arXiv:2305.01745v1 [math.CA] 2 May 2023

Onesided, intertwining, positive and copositive polynomial approximation with interpolatory constraints*

German Dzyubenko † Kirill A. Kopotun‡

2023年5月4日

摘要

给定 $k \in \mathbb{N}$、一个非负函数 $f \in C^r[a,b]$, $r \geq 0$、任意有限个点 $\{\alpha_i\}_{i\in\mathcal{J}} \subset [a,b]$，以及相应的一组非负整数 $\{m_i\}_{i\in\mathcal{J}}$，其中 $0 \leq m_i \leq r, i \in \mathcal{J}$，是否存在一个充分大的 $n \in \mathbb{N}$，使得存在一个次数为 n 的多项式P_n，满足

(i) $|f(x)-P_n(x)| \leq c\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)},\rho_n(x);\ [a,b]),\quad x \in [a,b]$，其中 $\rho_n(x) := n^{-1}\sqrt{1-x^2}+n^{-2}$，而 ω_k 是经典的 k 阶光滑模,

(ii) $P^{(\nu)}(\alpha_i) = f^{(\nu)}(\alpha_i)$，对于所有的 $0 \leq \nu \leq m_i$ 和所有的 $i \in \mathcal{J}$,

and

(iii) 要么 $P \geq f$ 在 $[a,b]$ 上（单侧逼近），要么 $P \geq 0$ 在 $[a,b]$ 上（正逼近）？

我们不仅对这一问题给出了精确答案，还对更一般的交织多项式逼近和共正多项式逼近中的类似问题给出了精确答案。事实证明，其中许多答案都相当出人意料。

我们还证明，一般而言，带有 $q \geq 1$ 的 q-单调逼近中的类似问题的答案是否定的，即，如果 $q \geq 1$，带有一般插值约束的 q-单调逼近是不可能的。

目录

1 引言与主要结果 2

1.1 如果 $q \geq 1$，那么 q-单调逼近在一般插值约束下是不可能的. 3

*美国数学学会分类号：41A05、41A10、41A15、41A25、41A29 关键词与短语：交织、共正、正、非负、埃尔米特插值、代数多项式逼近、精确逐点估计

†乌克兰国家科学院数学研究所（dzyuben@gmail.com）。本研究部分得到乌克兰国家科学院项目 0123U100853 以及约翰斯·霍普金斯大学对 U4U 的资助。

‡曼尼托巴大学数学系，加拿大曼尼托巴省温尼伯市，R3T 2N2（Crimea is Ukraine@shaw.ca）。本研究部分得到加拿大自然科学与工程研究委员会资助，项目编号 RGPIN-05678-2020。

1.2 带插值约束的正、共正、单侧及交织逼近：定义与一个启发性例子.41.3 主要结果总结.6

2 主要结果 11
2.1 带插值约束的单侧逼近与交织逼近 . . . . . 112.2 带插值约束的正逼近与共正逼近 12

3 否定性结果 13
3.1 带插值约束的单侧逼近与交织逼近 . . . . . 143.2 带插值约束的正逼近与共正逼近 15
3.3 在 Y_s 处进行插值的共正逼近的否定性结果 .23

4 样条逼近 带插值约束的逼近 27
4.1 局部构造.284.2 全局构造.35

5 带插值约束的截断幂函数与样条函数的交织多项式逼近 38

5.1 截断幂函数的逼近.395.2 一般样条函数的逼近.42

6 主要结果的证明 43

7 附录：精确逐点估计 43

1 引言与主要结果

本文中，我们关注保形逼近（关于这一领域的简要介绍，参见例如 [7] ），并附加一项限制：逼近多项式在给定的一组点处插值被逼近的函数。

没有任何形状限制时，我们可以轻松做到这一点，同时保持一致范数下最佳逼近的速率（显然，这在积分范数下已不再可能）。事实上，只需利用适当的拉格朗日多项式对最佳逼近多项式作修正，即可得到满足所需插值条件的近最佳多项式逼近函数（该常数必然取决于所有插值点之间的最小距离）。

因此，下面的问题相当自然：如果 f 具有我们希望在用多项式逼近它时予以保留的某种形状，那么是否可以在给定的点集上进行插值？如果可以，那么关于用此类多项式逼近 f 时的逼近误差，我们能得出什么结论？我们的目标是为这一问题提供答案。

为了进一步讨论这一问题，我们现在回顾一些标准的记号和定义（例如参见 [7]）。我们称函数 f 在区间 J 上是 q- 单调的，并记为 $f \in \Delta^{(q)}(J)$，如果对于 J 中任意 $q+1$ 个互异的点 t_0、t_1、...、t_q，差商 $[t_0, \ldots, t_q;\ f]$ 均为非负数。特别地，$\Delta^{(0)}(J)$、$\Delta^{(1)}(J)$ 和 $\Delta^{(2)}(J)$ 分别是所有非负的、

在 J 上的非递减函数和凸函数的集合。如果 $q \geq 3$，那么来自 $\Delta^{(q)}(J)$ 的函数 f 在 int J（J 的内部）上是 $(q-2)$ 次可微的，并且 $f_{(q-2)} \in \Delta^{(2)}(\text{int } J)$。

令 $\mathbb{Y}_s$, $s \in \mathbb{N}$ 为所有由点 y_i 构成的集合 $Y_s := \{y_i\}_{i=1}^s$ 的集合，使得 $-1 < y_s < \cdots < y_1 < 1$，并定义 $y_0 := 1$ 和 $y_{s+1} := -1$。我们用 $\Delta_{(Y_s)}$ 表示在 Y_s 中的点处改变其 q-单调性的函数集合。更确切地说，

$$f \in \Delta^{(q)}(Y_s) \quad \Longleftrightarrow \quad (-1)^i f \in \Delta^{(q)}([y_{i+1}, y_i]),\ 0 \leq i \leq s.$$

此外，若 $s = 0$，则 $\mathbb{Y}_0 := \{\emptyset\}$ 且 $\Delta^{(q)}(Y_0) := \Delta^{(q)}(I)$，其中 $I := [-1, 1]$。

令 $C^r := C^r(I)$ 表示定义在 I 上的所有 r 次连续可微函数构成的空间，并令 $\mathbb{A}_p$, $p \in \mathbb{N}$ 为所有由点 α_i 构成的集合 $A_p := \{\alpha_i\}_{i=1}^p$ 的集合，使得 $-1 \leq \alpha_p < \cdots < \alpha_1 \leq 1$。对于给定的 $f \in C^r(I)$, $r \in \mathbb{N}_0$，我们记

$$\mathcal{I}^{(r)}(f, A_p) := \left\{ g \in C^r(I) \;\middle|\; g^{(i)}(\alpha) = f^{(i)}(\alpha),\ \text{for all } \alpha \in A_p \text{ and } 0 \leq i \leq r \right\}.$$

特别地，若 $r = 0$，我们使用记号 $\mathcal{I}(f, A_p) := \mathcal{I}^{(0)}(f, A_p)$。为方便起见，我们也记 $\mathbb{A}_0 := \{\emptyset\}$。显然，若 $f \in C^r(I)$, $r \geq 1$，则对所有$0 \leq m \leq r-1$，都有 $\mathcal{I}^{(m+1)}(f, A_p) \subset \mathcal{I}^{(m)}(f, A_p)$。

通常，Π_n 表示所有次数为 $\leq n$ 的多项式的集合，$\|\cdot\|_J$ 表示J上的一致范数，$\omega_k(f, \cdot; J)$ 表示 f 在 J 上的第 k 阶光滑模，$\rho_n(x) := n^{-1}\sqrt{1-x^2} + n^{-2}$，且 $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$。本文中，$c(\ldots)$表示正常数，其取值仅取决于括号中的参数。此外，记号中省略区间 $I = [-1, 1]$，即记作 $\|\cdot\| := \|\cdot\|_I$、$\omega_k(f, \cdot) := \omega_k(f, \cdot; I)$ 等。

通篇而言，如果某个陈述中同时出现集合 Y_s 和 A_p，则假定它们没有公共点，即始终假定限制条件 $Y_s \cap A_p = \emptyset$ 成立，但不作明确说明。注意，这对所得结果的一般性没有影响，这样做仅仅是为了方便。

1.1 如果 $q \geq 1$，则带一般插值约束的 q-单调逼近是不可能的

我们从以下观察开始：如果 $q \geq 1$，则带插值约束的 q-单调多项式逼近通常是不可能的。

引理 1.1. 对任意 $q \in \mathbb{N}$、$s \in \mathbb{N}_0$ 和 $Y_s \in \mathbb{Y}_s$，存在 $f \in \Delta^{(q)}(Y_s)$ 以及集合 $A_p \in \mathbb{A}_p$、$p \geq q+2$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}_0$，

$$\Delta^{(q)}(Y_s) \cap \mathcal{I}(f, A_p) \cap \Pi_n = \emptyset.$$

证明。给定 $q \in \mathbb{N}$、$s \in \mathbb{N}_0$ 和 $Y_s \in \mathbb{Y}_s$，令 $\xi := (1 + y_1)/2$ 并选取 A_p、$p \geq q+2$，使得 $y_1 < \alpha_{q+2} < \cdots < \alpha_2 < \xi < \alpha_1$。于是，$f := (\cdot - \xi)_+^q$ 显然属于 $\Delta^{(q)}(Y_s)$。现在回顾 q-单调函数的以下性质（参见 [2, 定理 5]）：

> 令 $f \in \Delta^{(q)}(J)$、$q \in \mathbb{N}$，并令 $l_{q-1} := l_{q-1}(z_q, \ldots, z_1) \in \Pi_{q-1}$ 为在 J: $z_q < z_{q-1} < \cdots < z_1$ 中的 q 个互异点处插值 f 的拉格朗日多项式。则，对于 $x \in [z_{i+1}, z_i]$、$1 \leq i \leq q$，有 $(-1)^i(f(x) - l_{q-1}(x)) \geq 0$；对于$x \geq z_1$，有 $f(x) - l_{q-1}(x) \geq 0$。换言之，

$$f - l_{q-1} \in \Delta^{(0)}\left(\{z_i\}_{i=1}^q\right). \tag{1.1}$$

请注意，这一结果是这样一个性质的推广：凸函数总是位于其弦的下方。

现在假设 $p_n \in \Delta^{(q)}(Y_s) \cap \mathcal{I}(f, A_p) \cap \Pi_n$。那么， p_n 在 $[y_1, 1]$ 上是 q-单调的， $p_n(\alpha_i) = 0$，并且 $2 \le i \le q+2$ $p_n(\alpha_1) = f(\alpha_1) > 0$。现在，多项式 $\ell_1 := l_{q-1}(\alpha_{q+2}, \ldots, \alpha_3) \equiv 0$ 以及 $\ell_2 := l_{q-1}(\alpha_{q+2}, \ldots, \alpha_4, \alpha_2) \equiv 0$（在 $q = 1$ 的情况下， $\ell_2 := l_0(\alpha_2) \equiv 0$）在 $[y_1, 1]$ 中的 p_n 个点处进行插值，因此由 (1.1) 可知，对于 $x \ge \alpha_3$， $p_n(x) = p_n(x) - \ell_1(x) \ge 0$；对于 $\alpha_4 \le x \le \alpha_2$， $-p_n(x) = (-1)\,(\,p_n(x) - \ell_2(x)\,) \ge 0$。因此， $p_n(x) = 0$， $\alpha_3 \le x \le \alpha_2$，从而 $p_n \equiv 0$。所以， $p_n(\alpha_1) > 0$ 不成立。这一矛盾意味着这样的多项式 p_n 不存在。 □

我们指出，如果 $A_p \in \mathbb{A}_p$ 中的点数 p 足够少，那么可能可以进行带有插值约束的 q-单调逼近，但其效果可能不如也可能不逊于在 A_p 中的点处不进行插值的 q-单调逼近。例如，若 $q \ge 1$，则记

$$E_n^{(q)}(f, Y_s; A_p) := \inf\left\{ \|f - p_n\| \;\middle|\; p_n \in \Delta^{(q)}(Y_s) \cap \mathcal{I}(f, A_p) \cap \Pi_n \right\},$$

我们有

$$E_n^{(q)}(f, Y_s; A_1) \le 2E_n^{(q)}(f, Y_s; \emptyset), \quad \text{for any } A_1 = \{\alpha\} \subset I,$$

and

$$E_n^{(q)}(f, Y_s; A_{q+1}) = 1, \quad \text{if } Y_s \subset [-1, 0),\ f(x) = x_+^q \in \Delta^{(q)}(Y_s) \text{ and } A_{q+1} \subset (y_1, 0).$$

1.2 带插值约束的正、共正、单侧及交织逼近：定义与启发性示例

注意， $q = 0$（共正逼近）的情形不在引理1.1的涵盖范围内。事实上，如下文所示，在一般集合 A_p 上要求插值的（共）正多项式逼近总是可行的。然而，其逼近率往往不如没有这些额外插值约束的（共）正逼近。

另一类与（余）正逼近相关的保形逼近是所谓的单边逼近，更一般地说，是交织逼近。我们称（见 [6]；据我们所知，交织逼近最初就是在此处引入并讨论的），若 $\{P, Q\}$ 是一对关于 $Y_s \in \mathbb{Y}_s$ 的 f 函数（多项式、样条函数等），则称它们为交织对。

$$P - f, f - Q \in \Delta^{(0)}(Y_s).$$

特别地，在 $s = 0$ 的情形下，我们有 $Q \le f \le P$ 在 I 上，而用 P 和 Q 逼近 f 通常称为单侧逼近。

交织/单侧多项式逼近的误差通常定义为：对 f 的所有交织多项式对所取的 $\|P - Q\|$ 的下确界。在本文中，我们还研究一个等价的量（以及相应的等价逐点估计）

$$\widetilde{E}_n(f, Y_s) := \inf\left\{ \|f - P\| \;\middle|\; P \in \Pi_n \cap \widetilde{\Delta}(f, Y_s) \right\},$$

其中

$$\widetilde{\Delta}(f, Y_s) := \left\{ P : I \mapsto \mathbb{R} \;\middle|\; P - f \in \Delta^{(0)}(Y_s) \right\}.$$

~ ~单侧逼近的误差记为 $E_n(f) := E_n(f, Y_0)$】【。

交织/单侧逼近的估计立即推出共正/正逼近的估计，因为如果 $f \in \Delta^{(0)}(Y_s)$ 且 $P \in \widetilde{\Delta}(f, Y_s)$，那么 $P = (P - f) + f \in \Delta^{(0)}(Y_s)$。然而，正如我们下文所示，许多情况下，共正（多项式）逼近（有无插值约束均可）是可行的，而交织逼近则不可行。

众所周知，多项式逼近的"正确"逐点估计需要包含量 $\rho_n(x)$，因为若不包含该量，就无法得到相匹配的逆定理。具体而言，代数多项式逼近的经典 Timan-Dzyadyk-Freud-Brudnyi 直接定理可表述如下（讨论见 例如 [8] ）：

> 若 $k \in \mathbb{N}$、 $r \in \mathbb{N}_0$ 和 $f \in C^r$成立，则对每个 $n \geq k + r - 1$，都存在一个多项式 $p_n \in \Pi_n$ 满足
>
> $$|f(x) - p_n(x)| \leq c(k, r)\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \quad x \in I. \tag{1.2}$$

因此，在讨论带插值约束的逼近时，我们关注的是形如（1.2）的估计（另见第7 节，其中讨论了插值如何进一步改进这些估计）。

说明性例子：假设 $r \in \mathbb{N}_0$ 固定，且两个函数 f、$g \in C^r$ 满足 $g \in \Delta^{(0)}$（I）和 $f \in \Delta^{(0)}$（$\{0\}$）（即，在 $[-1, 1]$上 $g \geq 0$，在 $[-1, 0]$ 上 $f \leq 0$，且在$[0, 1]$上 $f \geq 0$）；并回顾，对于 $0 \leq m \leq r$， $\mathcal{I}^{(m)}$（f，$\{\alpha\}$）表示满足以下条件的函数 $h \in C^m$ 集合：对所有 $0 \leq i \leq m$，均有 $h^{(i)}$（α）$= f^{(i)}$（α）。

我们关注以下问题的精确答案：

问题1：对于哪些 m，存在 $p_n \in \Pi_n \cap \mathcal{I}^{(m)}(g, \{1/2\})$，使得在 I 上满足 $p_n \geq g$，并且 (1.2)（将 f 替换为 g）成立？（单侧逼近）

问题2：对于哪些 m，存在 $p_n \in \Pi_n \cap \mathcal{I}^{(m)}$（$g$，$\{1/2\}$），使得 $p_n \geq 0$ 在 I 上，并且（1.2）（将 f 替换为 g）成立？（正逼近）

问题3：对于哪些 m_1 和 m_2，存在 $p_n \in \Pi_n \cap \mathcal{I}^{(m_1)}$（$f$，$\{1/2\}$）$\cap\, \mathcal{I}^{(m_2)}$（$f$，$\{0\}$），使得 $p_n \leq f$ 在 $[-1, 0]$，$p_n \geq f$ 在 $[0, 1]$, 上，并且（1.2）成立？（交织逼近）

问题4：对于哪些 m_1 和 m_2，存在 $p_n \in \Pi_n \cap \mathcal{I}^{(m_1)}$（$f$，$\{1/2\}$）$\cap\, \mathcal{I}^{(m_2)}$（$f$，$\{0\}$），使得 $p_n \in \Delta^{(0)}$（Y_s）并且（1.2）成立？（共正逼近）

答案颇为出人意料：

A1. 如果 $r = 0$ 或 $r = 1$，则不存在这样的 p_n。如果 $r \geq 2$ 为偶数，则当 $m = r - 1$ 时 p_n 存在，当 $m = r$ 时不存在。如果 $r \geq 3$ 为奇数，则当 $m = r - 2$ 时 p_n 存在，当$m = r - 1$时不存在。

A2. 如果 $r=0$ 且 $m=0$，那么这样的 p_n 存在，但仅当 $k=2$ (k 是（1.2）中的光滑模的阶数）。如果 $k=3$，那么这样的 p_n 不再存在。如果 $r=1$ 且 $m=0$，那么这样的 p_n 当 $k=3$ 时存在，而当 $k=4$时不存在。如果 $r=1$ 且 $m=1$，那么这样的 p_n 不存在（对任何 k）。如果 $r\geq 2$，那么答案与"A1"中的相同。

A3. 如果 $r=0$ 或 $r=1$，则不存在这样的 p_n。如果 $r\geq 2$ 是偶数，则当 $m_1=r-1$ 且 $m_2=r-2$ 时存在这样的 p_n，而当 $m_1=r$ 或 $m_2=r-1$ 时不存在。如果 $r\geq 3$ 是奇数，则当 $m_1=r-2$ 且 $m_2=r-1$ 时存在这样的 p_n，而当 $m_1=r-1$ 或 $m_2=r$ 时不存在。

A4。这是最复杂的答案。

r = 0: 若 $m_1=m_2=0$，则当 $k=2$ 时存在这样的 p_n，而当 $k=3$ 时不存在。**r = 1:** 若 $m_1=m_2=0$，则当 $k=3$ 时存在这样的 p_n，而当 $k=4$ 时不存在。若 $m_1=1$，则不存在这样的 p_n。若 $m_1=0$ 且 $m_2=1$，则当 $k=2$ 时存在这样的 p_n，而当 $k=3$ 时不存在。**r = 2:** 若 $m_1=1$ 且 $m_2=0$，则存在这样的 p_n（对任意 k 均成立）。然而，$m_1=1$ 不能增至 2。若 $m_1=1$ 且 $m_2=1$，则当 $k=3$ 时存在这样的 p_n，而当 $k=4$ 时不存在。若 $m_2=2$，则不存在这样的 p_n。

r ≥ 3：答案与"A3"中的相同。

1.3 主要结果总结

本节首先总结所有已知结果，这些结果涉及在没有任何额外插值限制的情况下，对（余）正、单侧及交织多项式逼近的逐点估计。

表 1：无插值约束的逼近

单侧逼近		
$f\in C$	$\exists\ P_n\geq f$: $\|f(x)-P_n(x)\|\leq c\omega_k(f,\rho_n(x))$	[6,定理 1]
正逼近		
$f\in C$	$\exists\ P_n\geq 0$: $\|f(x)-P_n(x)\|\leq c\omega_k(f,\rho_n(x))$	[5,定理 3], 或 [6, 推论 2]
交织逼近		
$f\in C$	$\widetilde{E}_n(f,Y_s)\not\leq c\|f\|$	[6,定理 13]
$f\in C^1$	$\exists\ P_n\in\widetilde{\Delta}(f,Y_s)$: $\|f(x)-P_n(x)\|\leq c\rho_n(x)\omega_k(f',\rho_n(x))$	[6, 定理 5]
共正逼近		
$f\in C$	$\exists\ P_n$，满足 f 的共正： $\|f(x)-P_n(x)\|\leq c\omega_3(f,\rho_n(x))$	[6,定理 7]
	$\omega_3(f,\rho_n(x))$ 不能替换为 $\omega_4(f,n^{-1})$	Zhou [10,11]

$f \in C^1$	$\exists\ P_n$，关于 f 共正： $\lvert f(x) - P_n(x)\rvert \le c\rho_n(x)\omega_k(f', \rho_n(x))$	[5,定理 1], 或 [6, 推论 6]

本文的主要目标是探讨，若增加一项要求，即逼近多项式还需在1 中的各点对函数及其可能的导数进行插值（即，埃尔米特插值），表 $A_p \in \mathbb{A}_p$需要作何调整。此外，显然，$\widetilde{\ }$中任意连续函数 $\Delta(f, Y_s)$ 都会自动在 f 中的所有点处插值 $Y_s \in \mathbb{Y}_s\widetilde{\ }$(即，$\Delta(f, Y_s) \subset \mathcal{I}(f, Y_s)$)；我们还将探讨是否也能在 f中的各点对 Y_s 的导数进行插值，以及这种做法的局限性。

事实证明，能否得到最优估计不仅取决于 f 的光滑性，还取决于 f 的最高阶导数的阶数是偶数还是奇数，以及插值点的位置（即 A_p 是否包含内部点）。在 Y_s 中的点处进行埃尔米特插值则更加复杂。

为清晰起见，我们在以下四个表格中总结主要结果。

表 2：单侧逼近

带有插值约束的单侧逼近		
$f \in C$	一般情况下不可能	引理 3.1 满足 $r = 0$
$f \in C^1$	当 $A_p \cap \operatorname{int} I \neq \emptyset$ 时不可能	引理 3.1 (i) 满足 $r = 1$
	$\exists\ P_n \ge f$ 和 $P_n \in \mathcal{I}(f, \{\pm 1\})$: $\lvert f(x) - P_n(x)\rvert \le c\rho_n(x)\omega_k(f', \rho_n(x))$	定理 2.2满足 $(r, m_1, m_3) = (1, -1, 0)$
	$\mathcal{I}(f, \{\pm 1\})$ 不能由 $\mathcal{I}^{(1)}(f, \{\pm 1\})$ 替代	引理 3.1(ii) $(r = 1)$
$f \in C^r$, $r \ge 2$ 是 even	$\exists\ P_n \ge f$ 和 $P_n \in \mathcal{I}^{(r-1)}(f, A_p)$: $\lvert f(x) - P_n(x)\rvert \le c\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x))$	定理 2.2满足 (r, m_1, m_3) $= (2j, 2j-1, 2j-1)$
	$\mathcal{I}^{(r-1)}(f, A_p)$不能替换为 $\mathcal{I}^{(r)}(f, A_p)$	引理 3.1
$f \in C^r$, $r \ge 3$ 是 odd	$\exists\ P_n \ge f$ 和 $P_n \in \mathcal{I}^{(r-2)}(f, A_p)$: $\lvert f(x) - P_n(x)\rvert \le c\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x))$	由一个更强的 下文的陈述
	$\mathcal{I}^{(r-2)}(f, A_p)$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(r-1)}(f, A_p)$ 除非 $A_p = \{\pm 1\}$	引理 3.1(i)
	$\exists\ P_n \ge f$和 $P_n \in \mathcal{I}^{(r-2)}(f, A_p) \cap \mathcal{I}^{(r-1)}(f, \{\pm 1\})$: $\lvert f(x) - P_n(x)\rvert \le c\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x))$	定理 2.2满足 (r, m_1, m_3) $= (2j+1, 2j-1, 2j)$
	$\mathcal{I}^{(r-1)}(f, \{\pm 1\})$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(r)}(f, \{\pm 1\})$	引理3.1(ii)

表 3：正逼近

带插值约束的正逼近（$f \geq 0$）		
$f \in C$	$\exists\, P_n \geq 0$ 和 $P_n \in \mathcal{I}(f, A_p)$： $\lvert f(x) - P_n(x) \rvert \leq c\omega_2(f, \rho_n(x))$	定理 2.4的 $(r, k, m_1, m_3) = (0, 2, 0, 0)$
	$\omega_2(f, \rho_n(x))$ 不能替换为 $\omega_3(f, \rho_n(x))$	引理 3.3
$f \in C^1$	$\exists\, P_n \geq 0$ 和 $P_n \in \mathcal{I}(f, A_p)$: $\lvert f(x) - P_n(x) \rvert \leq c\rho_n(x)\omega_3(f', \rho_n(x))$	定理 2.4与 $(r, k, m_1, m_3) = (1, 3, 0, 0)$
	$\omega_3(f', \rho_n(x))$ 不能替换为 $\omega_4(f', \rho_n(x))$ 除非 $A_p = \{\pm 1\}$	引理 3.5
	$\mathcal{I}(f, A_p)$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(1)}(f, A_p)$	引理 3.9
	$\exists\, P_n \geq 0$ 和 $P_n \in \mathcal{I}(f, \{\pm 1\})$: $\lvert f(x) - P_n(x) \rvert \leq c\rho_n(x)\omega_k(f', \rho_n(x))$	定理 2.4满足 $(r, k, m_1, m_3) = (1, k, -1, 0)$
	$\mathcal{I}(f, \{\pm 1\})$ 不能被 $\mathcal{I}^{(1)}(f, \{\pm 1\})$ 替代	引理 3.9
$f \in C^r$, $r \geq 2$ 是 even	$\exists\, P_n \geq 0$ 和 $P_n \in \mathcal{I}^{(r-1)}(f, A_p)$: $\lvert f(x) - P_n(x) \rvert \leq c\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x))$	定理 2.4具有 (r, k, m_1, m_3) $= (2j, k, 2j-1, 2j-1)$
	$\mathcal{I}^{(r-1)}(f, A_p)$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(r)}(f, A_p)$	引理 3.6
$f \in C^r$, $r \geq 3$ 是 odd	$\exists\, P_n \geq 0$ 和 $P_n \in \mathcal{I}^{(r-2)}(f, A_p)$: $\lvert f(x) - P_n(x) \rvert \leq c\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x))$	源自一个更强的 下述命题
	$\mathcal{I}^{(r-2)}(f, A_p)$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(r-1)}(f, A_p)$ 除非 $A_p = \{\pm 1\}$	引理 3.8
	$\exists\, P_n \geq 0$ 和 $P_n \in \mathcal{I}^{(r-2)}(f, A_p) \cap \mathcal{I}^{(r-1)}(f, \{\pm 1\})$: $\lvert f(x) - P_n(x) \rvert \leq c\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x))$	定理 2.4关于 (r, k, m_1, m_3) $= (2j+1, k, 2j-1, 2j)$
	$\mathcal{I}^{(r-1)}(f, \{\pm 1\})$ 不能由 $\mathcal{I}^{(r)}(f, \{\pm 1\})$ 替代	引理 3.9

表 4：交织逼近

带有插值约束的交织逼近		
$f \in C$	通常情况下不可能	引理3.1 $(r = 0)$
$f \in C^1$	若 A_p 则不可能 $\cap \operatorname{int} I \neq \emptyset$	引理 3.1(i) $(r = 1)$
	$\exists\, P_n \in \widetilde{\Delta}(f, Y_s) \cap \mathcal{I}(f, \{\pm 1\})$: $\lvert f(x) - P_n(x) \rvert \leq c\rho_n(x)\omega_k(f', \rho_n(x))$	定理 2.1和 (r, m_1, m_2, m_3) $= (1, -1, 0, 0)$
	$\mathcal{I}(f, \{\pm 1\})$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(1)}(f, \{\pm 1\})$	引理 3.1(ii) $(r = 1)$

	$\widetilde{\Delta}(f, Y_s)$不能替换为 $\widetilde{\Delta}(f, Y_s) \cap \mathcal{I}^{(1)}(f, Y_s)$	引理 3.2 $(r = 1)$
$f \in C^r$, $r \geq 2$ 是 even	$\exists\ P_n \in \widetilde{\Delta}(f, Y_s) \cap \mathcal{I}^{(r-1)}(f, A_p) \cap \mathcal{I}^{(r-2)}(f, Y_s)$: $\lvert f(x) - P_n(x)\rvert \leq c\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x))$	定理 2.1关于 (r, m_1, m_2, m_3) $= (2j, 2j-1, 2j-2, 2j-1)$
	$\mathcal{I}^{(r-1)}(f, A_p)$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(r)}(f, A_p)$	引理 3.1
	$\mathcal{I}^{(r-2)}(f, Y_s)$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(r-1)}(f, Y_s)$	引理 3.2
$f \in C^r$, $r \geq 3$ 是 odd	$\exists\ P_n \in \widetilde{\Delta}(f, Y_s) \cap \mathcal{I}^{(r-2)}(f, A_p) \cap \mathcal{I}^{(r-1)}(f, Y_s)$: $\lvert f(x) - P_n(x)\rvert \leq c\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x))$	可由一个更强的结果推出 以下命题
	$\mathcal{I}^{(r-2)}(f, A_p)$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(r-1)}(f, A_p)$ 除非 $A_p = \{\pm 1\}$	引理 3.1(i)
	$\mathcal{I}^{(r-1)}(f, Y_s)$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(r)}(f, Y_s)$	引理 3.2
	$\exists\ P_n \in \widetilde{\Delta}(f, Y_s) \cap \mathcal{I}^{(r-2)}(f, A_p) \cap \mathcal{I}^{(r-1)}(f, Y_s) \cap \mathcal{I}^{(r-1)}(f, \{\pm 1\})$: $\lvert f(x) - P_n(x)\rvert \leq c\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x))$	定理 2.1关于 (r, m_1, m_2, m_3) $= (2j+1, 2j-1, 2j, 2j)$
	$\mathcal{I}^{(r-1)}(f, \{\pm 1\})$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(r)}(f, \{\pm 1\})$	引理 3.1(ii)

表 5：共正逼近

带插值约束的余正逼近 $(f \in \Delta^{(0)}(Y_s))$		
$f \in C$	$\exists\ P_n \in \Delta^{(0)}(Y_s) \cap \mathcal{I}(f, A_p)$: $\lvert f(x) - P_n(x)\rvert \leq c\omega_2(f, \rho_n(x))$	定理 2.3关于 (r, k, m_1, m_2, m_3) $= (0, 2, 0, 0, 0)$
	$\omega_2(f, \rho_n(x))$不能替换为 $\omega_3(f, \rho_n(x))$	引理 3.4
$f \in C^1$	$\exists\ P_n \in \Delta^{(0)}(Y_s) \cap \mathcal{I}(f, A_p)$: $\lvert f(x) - P_n(x)\rvert \leq c\rho_n(x)\omega_3(f', \rho_n(x))$	定理 2.3与 (r, k, m_1, m_2, m_3) $= (1, 3, 0, 0, 0)$
	$\omega_3(f', \rho_n(x))$ 不能被 $\omega_4(f', \rho_n(x))$ 替代 除非 $A_p = \{\pm 1\}$	引理 3.5
	$\mathcal{I}(f, A_p)$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(1)}(f, A_p)$	引理 3.9
	$\exists\ P_n \in \Delta^{(0)}(Y_s) \cap \mathcal{I}(f, \{\pm 1\})$: $\lvert f(x) - P_n(x)\rvert \leq c\rho_n(x)\omega_k(f', \rho_n(x))$	定理 2.3其中 (r, k, m_1, m_2, m_3) $= (1, k, -1, 0, 0)$
	$\mathcal{I}(f, \{\pm 1\})$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(1)}(f, \{\pm 1\})$	引理 3.9
	$\exists\ P_n \in \Delta^{(0)}(Y_s) \cap \mathcal{I}^{(1)}(f, Y_s)$: $\lvert f(x) - P_n(x)\rvert \leq c\rho_n(x)\omega_2(f', \rho_n(x))$	由以下更强的 结论可得

	不能将 $\omega_2(f',\rho_n(x))$ 替换为 $\omega_3(f',\rho_n(x))$	引理 3.10
	$\exists\ P_n\in\Delta^{(0)}(Y_s)\cap\mathcal{I}(f,A_p)\cap\mathcal{I}^{(1)}(f,Y_s)$: $\lvert f(x)-P_n(x)\rvert\le c\rho_n(x)\omega_2(f',\rho_n(x))$	定理 2.3的 (r,k,m_1,m_2,m_3) $=(1,2,0,1,0)$
$f\in C^2$	$\exists\ P_n\in\Delta^{(0)}(Y_s)\cap\mathcal{I}^{(1)}(f,A_p)\cap\mathcal{I}(f,Y_s)$: $\lvert f(x)-P_n(x)\rvert\le c\rho_n^2(x)\omega_k(f'',\rho_n(x))$	定理 2.3及 (r,k,m_1,m_2,m_3) $=(2,k,1,0,1)$
	$\mathcal{I}^{(1)}(f,A_p)$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(2)}(f,A_p)$	引理 3.6
	$\exists\ P_n\in\Delta^{(0)}(Y_s)\cap\mathcal{I}^{(1)}(f,Y_s)$: $\lvert f(x)-P_n(x)\rvert\le c\rho_n^2(x)\omega_3(f'',\rho_n(x))$	可由下述一个更强的 命题推出
	$\omega_3(f'',\rho_n(x))$ 不能替换为 $\omega_4(f'',\rho_n(x))$	引理 3.11
	$\mathcal{I}^{(1)}(f,Y_s)$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(2)}(f,Y_s)$	引理 3.12
	$\exists\ P_n\in\Delta^{(0)}(Y_s)\cap\mathcal{I}^{(1)}(f,A_p)\cap\mathcal{I}^{(1)}(f,Y_s)$: $\lvert f(x)-P_n(x)\rvert\le c\rho_n^2(x)\omega_3(f'',\rho_n(x))$	定理 2.3其中 (r,k,m_1,m_2,m_3) $=(2,3,1,1,1)$
$f\in C^r$, $r\ge 3$ 是 odd	$\exists\ P_n\in\Delta^{(0)}(Y_s)\cap\mathcal{I}^{(r-2)}(f,A_p)\cap\mathcal{I}^{(r-1)}(f,Y_s)$: $\lvert f(x)-P_n(x)\rvert\le c\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)},\rho_n(x))$	可由一个更强的 下述命题推出
	$\mathcal{I}^{(r-2)}(f,A_p)$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(r-1)}(f,A_p)$ 除非 $A_p=\{\pm1\}$	引理 3.8
	$\mathcal{I}^{(r-1)}(f,Y_s)$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(r)}(f,Y_s)$	引理 3.13
	$\exists\ P_n\in\Delta^{(0)}(Y_s)\cap\mathcal{I}^{(r-2)}(f,A_p)\cap\mathcal{I}^{(r-1)}(f,Y_s)\cap$ $\mathcal{I}^{(r-1)}(f,\{\pm1\})$: $\lvert f(x)-P_n(x)\rvert\le c\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)},\rho_n(x))$	定理 2.3关于 (r,k,m_1,m_2,m_3) $=(2j+1,k,2j-1,2j,2j)$
	$\mathcal{I}^{(r-1)}(f,\{\pm1\})$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(r)}(f,\{\pm1\})$	引理 3.9
$f\in C^r$, $r\ge 4$ 是 even	$\exists\ P_n\in\Delta^{(0)}(Y_s)\cap\mathcal{I}^{(r-1)}(f,A_p)\cap\mathcal{I}^{(r-2)}(f,Y_s)$: $\lvert f(x)-P_n(x)\rvert\le c\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)},\rho_n(x))$	定理 2.3关于 (r,k,m_1,m_2,m_3) = $(2j,k,2j-1,2j-2,2j-1)$
	$\mathcal{I}^{(r-1)}(f,A_p)$ 不能替换为 $\mathcal{I}^{(r)}(f,A_p)$	引理 3.6
	$\mathcal{I}^{(r-2)}(f,Y_s)$不能替换为 $\mathcal{I}^{(r-1)}(f,Y_s)$	引理 3.14

对于 $Y_s\in\mathbb{Y}_s$ 和 $A_p\in\mathbb{A}_p$，回想一下，我们始终假设 $Y_s\cap A_p=\emptyset$，因此将其记为

$$Y_s\cup A_p=:\{\beta_i\}_{i=1}^{s+p},\quad \text{with } -1\le\beta_{s+p}<\beta_{s+p-1}<\cdots<\beta_2<\beta_1\le 1, \tag{1.3}$$

and

$$\begin{aligned} d(Y_s,A_p)&:=\min\left\{|u-v|\ \middle|\ u,v\in Y_s\cup A_p\cup\{\pm1\}\quad\text{and}\quad u\ne v\right\}\\ &=\operatorname{pmin}\left\{\beta_{i-1}-\beta_i\ \middle|\ 1\le i\le s+p+1\right\}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中 $\beta_0 := 1$, $\beta_{s+p+1} := -1$，而 $\mathrm{pmin}(S)$ 是集合 S 中的最小正实数。特别地，$d(Y_s) := d(Y_s, \emptyset)$ 且 $d(A_p) := d(\emptyset, A_p)$。

由备注 3.7 以及引理 4.4 和 4.6 可知，通常情况下，下文定理中各个常数对 $d(Y_s, A_p)$ 的依赖性无法消除。

2 主要结果

2.1 带插值约束的单侧与交织逼近

为方便起见，我们引入以下记号：

$$\Upsilon_{\text{intertwining}} := \bigcup_{r\geq 1} \Upsilon_r,$$

其中

$$\begin{aligned}\Upsilon_r := \big\{(r, m_1, m_2, m_3) \;\big|\; & m_1 = r-1,\ m_2 = r-2,\ m_3 = r-1 \text{ if } r \text{ is even};\\ & m_1 = r-2,\ m_2 = r-1,\ m_3 = r-1 \text{ if } r \text{ is odd}\big\}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\Upsilon_{\text{intertwining}} = &\big\{(2j, 2j-1, 2j-2, 2j-1) \;\big|\; j \in \mathbb{N}\big\}\\ &\cup \big\{(2j+1, 2j-1, 2j, 2j) \;\big|\; j \in \mathbb{N}_0\big\}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

注意，当 $r = 1$ 时，

$$\Upsilon_1 := \{(1, -1, 0, 0)\},$$

这是任何 m_i 都可能变为负值的唯一情形。

以下是我们关于带插值约束的交织逼近的主要结果（更确切地说，是将一组结果合并为一个陈述）。

定理 2.1（带插值约束的交织逼近）。设 k，p，$s \in \mathbb{N}$，$Y_s \in \mathbb{Y}_s$，$A_p \in \mathbb{A}_p$，以及 $(r, m_1, m_2, m_3) \in \Upsilon_{intertwining}$，定义于(2.1)。那么，对于任意 $f \in C^r$ 以及任意 $n \geq c(d(Y_s, A_p))$，存在

$$P_n \in \Pi_n \cap \widetilde{\Delta}(f, Y_s) \cap \mathcal{I}^{(m_1)}(f, A_p) \cap \mathcal{I}^{(m_2)}(f, Y_s) \cap \mathcal{I}^{(m_3)}(f, \{\pm 1\})$$

使得

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(k, r, s, p)\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \qquad x \in I,$$

其中 $\mathcal{I}^{(-1)}(f, A_p) := \{h : I \mapsto \mathbb{R}\}$，表示定义在 I 上的所有实值函数的集合，即限制条件 $P_n \in \mathcal{I}^{(-1)}(f, A_p)$ 是空泛的，因此若 $m_1 = -1$，则不要求 P_n 在 A_p 中的点处插值 f。

单侧逼近的结果类似，本可以通过令 s 为 0，并使限制条件 $P_n \in \mathcal{I}^{(m_2)}(f, Y_0)$ 变为空条件，将其纳入定理 2.1 的表述中。然而，为避免可能的混淆并方便读者，我们给出一个明确的表述。

Let

$$\begin{aligned}\Upsilon_{\text{onesided}} &:= \left\{(r, m_1, m_3) \;\middle|\; (r, m_1, m_2, m_3) \in \Upsilon_{\text{intertwining}},\ \text{for some } m_2 \geq 0\right\} \\ &= \left\{(2j, 2j-1, 2j-1) \;\middle|\; j \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{(2j+1, 2j-1, 2j) \;\middle|\; j \in \mathbb{N}_0\right\}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

定理 2.2（带插值约束的单侧逼近）。设 k，$p \in \mathbb{N}$，$A_p \in \mathbb{A}_p$，以及 $(r,\ m_1,\ m_3) \in \Upsilon_{onesided}$，定义于 (2.2)中。则，对于任意 $f \in C^r$ 以及任意 $n \geq c(d(A_p))$，存在

$$P_n \in \Pi_n \cap \mathcal{I}^{(m_1)}(f, A_p) \cap \mathcal{I}^{(m_3)}(f, \{\pm 1\})$$

使得 $P_n \geq f$ 在 I 上，并且

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(k, r, p)\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \qquad x \in I.$$

此处与定理2.1的表述一样，不要求 P_n 在 f 中的点处进行插值，A_p 如果 $m_1 = -1$。

由引理 3.1 和 3.2 可知，定理 2.1 和 2.2 无法通过增大任一参数 m_i的值（对任意 $r \in \mathbb{N}$），也无法通过纳入 $r = 0$的情形来加强。

2.2 带插值约束的正逼近与共正逼近

与上一节类似，我们首先引入指标集的记号 $\Upsilon^{(0)}$ 共正。然而，为了涵盖表 5中的所有陈述，该记号需要更加复杂，并涉及模量 k的阶数。记

$$\Upsilon^{(0)}_{\text{copositive}} := \bigcup_{r \geq 0} \Upsilon^{(0)}_r,$$

其中

$$\begin{aligned}\Upsilon^{(0)}_0 &:= \{(0, 2, 0, 0, 0)\}, \\ \Upsilon^{(0)}_1 &:= \{(1, 3, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 1, 0)\} \cup \left\{(1, k, -1, 0, 0) \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\}, \\ \Upsilon^{(0)}_2 &:= \{(2, 3, 1, 1, 1)\} \cup \left\{(2, k, 1, 0, 1) \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\},\end{aligned}$$

并且，对于 $r \geq 3$,

$$\begin{aligned}\Upsilon^{(0)}_r &:= \left\{(r, k, m_1, m_2, m_3) \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad (r, m_1, m_2, m_3) \in \Upsilon_r\right\} \\ &= \left\{(r, k, m_1, m_2, m_3) \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\ \text{and } m_1 = r-1,\ m_2 = r-2,\ m_3 = r-1 \text{ if } r \text{ is even};\right. \\ &\qquad \left. m_1 = r-2,\ m_2 = r-1,\ m_3 = r-1 \text{ if } r \text{ is odd}\right\}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\Upsilon^{(0)}_{\text{copositive}} = &\{(0, 2, 0, 0, 0), (1, 3, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 1, 0), (2, 3, 1, 1, 1)\} \\ &\cup \left\{(2j, k, 2j-1, 2j-2, 2j-1) \;\middle|\; j, k \in \mathbb{N}\right\} \\ &\cup \left\{(2j+1, k, 2j-1, 2j, 2j) \;\middle|\; j \in \mathbb{N}_0,\ k \in \mathbb{N}\right\}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

定理 2.3（带插值约束的共正逼近）。设 p、$s \in \mathbb{N}$、$Y_s \in \mathbb{Y}_s$、$A_p \in \mathbb{A}_p$ 和 $(r$、k、m_1、m_2、$m_3) \in \Upsilon^{(0)}_{copositive}$，定义见 (2.3)。那么，对于任意$f \in C^r \cap \Delta^{(0)}(Y_s)$ 和任意 $n \geq c(d(Y_s, A_p))$，存在

$$P_n \in \Pi_n \cap \Delta^{(0)}(Y_s) \cap \mathcal{I}^{(m_1)}(f, A_p) \cap \mathcal{I}^{(m_2)}(f, Y_s) \cap \mathcal{I}^{(m_3)}(f, \{\pm 1\})$$

使得

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(k, r, s, p)\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \qquad x \in I.$$

这里，与定理2.1的表述一样，并不要求 P_n 在 f 中的点 A_p 处进行插值 $m_1 = -1$。

与交织和单侧逼近的情形一样，正逼近的结果与共正情形中的结果相似；只需允许 s 取 0，并使限制条件 $P_n \in \mathcal{I}^{(m_2)}(f, Y_0)$ 变得无约束，这些结果本可纳入定理 2.3 的表述中。为方便读者，我们再次给出明确的表述。

Let

$$\begin{aligned}(2.4)\qquad \Upsilon^{(0)}_{\text{positive}} &:= \left\{(r, k, m_1, m_3) \;\middle|\; (r, k, m_1, m_2, m_3) \in \Upsilon^{(0)}_{\text{copositive}}, \text{ for some } m_2 \geq 0\right\} \\ &= \{(0, 2, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (1, 3, 0, 0), (2, 3, 1, 1)\} \\ &\quad \cup \left\{(2j, k, 2j-1, 2j-1) \;\middle|\; j, k \in \mathbb{N}\right\} \\ &\quad \cup \left\{(2j+1, k, 2j-1, 2j) \;\middle|\; j \in \mathbb{N}_0,\ k \in \mathbb{N}\right\}.\end{aligned}$$

定理 2.4（带插值约束的正逼近）。设 $p \in \mathbb{N}$，$A_p \in \mathbb{A}_p$，以及 $(r$，k，m_1，$m_3) \in \Upsilon^{(0)}_{positive}$，其定义见 (2.4)。那么，对于任意 $f \in C^r$ 使得 $f \geq 0$在 I上成立，以及任意 $n \geq c(d(A_p))$，存在

$$P_n \in \Pi_n \cap \mathcal{I}^{(m_1)}(f, A_p) \cap \mathcal{I}^{(m_3)}(f, \{\pm 1\})$$

使得 $P_n \geq 0$ 在 I上，并且

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(k, r, p)\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \qquad x \in I.$$

这里，与上述陈述一样，并不要求当 $m_1 = -1$时， P_n 在A_p 中的点处对 f 进行插值。

由第 3.2节和第 3.3节中的引理可知，定理 2.3和 2.4 不能通过增大任一参数而得到加强：对于任意 k 或 m_i，其 $r \geq 0$。

3 否定性结果

回想一下，对于在 I 上具有绝对连续的 $(r-1)$ 阶导数的函数 $g: I \mapsto \mathbb{R}$，有以下公式（泰勒公式）：

$$g(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{i!} g^{(i)}(a)(x-a)^i + \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} g^{(r)}(t)dt, \quad x \in I.$$

我们经常使用这个初等恒等式，却不明确提及它。

3.1 带插值约束的单侧逼近与交织逼近

以下引理旨在为带插值约束的单侧逼近和交织逼近建立一般性的否定性结果。

引理 3.1（带插值约束的局部单侧逼近： $f \in C^r$ 与 $r \geq 0$的否定性结果）。设 $r \in \mathbb{N}_0$。那么，

(i) 如果 λ 是 I 的内部点（即 $\lambda \in (-1,1)$），则存在一个函数 $f \in C^r$，使得 $f \equiv 0$ 在 $[-1,\lambda]$上，且

$$\mathcal{I}^{(\tilde{r})}(f,\{\lambda\}) \cap \left\{ g \in C^{r+1} \;\middle|\; g \geq f \text{ on } (\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon), \text{ for some } \varepsilon > 0 \right\} = \emptyset,$$

其中

$$\tilde{r} := 2\lfloor r/2 \rfloor = \begin{cases} r-1\,, & \text{if } r \text{ is odd,} \\ r\,, & \text{if } r \text{ is even.} \end{cases}$$

(ii) 若 λ 是 I 的端点（即 $\lambda = \pm 1$），则存在 $f \in C^r$ 使得

$$\mathcal{I}^{(r)}(f,\{\lambda\}) \cap \left\{ g \in C^{r+1} \;\middle|\; g \geq f \text{ on } (\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon) \cap I, \text{ for some } \varepsilon > 0 \right\} = \emptyset.$$

证明。如果 λ 是 I 的内部点，那么不失一般性，我们假设 $\lambda = 0$ 并定义

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt, \quad \text{where} \quad f^{(r)}(x) := \begin{cases} -x\ln x, & \text{if } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{if } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

显然， $f \in C^r$ 和 $f \equiv 0$ 在 $[-1,0]$上。现在，假设对于某个 $\varepsilon > 0$，存在满足 $g(x) \geq f(x)$、$x \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ 的 $g \in C^{r+1}$，且 $g^{(i)}(0) = f^{(i)}(0) = 0$, $0 \leq i \leq \tilde{r}$。那么，由于$\tilde{r} \geq r-1$,

$$g(x) - f(x) \;=\; \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1}\left[g^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right] dt.$$

如果 r 是偶数，那么 $\tilde{r} = r$，因此 $g^{(r)}(0) = 0$；现在我们将证明，当 r 是奇数时，这个等式也成立。事实上，对于 $-\varepsilon < x < 0$,

$$0 \leq g(x) - f(x) = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\int_x^0 (t-x)^{r-1} g^{(r)}(t)dt,$$

因此，由 $g^{(r)}$的连续性可知，我们必有 $(-1)^r g^{(r)}(0) \geq 0$。类似地，由于 $g \geq f$ 在 $(0,\varepsilon)$ 上，我们应有 $g^{(r)}(0) \geq f^{(r)}(0) = 0$。因此，如果 r 是奇数，这意味着 $g^{(r)}(0) = 0$。

因此，对于 $x > 0$，有

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) \;&=\; \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1}\left[g^{(r)}(t) + t\ln t\right] dt \\ &=\; \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1}\int_0^t \left(g^{(r+1)}(u) + \ln u + 1\right) du\, dt. \end{aligned} \tag{3.1}$$

由于 $g \in C^{r+1}$ 且 $\lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$，存在 $\delta > 0$ 使得 $g^{(r+1)}(u) + \ln u + 1 < 0$，对所有 $0 < u < \delta$均成立。因此，对于 $0 < x < \delta$， $g(x) - f(x) < 0$，这与矛盾相矛盾。

如果 λ 是 I的一个端点，那么上述证明无需任何改动即可成立（例如，可以考虑 $[0,1]$ 而非 I，$\lambda = 0$然后利用（3.1）得出矛盾）。 □

同样的证明可用于验证以下引理的有效性。该引理用于涉及在 Y_s 处进行埃尔米特插值的否定性结果。

引理 3.2（在 Y_s 处带插值的局部交织逼近：对于带有 $r \geq 1$ 的 $f \in C^r$ 的否定性结果）。设 $r \in \mathbb{N}$，并假设 $\lambda \in (-1, 1)$。那么存在一个函数 $f \in C^r$，使得 $f \equiv 0$ 在 $[-1, \lambda]$ 上成立，并且

$$\mathcal{I}^{(\hat{r})}(f, \{\lambda\}) \cap \left\{ g \in C^{r+1} \;\middle|\; g \leq f \text{ on } (\lambda - \varepsilon, \lambda], \text{ and } g \geq f \text{ on } [\lambda, \lambda + \varepsilon), \text{ for some } \varepsilon > 0 \right\} = \emptyset,$$

其中

$$\hat{r} := 2\lceil r/2 \rceil - 1 = \begin{cases} r\,, & \text{if } r \text{ is odd,} \\ r - 1\,, & \text{if } r \text{ is even.} \end{cases}$$

我们指出，在不属于引理3.1和3.2所述情形的所有情况下，都可以进行带插值约束的单侧/交织多项式逼近（见定理2.1 和2.2）。

请注意，在引理 $f \equiv 0$ 中关于 $[-1, \lambda]$ 这一性质的陈述中3.1 （如果 λ 是 I的一个内部点）以及引理3.2 之所以包含这一性质，唯一的原因是为了说明：如果假设 f 属于 $\Delta^{(0)}(Y_s$类（其中 $y_1 \leq \lambda$），那么这些引理仍然成立。特别是，这对于第1.2节中的说明性例子尤为重要。

3.2 带插值约束的正与共正逼近

以下是本文中第一个为多项式插值约束逼近提供否定性结果的引理。尽管从某种意义上说，它不如后面的引理3.4 一般，但其证明相当简单，阐释了下文更复杂的否定性结果证明中所采用的主要思想，同时省略了其中所需的技术细节。

引理 3.3（带插值约束的正逼近：关于 $f \in C$ 的否定性结果）。对于任意 $n \in \mathbb{N}$、 $A > 0$ 和 $\lambda \in I$，存在一个在 I 上非负的 $f \in C$，使得对于任意在 I 上非负且满足 $P_n(\lambda) = f(\lambda)$ 的多项式 $P_n \in \Pi_n$，我们有

$$\|f - P_n\| > A\omega_3(f, 1).$$

证明。令 $n \in \mathbb{N}$ 和 $A > 0$ 固定，不失一般性，假设 $\lambda \in [0, 1]$。现在令 $\varepsilon \in (0, \lambda/2)$，并选取 $f(x) := \max\{(x - \lambda)(x - \lambda + \varepsilon)/\varepsilon^2,\ 0\}$ 并假设 $P_n \in \Pi_n$ 在 I 上非负，满足 $P_n(\lambda) = f(\lambda) = 0$（这必然意味着 $P_n'(\lambda) \leq 0$，且当 $\lambda \neq 1$时，实际上 $P_n'(\lambda) = 0$），并且使得 $\|f - P_n\| \leq A\omega_3(f, 1)$。若 $Q(x) := (x - \lambda)(x - \lambda + \varepsilon)/\varepsilon^2$，则 $\|f - Q\| = \|Q\|_{[\lambda-\varepsilon,\lambda]} = 1/4$ 且

$$\omega_3(f, 1) = \omega_3(f - Q, 1) \leq 8\|f - Q\| = 2.$$

因此，

$$\|P_n - Q\| \le \|P_n - f\| + \|f - Q\| \le 2A + 1/4,$$

因此，根据马尔可夫不等式，

$$1/\varepsilon = Q'(\lambda) \le Q'(\lambda) - P_n'(\lambda) \le \|Q' - P_n'\| \le (2A + 1/4)(\max\{n, 2\})^2.$$

现在，通过令 $\varepsilon \to 0^+$，我们便得到了一个矛盾。 □

引理 3.4（带插值约束的共正逼近：关于 $f \in C$ 的否定结果）。对于任意 $A > 1$、$\lambda \in [0, 1]$、$n_0 \in \mathbb{N}$，以及任意收敛于 0 的正数列 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$，存在 $n \in \mathbb{N}$、$n \ge n_0$ 和 $f = f_n \in C$，使得 $f \ge 0$ 在 I，$f \equiv 0$ 在 $[-1, -1/2]$，并且对于任意在 λ 的某个非空邻域内为非负且满足 $P_n(\lambda) = f(\lambda)$ 的多项式 $P_n \in \Pi_n$，我们有

$$\left\| \frac{f - P_n}{\omega_3(f, \rho_n)} \right\| > A\,\alpha_n\sqrt{n}.$$

证明。回想一下，经典的“粘合函数”是

$$\widetilde{G}(x) := \widetilde{G}(x; [a, b]) := \frac{G(x; [a, b])}{G(1; [a, b])}, \quad \text{where} \quad G(x; [a, b]) := \int_{-1}^{x} g(t; (a + b)/2, (b - a)/2)\, dt,$$

$$g(x; x_0, d) := \begin{cases} \exp(d^2/((x - x_0)^2 - d^2)), & x \in (x_0 - d, x_0 + d), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$和 $[a, b] \subset [-1, 1]$。那么，若 $x \le a$，则 $G \in C^\infty$, $G(x) = 0$；若 $x \ge b$，则 $G(x) = 1$；若$a \le x \le b$，则 $0 \le G(x) \le 1$。

现在，令 $\varepsilon := \rho_n^{3/2}(\lambda)$，$Q(x) := (x - \lambda)(x - \lambda + \varepsilon)$，并定义

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [\lambda - \varepsilon, \lambda], \\ Q(x), & x \in [-1/4, 1] \setminus [\lambda - \varepsilon, \lambda], \\ Q(x)\,\widetilde{G}(x; [-1/2, -1/4]), & x \in (-1/2, -1/4), \\ 0, & x \in [-1, -1/2]. \end{cases}$$

（这里，我们假设 n 足够大，从而一切都有定义。）

现在假设 $P_n \in \Pi_n$ 在 λ附近非负，满足 $P_n(\lambda) = f(\lambda) = 0$（这必然意味着 $P_n'(\lambda) \le 0$，并且如果 $\lambda \ne 1$，实际上 $P_n'(\lambda) = 0$），且使得 $|f(x) - P_n(x)| \le A\alpha_n\sqrt{n}\,\omega_3(f, \rho_n(x))$，$x \in I$。

显然，$f \in C^\infty[-1, -1/8]$，且不难看出，对于某个绝对常数 c_0，有 $\left\|f^{(3)}\right\|_{[-1,-1/8]} \le c_0$（假设 $c_0 \ge 2$ 会比较方便）。因此，

$$\omega_3(f, t; [-1, -1/8]) \le t^3 \left\|f^{(3)}\right\|_{[-1,-1/8]} \le c_0 t^3, \quad t > 0.$$

由于

$$\|f - Q\|_{[-1/4,1]} = \|Q\|_{[\lambda-\varepsilon,\lambda]} = \varepsilon^2/4,$$

我们还有

$$\omega_3(f,t;[-1/4,1]) = \omega_3(f-Q,t;[-1/4,1]) \le 8\,\|f-Q\|_{[-1/4,1]} = 2\varepsilon^2.$$

因此,

$$\omega_3(f,\rho_n(x)) \le c_0 \max\{\rho_n^3(x),\rho_n^3(\lambda)\}, \quad x\in I.$$

对于 $x\in[-1/4,1]$, 现在有

$$|P_n(x)-Q(x)| \le |P_n(x)-f(x)| + |f(x)-Q(x)| \le (c_0 A\alpha_n\sqrt{n}+1)\max\{\rho_n^3(x),\rho_n^3(\lambda)\}. \tag{3.2}$$

现在我们考虑两种情况。

情况 1: $\lambda<1$
由于 $\rho_n(x)\le 2n^{-1}$, $x\in I$, 利用 (3.2) 以及在 $[-1/4,1]$上的 Bernstein 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}(1-\lambda^2)^{3/4}n^{-3/2} \le \varepsilon = Q'(\lambda) &= |Q'(\lambda)-P_n'(\lambda)| \le (1-\lambda)^{-1/2}(\lambda+1/4)^{-1/2}n\,\|Q-P_n\|_{[-1/4,1]}\\ &\le 16(1-\lambda)^{-1/2}n^{-2}\left(c_0A\alpha_n\sqrt{n}+1\right),\end{aligned}$$

当 n 足够大时, 我们便得到矛盾。

情形 2: $\lambda=1$
我们需要 以下 Dzyadyk 不等式 (例如参见 [3, 第 386] 页或 [8, 引理 2.5]) :

若 $m\in\mathbb{N}$、 $x_0\in I$、 $R_n\in\Pi_n$, 并且

$$|R_n(x)| \le (|x-x_0|+\rho_n(x))^m, \quad x\in I,$$

then

$$|R_n'(x_0)| \le c(m)\rho_n^{m-1}(x_0).$$

我们将此结果应用于 $m=3$、 $x_0=\lambda=1$ 和 $R_n=B^{-1}(P_n-Q)$, 其中 $B:=c_0A\alpha_n\sqrt{n}+1$。
假设我们已验证

$$|P_n(x)-Q(x)| \le B(|x-1|+\rho_n(x))^3, \quad x\in I. \tag{3.3}$$

那么, 根据 Dzyadyk不等式,

$$n^{-3}=\varepsilon=Q'(1)\le Q'(1)-P_n'(1)\le cB\rho_n^2(1)=c(c_0A\alpha_n\sqrt{n}+1)n^{-4},$$

取足够大的 n, 便得到矛盾。
还需验证 (3.3)。注意, (3.3) 可由 (3.2) 立即推出, 当 $x\in[-1/4,1]$且当 $x\in[-1,-1/4]$时, 我们有

$$|Q(x)| \le x(x-1) \le (1-x)^3,$$

因此

$$\begin{aligned}|P_n(x)-Q(x)| &\le |P_n(x)-f(x)|+|f(x)-Q(x)| \le |P_n(x)-f(x)|+|Q(x)|\\ &\le c_0A\alpha_n\sqrt{n}\rho_n^3(x)+|x-1|^3 \le B(|x-1|+\rho_n(x))^3.\end{aligned}$$

证明现已完成。 □

引理 3.5（带插值约束的余正逼近：关于 $f \in C^1$ 和 $\lambda \neq 1$ 的否定结果）。对于任意 $A > 1$、$\lambda \in [0,1$、 $n_0 \in \mathbb{N}$，以及任意收敛于 0 的正数列 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$，存在 $n \in \mathbb{N}$、 $n \geq n_0$ 和 $f = f_n \in C^1$，使得 $f \geq 0$ 在 I 上、$f \equiv 0$ 在 $[-1,-1/2]$ 上成立，并且对于任意在（$\lambda-1/n$、$\lambda+1/n$）上非负且满足 $P_n(\lambda) = f(\lambda)$ 的多项式 $P_n \in \Pi_n$，我们有

$$\|f - P_n\| > A\,\alpha_n n^{-2/3}\omega_4(f', n^{-1}). \tag{3.4}$$

我们注意到，不等式（3.4）蕴含

$$\left\| \frac{f - P_n}{\rho_n \omega_4(f', \rho_n)} \right\| > cA\,\alpha_n n^{1/3},$$

其中 $c > 0$ 是某个绝对常数。此外，注意到，如果 $\lambda = 1$，即如果插值发生在 I 的端点处（参见定理 2.3，其中（r， k， m_1， m_2， m_3） = （1， k， -1， 0， 0）），则该引理的结论不再成立。

引理 *3.5* 的证明。设 $n \geq 25(1-\lambda)^{-1}$，令 $\varepsilon := n^{-4/3}$ 并定义

$$g(x) := \begin{cases} Q(x), & \text{if } x < \lambda, \\ 0, & \text{if } \lambda \leq x \leq \lambda + \varepsilon, \\ Q(x) + \varepsilon^4, & \text{if } x \geq \lambda + \varepsilon. \end{cases}$$

其中 $Q(x) := 3(x-\lambda)^4 - 4\varepsilon(x-\lambda)^3$。注意到 $g \in C^1$ 和

$$g'(x) = \begin{cases} Q'(x), & \text{if } x < \lambda \text{ or } x > \lambda + \varepsilon, \\ 0, & \text{if } \lambda \leq x \leq \lambda + \varepsilon, \end{cases}$$

其中 $Q'(x) = 12(x-\lambda)^2(x-\lambda-\varepsilon)$。

现在，定义

$$f(x) := \begin{cases} g(x), & x \in [-1/4, 1], \\ g(x)\,\widetilde{G}(x; [-1/2, -1/4]), & x \in (-1/2, -1/4), \\ 0, & x \in [-1, -1/2], \end{cases}$$

~其中 G 是引理 3.4证明中的粘合函数。

假设 $P_n \in \Pi_n$ 在 $(\lambda - 1/n, \lambda + 1/n)$ 上非负，满足 $P_n(\lambda) = f(\lambda) = 0$(这必然意味着 $P_n'(\lambda) = 0$)，并且使得 $\|f - P_n\| \leq A\alpha_n n^{-2/3}\,\omega_4(f', 1/n)$。

显然， $f \in C^\infty[-1,-1/8]$，并且不难看出，对于某个绝对常数 $c_0 \geq 32$， $\left\|f^{(5)}\right\|_{[-1,-1/8]} \leq c_0$。因此，

$$\omega_4(f', n^{-1}; [-1,-1/8]) \leq n^{-4}\left\|f^{(5)}\right\|_{[-1,-1/8]} \leq c_0 n^{-4}.$$

由于

$$\|f' - Q'\|_{[-1/4,1]} = \|Q'\|_{[\lambda,\lambda+\varepsilon]} \leq 2\varepsilon^3,$$

我们还有

$$\omega_4(f', n^{-1}; [-1/4, 1]) = \omega_4(f' - Q', n^{-1}; [-1/4, 1]) \le 16 \|f' - Q'\|_{[-1/4,1]} \le 32\varepsilon^3.$$

因此,

$$\omega_4(f', n^{-1}) \le \max\{c_0 n^{-4}, 32\varepsilon^3\} = c_0 n^{-4},$$

所以

$$\begin{aligned}\|P_n - Q\|_{[-1/4,1]} &\le \|P_n - f\|_{[-1/4,1]} + \|g - Q\|_{[-1/4,1]} \\ &\le A\alpha_n n^{-2/3}\, \omega_4(f', 1/n) + \max\left\{\varepsilon^4, \|Q\|_{[\lambda,\lambda+\varepsilon]}\right\} \\ &\le n^{-14/3}\left(c_0 A\alpha_n + n^{-2/3}\right).\end{aligned}$$

由 $[-1/4, 1]$ 上的马尔可夫–伯恩斯坦不等式,

$$\|P_n'' - Q''\|_{[\lambda,\lambda+\varepsilon]} \le c(1-\lambda)^{-1} n^{-8/3}\left(c_0 A\alpha_n + n^{-2/3}\right),$$

并考虑到 $P_n(\lambda+\varepsilon) \ge 0$ 和 $P_n^{(i)}(\lambda) = Q^{(i)}(\lambda) = 0, i = 0, 1$, 我们有

$$\begin{aligned}1 &\le \varepsilon^{-4}\left[P_n(\lambda+\varepsilon) - Q(\lambda+\varepsilon)\right] = \varepsilon^{-4}\int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} (\lambda+\varepsilon-t)\left[P_n''(t) - Q''(t)\right] dt \\ &\le c\varepsilon^{-2}(1-\lambda)^{-1} n^{-8/3}\left(c_0 A\alpha_n + n^{-2/3}\right) \\ &\le c(1-\lambda)^{-1}\left(c_0 A\alpha_n + n^{-2/3}\right),\end{aligned}$$

取足够大的 n , 便可得到矛盾。 □

引理 3.6（带插值约束的共正逼近: $f \in C^r$ 为偶数时的否定结果）。若 $r \ge 2$ 为偶数, 则对于任意 $n \ge r$、 $A > 0$ 和 $\lambda \in [0, 1]$, 存在 $f \in C^r$, 它在 I 上非负, 在 $[-1, -1/2]$ 上恒等于 0, 并且对于任意在 $(\lambda - 1/n, \lambda)$ 上非负且满足 $P_{(i)\,n}(\lambda) = f^{(i)}(\lambda)$, $0 \le i \le r$ 的多项式 $P_n \in \Pi_n$, 我们有

$$\|f - P_n\| > A\left\|f^{(r)}\right\|. \tag{3.5}$$

证明。设 $n \ge r$ 和 $A \ge 1$ 为固定值, 并将 $f \in C^r$ 定义为

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{\lambda-\varepsilon}^{x} (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt,$$

其中

$$f^{(r)}(x) := \begin{cases} 0, & \text{if } x \le \lambda - \varepsilon \text{ or } x \ge \lambda, \\ -(x-\lambda)(x-\lambda+\varepsilon)/\varepsilon^2, & \text{if } \lambda - \varepsilon < x < \lambda, \end{cases}$$

以及 $\varepsilon \in (0, 1/(2n))$。然后, $f \equiv 0$ 在 $[-1, \lambda-\varepsilon]$上, $f \uparrow$ 在 $[\lambda-\varepsilon, 1]$ 上（因此 f在I上是非负的）, $\left\|f^{(r)}\right\| = 1/4$ 并且, 对于 $x \ge \lambda$,

$$f(x) = Q(x) := \frac{1}{(r-1)!}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda} (x-t)^{r-1}(\lambda-t)(t-\lambda+\varepsilon) dt. \tag{3.6}$$

注意， Q 是一个次数为 $\leq r-1$ 的多项式，并且

$$Q(\lambda-\varepsilon)=\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda}(t-\lambda+\varepsilon)^r(\lambda-t)dt=(-1)^{r-1}\frac{r}{(r+2)!}\varepsilon^r.$$

现在，假设 $P_n\in\Pi_n$ 满足 $P_n\geq 0$ 在 $(\lambda-1/n,\lambda)$ 上， $P_{(i)_n}(\lambda)=f^{(i)}(\lambda)=Q^{(i)}(\lambda)$, $0\leq i\leq r$，且 $\|f-P_n\|\leq A\left\|f^{(r)}\right\|=A/4$。因此，

$$\|P_n\|_{[-1,\lambda]}\leq\|P_n-f\|_{[-1,\lambda]}+\|f\|_{[-1,\lambda]}\leq A\left\|f^{(r)}\right\|+\|f\|_{[\lambda-\varepsilon,\lambda]}\leq(A+\varepsilon^r/r!)\left\|f^{(r)}\right\|\leq A.$$

现在，根据马尔可夫不等式，

$$\left\|P_n^{(r+1)}\right\|_{[-1,\lambda]}\leq\left(\frac{2n^2}{\lambda+1}\right)^{r+1}\|P_n\|_{[-1,\lambda]}\leq(2n^2)^{r+1}A,$$

因此，由于 $Q^{(r+1)}\equiv 0$ 和 r 是偶数，

$$\begin{aligned}\frac{r}{(r+2)!}\varepsilon^r&=-Q(\lambda-\varepsilon)\leq P_n(\lambda-\varepsilon)-Q(\lambda-\varepsilon)\\&=\frac{1}{r!}\int_{\lambda}^{\lambda-\varepsilon}(\lambda-\varepsilon-t)^r\left(P_n^{(r+1)}(t)-Q^{(r+1)}(t)\right)dt\\&\leq\frac{1}{(r+1)!}\varepsilon^{r+1}\left\|P_n^{(r+1)}\right\|_{[\lambda-\varepsilon,\lambda]}\leq\frac{(2n^2)^{r+1}A}{(r+1)!}\varepsilon^{r+1},\end{aligned}$$

并且在令 $\varepsilon\to 0^+$ 时，我们得到了矛盾。 □

注3.7。如果假设 $\lambda\in[0,1)$ 和 $P_n\in\Pi_n$ 满足例如 $P(i)_n(\lambda)=f^{(i)}(\lambda)$,$0\leq i\leq r-1$，且 $P_n(\lambda+\varepsilon)=f(\lambda+\varepsilon)$，那么同样的证明可以用来说明估计 (3.5) 成立，其中 $P_n\geq 0$ on $(\lambda-1/n,\lambda)$。特别地，这意味着定理2.3和定理2.4（因而也包括定理 2.1 和定理 2.2）中的常数 $c(d(A_p))$ 不能与 A_p 中各点之间的最小距离无关。

引理 3.8（带插值约束的共正逼近： $f\in C^r$ 具有奇数 $r\geq 3$ 时的否定性结果）。如果 $r\geq 3$ 是奇数，那么对于任意 $n\geq r-1$ 和 $A>0$，存在 $f\in C^r$，其在 $[-1,-1/2]$ 上恒等于 0，在 I 上非负，并且对于任意在 $[-1/2,1/2]$ 上非负的多项式 $P_n\in\Pi_n$，满足 $P_{(i)_n}(0)=f^{(i)}(0)$， $0\leq i\leq r-1$，我们有

$$\|f-P_n\|>A\left\|f^{(r)}\right\|.$$

我们注意到，如果要求 P_n 在 $[-1/2,1]$ 上非负且 $P(i)_n(1)=f^{(i)}(1)$，则该引理的类似结果并不成立（即，如果$A_p=\{\pm 1\}$，这一否定性结果不成立），例如参见定理 2.3，其中 $(r,k,m_1,m_2,m_3)=(2j+1,k,2j-1,2j,2j)$， $j\in\mathbb{N}$。

证明。设 $n\geq r-1$ 和 $A>0$ 为固定值，并将 $f\in C^r$ 定义为

$$f(x)=\frac{1}{(r-2)!}\int_{-\varepsilon}^{x}(x-t)^{r-2}f^{(r-1)}(t)dt,$$

其中

$$f^{(r-1)}(x) := \begin{cases} 0, & \text{if } x < -\varepsilon \text{ or } x > 0, \\ x^2(x+\varepsilon)^2/\varepsilon^3, & \text{if } -\varepsilon \le x \le 0, \end{cases}$$

且 $\varepsilon \in (0, 1/2)$成立。于是， $\left\|f^{(r)}\right\| \le 1$、 $f \equiv 0$ 在 $[-1, -\varepsilon]$上成立，并且 f显然在 I上非负。现在，对于 $x \ge 0$，我们有

$$f(x) = Q(x) := \frac{1}{(r-2)!} \cdot \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{-\varepsilon}^{0} (x-t)^{r-2} t^2 (t+\varepsilon)^2 dt. \tag{3.7}$$

注意 $Q \in \Pi_{r-2}$,

$$\|Q\| \le \frac{2^{r-2}}{(r-2)!} \cdot \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{-\varepsilon}^{0} t^2 (t+\varepsilon)^2 dt \le \frac{2^{r-2}}{(r-2)!} \varepsilon^2 =: c_0 \varepsilon^2, \tag{3.8}$$

and

$$Q(-\varepsilon) = (-1)^r \frac{2(r^2-r)}{(r+3)!} \varepsilon^r =: -c_1 \varepsilon^r, \quad c_1 = c_1(r) > 0,$$

因为 r 是奇数。

假设存在一个在 $[-1/2, 1/2]$ 上非负的多项式 $P_n \in \Pi_n$， 满足$P_{(i)n}(0) = f^{(i)}(0) = Q^{(i)}(0)$， $0 \le i \le r-1$，并且使得

$$\|f - P_n\| \le A \left\|f^{(r)}\right\| \le A. \tag{3.9}$$

那么， P_n 可以写成

$$P_n(x) = Q(x) + a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \cdots + a_n x^n,$$

并考虑到

$$\|P_n - Q\|_{[0,1]} = \|P_n - f\|_{[0,1]} \le A,$$

根据马尔可夫不等式，我们得出

$$|a_i| = |P_n^{(i)}(0)|/i! = |P_n^{(i)}(0) - Q^{(i)}(0)|/i! \le K, \quad r \le i \le n,$$

其中常数 K 仅取决于 A、 r 和 n。

由于 $r+1$ 是偶数，对于任意 $x \in I$，我们有以下估计

$$\begin{aligned} 0 \le P_n(x) &\le Q(x) + a_r x^r + |x|^{r+1} \sum_{i=r+1}^{n} |a_i| |x|^{i-r-1} \\ &\le Q(x) + a_r x^r + B x^{r+1}, \end{aligned}$$

其中 $B := nK$。我们还注意到， a_r 满足 $|a_r| \le K < B$。

现在，令 $x_0 = -a_r/(2B)$。则， $x_0 \in (-1/2, 1/2)$ 并且

$$0 \le P_n(x_0) \le Q(x_0) + (-1)^r \frac{a_r^{r+1}}{2^{r+1} B^r} = Q(x_0) - \frac{a_r^{r+1}}{2^{r+1} B^r},$$

并且由（3.8）（注意， $r+1$ 是偶函数）

$$a_r^{r+1} \le 2^{r+1} B^r Q(x_0) \le c_0 2^{r+1} B^r \varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad |a_r| \le D\varepsilon^{2/(r+1)},$$

其中， D 是一个仅取决于 A、 r 和 n且与 ε无关的正常数。现在，我们有了

$$\begin{aligned} 0 \le P_n(-\varepsilon) &\le Q(-\varepsilon) + D\varepsilon^{2/(r+1)}\varepsilon^r + B\varepsilon^{r+1} \\ &= \varepsilon^r \left(-c_1 + O(\varepsilon^{2/(r+1)})\right) < 0 \quad \text{as } \varepsilon \to 0^+, \end{aligned}$$

这是一个矛盾。 □

以下引理填补了引理 3.8 中留下的一些空缺。它适用于 $r=1$ 的情形，也适用于证明在 I (即 $\lambda=1$ 的情形）端点处插值的否定性结果。然而，如果 $r \ge 3$ 且 $\lambda \ne 1$，那么这个引理弱于引理 3.8。

引理 3.9（带插值约束的共正逼近： $f \in C^r$ 为奇数时的否定结果）。如果 $r \in \mathbb{N}$ 是奇数，那么对于任意 $n \ge r$、 $A > 0$ 和 $\lambda \in [0,1]$，存在一个在 $[-1,-1/2]$ 上恒等于 0、在 I 上非负的 $f \in C^r$，并且对于任意在（$\lambda - 1/n$， λ）上非负的多项式 $P_n \in \Pi_n$，满足 $P_{(i)n}(\lambda) = f^{(i)}(\lambda)$， $0 \le i \le r$，我们有

$$\|f - P_n\| > A \left\|f^{(r)}\right\|.$$

证明。令 $n \ge r$ 和 $A \ge 1$ 为固定值，并定义 $f \in C^r$ 为

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{\lambda-\varepsilon}^{x} (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt,$$

其中

$$f^{(r)}(x) := \begin{cases} 0, & \text{if } x < \lambda - \varepsilon, \\ (x - \lambda + \varepsilon)/\varepsilon, & \text{if } \lambda - \varepsilon \le x \le \lambda, \\ 1, & \text{if } x > \lambda, \end{cases}$$

且 $\varepsilon \in (0, 1/(2n))$。注意， f 在 I上非负， $f \equiv 0$ 在 $[-1, \lambda-\varepsilon]$上非负， $\left\|f^{(r)}\right\| = 1$，并且对于$x \ge \lambda$,

$$f(x) = Q(x) := \frac{1}{(r+1)!} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left[(x - \lambda + \varepsilon)^{r+1} - (x-\lambda)^{r+1}\right].$$

现在，假设 $P_n \in \Pi_n$ 满足：在 $(\lambda - 1/n, \lambda)$ 上 $P_n \ge 0$， $P_{(i)n}(\lambda) = f^{(i)}(\lambda) = Q^{(i)}(\lambda)$, $0 \le i \le r$， 且 $\|f - P_n\| \le A \left\|f^{(r)}\right\| = A$。那么，

$$\|P_n\|_{[-1,\lambda]} \le \|P_n - f\|_{[-1,\lambda]} + \|f\|_{[-1,\lambda]} \le A \left\|f^{(r)}\right\| + \|f\|_{[\lambda-\varepsilon,\lambda]} \le (A + \varepsilon^r/r!) \left\|f^{(r)}\right\| \le 2A.$$

现在，根据马尔可夫不等式,

$$\left\|P_n^{(r+1)}\right\|_{[-1,\lambda]} \le \left(\frac{2n^2}{\lambda+1}\right)^{r+1} \|P_n\|_{[-1,\lambda]} \le 2(2n^2)^{r+1} A,$$

因此，由于 $Q^{(r+1)} \equiv 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(r+1)!}\varepsilon^r &= -Q(\lambda-\varepsilon) \le P_n(\lambda-\varepsilon) - Q(\lambda-\varepsilon)\\ &= \frac{1}{r!}\int_{\lambda}^{\lambda-\varepsilon} (\lambda-\varepsilon-t)^r \left(P_n^{(r+1)}(t) - Q^{(r+1)}(t)\right) dt\\ &\le \frac{1}{(r+1)!}\varepsilon^{r+1}\left\|P_n^{(r+1)}\right\|_{[\lambda-\varepsilon,\lambda]} \le \frac{2(2n^2)^{r+1}A}{(r+1)!}\varepsilon^{r+1},\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，便得到矛盾。 □

3.3 在 Y_s 中的点处进行插值的共正逼近的否定性结果

引理 3.10（在 Y_s 处进行插值的共正逼近：关于 $f \in C^1$ 和 $Y_s = \{0\}$ 的否定性结果）。对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $A > 0$，存在 $f \in C^1 \cap \Delta^{(0)}(\{0\})$，使得对于任意多项式 $P_n \in \Pi_n$，若其在 $(0, 1/n)$ 上满足 $P_n \ge 0$，且满足 $P_{(i)n}(0) = f^{(i)}(0), i = 0, 1$，则有

$$\|f - P_n\| > A\omega_3(f', 1).$$

证明。固定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $A > 0$ （不失一般性，可假设 $n \ge 3$），并定义 $f \in C^1$ 为

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt, \quad \text{where } f'(x) := \begin{cases} x(x-\varepsilon)/\varepsilon^2, & \text{if } x < 0 \text{ or } x > \varepsilon,\\ 0, & \text{if } 0 \le x \le \varepsilon,\end{cases}$$

以及 $\varepsilon \in (0, 1/(2n))$。注意到 $f \in \Delta^{(0)}(\{0\})$，$f^{(i)}(0) = 0$, $i = 0, 1$，并记 $q(x) := x(x-\varepsilon)/\varepsilon^2$，则有

$$\omega_3(f', 1) = \omega_3(f' - q, 1) \le 8\|f' - q\| = 8\|q\|_{[0,\varepsilon]} = 2.$$

那么，对于 $x \le 0$，我们有

$$f(x) = Q(x) := (2x^3 - 3\varepsilon x^2)/(6\varepsilon^2).$$

假设 $P_n \in \Pi_n$ 在 $(0, 1/n)$ 上非负，满足 $P_{(i)n}(0) = f^{(i)}(0) = Q^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1$，并且

$$\|f - P_n\| \le A\omega_3(f', 1) \le 2A. \tag{3.10}$$

考虑到

$$\|P_n - Q\|_{[-1,\varepsilon]} \le \|P_n - f\|_{[-1,\varepsilon]} + \|f - Q\|_{[-1,\varepsilon]} \le \|P_n - f\| + \|f - Q\|_{[0,\varepsilon]} \le 2A + 1,$$

根据马尔可夫不等式，我们得出

$$\|P_n'' - Q''\|_{[-1,\varepsilon]} \le \left(\frac{2n^2}{\varepsilon+1}\right)^2 \|P_n - Q\|_{[-1,\varepsilon]} \le 4n^4(2A+1).$$

Now,

$$\varepsilon/6 = -Q(\varepsilon) \le P_n(\varepsilon) - Q(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} (\varepsilon - t)\left(P_n''(t) - Q''(t)\right) dt \le 2n^4(2A+1)\varepsilon^2,$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，便得到矛盾。 □

引理 3.11（在 Y_s 处插值的共正逼近：对 $f \in C^2$ 和 $Y_s = \{0\}$ 的否定性结果）。对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $A > 0$，存在 $f \in C^2 \cap \Delta^{(0)}(\{0\})$，使得对于任意多项式 $P_n \in \Pi_n \cap \Delta^{(0)}(\{0\})$，只要满足 $P_n^{(i)}(0) = f^{(i)}(0)$，$i = 0, 1$，就有

$$\|f - P_n\| > A\omega_4(f'', 1).$$

证明。固定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $A > 0$（不失一般性，设 $n \ge 5$），并定义 $f \in C^2$ 为

$$f(x) = \int_0^x (x-t)f''(t)dt, \quad \text{where } f''(x) := \begin{cases} x(x^2-\varepsilon^2)/\varepsilon^3, & \text{if } |x| > \varepsilon, \\ 0, & \text{if } |x| \le \varepsilon, \end{cases}$$

且 $\varepsilon \in (0, 1/2)$。注意 $f \in \Delta^{(0)}(\{0\})$，$f^{(i)}(0) = 0$，$i = 0, 1$，并记 $q(x) := x(x^2-\varepsilon^2)/\varepsilon^3$，则有

$$\omega_4(f'', 1) = \omega_4(f'' - q, 1) \le 16\|f'' - q\| = 16\|q\|_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \le 7.$$

那么，对于 $x \ge \varepsilon$，我们有

$$f(x) = Q(x) := \int_{\varepsilon}^x (x-t)q(t)dt.$$

假设 $P_n \in \Pi_n \cap \Delta^{(0)}(\{0\})$ 满足 $P_n^{(i)}(0) = f^{(i)}(0) = 0$，$i = 0, 1$，并且使得 t

$$\|f - P_n\| \le A\omega_4(f'', 1) \le 7A.$$

考虑到

$$\|P_n - Q\|_{[0,1]} \le \|P_n - f\|_{[0,1]} + \|f - Q\|_{[0,1]} \le \|P_n - f\| + \|Q\|_{[0,\varepsilon]} \le 7A + 1,$$

根据马尔可夫不等式，我们得出

$$\|P_n''' - Q'''\|_{[0,1]} \le \left(2n^2\right)^3 \|P_n - Q\|_{[0,1]} \le 8n^6(7A+1).$$

由于 $P_n \in \Delta^{(0)}(\{0\})$ 且 $P_n(0) = P_n'(0) = 0$，我们有 $P_n''(0) = 0$ 且 $P_n'''(0) \ge 0$。因此，

$$1/\varepsilon = -q'(0) = -Q'''(0) \le P_n'''(0) - Q'''(0) \le 8n^6(7A+1),$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，便得到一个矛盾。 □

引理 3.12（在 Y_s 处带插值的共正逼近：$f \in C^2$ 和 $Y_s = \{0\}$ 的否定性结果）。对于任意 $n \ge 2$ 和 $A > 0$，存在 $f \in C^2 \cap \Delta^{(0)}(\{0\})$，使得对于任意满足 $P_n^{(i)}(0) = f^{(i)}(0)$，$0 \le i \le 2$ 的多项式 $P_n \in \Pi_n \cap \Delta^{(0)}(\{0\})$，我们有

$$\|f - P_n\| > A\|f''\|.$$

证明。令 $n \geq 2$ 和 $A \geq 1$ 固定，并定义 $f \in C^2$ 为

$$f(x) = \int_0^x \int_\varepsilon^t f''(u)dudt, \quad \text{where } f''(x) := \begin{cases} -1, & \text{if } x < 0, \\ 0, & \text{if } x > \varepsilon, \\ x/\varepsilon - 1, & \text{if } 0 \leq x \leq \varepsilon, \end{cases}$$

以及 $\varepsilon \in (0, 1/2)$。注意， $f \in \Delta^{(0)}(\{0\})$、 $\|f''\| = 1$ 以及对于 $x \leq 0$,

$$f(x) = Q(x) := -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\varepsilon x.$$

假设 $P_n \in \Pi_n \cap \Delta^{(0)}(\{0\})$ 满足 $P_{(i)_n}(0) = f^{(i)}(0) = Q^{(i)}(0)$， $0 \leq i \leq 2$，并且满足

$$\|f - P_n\| \leq A \|f''\| = A.$$

那么，

$$P_n(x) = Q(x) + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n,$$

并且由于

$$\|P_n - Q\|_{[-1,0]} = \|P_n - f\|_{[-1,0]} \leq A,$$

根据马尔可夫不等式，我们得出

$$|a_i| = |P_n^{(i)}(0) - Q^{(i)}(0)|/i! \leq K, \quad 3 \leq i \leq n,$$

其中常数 K 仅取决于 A和 n。因此，

$$0 \leq P_n(2\varepsilon) \leq Q(2\varepsilon) + nK(2\varepsilon)^3 = \varepsilon^2(-1 + 8nK\varepsilon) < 0 \quad \text{as } \varepsilon \to 0^+,$$

这就产生了矛盾。 □

引理 3.13（在 Y_s 处带插值的共正逼近：对于奇数 $r \geq 3$ 和 $Y_s = \{0\}$ 的 $f \in C^r$ 否定性结果）。若 $r \geq 3$ 为奇数，则对于任意 $n \geq r$ 和 $A > 0$，存在 $f \in C^r \cap \Delta^{(0)}(\{0\})$，使得对于任意满足 $P_n \leq 0$ 在 $(-1/n, 0)$ 上成立且满足 $P_{(i)_n}(0) = f^{(i)}(0)$ 的多项式 $P_n \in \Pi_n$，我们有 $0 \leq i \leq r$,

$$\|f - P_n\| > A \left\|f^{(r)}\right\|. \tag{3.11}$$

证明。令 $n \geq r$ 和 $A \geq 1$ 为固定值，并令 f 和 Q 与引理 3.6的证明中相同，且 $\lambda = 0$ （不过 r 现在为奇数）。那么，对于 $x \geq 0$ （见（3.6））,

$$f(x) = Q(x) := \frac{1}{(r-1)!} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\varepsilon}^0 (x-t)^{r-1}(-t)(t+\varepsilon)dt.$$

注意， $Q(0) = r\varepsilon^r/(r+2)!$ 并且

$$Q(-2\varepsilon) = \frac{1}{(r-1)!} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon (2\varepsilon - t)^{r-1}t(\varepsilon - t)dt = \frac{1}{(r+2)!}\left(2^{r+1}(r-2) + r + 4\right)\varepsilon^r.$$

现在，定义

$$\widetilde{f}(x) := f(x) - Q(0) \quad \text{and} \quad \widetilde{Q}(x) := Q(x) - Q(0).$$

那么，$\widetilde{f} \in C^r \cap \Delta^{(0)}(\{0\})$，现在我们假设 $P_n \in \Pi_n$ 满足 $P_n \le 0$ 在 $(-1/n, 0)$ 上，$P_{(i)n}(0) = \widetilde{f}^{(i)}(0) = \widetilde{Q}^{(i)}(0)$，$0 \le i \le r$，且 $\left\|\widetilde{f} - P_n\right\| \le A \left\|\widetilde{f}^{(r)}\right\| = A/4^\circ$ 与引理 3.6 的证明一样，

$$\|P_n\|_{[-1,0]} \le \left\|P_n - \widetilde{f}\right\|_{[-1,0]} + \left\|\widetilde{f}\right\|_{[-1,0]} \le A \left\|\widetilde{f}^{(r)}\right\| + \|f\|_{[-\varepsilon,0]} + |Q(0)| \le A,$$

由马尔可夫不等式，

$$\left\|P_n^{(r+1)}\right\|_{[-1,0]} \le \left(2n^2\right)^{r+1} \|P_n\|_{[-1,0]} \le (2n^2)^{r+1} A.$$

最后，由于 $\widetilde{Q}^{(r+1)} \equiv 0$ 和 $P_n(-2\varepsilon) \le 0$，

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(r+2)!}\varepsilon^r &\le Q(-2\varepsilon) - Q(0) = \widetilde{Q}(-2\varepsilon) \le \widetilde{Q}(-2\varepsilon) - P_n(-2\varepsilon) \\
&= \frac{1}{r!}\int_0^{-2\varepsilon} (-2\varepsilon - t)^r \left(\widetilde{Q}^{(r+1)}(t) - P_n^{(r+1)}(t)\right) dt \\
&\le \frac{1}{(r+1)!}(2\varepsilon)^{r+1} \left\|P_n^{(r+1)}\right\|_{[-2\varepsilon,0]} \le \frac{(4n^2)^{r+1} A}{(r+1)!}\varepsilon^{r+1},
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，便得到矛盾。 □

引理 3.14（在 Y_s 处带插值的共正逼近：关于$f \in C^r$ 的否定性结果，其中 $r \ge 4$ 为偶数且 $Y_s = \{0\}$）。若 $r \ge 4$ 为偶数，则对任意 $n \ge r-1$ 和 $A > 0$，存在 $f \in C^r \cap \Delta^{(0)}(\{0\})$，使得对任意满足$P_{(i)n}(0) = f^{(i)}(0)$，$0 \le i \le r-1$ 的多项式 $P_n \in \Pi_n \cap \Delta^{(0)}(\{0\})$，我们有

$$\|f - P_n\| > A \left\|f^{(r)}\right\|.$$

证明。设 $n \ge r$ 和 $A \ge 1$ 为固定值，并设 f 和 Q 与引理 3.8的证明中相同（但现在 r 也为偶数）。回顾（见（3.7））， 对于 $x \ge 0$,

$$f(x) = Q(x) := \frac{1}{(r-2)!} \cdot \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{-\varepsilon}^0 (x-t)^{r-2} t^2 (t+\varepsilon)^2 dt$$

并且，特别是,

$$f(0) = Q(0) = \frac{2(r^2-r)}{(r+3)!}\varepsilon^r = c_1\varepsilon^r.$$

定义

$$\widetilde{f}(x) := f(x) - Q(0) \quad \text{and} \quad \widetilde{Q}(x) := Q(x) - Q(0).$$

于是，$\widetilde{f} \in C^r \cap \Delta^{(0)}(\{0\})$、$\widetilde{Q} \in \Pi_{r-2}$，以及 (3.8) 蕴含

$$\left\|\widetilde{Q}\right\| \le \|Q\| + |Q(0)| \le c_0\varepsilon^2 + c_1\varepsilon^r \le (c_0 + c_1)\varepsilon^2.$$

现在假设 $P_n \in \Pi_n \cap \Delta^{(0)}(\{0\})$ 满足 $P_{(i)n}(0) = \widetilde{f}_{(i)}(0) = \widetilde{Q}^{(i)}(0)$、 $0 \le i \le r-1$，且 $\left\|\widetilde{f} - P_n\right\| \le A\left\|\widetilde{f}^{(r)}\right\| \le A$。如引理 3.8 的证明中所示，我们得出 P_n 可以写成

$$P_n(x) = \widetilde{Q}(x) + a_r x^r + a_{r+1}x^{r+1} + \cdots + a_n x^n,$$

其中

$$|a_i| \le K, \quad r \le i \le n,$$

其中常数 K 仅取决于 A、 r 和 n。这意味着

$$|P_n(x) - \widetilde{Q}(x) - a_r x^r| \le B|x|^{r+1}, \quad x \in I, \tag{3.12}$$

其中 $B = nK$。现在有

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}(-3\varepsilon) = Q(-3\varepsilon) - Q(0) &= \frac{1}{(r-2)!}\cdot\frac{1}{\varepsilon^3}\int_{-\varepsilon}^{0}\left[(3\varepsilon+t)^{r-2} - t^{r-2}\right]t^2(t+\varepsilon)^2 dt \\ &\ge \frac{2^{r-2}-1}{(r-2)!}\cdot\varepsilon^{r-5}\int_{-\varepsilon}^{0} t^2(t+\varepsilon)^2 dt = \frac{2^{r-2}-1}{30(r-2)!}\cdot\varepsilon^r =: c_2\varepsilon^r,\end{aligned}$$

并且，由于 $P_n(-3\varepsilon) \le 0$,

$$0 \le -P_n(-3\varepsilon) \le -\widetilde{Q}(-3\varepsilon) - a_r(-3\varepsilon)^r + B(3\varepsilon)^{r+1} \le \varepsilon^r\left(-c_2 - 3^r a_r + 3^{r+1}B\varepsilon\right). \tag{3.13}$$

如果 $a_r \ge 0$，那么令 $\varepsilon \to 0^+$ 即可立即得到矛盾。

现在假设 $a_r < 0$。于是， $x_0 = -a_r/(2B)$ 为正， $P_n(x_0) \ge 0$，因此（3.12）意味着

$$0 \le P_n(x_0) \le \widetilde{Q}(x_0) + a_r x_0^r + Bx_0^{r+1} = \widetilde{Q}(x_0) + (-1)^r\frac{a_r^{r+1}}{2^{r+1}B^r} = \widetilde{Q}(x_0) + \frac{a_r^{r+1}}{2^{r+1}B^r}.$$

因此,

$$-a_r^{r+1} \le 2^{r+1}B\widetilde{Q}(x_0) \le 2^{r+1}B(c_0+c_1)\varepsilon^2$$

并且，由于 $r+1$ 是奇数且 $a_r < 0$，我们有

$$|a_r| = -a_r \le \left[2^{r+1}B(c_0+c_1)\varepsilon^2\right]^{1/(r+1)}.$$

因此， （3.13）意味着

$$0 \le \varepsilon^r\left(-c_2 + O(\varepsilon^{2/(r+1)})\right) < 0 \quad \text{as } \varepsilon \to 0^+,$$

我们再次得出矛盾。 □

4 带插值约束的样条逼近

给定一组 q 点 $Y = \{v_j\}_{j=0}^{q-1}$，其中可能有重复项， $v_0 \le v_1 \le \cdots \le v_{q-1}$，我们回顾一下：对于每个 j, v_j 的重数 m_j 是满足 $v_i = v_j$的 v_i 的数量。此外，我们令 $v_i = v_j$ 中满足 $i \le j$的 l_j 的数量为 l_j。假设函数 f 在Y中的所有点处都有定义，并且对于每个 $v_j \in Y$， $f^{(l_j-1)}(v_j)$也有定义。换言之， f 具有 $m_j - 1$

在每个重数为 m_j的点处的导数。因此，存在唯一的拉格朗日-埃尔米特多项式 $L_{q-1}(\cdot;\ f, Y)$，其次数为 $\le q-1$，并满足

$$L_{q-1}^{(l_j-1)}(v_j; f, Y) = f^{(l_j-1)}(v_j), \quad \text{for all } \ 0 \le j \le q-1.$$

以下引理是经典 Whitney 定理的推广。它用于在引理 4.5 和 4.7附近的插值点处构造局部多项式片段。

引理 4.1（见 [9, 定理 5.2 和引理 3.1] 或 [8, 引理 1.12]）。设 $r \in \mathbb{N}_0$ 和 $q \in \mathbb{N}$满足 $q \ge r+1$, 并设集合 $V = \{v_j\}_{j=0}^{q-1} \subset [a,b]$ 满足：若 $q \ge r+2$, 则 $\Lambda_r(V) \ge \lambda(b-a)$, 其中 $0 < \lambda \le 1$ 和

$$\Lambda_r(V) := \min_{0 \le j \le q-r-2} (v_{j+r+1} - v_j), \qquad q \ge r+2.$$

（如果 $q = r+1$，则无需此条件。）如果 $f \in C^r[a,b]$，那么对所有 $x \in [a,b]$，

$$|f(x) - L_{q-1}(x; f, V)| \le c(q,\lambda)(b-a)^r \omega_{q-r}(f^{(r)}, b-a; [a,b]).$$

4.1 局部构造

引理 4.2（带插值约束的单边和交织逼近：$f \in C^r$、$r \ge 1$）。设 $r \in \mathbb{N}$、$f \in C^r[a,b]$ 和 $\lambda \in [a,b]$。则存在 $p := p(\cdot;\ f、k、r、\lambda) \in \Pi_{k+r-1}$，使得 $p^{(i)}(\lambda) = f^{(i)}(\lambda), \quad 0 \le i \le r-1,$

$$\|f - p\|_{[a,b]} \le c(b-a)^r \omega_k(f^{(r)}, b-a; [a,b]), \quad \textit{where } c = c(k,r), \tag{4.1}$$

and

(i) 若 $\lambda \in (a,b)$, 则 $p - f \ge 0$ 在 $[\lambda, b]$上，且 $(-1)^r(p-f)$ 在 ≥ 0 $[a,\lambda]$上,

(ii) 若 $\lambda = a$, 则 $p - f \ge 0$ 在 $[a,b]$上,

(iii) 若 $\lambda = b$, 则 $(-1)^r(p-f)$ 在 ≥ 0 $[a,b]$上。

证明。由于 $f^{(r)} \in C$，存在一个多项式 $q \in \Pi_{k-1}$ 使得

$$\left\|f^{(r)} - q\right\|_{[a,b]} \le c\omega_k(f^{(r)}, b-a; [a,b]) \quad \text{and} \quad q(x) \ge f^{(r)}(x),\ x \in [a,b].$$

现在我们定义

$$p(x) := \frac{1}{(r-1)!}\int_\lambda^x (x-t)^{r-1} q(t)dt + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(\lambda)(x-\lambda)^i$$

并注意到 $p^{(i)}(\lambda) = f^{(i)}(\lambda), \quad 0 \le i \le r-1,$ 以及

$$p(x) - f(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_\lambda^x (x-t)^{r-1} \left(q(t) - f^{(r)}(t)\right) dt, \quad x \in [a,b].$$

这立即推出（4.1），而 p 的所有其他性质也很容易验证。 □

引理 4.3（带插值约束的正逼近： $f \in C$）。设 $f \in C[a,b]$ 在 $[a,b]$上非负，且 $\lambda \in [a,b]$ 满足以下条件之一： λ 是 $[a,b]$的一个端点，或 $\min\{|a-\lambda|, |b-\lambda|\} \geq \gamma|b-a|$, $\gamma > 0$。那么，存在 $l \in \Pi_1$，使得 l 在 $[a,b]$上非负， $l(\lambda) = f(\lambda)$，并且

$$\|f - l\|_{[a,b]} \leq c\omega_2(f, b-a), \tag{4.2}$$

其中，如果 λ 是 $[a,b]$的端点，则 c 是一个绝对常数；否则为 $c = c(\gamma)$，当 $\lambda \in (a,b)$时。

证明。令 $l_1, l_2 \in \Pi_1$ 为线性多项式，分别在 a 和 λ处、以及在 λ 和 b处插值 f。于是，由 Whitney 不等式， $\|f - l_i\|_{[a,b]} \leq c\omega_2(f, b-a)$， $i = 1, 2$；若其中至少一个在 $[a,b]$上非负，则令 l 为该非负线性多项式（显然，当 λ 是 $[a,b]$的端点时，情况即如此）。否则， $l_1(b) < 0$ 且 $l_2(a) < 0$，因此

$$0 \leq f(a) < f(a) - l_2(a) \leq c\omega_2(f, b-a) \quad \text{and} \quad 0 \leq f(b) < f(b) - l_1(b) \leq c\omega_2(f, b-a).$$

此外，由于在此情形下 $f(\lambda) < \min\{f(a), f(b)\}$，我们有 $0 \leq f(\lambda) \leq c\omega_2(f, b-a)$。这意味着 $\|l_i\|_{[a,b]} \leq c\omega_2(f, b-a)$， $i = 1, 2$，因此 $\|f\|_{[a,b]} \leq c\omega_2(f, b-a)$。于是，我们可以在 $[a,b]$上令 $l \equiv f(\lambda)$。 □

由下面的引理可知，常数 c 在（4.2）中不能独立于 γ。同时，显然，如果估计式（4.2）中的 ω_2 被 ω替代，那么 c 将不再依赖于 γ。

引理 4.4（带插值约束的正逼近：在端点附近针对 $f \in C$ 和 λ 的否定性结果）。对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $A > 0$，存在 $f \in C$，其在 I 和 $\lambda \in (-1, 1)$ 上是非负的，使得对于任意在 I 上非负且满足 $P_n(\lambda) = f(\lambda)$ 的多项式 $P_n \in \Pi_n$，我们有

$$\|f - P_n\| > A\omega_2(f, 1).$$

证明。设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $A > 0$ 为固定值，选取 $f(x) := \max\{(x-\lambda)/(\lambda+1), 0\}$，并假设 $P_n \in \Pi_n$ 在 I 上为非负，满足 $P_n(\lambda) = f(\lambda) = 0$（这必然意味着 $P_n'(\lambda) = 0$），且使得 $\|f - P_n\| \leq A\omega_2(f, 1)$。如果 $Q(x) := (x-\lambda)/(\lambda+1)$，那么 $\|f - Q\| = \|Q\|_{[-1,\lambda]} = 1$和

$$\omega_2(f, 1) = \omega_2(f - Q, 1) \leq 4\|f - Q\| = 4.$$

因此，

$$\|P_n - Q\| \leq \|P_n - f\| + \|f - Q\| \leq 4A + 1,$$

因此，由马尔可夫不等式，

$$1/(\lambda+1) = Q'(\lambda) = Q'(\lambda) - P_n'(\lambda) \leq \|Q' - P_n'\| \leq n^2(4A+1).$$

令 $\lambda \to -1^+$，便得到一个矛盾。 □

引理 4.5（带插值约束的正逼近： $f \in C^1$）。假设 $f \in C^1[a,b]$ 在 $[a,b]$上非负，且 $\lambda \in [a,b]$ 满足 $\min\{|a-\lambda|, |b-\lambda|\} \geq \gamma|b-a|$, $\gamma > 0$。那么，存在 $p \in \Pi_3$ 使得 $p \geq 0$ 在 $[a,b]$上， $p(\lambda) = f(\lambda)$，并且

$$\|f - p\|_{[a,b]} \leq c(b-a)\omega_3(f', b-a; [a,b]), \quad \textit{where } c = c(\gamma). \tag{4.3}$$

证明。为方便起见，假设 $[a,b]=I$ 和 $\lambda=0$。

令 $L_0(x)$ 为次数为 ≤ 3 的拉格朗日-埃尔米特多项式，使得 $L_0^{(i)}(0)=f^{(i)}(0)$，$i=0,1$ 以及 $L_0(\pm 1)=f(\pm 1)$：

$$L_0(x)=f(0)+f'(0)\,x+\left[\frac{f(-1)+f(1)}{2}-f(0)\right]x^2+\left[\frac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0)\right]x^3.$$

由引理 4.1 以及 $q=4$ 和 $r=1$ 可知

$$\|f-L_0\|\le c\omega_3(f',1).$$

这也意味着

$$\|f'-L_0'\|\le A\omega_3(f',1), \tag{4.4}$$

其中，A 是某个正正常数，现将其视为固定常数。

考虑以下两种情况：

情况 1：$|f'(0)|\le 2A\omega_3(f',1)$ 我们定义

$$p(x):=f(0)+\left[\frac{f(-1)+f(1)}{2}-f(0)\right]x^2+\left[\frac{f(1)-f(-1)}{2}\right]x^3=:f(0)+ax^2+bx^3$$

并注意到 $\|L_0-p\|\le|f'(0)|$，这意味着 $\|f-p\|\le c\omega_3(f',1)$。显然，$p(0)=f(0)$，因此只需证明 p 在 I 上非负。

注意到 $p(1)=f(1)$，且 $p(-1)=f(-1)$。若 $b=0$，则显然 p 在 I 上非负，因此设 $b\ne 0$，事实上，不失一般性，我们可以假设 $b>0$。

显然，$p'(x)=0$ 当且仅当 $x=0$ 或 $x=-2a/(3b)=:x_0$。现在，若 $a\ge 0$，则 $x_0\le 0$，且 $p\downarrow$ 在 $[x_0,0]$ 上以及 $p\uparrow$，否则。这意味着 $p\ge 0$ 在 I 上。

若 $a<0$，则 $x_0>0$，且 $p\downarrow$ 在 $[0,x_0]$ 上以及 $p\uparrow$，否则。若 $x_0\ge 1$，则显然 p 在 I 上非负。因此，只需证明在 $0<x_0<1$ 情形下 $p(x_0)\ge 0$（即若$0<-2a<3b$）。事实上，我们有

$$p(x_0)=f(0)+\frac{4}{27}\cdot\frac{a^3}{b^2}>f(0)-\frac{b}{2}>\frac{f(-1)+f(1)}{2}-\frac{f(1)-f(-1)}{4}=\frac{3f(-1)+f(1)}{4}\ge 0.$$

情形 2：$|f'(0)|>2A\omega_3(f',1)$ 不失一般性，我们假设 $f'(0)<0$。定义

$$p(x):=L_0(x)+A(x+x^2)\omega_3(f',1)$$

并注意到 $\|f-p\|\le c\omega_3(f',1)$ 和 $p(0)=f(0)$，因此我们只需证明 p 在 I 上非负。由 (4.4) 可得，对于 $x\in[0,1]$，

$$p'(x)=L_0'(x)+A(1+2x)\omega_3(f',1)\ge L_0'(x)+A\omega_3(f',1)\ge f'(x),$$

因此

$$p(x)-f(x)=\int_0^x[p'(u)-f'(u)]\,du\ge 0,\quad 0\le x\le 1.$$

为方便起见，我们记作

$$p(x) = f(0) + ax + bx^2 + cx^3,$$

并注意到

$$a = p'(0) = L_0'(0) + A\omega_3(f', 1) = f'(0) + A\omega_3(f', 1) < -A\omega_3(f', 1) < 0.$$

若 $c \le 0$，则对于任意 $x \in [-1, 0)$，我们有

$$p(x) = p(-x) + 2ax + 2cx^3 \ge p(-x) \ge 0.$$

因此，剩下需要考虑的情形是 $c > 0$。

如果 $p' \le 0$ 在 $[-1, 0]$上，那么 $p \downarrow$ 在 $[-1, 0]$ 上，因此在那里也是非负的。因此，我们可以假设 p' 在 $[-1, 0]$中的某处为正。由于 $c > 0$，这意味着存在 $\alpha_0 \in (-1, 0)$，使得 $p' > 0$ 在 $[-1, \alpha_0)$上，且 $p' < 0$ 在 $(\alpha_0, 0]$上。因此， $p \uparrow$ 在 $[-1, \alpha_0]$ 上，且 $p \downarrow$ 在 $[\alpha_0, 0]$上。这意味着，为了得出 p 在整个区间 I上非负的结论，我们只需验证 $p(-1) \ge 0$ 。我们有

$$p(-1) = L_0(-1) = f(-1) \ge 0,$$

证明现已完成。 □

我们指出，如果 λ 在引理4.5 的陈述中是 $[a, b]$的一个端点，那么一个强得多的结果成立（参见引理4.2 ，它蕴含了类似的正逼近结果）。此外，由下述引理可知， （ c （4.3）中的常数不能与 γ无关。

引理 4.6（带插值约束的正逼近： $f \in C^1$ 和 λ 在端点附近的否定性结果）。对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $A > 0$，存在 $f \in C^1$ ，其在 I 上非负，并且 $\lambda \in (-1, 1)$，使得对于任意在 I 上非负且满足 $P_n(\lambda) = f(\lambda)$ 的多项式 $P_n \in \Pi_n$，我们有

$$\|f - P_n\| > A\omega_3(f', 1).$$

证明。设 $n \in \mathbb{N}$和 $A > 0$固定，取 $f(x) := \max\{(x - \lambda)^3/(\lambda + 1)^2, 0\}$ ，并假设 $P_n \in \Pi_n$ 在 I上非负，满足 $P_n(\lambda) = f(\lambda) = 0$ （这必然意味着$P_n'(\lambda) = 0$），且使得 $\|f - P_n\| \le A\omega_3(f', 1)$。若 $Q(x) := (x - \lambda)^3/(\lambda + 1)^2,$ ，则

$$\|f' - Q'\| = \|Q'\|_{[-1,\lambda]} = 3, \quad \|f - Q\| = \|Q\|_{[-1,\lambda]} = \lambda + 1,$$

and

$$\omega_3(f', 1) = \omega_3(f' - Q', 1) \le 8\|f' - Q'\| = 24.$$

因此，

$$\|P_n - Q\| \le \|P_n - f\| + \|f - Q\| \le 24A + 2,$$

因此，由马尔可夫不等式，

$$\|P_n'' - Q''\| \le n^4(24A + 2) =: K,$$

因此，由于 $P_n^{(i)}(\lambda) = Q^{(i)}(\lambda), \quad i = 0, 1,$

$$\lambda + 1 = -Q(-1) \le P_n(-1) - Q(-1) = \int_\lambda^{-1} (-1 - t)\left[P_n''(t) - Q''(t)\right] dt \le K(\lambda + 1)^2/2,$$

令 $\lambda \to -1^+$，便得到一个矛盾。 □

引理 4.7（在 Y_s: $f \in C^1$ 处插值的共正逼近）。设 $f \in C^1[a,b]$ 满足 $(x-\lambda)f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, 其中 $\lambda \in [a,b]$ 满足 $\min\{|a-\lambda|, |b-\lambda|\} \geq \gamma|b-a|$, $\gamma > 0$。那么，存在 $p \in \Pi_2$ 使得 $(x-\lambda)p(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, $p^{(i)}(\lambda) = f^{(i)}(\lambda)$, $i = 0, 1$, 且

$$\|f-p\|_{[a,b]} \leq c(b-a)\omega_2(f', b-a; [a,b]), \quad \textit{where } c = c(\gamma). \tag{4.5}$$

证明。为方便起见，假设 $[a,b] = I$ 和 $\lambda = 0$。于是， $f \in \Delta^{(0)}(\{0\})$，我们需要构造 $p \in \Delta^{(0)}(\{0\}) \cap \Pi_2$ 使得 $p^{(i)}(0) = f_{(i)}(0)$, $i = 0, 1$，以及 $\|f-p\| \leq c\omega_2(f', 1)$。

设 L_1 和 L_2 为二次拉格朗日-埃尔米特多项式，使得 $L_1^{(i)}(0) = L_2^{(i)}(0) = f_{(i)}(0)$, $i = 0, 1$, $L_1(-1) = f(-1)$以及 $L_2(1) = f(1)$。注意到 $f(0) = 0$且 $f'(0) \geq 0$。因此，

$$L_1(x) = f'(0)\, x + [f(-1) + f'(0)]\, x^2$$

and

$$L_2(x) = f'(0)\, x + [f(1) - f'(0)]\, x^2.$$

由引理 4.1 以及 $q = 3$ 和 $r = 1$ 可得

$$\|f - L_j\| \leq c\omega_2(f', 1), \quad j = 1, 2.$$

现在注意到 $L_1 \in \Delta^{(0)}(\{0\})$ 当且仅当 $L_1(1) \geq 0$，且 $L_2 \in \Delta^{(0)}(\{0\})$ 当且仅当 $L_2(-1) \leq 0$。因此，若 $L_1(1) \geq 0$，则令 $p := L_1$；若 $L_2(-1) \leq 0$，则令 $p := L_2$，证明完毕。现在假设

$$L_1(1) = 2f'(0) + f(-1) < 0 \quad \text{and} \quad L_2(-1) = f(1) - 2f'(0) > 0.$$

于是,

$$0 \leq f(1) \leq f(1) - L_1(1) \leq c\omega_2(f', 1) \quad \text{and} \quad 0 \leq -f(-1) \leq L_2(-1) - f(-1) \leq c\omega_2(f', 1).$$

现在令

$$p(x) := f'(0)\, x,$$

并注意到 $p \in \Delta^{(0)}(\{0\})$、 $p^{(i)}(0) = f^{(i)}(0)$、 $i = 0$、1，以及

$$\|f-p\| \leq \|f - L_1\| + |f(-1)| + |f'(0)| \leq c\omega_2(f', 1),$$

因为 $0 \leq f'(0) < f(1)/2 \leq c\omega_2(f', 1)$。 □

引理 4.8（在 Y_s 处带插值的共正逼近： $f \in C^2$）。设 $f \in C^2[a,b]$ 满足 $(x-\lambda)f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, 其中 $\lambda \in [a,b]$ 满足 $\min\{|a-\lambda|, |b-\lambda|\} \geq \gamma|b-a|$, $\gamma > 0$。则存在 $P \in \Pi_4$，使得 $(x-\lambda)P(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, $P_{(i)}(\lambda) = f^{(i)}(\lambda)$, $i = 0, 1$, 以及

$$\|f-P\|_{[a,b]} \leq c(b-a)^2\omega_3(f'', b-a; [a,b]), \quad \textit{where } c = c(\gamma). \tag{4.6}$$

证明。为方便起见，假设 $[a,b] = I$ 和 $\lambda = 0$。于是， $f \in \Delta^{(0)}(\{0\})$，我们需要构造 $P \in \Pi_4 \cap \Delta^{(0)}(\{0\})$, 使得 $P_{(i)}(0) = f_{(i)}(0)$、 $i = 0$、1，以及 $\|f-P\| \leq c\omega_3(f'', 1)$。

注意， $f \in \Delta^{(0)}(\{0\})$ 意味着 $f(0) = 0$ 且 $f'(0) \geq 0$。

设 $p \in \Pi_2$ 为任意满足以下条件的二次多项式

$$\|f'' - p\| \le c\omega_3(f'', 1)$$

（例如， p 是 f'' 在 I上的最佳逼近二次多项式）。现在我们对 p 进行平移，使其位于 f''下方/上方，即令

$$p_1 := p - \|f'' - p\| \le f'' \quad \text{and} \quad p_2 := p + \|f'' - p\| \ge f'',$$

并假设 $p_i(x) = ax^2 + bx + c_i$, $i = 1, 2$。若 $f'' \equiv p$，则无需证明，因此假设 $f'' \notin \Pi_2$。于是，$0 < c_2 - c_1 = 2\|f'' - p\| \le c\omega_3(f'', 1)$。现在，对于 $i = 1, 2$，我们定义

$$P_i(x) := f'(0)x + \int_0^x (x - t)p_i(t)dt = f'(0)x + \frac{a}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^3 + \frac{c_i}{2}x^2$$

并注意到 $P_1 \le f \le P_2$ 在 I上。由于 $f \in \Delta^{(0)}(\{0\})$，这意味着 $P_2 \ge 0$ 在 $[0, 1]$, 上，且$P_1 \le 0$ 在 $[-1, 0]$上：

$$Q_2(x) := P_2(x)/x = f'(0) + \frac{a}{12}x^3 + \frac{b}{6}x^2 + \frac{c_2}{2}x \ge 0, \quad x \in [0, 1], \tag{4.7}$$

$$Q_1(x) := P_1(x)/x = f'(0) + \frac{a}{12}x^3 + \frac{b}{6}x^2 + \frac{c_1}{2}x \ge 0, \quad x \in [-1, 0].$$

现在记 $\varepsilon := (c_2 - c_1)/2$ 并定义

$$P(x) := \begin{cases} P_1(x) + \varepsilon x^3, & \text{if } c_2 > c_1 \ge 0, \\ P_2(x) + \varepsilon x^3, & \text{if } c_1 < c_2 \le 0, \\ f'(0)x + ax^4/12 + (b/6 + \varepsilon)x^3, & \text{if } c_1 < 0 < c_2. \end{cases}$$

显然， $P_{(i)}(0) = f^{(i)}(0)$、 $i = 0$、1 和 $\|f - P\| \le c\omega_3(f'', 1)$（在第三种情况下，利用 $c_2 - c_1 = |c_1| + |c_2| \le c\omega_3(f'', 1)$ 这一事实），因此只需验证 $P \in \Delta^{(0)}(\{0\})$。记 $Q(x) := P(x)/x$，并注意到 $P \in \Delta^{(0)}(\{0\})$ 当且仅当 $Q \ge 0$ 在 I上成立。

(i) $c_2 > c_1 \ge 0$。

在这种情况下， $P \le P_1 \le f \le 0$ 在 $[-1, 0]$上，因此我们需要证明

$$Q(x) = f'(0) + \frac{a}{12}x^3 + \left(\frac{b}{6} + \varepsilon\right)x^2 + \frac{c_1}{2}x \ge 0, \quad x \in [0, 1].$$

如果 $a \ge 0$，那么

$$Q(x) = Q_1(-x) + \frac{a}{6}x^3 + \varepsilon x^2 + c_1 x \ge 0, \quad x \in [0, 1],$$

因为，根据（4.7）， $Q_1(-x) \ge 0$， $x \in [0, 1]$，以及 a， ε， $c_1 \ge 0$。

若 $a < 0$，则 Q' 是开口向下的抛物线，且 $Q'(0) = c_1/2 \ge 0$。因此，要么 $Q' \ge 0 (Q \uparrow)$ 在 $[0, 1]$, 上，要么存在 $x_0 \in [0, 1]$ 使得 $Q' \ge 0\,(Q \uparrow)$ 在 $[0, x_0]$上，且 $Q' \le 0 (Q \downarrow)$ 在 $[x_0, 1]$上。因此，再次利用 (4.7)，得到

$$\min_{x \in [0,1]} Q(x) = \min\{Q(0), Q(1)\} = \min\{f'(0), Q_2(1) + \varepsilon - (c_2 - c_1)/2\}$$

$$= \min\{f'(0), Q_2(1)\} \ge 0.$$

(ii) $c_1 < c_2 \le 0$。

这与前一种情况类似。事实上， $P \ge P_2 \ge f \ge 0$ 在 $[0,1]$, 上，并且我们需要验证

$$Q(x) = f'(0) + \frac{a}{12}x^3 + \left(\frac{b}{6} + \varepsilon\right)x^2 + \frac{c_2}{2}x \ge 0, \quad x \in [-1,0].$$

如果 $a \le 0$，则

$$Q(x) = Q_2(-x) + \frac{a}{6}x^3 + \varepsilon x^2 + c_2 x \ge 0, \quad x \in [-1,0],$$

由于根据（4.7）， Q_2（$-x$） ≥ 0， $x \in [-1,0]$，并且 a， $c_2 \le 0$ 以及 $\varepsilon > 0$。

如果 $a > 0$，那么 Q' 是开口向上的抛物线，并且 Q'（0） $= c_2/2 \le 0$。因此，要么 $Q' \le 0$（$Q \downarrow$）在 $[-1,0]$上，要么存在 $x_0 \in [-1,0]$ 使得 $Q' \ge 0$（$Q \uparrow$）在 $[-1,x_0]$上，并且$Q' \le 0$（$Q \downarrow$）在 $[x_0,0]$上。因此，再次利用（4.7），可得

$$\begin{aligned}\min_{x\in[-1,0]} Q(x) &= \min\{Q(0), Q(-1)\} = \min\left\{f'(0), Q_1(-1) + \varepsilon - (c_2 - c_1)/2\right\} \\ &= \min\left\{f'(0), Q_1(-1)\right\} \ge 0.\end{aligned}$$

（iii） $c_1 < 0 < c_2$。我们需要检查

$$Q(x) = f'(0) + \frac{a}{12}x^3 + \left(\frac{b}{6} + \varepsilon\right)x^2 \ge 0, \quad x \in I.$$

记

$$\widetilde{Q}(x) := f'(0) - \frac{|a|}{12}x^3 + \left(\frac{b}{6} + \varepsilon\right)x^2,$$

~并注意到，当且仅当 $Q \ge 0$ 在 $[0,1]$上时， $Q \ge 0$ 在 I 上。

~ ~ ~现在，由于 Q' 是开口向下的抛物线（或线性函数），且 $Q'(0) = 0$，因此 Q'~要么在 $[0,1]$, 上不变号（因而 Q 要么是 $\uparrow$，要么是 $\downarrow$），要么存在 $x_0 \in [0,1]$,~ ~ ~ ~ ~，使得 $Q' \ge 0$ ($Q \uparrow$) 在 $[0,x_0]$ 上且 $Q' \le 0$ ($Q \downarrow$) 在 $[x_0,1]$ 上。这意味着 Q 在 $[0,1]$ 上的最小值在 0 或 1 处取得；又因为 $Q(0) = f'(0) \ge 0$，因此只需验证~$Q(1) \ge 0$。

使用（4.7），若 $a \ge 0$，则有

$$\widetilde{Q}(1) = f'(0) - \frac{a}{12} + \frac{b}{6} + \varepsilon = Q_1(-1) + \varepsilon + \frac{c_1}{2} = Q_1(-1) + \frac{c_2}{2} \ge 0,$$

且若 $a < 0$，则

$$\widetilde{Q}(1) = f'(0) + \frac{a}{12} + \frac{b}{6} + \varepsilon = Q_2(1) + \varepsilon - \frac{c_2}{2} = Q_2(1) - \frac{c_1}{2} \ge 0.$$

证明至此完成。 □

4.2 全局构造

设 $\mathbf{Z}_n := \{z_j\}_{j=0}^n$ 为给定的节点序列，其中 $-1 := z_n < z_{n-1} < \cdots < z_1 < z_0 := 1$, $n \in \mathbb{N}$，定义 $z_i := -1$, $i > n$, $z_i := 1$, $i < 0$，且 $J_i := [z_i, z_{i-1}]$。

用 $\Sigma_k(\mathbf{Z}_n)$ 表示节点序列 $\mathbf{Z}_n$ 上所有次数为 $\leq k-1$（阶为 k）的连续分段多项式的集合。$\Sigma_k(\mathbf{Z}_n) \cap C^{k-2}$ 中的函数通常称为阶为 k 、节点为 $\mathbf{Z}_n$ 的样条函数（或最小缺陷样条函数）。

We 需要以下结果，通常称为 Beatson 引理 a.

引理 4.9（Beatson [1, 引理 3。2]）。设 $m \geq 2$ 为整数，且 $d = 2(m-1)^2$。设$T = \{t_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ 为严格递增的节点序列，满足 $t_0 = a$ 且 $t_d = b$。若 p_1, $p_2 \in \Pi_{m-1}$，则存在一个样条函数 $S \in \Sigma_m(T) \cap C^{m-2}$ 使得

(i) 对每个 $x \in [a,b]$, $S(x)$ 是介于 $p_1(x)$ 与 $p_2(x)$ 之间的一个数,

(ii) $S \equiv p_1$ 在 $(-\infty, a]$ 和 $S \equiv p_2$ 在 $[b, \infty)$.

以下定理是关于利用样条函数进行带插值约束的交织逼近的主要结果。

定理 4.10（带插值约束的交织样条逼近）。设 $k, p \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $Y_s \in \mathbb{Y}_s$, $A_p \in \mathbb{A}_p$, $(r, m_1, m_2, m_3) \in \Upsilon_{intertwining}$，定义见 (2.1)，并假设 $f \in C^r$。此外，设 $\mathbf{Z}_n$ 为给定的节点序列，使得每个非空开区间 (β_j, β_{j-1}) 内至少有 $4(k+r-1)^2$个节点，其中 $1 \leq j \leq s+p+1$，且 $\{\beta_j\}_{j=1}^{s+p} = Y_s \cup A_p$,$\beta_0 = 1$ 和 $\beta_{s+p+1} = -1$ （见 (1.3)）。那么，存在

$$S \in \Sigma_{k+r}(\mathbf{Z}_n) \cap C^{k+r-2} \cap \widetilde{\Delta}(f, Y_s) \cap \mathcal{I}^{(m_1)}(f, A_p) \cap \mathcal{I}^{(m_2)}(f, Y_s) \cap \mathcal{I}^{(m_3)}(f, \{\pm 1\}) \tag{4.8}$$

使得，对于 $0 \leq i \leq n-1$,

$$\|f - S\|_{J_i} \leq c|J_i|^r \omega_k(f^{(r)}, |\mathcal{J}_i|; \mathcal{J}_i), \quad c = c(k, r, \rho), \tag{4.9}$$

其中 $\rho := \rho(\mathbf{Z}_n) := \max\left\{|J_{i\pm1}|/|J_i| \;\middle|\; 1 \leq i \leq n\right\}$，且 $\mathcal{J}_i$ 是一个满足 $J_i \subset \mathcal{J}_i \subseteq \left[z_{i+6(k+r-1)^2},\, z_{i-6(k+r-1)^2}\right]$的区间。这里，若 $m_1 = -1$，则限制条件 $S \in \mathcal{I}^{(-1)}(f, A_p)$ 是空泛的，即不要求 S 在 A_p 中的点处对 f 进行插值。

我们回顾一下，若 $s = 0$，则 $\mathbb{Y}_0 = \emptyset$，因此定理 4.10 就成为一个带插值约束的单侧样条逼近定理。

证明。证明的思路与 [6, 定理 3] 非常相似。唯一的区别是，在靠近 $Y_s \cup A_p \cup \{\pm 1\}$ 中的点时，我们使用引理 4.2 来构造 S 的一个合适的多项式片段。为完整起见，下面给出详细过程。

不失一般性，我们可以假设 $\pm 1 \in A_p$。现在记 $m := k+r$,$d := 2(m-1)^2$, $N := \lceil n/d \rceil$ 和 $\bar{z}_i := z_{di}$, $i \in \mathbb{Z}$。注意，对于 $i \leq 0$，有 $\bar{z}_i = 1$；对于 $i \geq N$，有 $\bar{z}_i = -1$。

现在，我们在较粗的分割 $\mathbf{Z}_N := \{\bar{z}_i\}_{i=0}^N$ 上构造次数为 $\leq m-1$ 的重叠多项式片段。如果存在某个点 $\overline{y_j} \in Y_s$ 使得 $\bar{z}_i \leq y_j < \bar{z}_{i-1}$，我们就称区间 $\bar{I}_i := [\bar{z}_i, \bar{z}_{i-1}]$ 为“Y_s-污染”；如果存在某个点 $\alpha_j \in A_p$ 使得 $\bar{z}_i \leq \alpha_j < \bar{z}_{i-1}$、 $i \geq 2$ 或 $\bar{z}_1 \leq \alpha_j \leq \bar{z}_0 = 1$，则称其为“$A_p$-污染”。根据定理陈述中的假设，恰好存在

¯个 β_j，分别位于每个受污染区间 I_{μ_j}、$1 \le j \le s+p$ 中，并且在 I_{μ_j} 和 $I_{\mu_{j+1}}$ 之间至少有一个未受污染区间，也就是说，

$$\mu_j + 2 \le \mu_{j+1}, \qquad 1 \le j \le s+p-1. \tag{4.10}$$

注意，根据我们的假设，$\mu_1 = 1$ 和 $\mu_{s+p} = N$ 满足 $\pm 1 \in A_p$。

此外，如果区间 $J \subset I$ 不包含来自 Y_s的任何点，那么对于某个$1 \le j \le s+1$，$J \subset [y_j, y_{j-1}]$成立；我们称 J 为“正”，如果 j 是奇数；如果 j 是偶数，则称其为“负”。~任意函数 $S \in \Delta(f, Y_s)$在所有正区间上都满足 $S \ge f$，在所有负区间上都满足 $S \le f$。

如果 $\mu_{j+1} > \mu_j + 2$，在每个区间 $[\bar z_i,\, \bar z_{i-2}]$、$i = \mu_j + 2$、.....、$\mu_{j+1} - 1$上，根据 Whitney 不等式，存在两个次数为 $< m$ 的多项式 P_i 和 Q_i，使得

$$P_i(x) \ge f(x) \ge Q_i(x), \quad x \in [\bar z_i,\, \bar z_{i-2}],$$

and

$$\|P_i - Q_i\|_{[\bar z_i,\, \bar z_{i-2}]} \le c\omega_m(f, |\bar I_i|; [\bar z_i,\, \bar z_{i-2}]) \le c|\bar I_i|^r \omega_k(f^{(r)}, |\bar I_i|; [\bar z_i,\, \bar z_{i-2}]), \quad c = c(m, \rho).$$

现在我们将 p_i 在 $[\bar z_i,\, \bar z_{i-2}]$ 上定义为

$$p_i := \begin{cases} P_i, & \text{if } (\bar z_i,\, \bar z_{i-2}) \text{ is positive,} \\ Q_i, & \text{if } (\bar z_i,\, \bar z_{i-2}) \text{ is negative.} \end{cases}$$

然后，

$$\|f - p_i\|_{[\bar z_i,\, \bar z_{i-2}]} \le c|\bar I_i|^r \omega_k(f^{(r)}, |\bar I_i|; [\bar z_i,\, \bar z_{i-2}]), \quad c = c(k, r, \rho). \tag{4.11}$$

¯ ¯如果 $\mu_{j+1} = \mu_j + 2$（即 I_{μ_j} 与 $I_{\mu_{j+1}}$之间只有一个未受污染的区间），则不需要上述构造。

¯现在，我们在每个受污染区间 $I_{\mu_j}, 1 \le j \le s+p$ 附近构造局部多项式片段。

~ ~ ~记 $I_{\mu_j} := [\bar z_{\mu_j+1}, \bar z_{\mu_j-2}]$ 并使用引理 4.2，结合 $[a, b] = I_{\mu_j}$ 来定义 p_{μ_j} 于 I_{μ_j}。回顾一下，$p(\cdot;\, f, k, r, \lambda)$ 表示引理陈述中的多项式 4.2，并考虑三种情况。

¯情况 1：I_{μ_j} 受到 $\{\pm 1\}$污染（即 $j = 1$ 或 $j = s+p$）。

(i) 如果 $j = 1$ 和 r 为偶数，则 $p_{\mu_1} = p_1 := p(\cdot;\, f, k, r, 1)$。(ii) 如果 $j = 1$ 和 r 为奇数，则 $p_{\mu_1} = p_1 := -p(\cdot;\, -f, k, r, 1)$。¯ ¯(iii) 如果 $j = s+p$ 和 $I_{\mu_{s+p}} = I_N$ 为正，则 $p_{\mu_{s+p}} = p_N := p(\cdot;\, f, k, r, -1)$。¯ ¯(iv) 如果 $j = s+p$ 和 $I_{\mu_{s+p}} = I_N$ 为负，则 $p_{\mu_{s+p}} = p_N := -p(\cdot;\, -f, k, r, -1)$。

¯情形 2：$1 < j < s+p$ 且 I_{μ_j}受到 A_p污染。（请注意，在这种情形下，$r = 1$ 不在考虑范围内，因此 $r \ge 2$。）

¯(i) 若 r 为偶数且 I_{μ_j} 为正，则 $p_{\mu_j} = p(\cdot;\, f、\, k、\, r、\, \beta_j)$。

(ii) 若 r 为偶数且 I_{μ_j} 为负，则 $p_{\mu_j} = -p(\cdot;\ -f、\ k、\ r、\ \beta_j)$。

(iii) 若 r 为奇数且 I_{μ_j} 为正，则 $p_{\mu_j} = p(\cdot;\ f、\ k+1、\ r-1、\ \beta_j)$。

(iv) 若 r 为奇数且 I_{μ_j} 为负，则 $p_{\mu_j} = -p(\cdot;\ -f、\ k+1、\ r-1、\ \beta_j)$。

情形 3：I_{μ_j} 受到 Y_s 污染（因此 $\beta_j = y_i$，对于某个 $1 \le i \le s$）。

(i) 如果 r 是奇数且 i 是奇数，则 $p_{\mu_j} = p(\cdot;\ f, k, r, \beta_j)$。

(ii) 如果 r 是奇数且 i 是偶数，那么 $p_{\mu_j} = -p(\cdot;\ -f, k, r, \beta_j)$。

(iii) 如果 r 是偶数且 i 是奇数，则 $p_{\mu_j} = p(\cdot;\ f, k+1, r-1, \beta_j)$。

(iv) 如果 r 为偶数且 i 为偶数，则 $p_{\mu_j} = -p(\cdot;\ -f, k+1, r-1, \beta_j)$。

我们指出，若 $r \ge 2$ 且 $p_{\mu_j} = p\ (\cdot;\ f,\ k+1,\ r-1,\ \lambda)$，则 $p_{\mu_j}^{(i)}\ (\lambda) = f_{(i)}\ (\lambda)$，$0 \le i \le r-2$，且

$$\big\|f - p_{\mu_j}\big\|_{\widetilde{I}_{\mu_j}} \le c|\widetilde{I}_{\mu_j}|^{r-1}\omega_{k+1}(f^{(r-1)}, |\widetilde{I}_{\mu_j}|; \widetilde{I}_{\mu_j}) \le c|\widetilde{I}_{\mu_j}|^{r}\omega_{k}(f^{(r)}, |\widetilde{I}_{\mu_j}|; \widetilde{I}_{\mu_j}).$$

所有具有所需性质的重叠多项式片段现已构造完成，剩下的工作是将它们拼接起来，从而在原节点序列 $\mathbf{Z}_n$ 上得到一个具有相同性质的光滑样条 S。

若 I_i 和 I_{i+1} 均未受污染，则 p_i 与 p_{i+1} 在 I_i 上重叠，其中包含来自 $\mathbf{Z}_n$ 的 $d-1$ 个内部节点。由引理 4.9 可知，存在一个在这些节点上定义于 I_i、阶数为 m 的样条 S_i，它分别在 $\bar{z}_i = z_{di}$ 和 $\bar{z}_{i-1} = z_{d(i-1)}$ 处以 C^{m-2} 方式与 p_{i+1} 和 p_i 衔接。此外，S_i 的图像位于 p_{i+1} 和 p_i 的图像之间，因此，$\operatorname{sgn}(p_{i+1}(x) - f(x)) = \operatorname{sgn}(p_i(x) - f(x)) = \operatorname{sgn}(S_i(x) - f(x))$，$x \in I_i$。此外，由式 (4.11) 可得

$$\|f - S_i\|_{[\bar{z}_i,\, \bar{z}_{i-2}]} \le c|\bar{I}_i|^r \omega_k(f^{(r)}, |\bar{I}_i|; [\bar{z}_{i+1},\ \bar{z}_{i-2}]).$$

涉及受污染区间的重叠多项式片段的拼接，完全采用相同的方法进行。唯一的区别是，由此得到的样条片段 S_i 满足上述估计，但右端用稍大的区间替代 $[\bar{z}_{i+1},\ \bar{z}_{i-2}]$，（最坏情况下为 $[\bar{z}_{i+2},\ \bar{z}_{i-3}]$）；这不会影响证明后续部分。

我们如下定义 S 上的最终样条 I_i：若只有一个局部多项式 p_i 定义在 I_i 上，则令 S 等于该多项式；若两个多项式在 I_i 上重叠，则必有一个拼接局部样条 S_i，于是令 S 等于 S_i。由此构造可知，$S \in \Sigma_{k+r}(\mathbf{Z}_n) \cap C^{k+r-2} \cap \tilde{\Delta}(f, Y_s)$，并且 S 还满足（4.8）中所述的插值条件。

最后，原划分 $I_i := [z_i,\ z_{i-1}]$ 中的所有相邻区间 $\mathbf{Z}_n$ 大小相当，且每个区间 $I_i = [z_{di},\ z_{d(i-1)}]$ 至多包含 d 个这样的区间。因此，满足（4.9）。 □

定理 4.11（带插值约束的共正样条逼近）。令 $p \in \mathbb{N}$、$s \in \mathbb{N}_0$、$Y_s \in \mathbb{Y}_s$、$A_p \in \mathbb{A}_p$ 和 $(r、k、m_1、m_2、m_3) \in \Upsilon^{(0)}_{copositive}$，如 (2.3) 中所定义，并假设 $f \in C^r \cap \Delta^{(0)}(Y_s)$。此外，设 $\mathbf{Z}_n$ 为给定的节点序列，使得每个非空开区间 $(\beta_j、\beta_{j-1})$ 中至少有 $4(k+r-1)^2$ 个节点，其中 $\{\beta_j\}_{j=1}^{s+p} = Y_s \cup A_p$、$\beta_0 = 1$ 和 $\beta_{s+p+1} = -1$（见 (1.3)）。那么，存在

$$S \in \Sigma_{k+r}(\mathbf{Z}_n) \cap C^{k+r-2} \cap \Delta^{(0)}(Y_s) \cap \mathfrak{I}^{(m_1)}(f, A_p) \cap \mathfrak{I}^{(m_2)}(f, Y_s) \cap \mathfrak{I}^{(m_3)}(f, \{\pm 1\}) \tag{4.12}$$

使得，对于 $0 \le i \le n-1$,

$$\|f - S\|_{J_i} \le c|J_i|^r \omega_k(f^{(r)}, |\mathcal{J}_i|; \mathcal{J}_i), \quad c = c(k, r, \rho), \tag{4.13}$$

其中， ρ 和 $\mathcal{J}_i$ 与定理4.10的陈述中相同。此处，若 $m_1 = -1$，则限制条件 $S \in \mathcal{I}^{(-1)}(f, A_p)$ 是空泛的，也就是说，不要求 S 在 f 中的点处进行插值 A_p。

证明。 首先注意到，定理4.11 在4.10 时可直接由定理

$$\begin{aligned}(r, k, m_1, m_2, m_3) \in &\left\{(1, k, -1, 0, 0), (2, k, 1, 0, 1) \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\} \\ &\cup \left\{(r, k, m_1, m_2, m_3) \in \Upsilon_{\text{intertwining}} \;\middle|\; r \ge 3\right\}.\end{aligned}$$

在其余情形下，证明与定理4.10 完全相同，唯一的区别是：在 $Y_s \cup A_p \cup \{\pm 1\}$中的点附近构造局部多项式片段时，我们需要使用以下结果，而不是引理4.2:

- 引理4.3 在 A_p 附近，以及在 Y_s附近的（平凡）线性插值函数，若 $r = 0$ 且 $k = 2$,
- 引理4.5 在 A_p附近，若 $r = 1$ 且 $k = 3$,
- 引理4.7 在 Y_s 附近，以及引理4.5 在 A_p附近，若 $r = 1$， $k = 2$ 且 $m_2 = 1$,
- 引理 4.8 附近 Y_s，若 $r = 2$， $k = 3$ 且 $m_2 = 1$。

细节从略。 □

5 带插值约束的截断幂函数与样条函数的交织多项式逼近

我们用特殊记号 $\mathbf{T}_n$ 表示 I 的切比雪夫分割，即 $\mathbf{T}_n := \{x_j\}_{j=0}^n$，其中$x_j := x_{j,\,n} := \cos(j\pi/n)$, $0 \le j \le n$。此外，对于 $1 \le j \le n$，我们记作

$$I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}], \quad |I_j| = x_{j-1} - x_j \quad \text{and} \quad \psi_j(x) := \psi_{j,n}(x) := \frac{|I_j|}{|x - x_j| + |I_j|}.$$

注意， $|I_{j\pm1}| < 3|I_j|$和 $\rho_n(x) < |I_j| < 5\rho_n(x)$， $x \in I_j$，因此 $\psi_{j\pm1}(x) \sim \psi_j(x)$， $x \in I$。此外，我们记作

$$(x - \lambda)_+^m := (x - \lambda)^m \chi[\lambda, 1](x), \quad m \ge 0,$$

其中

$$\chi[a,\, b](x) := \begin{cases} 1, & \text{if } x \in [a,\, b], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，记 $x_j := 1$ 表示 $j < 0$，记 $x_j := -1$ 表示 $j > n$。

5.1 截断幂函数的逼近

引理 5.1（带插值约束的截断幂函数交织逼近）。设 s、p、r、$m \in \mathbb{N}_0$、$Y_s \in \mathbb{Y}_s$ 和 $A_p \in \mathbb{A}_p$，并假设 j、$n \in \mathbb{N}$ 满足区间 (x_{j+1}, x_{j-2}) 不包含来自 $Y_s \cup A_p \cup \{\pm 1\}$ 的任何点，且令$\lambda \in [x_j, x_{j-1}]$和 $g_{m,\lambda}(x) := (x-\lambda)_+^m$。

于是，存在一个足够大的常数 $\mu = \mu(s,p,r,m)$ 以及次数为 $\le c(\mu)n$ 的多项式 R_1 和 R_2，使得

$$R_1, R_2 \in \mathcal{I}^{(r)}(g_{m,\lambda}, A_p \cup Y_s \cup \{\pm 1\}), \tag{5.1}$$

$$\{R_1 - g_{m,\lambda}, g_{m,\lambda} - R_2\} \subset \Delta^{(0)}(Y_s), \tag{5.2}$$

即，$\{R_1,R_2\}$ 是关于 Y_s 的、针对 $g_{m,\lambda}$ 的交织多项式对，d

$$|R_i(x) - g_{m,\lambda}(x)| \le c(\mu)\psi_j(x)^{\mu-m}|I_j|^m, \quad \textit{for all } x \in I \textit{ and } i = 1,2. \tag{5.3}$$

证明。为避免可能的混淆，我们指出，在本证明中，撇号记法用于表示新的参数/函数，而不表示任何导数。显然，不失一般性，我们可以假设 $\pm 1 \in A_p$。

情形 1：偶数 m。对于偶数 m 且不满足（5.1），引理 5.1 为 [6, 引理 19]，其

$$\{a_1, \dots, a_k\} = \{y \in Y_s \mid y < x_j\} \quad \text{and} \quad \{b_1, \dots, b_l\} = \{y \in Y_s \mid y > x_j\}.$$

对于偶数 m，如果允许点 a_i's 和 b_i's 合并，则同样的构造也成立，这意味着在这些点处对 $g_{m,\lambda}$ 进行埃尔米特插值，其中插值多项式为 R_i's。因此，只需设定

$$\{a_1, \dots, a_k\} := \bigcup_{y \in Y_s,\, y<x_j} \{\underbrace{y, \dots, y}_{r'}\} \cup \bigcup_{\alpha \in A_p,\, \alpha < x_j} \{\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{r''}\}$$

and

$$\{b_1, \dots, b_l\} := \bigcup_{y \in Y_s,\, y>x_j} \{\underbrace{y, \dots, y}_{r'}\} \cup \bigcup_{\alpha \in A_p,\, \alpha > x_j} \{\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{r''}\},$$

其中，r' and r'' 分别是不小于 $r+1$ 的奇数和偶数整数（例如，可以设 $r' := 2r+1$ and $r'' := 2(r+1)$），从而 $R_i - g_{m,\lambda}$, $i = 1, 2$ 在 Y_s 中的点处变号，而在 A_p 中的点处不变号。

[6, 引理 19] 中构造的一个副产物是，在 $m > 0$ 的情形下，$R_i(\lambda) = 0$, $i = 1, 2$ 这一事实。这使得同样的构造无法用于奇数 m。例如，如果 $m = 1$，那么显然不存在多项式 $R \in \Pi_n$ 使得$R(\lambda) = 0$，同时在区间 $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ 上满足 $R \ge g_{1,\lambda}$。

情形 2：奇数 m。假设 m 为奇数，并设 $n' := 2n$, $j' := 2j$ 和 $Y_s' := Y_s \cup \{y'\}$，其中$y' := x_{j'+1,\, n'}$。Note that

$$x_{j',n'} = x_j, \quad I_{j'+1,n'} = [x_{j'+1,n'}, x_{j',n'}] \subset I_j \quad \text{and} \quad \operatorname{dist}\{y', \{x_j, x_{j+1}\} \ge |I_{j+1}|/4.$$

现在，根据偶数 m 的引理陈述（上文情形 1），可知存在多项式 R_1' 和 R_2'，使得

$$R_1', R_2' \in \mathcal{I}^{(r)}(g_{m-1,\lambda}, A_p \cup Y_s'), \tag{5.4}$$

$$\{R_1' - g_{m-1,\lambda}, g_{m-1,\lambda} - R_2'\} \subset \Delta^{(0)}(Y_s'), \tag{5.5}$$

and

$$|R_i'(x) - g_{m-1,\lambda}(x)| \le c(\mu)\psi_j(x)^{\mu-m+1}|I_j|^{m-1}, \quad \text{for all } x \in I \text{ and } i = 1, 2. \tag{5.6}$$

我们定义

$$R_i''(x) := (x - \lambda)R_i'(x), \quad i = 1, 2,$$

并注意到 $R_1'', R_2'' \in \mathcal{I}^{(r)}(g_{m,\lambda}, A_p \cup Y_s)$，且对所有 $x \in I$ 和 $i = 1, 2$，

$$|R_i''(x) - g_{m,\lambda}(x)| \le c(\mu)|x - \lambda|\psi_j(x)^{\mu-m+1}|I_j|^{m-1} \le c(\mu)\psi_j(x)^{\mu-m}|I_j|^m, \tag{5.7}$$

因为

$$|x - \lambda| \le |x - x_j| + |I_j| = \psi_j(x)^{-1}|I_j|.$$

设 J 为满足以下条件的指标：对于 $1 \le i \le J$，有 $y_i \in [x_{j-2}, 1]$；对于 $J + 1 \le i \le s$，有 $y_i \in [-1, x_{j+1}]$。并注意到，若 $J = 0$ 或 $J = s$，则区间 $[x_{j-2}, 1]$ 或 $[-1, x_{j+1}]$ 中分别没有 y_i。

现在，令 h 为 $R_1' - g_{m-1,\lambda}$ 或 $g_{m-1,\lambda} - R_2'$，我们注意到

$$h \in \Delta^{(0)}(Y_s') \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (-1)^i h \ge 0 & \text{on } [y_{i+1}, y_i], \text{ for } 0 \le i \le J-1, \\ (-1)^J h \ge 0 & \text{on } [y', y_J], \\ (-1)^{J+1} h \ge 0 & \text{on } [y_{J+1}, y'], \\ (-1)^{i+1} h \ge 0 & \text{on } [y_{i+1}, y_i], \text{ for } J+1 \le i \le s+1, \end{cases}$$

因此，对于 $h' := (\cdot - \lambda)h$，我们有

$$\begin{cases} (-1)^i h' \ge 0 & \text{on } [y_{i+1}, y_i], \text{ for } 0 \le i \le J-1, \\ (-1)^J h' \ge 0 & \text{on } [\lambda, y_J], \\ (-1)^{J+1} h' \ge 0 & \text{on } [y', \lambda], \\ (-1)^J h' \ge 0 & \text{on } [y_{J+1}, y'], \\ (-1)^i h' \ge 0 & \text{on } [y_{i+1}, y_i], \text{ for } J+1 \le i \le s+1. \end{cases}$$

换言之，除去我们对 $[y_{J+1}, y_J]$ 所需的限制 $(-1)^J h' \ge 0$ 在其小区间 $[y', \lambda]$ 上不成立之外，$h' \in \Delta^{(0)}(Y_s)$ 的所有正确不等式都得到了满足。因此，必须在 $[y', \lambda]$ 上修正多项式 R_i''、$i = 1$、2，以确保 $\widetilde{R}_1'' - g_{m,\lambda}$、$g_{m,\lambda} - \widetilde{R}_2'' \in \Delta^{(0)}(Y_s)$，其中 $\widetilde{R}_i''$、$i = 1$、2 是这些修正后的多项式。

我们注意到，由（5.7）可知

$$\|h'\| \le c(\mu)\left\|\psi_j^{\mu-m}\right\| \cdot |I_j|^m \le c(\mu)|I_j|^m := c_1|I_j|^m.$$

We 现在回顾一下（例如参见 [3]），次数为 $\le 4n-2$ 的代数多项式,

$$t_j(x) := (x-x_j^0)^{-2}\cos^2 2n\arccos x + (x-\bar{x}_j)^{-2}\sin^2 2n\arccos x,$$

其中

$$\bar{x}_j := \cos\left(\frac{j\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right) \quad \text{and} \quad x_j^0 := \begin{cases} \cos\left(\frac{j\pi}{n} - \frac{\pi}{4n}\right), & \text{if } j < n/2, \\ \cos\left(\frac{j\pi}{n} - \frac{3\pi}{4n}\right), & \text{if } j \ge n/2, \end{cases}$$

满足

$$|I_j|^{-2}\psi_j(x)^2 \le t_j(x) \le 4000|I_j|^{-2}\psi_j(x)^2, \quad x \in I \text{ and } 1 \le j \le n-1.$$

现在定义

$$H(x) := t_j(x)^{\mu'}|I_j|^{2\mu'}\prod_{y\in Y_s}\frac{(x-y)^{2r+1}}{|x_j-y|^{2r+1}}\prod_{\alpha\in A_p}\frac{(x-\alpha)^{2r+2}}{|x_j-\alpha|^{2r+2}}$$

例如，令 $\mu' := \mu + (2r+2)(s+p)$，并注意到

$$H \in \mathcal{I}^{(r)}(0, A_p \cup Y_s) \cap \Delta^{(0)}(Y_s)$$

（特别是，$(-1)^J H \ge 0$ 在 $[y_{J+1}, y_J]$ 上），

$$\begin{aligned} |H(x)| &\le c\psi_j(x)^{2\mu'}\prod_{y\in Y_s}\frac{|x-y|^{2r+1}}{|x_j-y|^{2r+1}}\prod_{\alpha\in A_p}\frac{|x-\alpha|^{2r+2}}{|x_j-\alpha|^{2r+2}} \\ &\le c\psi_j(x)^{2\mu'-(2r+2)(s+p)} \le c\psi_j(x)^{\mu}, \quad x \in I, \end{aligned}$$

因为对于 $\beta \in Y_s \cup A_p$,

$$\begin{aligned} \frac{|x-\beta|}{|x_j-\beta|} &\le 1 + \frac{|x-x_j|}{|x_j-\beta|} \le 1 + \frac{|x-x_j|+|I_j|}{|I_j|}\cdot\frac{|I_j|}{|x_j-\beta|} \\ &\le 1 + \psi_j(x)^{-1}\cdot\frac{|I_j|}{\min\{|I_{j-1}|, |I_{j+1}|\}} \le 1 + 3\psi_j(x)^{-1} \le 4\psi_j(x)^{-1}. \end{aligned}$$

此外，对于 $x \in [y', \lambda]$，我们有

$$t_j(x) \ge (|x-x_j|+|I_j|)^{-2} \ge (\max\{|y'-x_j|+|I_j|, |\lambda-x_j|+|I_j|\})^{-2} \ge 16^{-1}|I_j|^{-2}$$

and

$$\frac{|x-\beta|}{|x_j-\beta|} \ge \min\left\{\frac{|x_{j+1}-y'|}{|x_{j+1}-x_j|}, \frac{|x_{j-2}-\lambda|}{|x_{j-2}-x_j|}\right\} \ge \frac{1}{4}.$$

因此,

$$(-1)^J H(x) = |H(x)| \ge 4^{-2\mu'-(2r+1)s-(2r+2)p} := c_2, \quad x \in [y', \lambda].$$

这意味着，对于函数

$$h'' := h' + \widetilde{H}, \quad \text{where } \widetilde{H}(x) := (c_1/c_2)H(x)|I_j|^m,$$

我们有

$$(-1)^J h''(x) \geq -\|h'\| + (c_1/c_2)(-1)^J H(x)|I_j|^m \geq 0, \quad x \in [y', \lambda],$$

因此， $h'' \in \Delta^{(0)}(Y_s)$。

还需注意，多项式

$$\widetilde{R}_1'' := R_1'' + \widetilde{H} \quad \text{and} \quad \widetilde{R}_2'' := R_2'' - \widetilde{H}$$

满足（5.1）-（5.3），且证明现已完成。 □

5.2 一般样条函数的逼近

如果 $V_m = \{v_i\}_{i=1}^m$ 是 I 中的某个有限点集，那么我们用 $\Sigma_k(\mathbf{Z}_n, V_m)$ 表示 $\Sigma_k(\mathbf{Z}_n)$ 的子集，该子集由满足以下条件的连续分段多项式 S 构成：其节点与 V_m 中的点不存在“过于接近”的情况。更确切地说，若选择 j_i、 $1 \leq i \leq m$ 使得 $v_i \in [z_{j_i}, z_{j_i-1})$（或者在 $v_i = 1$ 时为 $v_i \in [z_{j_i}, z_{j_i-1}]$，即此时为 $j_1 := 1$），那么，当且仅当 $S \in \Sigma_k(\mathbf{Z}_n)$ 且对于每个 $1 \leq i \leq m$, S 在 (z_{j_i+1}, z_{j_i-2}) 上的限制是一个多项式时， S 属于 $\Sigma_k(\mathbf{Z}_n, V_m)$。

采用这一记号，下面的引理是更一般结果 [6,定理 4], 的推论，可表述如下。

引理 5.2（见 [6, 定理 4]）。设 $s, m \in \mathbb{N}_0$, $Y_s \in \mathbb{Y}_s$, $\mu \geq 2m + 30$, 并设 $S \in \Sigma_{2m+1}(\mathbf{T}_n, Y_s) \cap C^{2m-1}$，其中 $n > c(Y_s)$ 满足：每个区间 (y_{i+1}, y_i) 内至少有 4 个节点 x_j， $0 \leq i \leq s$。

那么，存在关于 S、相对于 Y_s 的交织多项式对 $\{P_1, P_2\} \subset \Pi_{c(\mu)n}$，使得

$$|P_1(x) - P_2(x)| \leq c(m, \mu, s) \sum_{j=1}^{n-1} \psi_j(x)^\mu E_{2m}(S, I_j \cup I_{j+1}),$$

其中 $E_n(f, [a, b]) := \inf_{P_n \in \Pi_n} \|f - P_n\|_{C[a,b]}$。

完全相同的证明也适用于附加如下条件的情形：多项式 P_1 和P_2（Hermite）在 S 中的点处进行插值 $Y_s \cup A_p \cup \{\pm 1\}$。此外，根据引理 5.1，样条 S 的阶数为奇数这一限制不再需要，因此得到以下结果。

引理 5.3。设 $k \in \mathbb{N}$, $p, s, r \in \mathbb{N}_0$, $Y_s \in \mathbb{Y}_s$, $A_p \in \mathbb{A}_p$, $\mu \geq k + 30$, 并令 $S \in \Sigma_k(\mathbf{T}_n, Y_s \cup A_p \cup \{\pm 1\}) \cap C^{k-2}$，其中 $n > c(d(Y_s, A_p))$ 满足：每个非空开区间 (β_j, β_{j-1}) 中至少有 4 个节点 x_j， $1 \leq j \leq s + p + 1$，其中 $\{\beta_j\}_{j=1}^{s+p} = Y_s \cup A_p$, $\beta_0 = 1$ 和 $\beta_{s+p+1} = -1$ （见 (1.3)）。

那么，存在一对关于 Y_s 交织的多项式 $\{P_1, P_2\} \subset \Pi_{c(\mu)n}$，使得 S

$$P_1, P_2 \in \mathfrak{I}^{(r)}(S, A_p \cup Y_s \cup \{\pm 1\})$$

and

$$|P_1(x) - P_2(x)| \leq c(k, r, \mu, s, p) \sum_{j=1}^{n-1} \psi_j(x)^\mu E_{k-1}(S, I_j \cup I_{j+1}).$$

6 主要结果的证明

定理2.1/2.2 和2.3/2.4 可直接由引理5.3 以及相应的定理4.10 和4.11推出，使用与 [6, 第 3]节中相同的估计。

7 附录：精确逐点估计

显然，如果一个多项式 P_n 不仅逼近 f，而且还对其进行插值（也许还对其导数进行插值），那么在所有插值点附近，逼近率（1.2）都可以提高。

以下定理可由 [8] 中得到的结果推出。

定理 7.1（[8, 定理 1.5、1.6 和 1.7]）。设 $k \in \mathbb{N}$, $x_0 \in I$, $r, n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^r$，并假设 $m \in \mathbb{N}_0$ 满足 $m \le r$。若 $P_n \in \Pi_n$ 满足

$$|f(x) - P_n(x)| \le A\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \quad x \in I, \tag{7.1}$$

and

$$P_n^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0), \quad for \ \ 0 \le j \le m, \tag{7.2}$$

那么，对于所有 $1 \le \ell \le k$ 和 $x \in I$，我们有

$$\begin{aligned} &|f(x) - P_n(x)| \\ &\le c(k,r)A \begin{cases} |x - x_0|^{m+1}\rho_n^{r-m-1}(x)\omega_\ell(f^{(r)}, \rho_n(x)), & if \ \ m \le r-1, \\ |x - x_0|^r \omega_\ell(f^{(r)}, |x - x_0|^{1/\ell}\rho_n^{1-1/\ell}(x)), & if \ \ m = r. \end{cases} \end{aligned} \tag{7.3}$$

此外，(7.3) 中的估计无法改进，也就是说，$|x - x_0|$的任何幂都无法增大。

以下结果可由定理 2.1、2.2 和 7.1 直接推出。注意到，对于任意 $(r, m_1, m_2, m_3) \in \Upsilon_{\text{intertwining}}$，我们有 $m_i < r$, $i = 1, 2, 3$，因此定理 7.1 陈述中的情形 $m = r$ 不成立。另请注意，我们通过允许 s 取 0，将单侧情形纳入交织逼近的一般结果；此时限制条件 $P_n \in \mathcal{I}^{(m_2)}(f, Y_0)$ 变得空泛（回想一下，限制条件 $P_n \in \mathcal{I}^{(-1)}(f, A_p)$ 按定义也为空泛）。

推论 7.2（带插值约束的交织逼近）。设 k, $p \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $Y_s \in \mathbb{Y}_s$, $A_p \in \mathbb{A}_p$，以及 $(r, m_1, m_2, m_3) \in \Upsilon_{intertwining}$，定义于 (2.1)。那么，对于任意$f \in C^r$ 以及任意 $n \ge c(d(Y_s, A_p))$，存在

$$P_n \in \Pi_n \cap \widetilde{\Delta}(f, Y_s) \cap \mathcal{I}^{(m_1)}(f, A_p) \cap \mathcal{I}^{(m_2)}(f, Y_s) \cap \mathcal{I}^{(m_3)}(f, \{\pm 1\})$$

使得

$$|f(x) - P_n(x)| \le c(k, r, s, p)\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \qquad x \in I.$$

此外，对于所有 $1 \le \ell \le k$ 和 $\lambda \in \mathbb{Y}_s \cup A_p \cup \{\pm 1\}$，我们还有

$$|f(x) - P_n(x)| \le c(k, r, s, p)|x - \lambda|^{m+1}\rho_n^{r-m-1}(x)\omega_\ell(f^{(r)}, \rho_n(x)), \quad x \in I,$$

其中

$$m := \begin{cases} m_1, & if\ \lambda \in A_p, \\ m_2, & if\ \lambda \in Y_s, \\ m_3, & if\ \lambda = \pm 1. \end{cases}$$

对于带插值约束的（余）正逼近，我们也有类似的结果，该结果可由定理 2.3、2.4 和 7.1推出。唯一的区别在于，当 $r = 0$ 和 $r = 1$ 的 m_i可以等于 r时，会出现几种情况，因此需要相应地修改估计。

推论 7.3（带插值约束的余正逼近）。设 $p \in \mathbb{N}$、$s \in \mathbb{N}_0$、 $Y_s \in \mathbb{Y}_s$、 $A_p \in \mathbb{A}_p$ 以及 $(r$、 k、 m_1、 m_2、 $m_3) \in \Upsilon^{(0)}_{copositive}$，定义见 (2.3)。那么，对于任意$f \in C^r \cap \Delta^{(0)}(Y_s)$ 以及任意 $n \geq c(d(Y_s, A_p))$，存在

$$P_n \in \Pi_n \cap \Delta^{(0)}(Y_s) \cap \mathcal{I}^{(m_1)}(f, A_p) \cap \mathcal{I}^{(m_2)}(f, Y_s) \cap \mathcal{I}^{(m_3)}(f, \{\pm 1\})$$

使得

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(k, r, s, p)\rho_n^r(x)\omega_k(f^{(r)}, \rho_n(x)), \qquad x \in I.$$

此外，如果 $\lambda \in Y_s \cup A_p \cup \{\pm 1\}$ and

$$m := \begin{cases} m_1, & if\ \lambda \in A_p, \\ m_2, & if\ \lambda \in Y_s, \\ m_3, & if\ \lambda = \pm 1. \end{cases}$$

使得 $m < r$，那么对于所有 $1 \leq \ell \leq k$，我们也有

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(k, r, s, p)|x - \lambda|^{m+1}\rho_n^{r-m-1}(x)\omega_\ell(f^{(r)}, \rho_n(x)), \quad x \in I.$$

此外，如果 $r = 1$ 且 $\lambda \in Y_s$，那么对于 $\ell = 1$ 或 $\ell = 2$,

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(s, p)|x - \lambda|\omega_\ell(f', |x - \lambda|^{1/\ell}\rho_n^{1-1/\ell}(x)), \quad x \in I,$$

并且，如果 $r = 0$ 且 $\lambda \in Y_s \cup A_p \cup \{\pm 1\}$，那么对于 $\ell = 1$ 或 $\ell = 2$,

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c(s, p)\omega_\ell(f, |x - \lambda|^{1/\ell}\rho_n^{1-1/\ell}(x)), \quad x \in I.$$

我们注意到，对于 $r = 0$， $A_p = \{-1, 1\}$ 和 $k = \ell = 2$，推论7.3 已在 [4]中证明。

参考文献

[1] R. K. Beatson，样条函数的受限范围逼近与变分不等式，《SIAM 数值分析杂志》19（1982），第 2 期，372–380。

[2] P. S. Bullen， n-凸性的一个判据，《太平洋数学杂志》36（1971），81–98。

[3] V. K. Dzyadyk 和 I. A. Shevchuk，《函数多项式一致逼近理论》，Walter de Gruyter，柏林，2008。

[4] G. A. Dzyubenko，代数多项式共正逼近的插值估计，《乌克兰数学杂志》74（2022），第4期，563–574。[5] ———，共正逐点逼近，《乌克兰数学杂志》48（1996），第3期，326–334（俄文，附英文和乌克兰文摘要）；英文译本，《乌克兰数学杂志》48（1996），第3期，367–376（1997）。[6] Y. K. Hu、K. A. Kopotun 和 X. M. Yu，索伯列夫空间中的约束逼近，《加拿大数学杂志》49（1997），第1期，74–99。[7] K. A. Kopotun、D. Leviatan、A. Prymak 和 I. A. Shevchuk，代数多项式的一致和逐点保形逼近，《逼近理论综述》6（2011），24–74。[8] K. A. Kopotun、D. Leviatan 和 I. A. Shevchuk，带埃尔米特插值的多项式逼近逐点估计的精确阶，《逼近理论杂志》264（2021），论文编号105538，25页。[9] ———，关于差商的一项估计及其应用，《乌克兰数学杂志》71（2019），第2期，230–245（英文，附英文和乌克兰文摘要）；英文译本，《乌克兰数学杂志》71（2019），第2期，259–277。[10] S. P. Zhou，关于共正逼近，《逼近理论及其应用》（新系列）9（1993），第2期，104–110。[11] ———，共正逼近中的一个反例，《以色列数学杂志》78（1992），第1期，75–83。