分，我们注意到，沿整条路径，$\|v\|_{\kappa(t)}$ 的增长幅度至多为 2 倍（命题 4.1.2），因此 κ 的长度至多为 ε。由于每个水平鞍点沿整条路径持续存在，根据引理 4.2，每个水平鞍点的长度变化幅度至多为 $e^{\mathrm{length}(\kappa)}$倍。因此，对于 $\Xi(X,\vec{\alpha})$的每条边，其在 q 和 q'处的长度之比都有 $e^{\pm\varepsilon}$的界，从而证明了第二个结论。□

5. Horoball measures

本节概述。本节将介绍“临界 JS horoball”，并说明它们在模空间上扩张时，会相对于 Masur-Veech 测度等分布。精确表述见命题 5.7。我们的初步讨论依据 Athreya、Bufetov、Eskin 和 Mirzakhani[ABEM12] 的研究，以及关于临界 JS horoball 的一个纤维化 Kontsevich 测度表达式。等分布结果是 Forni[For21], 的研究成果的推论，而该研究又建立在 Eskin、Mirzakhani 和 Mohammadi [EM18, EMM15]的突破性成果之上。对于所讨论的所有测度，我们始终采用 [ABEM12],[AH21a],和 [AHC22]中的归一化方式。

Masur-Veech 测度。设 $\vec{\gamma}:=(\vec{\gamma}_1,\dots,\vec{\gamma}_k)$ 是 S_g 上一条有序、定向的简单闭多曲线，其中底层多曲线为 $\gamma\in\mathcal{MF}_g$。回顾一下，$\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})\subseteq\mathrm{Mod}_g$ 表示 $\vec{\gamma}$ 的定向稳定子，也就是固定 $\vec{\gamma}$ 的每个分支及其方向的映射类集合。

回顾一下， ν_{MV} 表示 $\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 上的 Masur-Veech 测度。遗忘映射 $\pi\colon \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g \to \mathcal{T}_g$ 将马苏尔–韦奇测度推前为 $\mathcal{T}_g$ 上的勒贝格类测度 $\mathbf{m} := \pi_*\nu_{\mathrm{MV}}$ ，我们也称之为马苏尔–韦奇测度。ν_{MV} 和 $\mathbf{m}$ 都是 Mod$_g$-不变的。令 $\widetilde{\nu}_{\mathrm{MV}}$ 和 $\widetilde{\mathbf{m}}$ 分别表示相应的局部推前，作用于 $\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g/\mathrm{Stab}_0(\bar{\gamma})$ 和 $\mathcal{T}_g/\mathrm{Stab}_0(\bar{\gamma})$；类似地，令 $\widehat{\nu}_{\mathrm{MV}}$ 和 $\widehat{\mathbf{m}}$ 表示将 $\widetilde{\nu}_{\mathrm{MV}}$ 和 $\widetilde{\mathbf{m}}$ 推前至 $\mathcal{Q}^1\mathcal{M}_g$ 和 $\mathcal{M}_g$ 所得的测度。当然，也可以通过相应的遗忘映射将 $\widetilde{\nu}_{\mathrm{MV}}$ 和 $\widehat{\nu}_{\mathrm{MV}}$ 推前，从而定义 $\widetilde{\mathbf{m}}$ 和 $\widehat{\mathbf{m}}$。将 $\widehat{\nu}_{\mathrm{MV}}$，或等价地 $\widehat{\mathbf{m}}$ 的总质量记为 $b_g > 0$。

回顾一下，对于任意黎曼曲面 X，我们用 $S(X)$ 表示其上的单位面积二次微分球面。令 s_X 为由 $\mathcal{T}_g$ 上的 $\mathbf{m}$ 在 $S(X)$ 上诱导的条件概率测度。它由如下分解公式刻画。

$$d\nu_{\mathrm{MV}}(X,q) = ds_X(q)\, d\mathbf{m}(X), \tag{5.1}$$

以及商空间上的测度 $\widetilde{\nu}_{\mathrm{MV}}$ 和 $\widehat{\nu}_{\mathrm{MV}}$ 的类似表达式。 [2]

Hubbard-Masur函数。回顾一下，奇异测度叶状结构 $\Im(q) \in \mathcal{MF}_g$ 表示 $q \in \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 的水平叶状结构，并且 $[\Im(q)] \in \mathcal{PMF}_g$表示其射影类。正如 [ABEM12], 中所观察到的， $\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 的不稳定叶状结构 $\mathcal{F}^u$ 的每一条叶都带有一种条件测度，该测度在Teichm¨uller测地流作用下均匀扩张。该测度可以如下显式构造。根据定义， $\mathcal{F}^u$ 的任意一条叶都具有如下形式

$$\mathcal{F}^u_{[\beta]} = \{q \in \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g \mid [\Im(q)] = [\beta] \in \mathcal{PMF}_g\}$$

对于某个 $\beta \in \mathcal{MF}_g$。根据定理 2.2，该集合又可识别为 S_g 上与β 共同填充曲面的奇异测度叶状结构的开集 $\mathcal{MF}_g(\beta) \subseteq \mathcal{MF}_g$。因此， $\mathcal{MF}_g$ 上的 Thurston测度 μ_{Thu} 限制为 $\mathcal{MF}_g(\beta)$ 上的一个非平凡测度，进而在 $\mathcal{F}^u_{[\beta]}$ 上诱导出一个测度，我们将其记为 $\nu_{u,\,\beta}$。

回顾一下， $\{g_t\colon\ \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g \to \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 $\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 上的 Teichmüller 测地流。公式所描述的基本缩放性质

$$(g_t)_*\nu_{u,\beta} = e^{-(6g-6)t}\nu_{u,\beta} \tag{5.2}$$

于是，¨üller 测地流拉伸水平向，使垂直叶状结构上的测度增大，因此在 $\mathcal{MF}_g(\beta)$ 上的作用相当于乘以 e^t ，这便是上述性质成立的原因。

根据定理 2.2 和 2.3，遗忘映射 $\pi\colon \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g \to \mathcal{T}_g$ 限制后给出 $\mathcal{F}^u_{[\beta]} \cong \mathcal{MF}(\beta)$ 与 $\mathcal{T}_g$ 之间的同胚 $\pi_{[\beta]}$。该映射将 $\nu_{u,\,\beta}$ 推前所得的测度属于勒贝格测度类。沿用 [ABEM12], 的记号，我们记为

$$\lambda^+(q) := \frac{d\mathbf{m}}{d(\pi_{[\beta]})_*\nu_{u,\beta}}(X)$$

相应的拉东–尼科迪姆导数，其中 $q = \pi^{-1}_{[\beta]}(X)$，也就是说， q =詹金斯-施特雷贝尔$(X,\beta)/\sqrt{\mathrm{Ext}_X(\beta)}$。我们回顾一下， [ABEM12] 将*Hubbard–Masur*函数定义为以下积分:

$$\Lambda(X) := \int_{\mathcal{Q}^1(X)} \lambda^+(q)\, ds_X.$$

[2]请注意，在模空间层面记录解体公式时，我们无需担心稳定子的大小。对于 $g \geq 3$，我们有：几乎处处的 $X \in \mathcal{M}_g$ （相对于$\mathbf{m}$）都没有非平凡自同构，因此 X 上的 $\mathcal{Q}^1\mathcal{M}_g$ 的纤维就是整个球面 $S(X)$。对于 $g = 2$ ，每个曲面都是超椭圆的，但每个二次微分也都是如此。

根据定义可直接看出， $\lambda^+(q)$ 和 $\Lambda(X)$ 都是 Mod$_g$-不变的；另见 [ABEM12，第 1063] 页页首。

追溯这些定义，可以得到如下表述。

引理5.1。 [ABEM12，命题 2.3 (iii)] 对于任意 $X \in \mathcal{T}_g$,

$$\Lambda(X) = \mu_{\mathrm{Thu}}\left(\{\beta \in \mathcal{MF} \mid \mathrm{Ext}_X(\beta) \le 1\}\right).$$

事实上，Mirzakhani 证明了以下强结果。

定理 5.2。 [Dum15，定理 5。10] 函数 $X \in \mathcal{T}_g \mapsto \Lambda(X)$ 是常数。

因此，我们将这个值称为 ***Hubbard–Masur*** 常数 $\Lambda_g > 0$.

Horoballs. 对于每个 $L > 0$ ，我们将（总）极值长度 horoball 测度 $\mathbf{m}^L_{\vec{\gamma}}$ 定义在 $\mathcal{T}_g$ 上，方法是将 $\mathbf{m}$ 限制在满足 $\sqrt{\mathrm{Ext}_X(\gamma)} \le L.$ 的标记黎曼曲面 $X \in \mathcal{T}_g$ 集合上。类似地，我们将（总）不稳定 horoball 测度$\nu^L_{u,\,\vec{\gamma}}$定义在 $\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g$ 上，方法是将 $\nu_{u,\,\vec{\gamma}}$ 限制在该集合在遗忘映射 π: $\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g \to \mathcal{T}_g$下的原像上。 X 上 γ 的极值长度等于二次微分 $q = \mathrm{JS}(X,\ \gamma)$ 的面积，而这又等于 q的水平与垂直叶状结构的几何交数，因此 $\nu^L_{u,\,\vec{\gamma}}$ 也可以等价地定义为将 $\mathcal{MF}_g(\gamma)$ 上的 Thurston测度限制在该集合上

$$\{\beta \in \mathcal{MF}_g(\gamma) \mid i(\beta,\gamma) \le L\}$$

并将这个“Thurston horoball 测度” μ^L_{Thu} 推前 $\mathcal{F}^u_{[\gamma]}$。 然后，我们进行局部推前以得到测度

$$\begin{array}{lll} \widetilde{\mathbf{m}}^L_{\vec{\gamma}} & \text{on} & \mathcal{T}_g/\operatorname{Stab}_0(\vec{\gamma}), \\ \widetilde{\nu}^L_{u,\vec{\gamma}} & \text{on} & \mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g/\operatorname{Stab}_0(\vec{\gamma}), \\ \widetilde{\mu}^L_{\mathrm{Thu}} & \text{on} & \mathcal{MF}(\gamma)/\operatorname{Stab}_0(\vec{\gamma}). \end{array}$$

可以验证， $\widetilde{\mu}^L_{\mathrm{Thu}}$ 是有限的，因为通常的Thurston测度在 $\mathcal{MF}_g$ 上局部有限，并且Stab$_0(\vec{\gamma})$在 μ^L_{Thu} 的支集上的作用的基本区域在 $\mathcal{MF}_g$中的闭包（包括零叶状结构）是紧的。这意味着$\widetilde{\nu}^L_{u,\,\gamma}$ 和 $\widetilde{\ }\mathbf{m}^L_{\gamma}$ 也都是有限的，因此我们可以将$\widetilde{\nu}^L_{u,\,\gamma}$和 $\widetilde{\ }\mathbf{m}^L_{\gamma}$ 整体推前到模空间 $\mathcal{Q}^1\mathcal{M}_g$ 和 $\mathcal{M}_g$；将所得测度记为$\widehat{\nu}^L_{u,\,\gamma}$ 和 $\widehat{\ }\mathbf{m}^L_{\gamma}$。

回顾§2， $\mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma}; \Delta)$表示与 $\vec{\gamma}$ 互补的补曲面的带状图模空间，其总边界长度为2，且沿 $\vec{\gamma}$的各分支的边界长度相匹配。另请回顾， $\Xi^1(X,\ \vec{\gamma}) \in \mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma};\ \Delta)$表示Jenkins-Strebel微分JS($X,\ \gamma$)的临界图，其经过缩放，使边界的总长度为2。

我们还想通过对相应 Jenkins–Strebel 微分的水平分离轨迹形状进行条件化，来考察上述 horoballs 的子集。为此，对任意 $L > 0$ 以及任意非零连续紧支撑函数 h: $\mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma}; \Delta) \to \mathbb{R}$，定义 $\mathcal{T}_g$上的 Ξ^1-horoball 测度如下:

$$d\mathbf{m}^L_{\vec{\gamma},h}(X) := \mathbb{1}_{[0,L]}\left(\sqrt{\mathrm{Ext}}_X(\gamma)\right) h\left(\Xi^1(X,\vec{\gamma})\right) d\mathbf{m}(X). \tag{5.3}$$

我们类似地定义一个支撑在对应于 γ 的不稳定叶上的版本:

$$d\nu^L_{u,\vec{\gamma},h}(X,q) := \mathbb{1}_{[0,L]}\left(\sqrt{\mathrm{Ext}}_X(\gamma)\right) h\left(\Xi^1(X,\vec{\gamma})\right) d\nu_{u,\gamma}(q). \tag{5.4}$$

我们非正式地将测度 $\mathbf{m}^{L}_{\vec{\gamma},\,h}$ 称为“临界 JS horoball”。请与 [AHC22 的式（5.1）] 中“RSC-horoballs”的定义比较。注意，测度 $\mathbf{m}^{L}_{\vec{\gamma},\,h}$ 并不等于测度$\nu^{L}_{u,\,\vec{\gamma},\,h}$ 在 Hubbard–Masur 映射下的推前：两者相差一个 Hubbard–Masur函数。

这些测度 $\mathbf{m}^{L}_{\vec{\gamma},h}(X)$ 和 $\nu^{L}_{u,\vec{\gamma},h}(q)$ 均具有 $\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})$-不变性。因此，与总 horoball 测度的情形一样，我们可以在对 $\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})$ 取商后，得到它们的局部推前 $\widetilde{\ }\mathbf{m}^{L}_{\vec{\gamma},h}$ 和 $\widetilde{\nu}^{L}_{u,\vec{\gamma},h}$。随后，我们还可以将它们分别进一步推前，得到定义在 $\mathcal{M}_g$ 和 $\mathcal{Q}^1\mathcal{M}_g$ 上的有限测度 $\widehat{\ }\mathbf{m}^{L}_{\vec{\gamma},h}$ 和 $\widehat{\nu}^{L}_{u,\vec{\gamma},h}$。

纤维化 Kontsevich 测度。在接下来的两个小节中，我们将讨论“纤维化 Kontsevich 测度”如何通过度量带状图的组合数据来描述临界 JS horoball；参见命题 5.5。我们先简要回顾该测度的定义，更详细的概述请参阅 [AHC22，第 2 节和 7]。

在 [Kon92], Kontsevich 定义了一个分片 2-形式 ω_{Kon} 于 $\mathcal{MRG}_{g,b}$，它用于计算模空间上的交数。将其限制在边界长度固定的切片 $\mathcal{MRG}_{g,b}(\mathbf{L})$ 上，可以看出该形式在每个最大面上都是辛形式。因此，Kontsevich 形式导出体积形式

$$\frac{1}{(3g-3+b)!}\bigwedge^{3g-3+b}\omega_{\mathrm{Kon}}$$

每个最大面上都有一个体积形式，这些体积形式可以粘合起来，构成整个切片 $\mathcal{MRG}_{g,b}(\mathbf{L})$ 上的体积形式。我们用 $\eta^{\mathbf{L}}_{\mathrm{Kon}}$ 表示与该体积形式相关的测度，并将其称为 $\mathcal{MRG}_{g,b}(\mathbf{L})$ 上的 *Kontsevich* 测度。[3]

当 $\vec{\gamma}:=(\vec{\gamma}_1,\dots,\vec{\gamma}_k)$ 是 S_g 上的一条有序定向简单闭多曲线，且其补曲面为 $(\Sigma_j)_{j=1}^{c}$ 时，回顾一下，我们定义

$$\mathcal{MRG}(S_g\setminus\vec{\gamma};\mathbf{L}):=\prod_{j=1}^{c}\mathcal{MRG}_{g_j,b_j}\left(\mathbf{L}^{(j)}\right)$$

对任意长度向量 $\mathbf{L}\in\mathbb{R}^k_{>0}$ 均成立。由于这是一个边界长度固定的模空间的乘积，它带有一个（乘积）Kontsevich 测度 $\eta^{\vec{\gamma},\mathbf{L}}_{\mathrm{Kon}}$。对边界长度积分后，每个切片上的 Kontsevich 测度也可合并为总空间上的一个典范测度；对于任意可测子集 $A\subseteq\mathcal{MRG}(S_g\setminus\vec{\gamma})$，该测度定义为

$$\eta^{\vec{\gamma}}_{\mathrm{Kon}}(A):=\int_{\mathbb{R}^k_{>0}}\eta^{\vec{\gamma},\mathbf{L}}_{\mathrm{Kon}}\left(A\cap\mathcal{MRG}(S_g\setminus\vec{\gamma};\mathbf{L})\right)\,dL_1\dots dL_k.$$

现在我们利用这一点，在 $\mathcal{MRG}(S_g\setminus\vec{\gamma};\,\Delta)$ 上诱导一个测度；$\mathcal{MRG}(S_g\setminus\vec{\gamma};\,\Delta)$ 是以标准单纯形 $\Delta\subset\mathbb{R}^k$ 为底空间的纤维化的总空间。对于 $A\subseteq\mathcal{MRG}(S_g\setminus\vec{\gamma};\Delta)$，令

$$\mathrm{cone}(A):=\{(\Gamma,t\mathbf{x}):(\Gamma,\mathbf{x})\in A,t\in(0,1]\}\subseteq\mathcal{MRG}(S_g\setminus\vec{\gamma}).$$

其中 Γ 是底层带状图，$\mathbf{x}$ 对应其度量结构。记 $\rho_g(\vec{\gamma})\in\mathbb{N}$ 为 $\vec{\gamma}$ 中围成带一个边界分量的环面的分支数。令$\sigma_g(\vec{\gamma})>0$ 为如下给出的有理数

$$\sigma_g(\vec{\gamma}):=\frac{\prod_{j=1}^{c}|K_{g_j,b_j}|}{|\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})\cap K_g|},$$

[3]参见 [AHC22，备注 2。1] 其中讨论了在存在非平凡自同构群时如何处理这一测度。

其中 $K_{g_j,b_j} \lhd \mathrm{Mod}_{g_j,b_j}$ 是映射类群在 $\mathcal{T}_{g_j,b_j}$上的作用的核，而 $K_g \lhd \mathrm{Mod}_g$ 是映射类群在 $\mathcal{T}_g$上的作用的核。这些因子源于低复杂度曲面的模空间所具有的特殊对称性；更详细的讨论见 [AH21c] 和 [AHC22]。

定义 5.3。纤维化 *Kontsevich* 测度 $\mathring{\eta}^{\Delta}_{\mathrm{Kon}}$ 在 $\mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma}; \Delta)$ 上，是一种为每个 Borel 可测子集 A 赋值的测度

$$\mathring{\eta}^{\Delta}_{\mathrm{Kon}}(A) := \frac{\sigma_g(\vec{\gamma})}{2^{\rho_g(\vec{\gamma})}} \int_{\mathrm{cone}(A)} L_1 \cdots L_k \, d\eta^{\vec{\gamma}}_{\mathrm{Kon}}(\Gamma, \mathbf{x}).$$

将 $\mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma}; \Delta)$ 的总 $\mathring{\eta}^{\Delta}_{\mathrm{Kon}}$-质量记为 $m_{\vec{\gamma}}$。

整点与 horoball 质量。令 $m^L_{\vec{\gamma},\,h}$ 表示 $\widehat{\nu}^L_{u,\,\vec{\gamma},\,h}$ 的总质量（等价地，$\widetilde{\nu}^L_{u,\,\vec{\gamma},\,h}$ 的总质量）。注意，由于交数和极值长度平方根具有齐次缩放性质，方程 (5.2) 意味着

$$m^L_{\vec{\gamma},h} = L^{6g-6} m^1_{\vec{\gamma},h}. \tag{5.5}$$

为了计算 $m^1_{\vec{\gamma},\,h}$，尤其是将其与（纤维化）Kontsevich 测度联系起来，我们需要更深入地理解不稳定叶 $\mathcal{F}^u_{[\gamma]}$ 的结构。以下论述为我们提供了所需的控制；请比较 [AH20b 第 3] 节中对适度倾斜的圆柱图的讨论，以及 [CF21] 中对二次微分剪切-形状坐标的讨论。

引理 5.4。临界图映射 $\Xi\colon\ \mathcal{F}^u_{[\gamma]}/\operatorname{Stab}_0(\vec{\gamma}) \to \mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma})$ 展示了商空间 $\mathcal{F}^u_{[\gamma]}/\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})$ 作为丛在 $\mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma})$ 上的结构，其中纤维为环面。

证明。根据定义，每个 $q \in \mathcal{F}^u_{[\gamma]}$ 都是单位面积的二次微分，其水平叶状结构（即虚部）属于 $[\gamma]$的射影类。特别地，这意味着其水平圆柱的高度全部相等。沿这些圆柱的核心曲线切开后，在 $S_g \setminus \vec{\gamma}$上剩下一个具有全测地边界的平直锥结构。随后压缩竖直叶，便定义了到临界图 $\Xi(q) \in \mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma})$上的一个变形收缩。

反过来，给定一组度量带状图 $(\Gamma,\mathbf{x}) \in \mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma})$，存在唯一的高度选择，使得沿着该高度的圆柱将这些度量带状图粘合起来后，得到一个面积为 1、具有给定水平分离轨迹的二次微分；如果 $(\Gamma,\mathbf{x}) \in \mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma};\mathbf{L})$，则对应的高度为 $1/\sum_{i=1}^k L_i$。参见图 3。该构造中唯一的模糊之处在于，沿着 γ 的圆柱剪切多少。因此，对于每个 $\mathbf{x} \in \mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma})$，构造具有临界图 $\Xi(q) = (\Gamma,\mathbf{x})$ 的二次微分 $q \in \mathcal{F}^u_{[\gamma]}$ 有一个环面那么多种方式。□

临界图映射 $\Xi\colon \mathcal{F}^u_{[\gamma]}/\operatorname{Stab}_0(\vec{\gamma}) \to \mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma})$ 的纤维是实维数为 k、等于 $\vec{\gamma}$的分支数的环面。每个维度都代表绕某个分支的扭转。因此，纤维自然带有一种度量，其大小取决于相应圆柱的周长（周长表示可能的扭转量，另加一个用于修正额外对称性的因子）。另请参阅 [AHC22 第 11] 节中关于“切割与粘合纤维化”的讨论。

这一讨论使我们能够将 Thurston测度经由 Ξ 的推前表示为纤维化底空间上的 Kontsevich 测度。

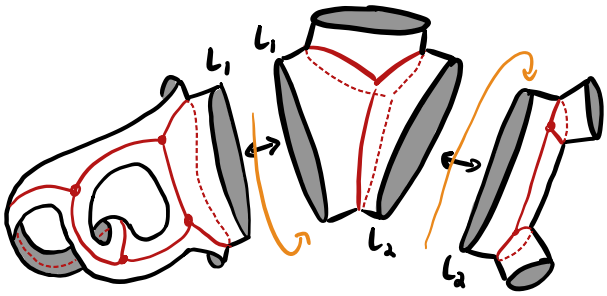


FIGURE 3. 加粗带状图并粘合边界，以恢复具有指定临界图的 Jenkins–Strebel 微分。

命题 5.5。 以下关于 $\mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma})$ 上测度的恒等式成立：

$$d\,(\Xi_*\widetilde{\nu}_{u,\vec{\gamma}}) = \frac{\sigma_g(\vec{\gamma})}{2^{\rho_g(\vec{\gamma})}} L_1 \cdots L_k \, d\eta_{\mathrm{Kon}}^{\vec{\gamma},\mathbf{L}} \, dL_1 \ldots dL_k. \tag{5.6}$$

也就是说，对于每个可测子集 $A \subseteq \mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma})$,

$$\widetilde{\nu}_{u,\vec{\gamma}}(\Xi^{-1}A) = \frac{\sigma_g(\vec{\gamma})}{2^{\rho_g(\vec{\gamma})}} \int_{\mathbb{R}^k_{>0}} \eta_{\mathrm{Kon}}^{\vec{\gamma},\mathbf{L}}(A \cap \mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma}; \mathbf{L}))\, L_1 \cdots L_k \, dL_1 \cdots dL_k.$$

证明。 $\mathcal{F}^u_{[\gamma]}/\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})$ 和 $\mathcal{MRG}(S \setminus \vec{\gamma})$ 都有整数点的自然概念。在第一个空间中，这些是方格铺砌曲面。在第二个空间中，这些是整值度量带状图。测度 μ_{Thu} 可以定义为带有整数权重的简单闭合多重曲线的计数测度的弱-$\star$ 极限，因此相应的测度 $\nu_{u,\ \vec{\gamma}}$ 可以解释为方格铺砌曲面的计数测度的弱 -$\star$ 极限。

注意，临界图映射 Ξ: $\mathcal{F}^u_{[\gamma]}/\,\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma}) \to \mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma})$ 将整数点映射到整数点。此外，在 $(\Gamma, \mathbf{x}) \in \mathcal{MRG}(S \setminus \vec{\gamma}; \mathbf{L})$ 中的任意整值度量带状图上，都恰好有 $L_1 \cdots L_k$ 个方格铺砌曲面位于 $\Xi^{-1}(\Gamma,\mathbf{x})$ 中（对应于整数数量的扭转）。因此，除了确定正确的归一化因子外，只需证明我们可以将 (5.6) 的右侧重新解释为整数点计数。这一论述最早由 Norbury [Nor10]，观察到，但它只是 Kontsevich 测度本质上是边长上的 Lebesgue 测度这一事实的直接推论。请参阅 [AHC22] 中关于纤维化 Kontsevich 测度的讨论。

为求得归一化常数，我们必须谨慎地按照整数点的自同构群大小加权计数。等价地，我们必须确保推前到轨形的测度按其对称性加权。因此，低复杂度模空间的对称性（即映射类群在这些 Teichm¨uller 空间上的作用核）会贡献一个 $\sigma_g(\vec{\gamma})$ 因子。 $2^{-\rho_g(\vec{\gamma})}$ 因子来自 $S_{1,1}$ 上的椭圆 involution：它的存在意味着环面纤维中的扭转只有预期的一半。□

结合（5.5）以及纤维化 Kontsevich 测度的定义（定义 5.3），命题 5.5 立即推出如下结论：

推论 5.6。 对于任意 $L>0$ 以及任意非零连续紧支撑函数 $h\colon \mathcal{MRG}(S_g\setminus\vec{\gamma};\Delta)\to\mathbb{R}$，$\widehat{\nu}^L_{u,\vec{\gamma},h}$ 的总质量 $m^L_{\vec{\gamma},h}$ 等于

$$m^L_{\vec{\gamma},h}=L^{6g-6}\int_{\mathcal{MRG}(S_g\setminus\vec{\gamma};\Delta)} h(\mathbf{x})\,d\mathring{\eta}^{\Delta}_{\mathrm{Kon}}(\mathbf{x}).$$

临界 JS horoball 的等分布。 现在我们证明，临界 JS horoball 的扩张推前相对于 Masur-Veech 测度等分布；这与 [AHC22 定理 5.2] 类似。与那篇论文不同的是，这里我们能够借助 Teichm¨uller 动力学的强有力结果，较快地推出等分布；本文介绍的方法只是若干种可能方法之一。我们首先考察不稳定叶上的 horoball 测度。

命题 5.7。 对于任意非零的连续紧支撑函数 $h{:}\mathcal{MRG}(S_g\setminus\vec{\gamma};\Delta)\to\mathbb{R}$，关于 $\mathcal{Q}^1\mathcal{M}_g$ 上测度的弱-$\star$拓扑，以下收敛成立：

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\widehat{\nu}^L_{u,\vec{\gamma},h}}{m^L_{\vec{\gamma},h}}=\frac{\widehat{\nu}_{\mathrm{MV}}}{b_g}.$$

证明。 该结果直接由 [For21 定理 1.6] 得出。 [4] 事实上，所引用的定理更强，因为它保证了“horosphere”的等分布。沿 Teichm¨uller 测地流的方向对 horosphere 积分，即可得到所需的 horoball 结果。□

现在我们利用命题 5.7 推导临界 JS horoball 的等分布。与双曲情形不同，参见 [AHC22], 中的定理 5.2 和推论 5.3，我们不能简单地将命题 5.7 下推至 $\mathcal{M}_g$，从而得到以下结果；这与 ν_{MV} 在 Mod$_g$作用下不变，而 $\nu_{u,\vec{\gamma}}$ 不具有此性质有关。

推论 5.8。 对于任意非零的连续紧支撑函数 $h{:}\mathcal{MRG}(S_g\setminus\vec{\gamma};\Delta)\to\mathbb{R}$，关于 $\mathcal{M}_g$ 上的测度的弱-$\star$拓扑，有如下收敛：

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\widehat{\mathbf{m}}^L_{\vec{\gamma},h}}{m^L_{\vec{\gamma},h}}=\frac{\Lambda_g}{b_g}\,\widehat{\mathbf{m}}.$$

证明。 设 $f\colon \mathcal{M}_g\to\mathbb{R}$ 是一个连续紧支撑函数，并令 $\sim f\colon \mathcal{T}_g/\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})\to\mathbb{R}$ 表示其在 $\mathcal{T}_g/\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})$ 上的拉回。根据定义和 Hubbard–Masur 定理的直接推论，对于每个 $L>0$，我们都可以将其改写为

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}_g} f(X)\,d\widehat{\mathbf{m}}^L_{\vec{\gamma},h}(X)&=\int_{\mathcal{T}_g/\,\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})}\widetilde{f}(X)\,d\widetilde{\mathbf{m}}^L_{\vec{\gamma},h}(X)\\&=\int_{\mathcal{T}_g/\,\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})}\widetilde{f}(X)\,\lambda^+\left(\frac{\mathrm{JS}(X,\gamma)}{\sqrt{\mathrm{Ext}}_X(\gamma)}\right)\,d(\pi_{[\gamma]})_*\widetilde{\nu}^L_{u,\vec{\gamma},h}(X)\\&=\int_{\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g/\,\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})}\widetilde{f}(\pi(q))\,\lambda^+(q)\,d\widetilde{\nu}^L_{u,\vec{\gamma},h}(q).\end{aligned}$$

[4]利用 Teichm¨uller 测地线流的混合性质，可以得到所需等分布结论的另一种证明；例如参见 [EMM22，命题 3.2]。仅利用 Teichm¨uller 测地线流遍历性的证明，也应可由 [AH21c]中讨论的方法推出。

将其推回模空间，并除以总质量 $m^L_{\vec{\gamma},\ h}$ 我们得到

$$\frac{1}{m^L_{\vec{\gamma},h}}\int_{\mathcal{M}_g} f(X)\,d\widehat{\mathbf{m}}^L_{\vec{\gamma},h}(X) = \frac{1}{m^L_{\vec{\gamma},h}}\int_{\mathcal{Q}^1\mathcal{M}_g} f(\pi(q))\,\lambda^+(q)\,d\widehat{\nu}^L_{u,\vec{\gamma},h}(q)$$
$$\to \frac{1}{b_g}\int_{\mathcal{Q}^1\mathcal{M}_g} f(\pi(q))\,\lambda^+(q)\,d\widehat{\nu}_{\mathrm{MV}}(q),$$

其中， $L\to\infty$处的收敛由命题 5.7 得出。随后，我们可以利用乘积公式 (5.1) 对 the s_X 因子积分，并运用定理 5.2 推导出所需结果。□

6. Equidistribution of critical graphs

本节概述。本节陈述并证明本文在一般多曲线情形下的主要结果。定理 1.1 是其一个特例。证明方法是将前几节的结果应用于引言中讨论的框架。具体而言，在将当前的等分布问题化约为关于曲线的计数问题（这些曲线对应的 Jenkins–Strebel 微分具有受约束的临界图）之后，平均与展开技巧可进一步将问题化约为临界 horoball 测度的等分布问题。在证明的这一阶段，命题 3.6 和 4.3 将发挥重要作用。第 §5 节的结果依赖于 Teichm¨uller 测地线流的遍历性，并保证这些测度等分布。推论 5.6 解释了临界 horoball 测度的总质量与 Kontsevich 测度之间的关系；据此，我们便能将曲线计数问题的渐近行为与 Kontsevich 测度联系起来。

从等分布到计数。固定一条有序定向简单闭多曲线 $\vec{\gamma}$。对于每个 $L>0$，考虑极值长度计数函数

$$s(X,\vec{\gamma},L) := \#\{\alpha\in \mathrm{Mod}_g\cdot\vec{\gamma} \mid \sqrt{\mathrm{Ext}}_X(\vec{\alpha})\le L\}.$$

这不依赖于 $X\in\mathcal{T}_g$ 的标记，而仅取决于其底层的共形结构。Mirzakhani [Mir08b] 的工作给出了这一计数的精确渐近公式：

$$\lim_{L\to\infty}\frac{s(X,\vec{\gamma},L)}{L^{6g-6}} = \frac{m_{\vec{\gamma}}\cdot\Lambda_g}{b_g}, \tag{6.1}$$

其中， $\Lambda_g>0$ 是 Hubbard–Masur 常数， $b_g>0$ 是 $\mathcal{Q}^1\mathcal{M}_g$的 Masur–Veech 体积总量，$m_{\vec{\gamma}}$ 是模空间 $\mathcal{MRG}(S_g\setminus\vec{\gamma};\Delta)$ 上纤维化 Kontsevich 测度 $\mathring{\eta}^{\mathbb{A}}_{\mathrm{Kon}}$的总质量。

注6.1。正如 [AHC22 第 7.6], 条注释中所讨论的，通过注意到我们计数的是有序定向多重曲线（这引入了一个因子 $[\mathrm{Stab}(\gamma):\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})]$），并且 $S_g\setminus\vec{\gamma}$ 的 Weil–Petersson 体积多项式最高次项的系数恰好为 $m_{\vec{\gamma}}$，可以使常数 $m_{\vec{\gamma}}$ 与通常的式 (6.1) 陈述中涉及的“频率” $c(\gamma)$ 相一致。

回顾一下，我们的目标是研究由下式给出的 $\mathcal{MRG}(S_g\setminus\vec{\gamma};\Delta)$ 上计数测度的渐近分布

$$\eta^L_{X,\vec{\gamma}} := \sum_{\vec{\alpha}\in\mathrm{Mod}_g\cdot\vec{\gamma}} \mathbb{1}_{[0,L]}\left(\sqrt{\mathrm{Ext}}_X(\alpha)\right)\cdot\delta_{\Xi^1(X,\vec{\alpha})}.$$

以下是定理 1.1 的一般版本；其证明将占据本节余下部分。与 [AHC22, 定理 7.7] 比较。

定理 6.2. 设 $\vec{\gamma} := (\vec{\gamma}_1, \dots, \vec{\gamma}_k)$ 是 S_g 上一条有序定向的简单闭合多重曲线，且 $X \in \mathcal{M}_g$ 是 S_g 上的一个复结构。那么

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\eta^L_{X,\vec{\gamma}}}{s(X,\vec{\gamma},L)} = \frac{\mathring{\eta}^{\Delta}_{\mathrm{Kon}}}{m_{\vec{\gamma}}}$$

关于 $\mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma}; \Delta)$ 上测度的弱-$\star$ 拓扑。

注 6.3. 为简洁明了起见，在本节余下部分，我们将 $\mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma}; \Delta)$ 简记为 $\mathcal{MRG}$。后文中我们不再考虑其他带状图空间。

如 §1 中所述，定理 6.2 等价于一个关于度量带状图的计数问题。更具体地说，只需证明对于每个连续且紧支撑的 $f\colon \mathcal{MRG} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{s(X,\vec{\gamma},L)} \int_{\mathcal{MRG}} f(\mathbf{x})\, d\eta^L_{X,\vec{\gamma}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{m_{\vec{\gamma}}} \int_{\mathcal{MRG}} f(\mathbf{x})\, d\mathring{\eta}^{\Delta}_{\mathrm{Kon}}(\mathbf{x}).$$

对于每个 $L > 0$，考虑 f-加权计数函数

$$\begin{aligned} c(X,\vec{\gamma},f,L) &:= \int_{\mathcal{MRG}} f(\mathbf{x})\, d\eta^L_{X,\vec{\gamma}}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\vec{\alpha}\in \mathrm{Mod}_g\cdot\vec{\gamma}} \mathbb{1}_{[0,L]}(\sqrt{\mathrm{Ext}}_X(\alpha)) \cdot f(\Xi^1(X,\vec{\alpha})). \end{aligned} \tag{6.2}$$

注意，取 $f \equiv 1$ 后，我们就得到通常的计数函数 $s(X,\vec{\gamma},L)$。

本节余下部分将用于证明以下结果；根据上述讨论，定理 6.2 可由此直接推出。这是引言中定理 1.2 在一般多曲线情形下的推广版本。

定理 6.4。设 $\vec{\gamma} := (\vec{\gamma}_1, \dots, \vec{\gamma}_k)$ 是 S_g 上的一条有序定向简单闭多曲线，且 $X \in \mathcal{M}_g$ 是 S_g 上的一个复结构。那么，对每个连续紧支撑函数 $f\colon \mathcal{MRG} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，

$$\lim_{L\to\infty} \frac{c(X,\vec{\gamma},f,L)}{s(X,\vec{\gamma},L)} = \frac{1}{m_{\vec{\gamma}}} \int_{\mathcal{MRG}} f(\mathbf{x})\, d\mathring{\eta}^{\Delta}_{\mathrm{Kon}}(\mathbf{x}).$$

本节余下部分中，我们固定一个标记共形结构 $X \in \mathcal{T}_g$、S_g 上的一条有序定向简单闭多曲线 $\vec{\gamma}$，以及一个非零、非负的连续紧支撑函数 $f\colon \mathcal{MRG} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

计数平均。我们的下一个目标是对在模空间的小邻域上引入的计数函数（见 (6.2)）进行平均化。利用第 §4 节的结果，我们首先研究这些计数函数在此类邻域中如何变化。

回顾命题 4.3：对于 Teichm¨uller 度量下充分接近且大部分有序的每一对共形结构 X，$Y \in \mathcal{T}_g$ 以及 S_g 上的定向简单闭合多曲线 $\vec{\alpha}$，临界图 $\Xi^1(X, \vec{\alpha})$ 和 $\Xi^1(Y, \vec{\alpha})$ 属于 $\mathcal{MRG}$ 的同一个面，并且相应边的长度相差一个乘法常数。现在我们在带状图模空间中定义类似的邻域。

给定 $\mathbf{x} \in \mathcal{MRG}$ 和一个正常数 $\varepsilon > 0$，记 $N_\varepsilon(\mathbf{x})$ 为所有与 $\mathbf{x}$ 处于同一面、即底层带状图的拓扑类型与 $\mathbf{x}$ 相同的 $\mathbf{y} \in \mathcal{MRG}$ 的集合，使得对于 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的每条边 e，

$$e^{-\varepsilon} \cdot |e|_{\mathbf{x}} \leq |e|_{\mathbf{y}} \leq e^{\varepsilon} \cdot |e|_{\mathbf{x}};$$

这里我们隐式地固定了一个局部标记，以便比较特定边的权重。对于每个 $\varepsilon > 0$，考虑平均函数

$$f_\varepsilon^{\min}, f_\varepsilon^{\max} \colon \mathcal{MRG} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

给出

$$f_\varepsilon^{\min}(\mathbf{x}) := \min_{\mathbf{y} \in N_\varepsilon(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}), \quad f_\varepsilon^{\max}(\mathbf{x}) := \max_{\mathbf{y} \in N_\varepsilon(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}).$$

我们以下述估计开始定理 6.4 的证明，该估计使我们能够比较 X 上的曲线计数与邻近曲面上的计数。命题 3.6 和 4.3 在此结果的证明中起着关键作用。对于 $X \in \mathcal{M}_g$、定义在$\mathcal{MRG}$上的函数 f，以及定义在 $\mathbb{R}$上的函数 F，G，若 $F = O(G)$，则称 $F = O_{X,\, f}(G)$，其中隐含常数仅依赖于 X 和 f。

命题 6.5。对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta := \delta(X, \varepsilon) \in (0, \varepsilon)$，使得对每个满足 $d_{\mathrm{Teich}}(X, Y) < \delta$的 $Y \in \mathcal{M}_g$，以下估计成立：

$$c\left(Y, \vec{\gamma}, f_\varepsilon^{\min}, e^{-\delta} L\right) + O_{X,f}\left(L^{6g-7} + \varepsilon \cdot L^{6g-6}\right) \leq c(X, \vec{\gamma}, f, L), \tag{6.3}$$

$$c(X, \vec{\gamma}, f, L) \leq c\left(Y, \vec{\gamma}, f_\varepsilon^{\max}, e^{\delta} L\right) + O_{X,f}\left(L^{6g-7} + \varepsilon \cdot L^{6g-6}\right). \tag{6.4}$$

证明。我们证明 (6.4)。类似的论证可用于证明 (6.3)。

首先，我们应用命题 3.6，将注意力集中在映射类群轨道中属于 $\vec{\gamma}$ 的曲线上，这些曲线对应的詹金斯-施特雷贝尔微分不含短鞍连接。回顾一下，对于任意紧集 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}_g$ 和任意$\sigma > 0$，我们用 $F(\mathcal{K},\ \sigma) \subseteq \mathcal{MF}_g(\mathbb{Z})$表示 S_g 上的整权简单闭多曲线 α 的集合，其中 JS(Y，α)经缩放至面积为单位值后，对于某个 $Y \in \mathcal{K}$存在一条长度小于 σ的鞍连接。滥用记号，我们也用 $F(\mathcal{K},\ \sigma)$表示S_g上的有序定向简单闭多曲线 $\vec{\alpha}$的集合，其底层多曲线属于 $F(\mathcal{K},\ \sigma)$。现在令 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}_g$为以 X 为中心、Teichmüller 度量下的闭单位球，并令 $\sigma = \varepsilon > 0$ 任意。考虑截断计数函数

$$c^\dagger(X, \vec{\gamma}, f, L) := \sum_{\vec{\alpha} \in \mathrm{Mod}_g \cdot \vec{\gamma} \setminus F(\mathcal{K}, \varepsilon)} \mathbb{1}_{[0,L]}\left(\sqrt{\mathrm{Ext}}_X(\alpha)\right) \cdot f(\Xi^1(X, \vec{\alpha})).$$

由命题 3.6 可知，

$$c(X, \vec{\gamma}, f, L) = c^\dagger(X, \vec{\gamma}, f, L) + \|f\|_\infty \cdot O_{\mathcal{K}}\left(L^{6g-7} + \varepsilon \cdot L^{6g-6}\right). \tag{6.5}$$

现在我们可以调用第 4 节的几何比较结果。考虑如命题 4.3 中的 $\delta = \delta(\mathcal{K},\ \varepsilon,\ \varepsilon) > 0$，并设

$$\delta' := \min\{1, \delta, \varepsilon\}.$$

现在，对于任意 $Y \in \mathcal{T}_g$使得 $d_{\mathrm{Teich}}(X, Y) < \delta'$，以及任意 $\vec{\alpha} \in \mathrm{Mod}_g \cdot \vec{\gamma} \setminus F(\mathcal{K}, \varepsilon)$,，由命题 4.3 可知，$\Xi^1(X, \vec{\alpha})$ 和 $\Xi^1(Y, \vec{\alpha})$ 位于 $\mathcal{MRG}$ 的同一个面上，并且对于这类度量带状图的每条边 e，

$$e^{-\varepsilon} \cdot |e|_{\Xi^1(Y,\vec{\alpha})} \leq |e|_{\Xi^1(X,\vec{\alpha})} \leq e^{\varepsilon} \cdot |e|_{\Xi^1(Y,\vec{\alpha})}.$$

因此，$\Xi^1(X, \vec{\alpha}) \in N_\varepsilon(\Xi^1(Y, \vec{\alpha}))$，根据定义

$$f(\Xi^1(X, \vec{\alpha})) \leq f_\varepsilon^{\max}(\Xi^1(Y, \vec{\alpha})). \tag{6.6}$$

根据 Kerckhoff 对 Teichm¨uller 度量的刻画（定理 2.4），

$$\sqrt{\mathrm{Ext}}_Y(\alpha) \leq e^{\delta'} \cdot \sqrt{\mathrm{Ext}}_X(\alpha). \tag{6.7}$$

由 (6.6) 和 (6.7) 可得

$$c^{\dagger}(X,\vec{\gamma},f,L)\le c(Y,\vec{\gamma},f_{\varepsilon}^{\max},e^{\delta'}L). \tag{6.8}$$

结合（6.5）和（6.8），我们得出结论

$$c(X,\vec{\gamma},f,L)\le c\left(Y,\vec{\gamma},f_{\varepsilon}^{\max},e^{\delta'}L\right)+\|f\|_{\infty}\cdot O_{\mathcal{K}}\left(L^{6g-7}+\varepsilon\cdot L^{6g-6}\right). \qquad \square$$

现在我们将命题 6.5 对马苏尔–韦奇测度的推前 $\widehat{\ }\mathbf{m}$ 积分。对于每个 $\delta\in(0,1)$，记 $U_X(\delta)$ 为以 $X\in\mathcal{M}_g$ 为中心、半径为 δ 的开球，其中距离按照 Teichmüller 度量计算；并令 $\beta_{X,\delta}\colon \mathcal{M}_g\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ 为任意一个支撑于 $U_X(\delta)$、总 $\mathbf{m}$ 测度为 1 的凸起函数。

推论 6.6。设所有记号均与命题 *6.5* 中相同。那么 $c(X,\vec{\gamma},f,L)$ 有下界，为

$$\int_{\mathcal{M}_g}\beta_{X,\delta}(Y)\cdot c\left(Y,\vec{\gamma},f_{\varepsilon}^{\min},e^{-\delta}L\right)\,d\widehat{\mathbf{m}}(Y)+O_{X,f}\left(L^{6g-7}+\varepsilon L^{6g-6}\right) \tag{6.9}$$

且上界为

$$\int_{\mathcal{M}_g}\beta_{X,\delta}(Y)\cdot c\left(Y,\vec{\gamma},f_{\varepsilon}^{\max},e^{\delta}L\right)\,d\widehat{\mathbf{m}}(Y)+O_{X,f}\left(L^{6g-7}+\varepsilon L^{6g-6}\right). \tag{6.10}$$

展开平均计数。将（6.9）和（6.10）中的积分在$\mathcal{T}_g/\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})$上展开，并以适当方式将其推回到 $\mathcal{M}_g$，即可将定理 6.4 的证明归结为应用推论 5.8。下述命题阐述了这一原理；读者也可参见 [AH20a，命题 3.3]以及 [AHC22，命题 6.6]。

命题 6.7。取任意连续紧支撑函数 $h\colon\ \mathcal{MRG}\to\mathbb{R}_{\ge 0}$。那么对于任意 $\delta>0$ 和任意 $L>0$,

$$\int_{\mathcal{M}_g}\beta_{X,\delta}(Y)\cdot c(Y,\vec{\gamma},h,L)\,d\widehat{\mathbf{m}}(Y)=\int_{\mathcal{M}_g}\beta_{X,\delta}(Y)\,d\widehat{\mathbf{m}}^{L}_{\vec{\gamma},h}(Y). \tag{6.11}$$

注 6.8。请注意，我们的权函数更名了；这是因为我们最终会应用命题 6.7，并令 h 等于函数 $f_{\varepsilon}^{\max}$ 和 $f_{\varepsilon}^{\min}$。

证明。任取 $\delta>0$ 和 $L>0$。对于任意 $Y\in\mathcal{M}_g$，计数函数 $c(Y,\ \vec{\gamma},\ h,\ L)$ 可改写如下:

$$\begin{aligned}
c(Y,\vec{\gamma},h,L)&=\sum_{\vec{\alpha}\in\mathrm{Mod}_g\cdot\vec{\gamma}}\mathbb{1}_{[0,L]}\left(\sqrt{\mathrm{Ext}}_Y(\alpha)\right)\cdot h(\Xi^1(Y,\vec{\alpha}))\\
&=\sum_{[\phi]\in\mathrm{Mod}_g/\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})}\mathbb{1}_{[0,L]}\left(\sqrt{\mathrm{Ext}}_Y(\phi.\vec{\gamma})\right)\cdot h(\Xi^1(Y,\phi.\vec{\gamma}))\\
&=\sum_{[\phi]\in\mathrm{Mod}_g/\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})}\mathbb{1}_{[0,L]}\left(\sqrt{\mathrm{Ext}}_{\phi^{-1}.Y}(\vec{\gamma})\right)\cdot h(\Xi^1(\phi^{-1}.Y,\vec{\gamma}))\\
&=\sum_{[\phi]\in\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})\backslash\mathrm{Mod}_g}\mathbb{1}_{[0,L]}\left(\sqrt{\mathrm{Ext}}_{\phi.Y}(\vec{\gamma})\right)\cdot h(\Xi^1(\phi.Y,\vec{\gamma})).
\end{aligned}$$

将这一事实记为

$$c(Y,\vec{\gamma},h,L)=\sum_{[\phi]\in\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})\backslash\mathrm{Mod}_g}\mathbb{1}_{[0,L]}\left(\sqrt{\mathrm{Ext}}_{\phi.Y}(\vec{\gamma})\right)\cdot h(\Xi^1(\phi.Y,\vec{\gamma})). \tag{6.12}$$

~记$p_{\vec{\gamma}}\colon\ \mathcal{T}_g/\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma}) \to \mathcal{M}_g$为商映射，并令$\beta_{X,\,\delta} = \beta_{X,\,\delta} \circ p_{\vec{\gamma}}$为$\beta_{X,\,\delta}$在此覆盖上的提升。利用 (6.12) 展开 (6.11) 左侧的积分，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{M}_g} \beta_{X,\delta}(Y) \cdot c(Y,\vec{\gamma},h,L)\, d\widehat{\mathbf{m}}(Y) \\
&\qquad = \int_{\mathcal{T}_g/\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})} \widetilde{\beta}_{X,\delta}(Y) \cdot \mathbb{1}_{[0,L]}\left(\sqrt{\mathrm{Ext}}_Y(\vec{\gamma})\right) \cdot h(\Xi^1(Y,\vec{\gamma}))\, d\widetilde{\mathbf{m}}(Y) \\
&\qquad = \int_{\mathcal{T}_g/\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})} \widetilde{\beta}_{X,\delta}(Y)\, d\widetilde{\mathbf{m}}^L_{\vec{\gamma},h}(Y) \\
&\qquad = \int_{\mathcal{M}_g} \beta_{X,\delta}(Y)\, d\widehat{\mathbf{m}}^L_{\vec{\gamma},h}(Y),
\end{aligned}$$

其中，第二个等式根据式（5.3）中 horoball 测度 $\widetilde{\ }\mathbf{m}^L_{\vec{\gamma},h}$ 的定义得出，而第三个等式则由取推前得到。□

将计数归结为等分布。现在，我们可以应用第 5 节的均匀分布结果，完成定理 6.4 的证明。命题 6.7 将 f-加权计数函数 $c(X,\vec{\gamma},f,L)$ 的平均值与 horoball 测度联系起来；接下来，我们的策略是将原始计数函数与这些测度的质量联系起来，然后将其与 Mod$_g$-轨道中所有有序定向简单闭多曲线的计数 $s(X,\vec{\gamma},L)$ 进行比较。

定理 *6.4* 的证明。回顾一下，我们的目标是证明

$$\lim_{L\to\infty} \frac{c(X,\vec{\gamma},f,L)}{s(X,\vec{\gamma},L)} = \frac{1}{m_{\vec{\gamma}}} \int_{\mathcal{MRG}} f(\mathbf{x})\, d\mathring{\eta}^{\Delta}_{\mathrm{Kon}}(\mathbf{x}).$$

根据推论 5.6，我们知道，对于任意连续且紧支撑的函数$h\colon \mathcal{MRG} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，不稳定 horoball 测度 $\widehat{\ }\mathbf{m}^L_{\vec{\gamma}}$在$\mathcal{M}_g$ 上的总质量$m^L_{\vec{\gamma},h}$ $_h$ 等于积分 L^{6g-6} 的倍数

$$r(\vec{\gamma},h) := \int_{\mathcal{MRG}} h(\mathbf{x})\, d\mathring{\eta}^{\Delta}_{\mathrm{Kon}}(\mathbf{x}).$$

因此，证明定理 6.4 等价于证明以下两个不等式均成立：

$$\frac{r(\vec{\gamma},f)}{m_{\vec{\gamma}}} \leq \liminf_{L\to\infty} \frac{c(X,\vec{\gamma},f,L)}{s(X,\vec{\gamma},L)}, \tag{6.13}$$

$$\limsup_{L\to\infty} \frac{c(X,\vec{\gamma},f,L)}{s(X,\vec{\gamma},L)} \leq \frac{r(\vec{\gamma},f)}{m_{\vec{\gamma}}}. \tag{6.14}$$

我们通过平均化和展开来验证 (6.14)；按照相同的论证可以证明 (6.13)。令 $\varepsilon \in (0,1)$ 任意取值，并令 $\delta = \delta(X,\varepsilon)$如推论 6.6 中所述。必要时缩小 δ，我们还可以假设 $e^{(6g-6)\delta} \leq 2$。设$h := f^{\max}_{\varepsilon}$；于是推论 6.6 表明，我们可以对计数函数进行平均化，得到

$$c(X,\vec{\gamma},f,L) \leq \int_{\mathcal{M}_g} \beta_{X,\delta}(Y) \cdot c\left(Y,\vec{\gamma},h,e^{\delta}L\right)\, d\widehat{\mathbf{m}}(Y) + O_{X,f}\left(L^{6g-7} + \varepsilon L^{6g-6}\right).$$

令 $L' :\, = e^{\delta}L$。展开积分，即使用命题 6.7，我们得到

$$c(X,\vec{\gamma},f,L) \leq \int_{\mathcal{M}_g} \beta_{X,\delta}(Y)\, d\widehat{\mathbf{m}}^{L'}_{\vec{\gamma},h}(Y) + O_{X,f}\left(L^{6g-7} + \varepsilon L^{6g-6}\right).$$

将此不等式除以 $m_{\vec{\gamma},\,h}^{L'}$（只要 $f \neq 0$，该量就不为零），可得

$$\frac{c(X,\vec{\gamma},f,L)}{m_{\vec{\gamma},h}^{L'}} \leq \int_{\mathcal{M}_g} \beta_{X,\delta}(Y)\, d\frac{\widehat{\mathbf{m}}_{\vec{\gamma},h}^{L'}}{m_{\vec{\gamma},h}^{L'}}(Y) + \frac{O_{X,f}(\varepsilon)}{r(\vec{\gamma},h)},$$

其中我们调用了推论 5.6 以及关于 δ 的假设，以简化最右侧的界。由于 $h \geq f$，我们知道 $r(\vec{\gamma},h) \geq r(\vec{\gamma},f)$，因此我们也可以将该项吸收到我们的较大 O 估计中。

令 $L \to \infty$ 趋于极限上确界，并应用推论 5.8，我们可推得：

$$\limsup_{L\to\infty} \frac{c(X,\vec{\gamma},f,L)}{m_{\vec{\gamma},h}^{L'}} \leq \frac{\Lambda_g}{b_g} \int_{\mathcal{M}_g} \beta_{X,\delta}(Y)\, d\widehat{\mathbf{m}}(Y) + O_{X,f}(\varepsilon) = \frac{\Lambda_g}{b_g} + O_{X,f}(\varepsilon). \tag{6.15}$$

结合这一点、Mirzakhani渐近计数（6.1）以及我们对 horoballmasses 的表达式（推论 5.6），我们得到以下估计：

$$\limsup_{L\to\infty} \frac{c(X,\vec{\gamma},f,L)}{s(X,\vec{\gamma},L)} \leq \frac{r(\vec{\gamma},h)\cdot e^{(6g-6)\delta}}{m_{\vec{\gamma}}} + O_{X,f}(\varepsilon). \tag{6.16}$$

现在我们缩小近似邻域。根据定义，$h := f_\varepsilon^{\max} \searrow f$逐点趋于 $\varepsilon \searrow 0$。特别地，由单调收敛定理，

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} r(\vec{\gamma}, f_\varepsilon^{\max}) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{\mathcal{MRG}} f_\varepsilon^{\max}(\mathbf{x})\, d\mathring{\eta}_{\mathrm{Kon}}^{\Delta}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{MRG}} f(\mathbf{x})\, d\mathring{\eta}_{\mathrm{Kon}}^{\Delta}(\mathbf{x}) = r(\vec{\gamma}, f).$$

令 ε，从而令 δ 趋于 0，我们便得到 (6.16) 右端收敛到$r(\vec{\gamma},\ f)/m_{\vec{\gamma}}$，如所期望的那样。□

由此完成了计数结果（定理 6.4）的证明，也就完成了我们的主要等分布结果（定理 6.2）的证明。

同时等分布。受 [AES16a、AES16b、ERW19、AHC22], 的启发，我们现在讨论同时等分布问题。更具体地说，我们证明，在奇异测度叶状结构空间中，简单闭合多曲线的分布渐近地独立于它们在给定黎曼曲面上所定义的 Jenkins–Strebel 微分的临界图。

回忆一下，$\mathcal{PMF}_g$ 表示 S_g 上射影奇异测度叶状结构的空间，而 $[\lambda] \in \mathcal{PML}_g$ 表示 $\lambda \in \mathcal{MF}_g$ 的射影类。给定$X \in \mathcal{T}_g$，考虑锥化的 Thurston测度 μ_{Thu}^X，它将每个可测子集 $A \subseteq \mathcal{PML}_g$ 赋值为

$$\mu_{\mathrm{Thu}}^X(A) := \mu_{\mathrm{Thu}}(\{\lambda \in \mathcal{ML}_g \mid \mathrm{Ext}_X(\lambda) \leq 1,\ [\lambda] \in A\}).$$

根据引理 5.1 和定理 5.2，该测度的总质量恰好是$\Lambda(X) = \Lambda_g > 0$，即 Hubbard–Masur 常数。此外，正如[ABEM12，命题 2.3], 所述，该测度可与纤维测度s_X 和 Hubbard–Masur函数 λ^+ 建立如下联系。

命题 6.9。设 $X \in \mathcal{T}_g$ 是 S_g 上的一个标记复结构。考虑同胚 $[\Im]$: $S(X) \to \mathcal{PMF}_g$。那么，

$$\lambda^+(q) = \frac{d[\Im]_*\, \mu_{\mathrm{Thu}}^X}{ds_X}(q).$$

固定曲面 $\vec{\gamma}$ 上的一条有序定向简单闭多曲线 $=(\vec{\gamma}_1、\ldots\ldots、\vec{\gamma}_k)$，以及一个带标记双曲结构 $X \in \mathcal{T}_g$。回顾一下，$\gamma \in \mathcal{MF}_g$ 表示 $\vec{\gamma}$ 作为 S_g 上的奇异测度叶状结构所对应的等价类。对于每个 $L > 0$，考虑 $\mathcal{PML}_g$ 上由下式给出的计数测度。

$$\zeta^L_{\vec{\gamma},X} := \sum_{\vec{\alpha}\in \mathrm{Mod}_g\cdot\vec{\gamma}} \mathbb{1}_{[0,L]}\left(\sqrt{\mathrm{Ext}}_X(\alpha)\right)\cdot\delta_{[\alpha]}.$$

注意，我们对给定的射影类 $[\alpha]$ 赋予权重 $[\mathrm{Stab}(\gamma) : \mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})]$；这使我们能够在下文使用定向计数 $s(X,\ \vec{\gamma},\ L)$。以下结果可直接由 Mirzakhani 的工作 [Mir08b, Theorem 6.4] 推得。

定理 6.10。对于 $\mathcal{PML}_g$ 上测度的弱-$\star$ 拓扑，

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\zeta^L_{\vec{\gamma},X}}{s(X,\vec{\gamma},L)} = \frac{\mu^X_{\mathrm{Thu}}}{\Lambda_g}.$$

自然会考虑定理 6.2 和 6.10 中极限的同时等分布问题。更准确地说，在 S_g 和 $X \in \mathcal{T}_g$ 上固定一个有序定向简单闭多曲线 $\vec{\gamma}:=(\vec{\gamma}_1,\ \ldots\ldots,\ \vec{\gamma}_k)$。对于每个 $L > 0$，考虑 $\mathcal{PMF}_g \times \mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma};\Delta)$ 上由下式给出的计数测度

$$\xi^L_{\vec{\gamma},X} := \sum_{\vec{\alpha}\in \mathrm{Mod}_g\cdot\vec{\gamma}} \mathbb{1}_{[0,L]}\left(\sqrt{\mathrm{Ext}}_X(\alpha)\right)\cdot\delta_{[\alpha]}\otimes\delta_{\Xi^1(X,\vec{\alpha})}.$$

一如既往，此测度仅取决于 $X \in \mathcal{T}_g$ 的底层双曲结构，而不取决于其标记。关于这些测度随 $L \to \infty$ 而等分布的问题，可以采用证明定理 6.2 时使用的相同方法来处理，但需要作一些重要修改，下面我们将讨论这些修改。

证明中最重要的区别在于，必须使用等分布结果，而不是推论 5.8。用 $\mathcal{P}^1\mathcal{T}_g = \mathcal{T}_g \times \mathcal{PMF}_g$ 表示 Teichm¨uller 空间上的射影奇异测度叶状结构丛。此丛带有一个自然测度 ν，由以下解体公式给出。

$$d\mathbf{n}(X,[\lambda]) = d\mu^X_{\mathrm{Thu}}([\lambda])\, d\mathbf{m}(X).$$

映射类群通过对角作用取商 $\mathcal{P}^1\mathcal{M}_g = \mathcal{P}^1\mathcal{T}_g/\mathrm{Mod}_g$，得到一个以模空间为底空间、纤维为射影奇异测度叶状结构的丛。由于该作用保持测度 $\mathbf{n}$，我们得到定义在 $\mathcal{P}^1\mathcal{M}_g$ 上的测度 $\widehat{\ }\mathbf{n}$，满足以下分解公式：

$$d\widehat{\mathbf{n}}(X,[\lambda]) = d\mu^X_{\mathrm{Thu}}([\lambda])\, d\widehat{\mathbf{m}}(X).$$

为定义我们希望在 $\mathcal{P}^1\mathcal{M}_g$ 上考察的相关 horoballs，我们按如下方式进行。对于任意 $L > 0$ 以及任意非零的连续紧支撑函数h： $\mathcal{MRG}(S_g \setminus \vec{\gamma};\Delta) \to \mathbb{R}$，定义 $\mathcal{P}^1\mathcal{T}_g$上的 Ξ^1-horoball 测度如下：

$$d\mathbf{n}^L_{\vec{\gamma},h}(X,[\lambda]) := d\delta_{[\gamma]}([\lambda])\, d\mathbf{m}^L_{\vec{\gamma},h}(X),$$

其中，$\delta_{[\gamma]}$ 表示位于 $[\gamma] \in \mathcal{PMF}_g$的狄拉克测度。根据定义可直接验证，该测度在 $\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})$作用下不变。因此，可以将此测度局部地推前到 $\mathcal{P}^1\mathcal{T}_g/\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})$，得到一个测度 $\widetilde{\ }\mathbf{n}^L_{\vec{\gamma},\ h}$。记 $\widehat{\ }\mathbf{n}^L_{\vec{\gamma},\ h}$ 为将此测度推前后在 $\mathcal{P}^1\mathcal{M}_g$ 上得到的测度。注意，此测度的总质量恰好为 $m^L_{\vec{\gamma},\ h} > 0$。

以下结果是解决上述同时等分布问题所需的主要等分布结果。

命题 6.11. 对于任意非零的连续紧支撑函数$h\colon\ \mathcal{MRG}(S_g\setminus\vec{\gamma};\ \Delta)\to\mathbb{R}$，以下收敛关于 $\mathcal{P}^1\mathcal{M}_g$上测度的弱-$\star$ 拓扑成立：

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\widehat{\mathbf{n}}^L_{\vec{\gamma},h}}{m^L_{\vec{\gamma},h}}=\frac{\widehat{\mathbf{n}}}{b_g}\,.$$

证明。设 $f\colon\mathcal{P}^1\mathcal{M}_g\to\mathbb{R}$ 是一个连续紧支撑函数，并令 $\widetilde{f}\colon\mathcal{P}^1\mathcal{T}_g/\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})\to\mathbb{R}$ 为其拉回。由定义和 Hubbard–Masur 定理可直接得出，对每个 $L>0$，我们可以将其改写为

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{P}^1\mathcal{M}_g} f(X,[\lambda])\,d\widehat{\mathbf{n}}^L_{\vec{\gamma},h}(X,[\lambda])\\
&\qquad=\int_{\mathcal{P}^1\mathcal{T}_g/\,\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})}\widetilde{f}(X,[\lambda])\,d\widetilde{\mathbf{n}}^L_{\vec{\gamma},h}(X,[\lambda])\\
&\qquad=\int_{\mathcal{T}_g/\,\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})}\widetilde{f}(X,[\gamma])\,\lambda^+\left(\frac{\mathrm{JS}(X,\gamma)}{\sqrt{\mathrm{Ext}}_X(\gamma)}\right)d(\pi_{[\gamma]})_*\widetilde{\nu}^L_{u,\vec{\gamma},h}(X)\\
&\qquad=\int_{\mathcal{Q}^1\mathcal{T}_g/\,\mathrm{Stab}_0(\vec{\gamma})}\widetilde{f}(\pi(q),[\Im(q)])\,\lambda^+(q)\,d\widetilde{\nu}^L_{u,\vec{\gamma},h}(q).
\end{aligned}$$

将其推回模空间，并除以总质量 $m^L_{\vec{\gamma},\ h}$ 得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m^L_{\vec{\gamma},h}}\int_{\mathcal{P}^1\mathcal{M}_g} f(X,[\lambda])\,d\widehat{\mathbf{n}}^L_{\vec{\gamma},h}(X,[\lambda])\\
&\qquad=\frac{1}{m^L_{\vec{\gamma},h}}\int_{\mathcal{Q}^1\mathcal{M}_g} f(\pi(q),[\Im(q)])\,\lambda^+(q)\,d\widehat{\nu}^L_{u,\vec{\gamma},h}(q)\\
&\qquad\to\frac{1}{b_g}\int_{\mathcal{Q}^1\mathcal{M}_g} f(\pi(q),[\Im(q)])\,\lambda^+(q)\,d\widehat{\nu}_{\mathrm{MV}}(q),
\end{aligned}$$

其中，当 $L\to\infty$ 时的收敛由命题 5.7 得出。将 Masur-Veech 测度沿纤维分解，并利用命题 6.9，我们推得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b_g}\int_{\mathcal{Q}^1\mathcal{M}_g} f(\pi(q),[\Im(q)])\,\lambda^+(q)\,d\widehat{\nu}_{\mathrm{MV}}(q)\\
&\qquad=\frac{1}{b_g}\int_{\mathcal{M}_g}\int_{S(X)} f(X,[\Im(q)])\,\lambda^+(q)\,ds_X(q)\,d\widehat{\mathbf{m}}(X)\\
&\qquad=\frac{1}{b_g}\int_{\mathcal{P}^1\mathcal{M}_g} f(X,[\lambda])\,d\widehat{\mathbf{n}}(X,[\lambda]).
\end{aligned}$$

结合以上等式，即完成证明。 □

以下同时等分布结果可通过与定理 6.2 证明中类似的论证得出，但需改为在丛 $\mathcal{P}^1\mathcal{M}_g$ 上进行，而非在 $\mathcal{M}_g$ 上，并用命题 6.11 替代推论 5.8；可对比 [AH20a，定理 3.5] 的证明。

定理 6.12。 设 $\vec{\gamma}:=(\vec{\gamma}_1,\dots,\vec{\gamma}_k)$ 是 S_g 上一条有序、定向的简单闭多重曲线，$X\in\mathcal{M}_g$ 是 S_g 上的复结构。那么，对于 $\mathcal{PMF}_g\times\mathcal{MRG}(S_g\setminus\vec{\gamma};\Delta)$上测度的弱-$\star$ 拓扑，

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\xi^L_{\vec{\gamma},X}}{s(X,\vec{\gamma},L)}=\frac{\mu^X_{\mathrm{Thu}}}{\Lambda_g}\otimes\frac{\mathring{\eta}^{\Delta}_{\mathrm{Kon}}}{m_{\vec{\gamma}}}.$$

由此可见，即使预先规定一组曲线如何大致环绕 S_g （例如，固定 $\mathcal{MF}_g$ 的一个极大轨道图表），由这些曲线定义的临界图仍然是均匀分布的。

References

[ABEM12] J. Athreya、A. Bufetov、A. Eskin 和 M. Mirzakhani, *Lattice point asymptotics and volume growth on Teichmüller space* **161** 2012 6, 1055 1111 , 《杜克数学杂志》（ ），第 – 期。[AES16a] M. Aka 、 M. Einsiedler 和 U. Shapira, *Integer points on spheres and their orthogonal grids* 2 **93** 2016 1, 143 158 , 《伦敦数学会杂志》（ ）（ ），第 – 期。[AES16b] , *Integer points on spheres and their orthogonal lattices*, 《发明数学》206（2016），第 2 期，379–396。[AG13] A. Avila 和 S. Gou ¨ezel, , 《数学年刊》（ ）（2013），第 2 期，385–442。[AGY06] A. Avila、S. Gou¨ezel 和 J.-C. Yoccoz, *Small eigenvalues of the Laplacian for algebraic measures in moduli space and mixing properties of the Teichmüller flow* 2 **178** *Exponential mixing for the Teichmüller flow*, 《高等科学研究所数学出版物》 ´Etudes Sci.（2006），第 104 期，143–211。[AH20a] F. Arana-Herrera, *Counting hyperbolic multi-geodesics with respect to the lengths of individual components and asymptotics of Weil–Petersson volumes* , 《几何与拓扑》 *(to appear)* 2020 , 。[AH20b] , *Counting square-tiled surfaces with prescribed real and imaginary foliations and connections to Mirzakhani's asymptotics for simple closed hyperbolic geodesics*, 《现代动力学杂志》16（2020），81–107。[AH21a] , *Effective mapping class group dynamics I: Counting lattice points in Teichmüller space* 2010 03123, 2021 , 预印本，arXiv: . .[AH21b] , *Effective mapping class group dynamics III: Counting filling closed curves on surfaces* 2106 11386, 2021 , 预印本，arXiv: . .[AH21c] , *Equidistribution of families of expanding horospheres on moduli spaces of hyperbolic surfaces* **210** 2021 65 102 , 《几何专论》（ ），–。[AH22] , *Effective count of square-tiled surfaces with prescribed real and imaginary foliations in connected components of strata* 2207 04091, 2022 , 预印本，arXiv: . .[AHC22] F. Arana-Herrera 和 A. Calderon, *The shapes of complementary subsurfaces to simple closed hyperbolic multi-geodesics* 2208 04339, 2022 , 预印本，arXiv: . .[CF] A. Calderon 和 J. Farre, *Continuity of the orthogeodesic foliation and the geometry of train tracks* , 准备中。[CF21] , *Shear-shape cocycles for measured laminations and ergodic theory of the earthquake flow* *(to appear)* 2021 , 《几何与拓扑》， 。[Do10] N. Do, *The asymptotic Weil–Petersson form and intersection theory on $\mathcal{M}_g$, n*, 预印本，arXiv:1010.4126，2010。[DS21] B. Dozier 和 J. Sapir, *Coarse density of subsets of moduli space*, 《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）71（2021），第 3 期，1121–1134。[Dum15] D. Dumas, *Skinning maps are finite-to-one*, 《数学学报》215（2015），第 1 期，55–126。[EM18] A. Eskin 和 M. Mirzakhani, *Invariant and stationary measures for the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$action on moduli space*, 《高等科学研究所数学出版物》127（2018），95–324。[EMM15] A. Eskin、M. Mirzakhani 和 A. Mohammadi, *Isolation equidistribution and orbit* , , SL(,) , 《数学年刊》（ ）（ ），第 2 期，673 721–。[EMM22] , *Effective counting of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces*, 《欧洲数学会期刊》（JEMS）24（2022），第 9 期，3059–3108。[ERW19] M. Einsiedler、R. R¨uhr 和 P. Wirth, *Distribution of shapes of orthogonal lattices*, 《遍历理论与动力系统》39（2019），第 6 期，1531–1607。[ES22] V. Erlandsson 和 J. Souto, *Mirzakhani's curve counting and geodesic currents*, 《数学进展》第 345 卷，Birkh¨auser/Springer，Cham，[2022] ©2022。[FM12] B. Farb 和 D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, 《普林斯顿数学丛书》第 49 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2012。[For21] G. Forni, *Limits of geodesic push-forwards of horocycle invariant measures*, 《遍历理论与动力系统》41（2021），第 9 期，2782–2804。

[GM91] F. P. Gardiner 和 H. Masur, *Extremal length geometry of Teichmüller space*, 《复变数理论与应用》16（1991），第 2-3 期，209–237。[HM79] J. Hubbard 和 H. Masur, *Quadratic differentials and foliations*, 《数学学报》142（1979），第 3-4 期，221–274。[HZ86] J. Harer 和 D. Zagier, *The Euler characteristic of the moduli space of curves*, 《发明数学》85（1986），第 3 期，457–485。[Jen57] J. A. Jenkins, *On the existence of certain general extremal metrics*, 《数学年刊》（第 2 辑）66（1957），440–453。[Ker80] S. P. Kerckhoff, *The asymptotic geometry of Teichmüller space*, 《拓扑学》19（1980），第 1 期，23–41。[Kon92] M. Kontsevich, *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function* **147** 1992 1, 1 23 , 《数学物理通讯》（ ），第 – 期。[Liu19] M. Liu, *Length statistics of random multicurves on closed hyperbolic surfaces*, 预印本, arXiv:1912.11155, 2019。[Luo07] F. Luo, *On Teichmüller spaces of surfaces with boundary*, 《杜克数学杂志》139（2007），第 3 期，463–482。[Mar70] G. A. Margulis, *On some aspects of the theory of Anosov systems*, 博士论文，1970，Springer-Verlag，柏林，2003。[MGT21] D. Martínez-Granado 和 D. P. Thurston, *From curves to currents*, 《Forum Mathematicum Sigma》9（2021），论文编号 e77，共 52 页。[Mir07] M. Mirzakhani, *Weil–Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves* **20** 2007 1, 1 23 , 《美国数学会杂志》（ ），第 – 期。[Mir08a] , *Ergodic theory of the earthquake flow*, 《国际数学研究通知》（IMRN）（2008），第 3 期，文章编号 rnm116，共 39 页。[Mir08b] , *Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces*, 《数学年刊》（第 2 辑）168（2008），第 1 期，97–125。[Mir16] , *Counting mapping class group orbits on hyperbolic surfaces*, 预印本，arXiv:1601.03342, 2016。[Mon09] G. Mondello, *Triangulated Riemann surfaces with boundary and the Weil–Petersson Poisson structure* **81** 2009 436 , 《微分几何杂志》（ ），第 2 期，391–。[MS91] H. Masur 和 J. Smillie, *Hausdorff dimension of sets of nonergodic measured foliations* 2 **134** 1991 3, 455 543 , 《数学年刊》（ ）（ ），第 – 期。[Nor10] P. Norbury, *Counting lattice points in the moduli space of curves*, 《数学研究快报》17（2010），第 3 期，467–481。[PH92] R. C. Penner 和 J. L. Harer, *Combinatorics of train tracks*, 《数学年刊研究丛书》第 125 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1992。[Roy71] H. L. Royden, *Automorphisms and isometries of Teichmüller space*, 《黎曼曲面理论进展》（会议论文集，纽约州石溪，1969），《数学年刊研究丛书》第 66 号，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1971，第 369–383 页。[Str66] K. Strebel, *Über quadratische Differentiale mit geschlossenen Trajektorien und extremale quasikonforme Abbildungen* 70 , 《R. Nevanlinna 诞辰纪念文集》，Springer，柏林，1966，第 105–127 页。[Str75] , *On quadratic differentials and extremal quasi-conformal mappings*, 《国际数学家大会论文集》（加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华，1974），第 2 卷，加拿大数学大会，蒙特利尔，魁北克，1975，第 223–227 页。[Str76] , *On the existence of extremal Teichmueller mappings*, 《数学分析杂志》30（1976），464–480。

Email address: farana@umd.edu

Department of Mathematics, University of Maryland, 4176 Campus Drive, College Park, MD 20742, USA

Email address: aaroncalderon@uchicago.edu

Department of Mathematics, University of Chicago, 5734 S. University Ave, Chicago, IL 60637, USA