arXiv:2305.01748v1 [math.CO] 2 May 2023

# 关于非对称超图的一点说明

Dominik Bohnert * Christian Winter *†

2023年5月4日

**摘要**

若一个 $k$-图 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{G}$ 上不存在恒等映射以外的自同构，则称其为非对称的；若 $\mathcal{G}$ 是非对称的，但其每个非平凡诱导子超图 $\mathcal{G}$ 都是非非对称的，则称其为极小非对称。我们将 Jiang 和 Ne$\check{\text{s}}$et$\check{\text{r}}$il 的一项结果 [8], 加以推广，证明对于每个 $k$-图 $k \geq 3$，都存在无穷多个极小非对称 $k$-图，它们的最大度为 2，且是线性的。此外，我们证明对于 $k \geq 3$, 存在无穷多个 2-正则非对称 $k$-图。

## 1 引言

对于 $k \geq 2$， $k$-均匀超图（或称 $k$-图）是一个二元组 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}(\mathcal{G})\ \mathcal{E}(\mathcal{G}))$，其中边集 $\mathcal{E}(\mathcal{G})$由顶点集 $\mathcal{V}(\mathcal{G})$的 $k$ 元子集组成。请注意，2-图通常称为图。 $k$-图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$上的自同构是一个双射 $\phi\colon\ \mathcal{V} \to \mathcal{V}$，使得对每个 $E \in \mathcal{E}, \{\phi(v)\colon\ v \in E\} \in \mathcal{E}$。非恒等映射的自同构称为非平凡自同构。若一个 $k$-图 $\mathcal{G}$ 存在非平凡自同构，则称其为对称的；否则称其为非对称的。若 $\mathcal{G}$ 是非对称的，且其每个满足 $2 \leq |\mathcal{V}(\mathcal{H})| < |\mathcal{V}(G)|$ 的诱导子超图 $\mathcal{H}$ （其中 $\mathcal{G}$ ）都是对称的，则称 $\mathcal{G}$ 为极小非对称的。

Frucht [6] 于 1949 年首次研究了图的非对称性。Erd˝os 和 R´enyi [5] 著名地指出，几乎所有图都是非对称的。1988 年，Ne$\check{\text{s}}$et$\check{\text{r}}$il 猜想极小非对称图的数量有限，见 [1]。在取得若干部分性结果[10, 12, 11], 之后，Schweitzer 和 Schweitzer [13] 最近证实了这一猜想，他们证明极小非对称图恰有 18 个。在超图的研究中，Ellingham 和 Schroeder [4] 研究了一个相关的非对称性变体。本文采用的非对称性概念由 Jiang 和 Ne$\check{\text{s}}$et$\check{\text{r}}$il [8], 提出，他们证明 Ne$\check{\text{s}}$et$\check{\text{r}}$il 猜想对 $k$-图的自然推广并不成立。

**定理1** (Jiang, Ne$\check{\text{s}}$et$\check{\text{r}}$il [8])。 设 $k \geq 3$ 为正整数。则存在无穷多个极小非对称 $k$图。

他们在其证明中给出了一个明确的构造，其中每个 $k$-图的最大度为3。本文通过要求更为严格的结构性质，对他们的结果进行了推广。在一个 $k$-图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$中，对于任意两个不同的顶点 $u, v \in \mathcal{V}$， $u$和 $v$的共度是 $\mathcal{E}$ 中同时包含 $u$ 和 $v$的边数。 $\mathcal{G}$ 的最大共度是所有顶点对 $u$, $v \in \mathcal{V}$、 $u \neq v$的共度中的最大值。最大共度为1的 $k$-图 $\mathcal{G}$ 称为线性图。等价地，如果任意两条边 $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ 至多相交于一个顶点，则称 $\mathcal{G}$ 是线性的。在此，我们证明了定理1的以下加强形式。

*卡尔斯鲁厄理工学院，德国卡尔斯鲁厄。
†电子邮件： *christian.winter@kit.edu*

**定理 2.** 设 $k \geq 3$ 为一个正整数。存在无穷多个极小非对称 $k$-图，其最大度为 $2$ ，且最大共度为 $1$。

注意，最大度为 1 或最大共度为 0 的每个 $k$-图都是对称的，因此从这个意义上说，我们的结果是最佳可能的。在定理 2 的构造中，大多数顶点的度为 2，但关键在于，有些顶点的度为 1。这引出了一个问题：是否存在每个顶点度数都相同的（极小）非对称 $k$-图? 我们称 $k$-图 $\mathcal{G}$ 为 $r$-正则 图，如果每个顶点的度都是 $r$。

**定理 3.** 对于每个 $k \geq 3$，都存在无穷多个2-正则非对称 $k$-图。

这一结果能否推广到极小非对称 $k$-图，仍是一个开放问题。我们提出以下尚未解决的问题。

**问题 4.** 对于 $k \geq 3$ 和 $r \geq 2$，是否存在 $r$-正则的极小非对称 $k$-图?

注意，对于 $k = 2$ 和任意的 $r$，这个问题的答案是否定的：Schweitzer 和 Schweitzer [13] 所刻画的 18 个极小非对称图中，没有一个是正则图。

本文采用标准的图论概念；正式定义请参阅 Diestel [3]。我们用 $[n]$ 表示前 $n$ 个整数 $\{1, \ldots, n\}$。为保持一致，令 $[0] = \varnothing$。给定函数 $\phi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ 和子集 $W \subseteq \mathcal{V}$，我们将 $W$ 的像记作 $\phi(W) := \{\phi(v) : \ v \in W\}$。

本文的组织结构如下。第 2.1 节介绍证明定理 2 所需的构造；第 2.2 节和第 2.3 节展示这些构造的一些性质。随后，我们在第 2.4 节证明定理 2，并在第 3 节给出定理 3 的证明。

# 2 稀疏极小非对称 $k$-图

## 2.1 构造

以下构造由 Jiang 和 Neˇsetˇril [8]给出。本节中， $[tk]$中的所有索引均视为模 $tk$。

**构造5** (Jiang, Neˇsetˇril [8]). 令 $k \geq 3$ 和 $t \geq 2$。令 $\mathcal{G}_{k,t}$ 为顶点为

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}_{k,t}) = \big\{u_i : \ i \in [tk]\big\} \cup \big\{v_i : \ i \in [tk]\big\} \cup \big\{w_{i,j} : \ i \in [tk], j \in [k-3]\big\}$$

且边为 $\mathcal{E}(\mathcal{G}_{k,t}) = \mathcal{E}_L \cup \mathcal{E}_{cyc}$的图。这里 $\mathcal{E}_L = \big\{E_i : \ i \in [tk]\big\}$ 是$L$-边的集合

$$E_i = \{v_i, u_i, v_{i+1}, w_{i,1}, \ldots, w_{i,k-3}\}.$$

此外，循环边 的集合为 $\mathcal{E}_{cyc} = \big\{E_{i,j} : \ j \in [k-3], i = j + sk, s \in [t]\big\}$ 其中

$$E_{i,j} = \{w_{i,j}, \ldots, w_{i+k-1,j}\}.$$

图1展示了这一构造。

Jiang 和 Neˇsetˇril [8] 通过向 $\mathcal{G}_{k,t}$ 添加一条边，证明了定理1。本文将构造5扩展如下。

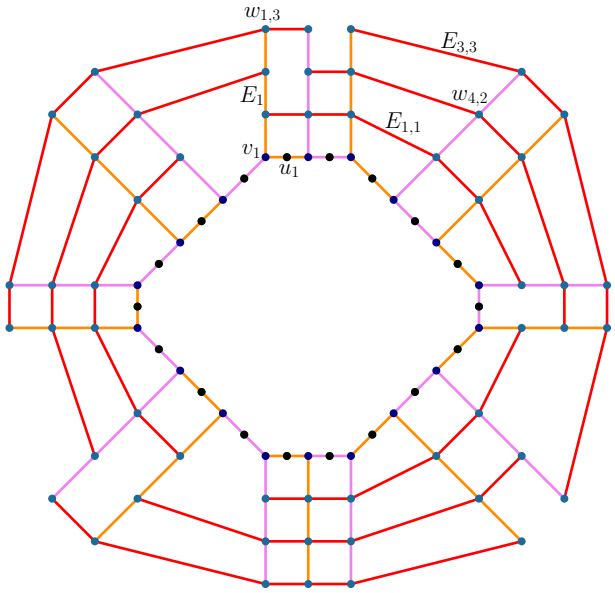


图1：3-图 $\mathcal{G}_{6,\ 3}$

**构造6**。 令 $k \geq 3$ 并令 $t_i \in \mathbb{N}$ 对于 $i \in [k-1]$ 满足 $2 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1}$。我们将 $\mathcal{G}^\ell = (\mathcal{V}^\ell, \mathcal{E}^\ell)$ 表示为 $\mathcal{G}_{k,t_\ell}$ 的一个副本，如构造5中所引入，其中顶点集 $\mathcal{V}^\ell$ 两两不相交。对于每个 $\ell \in [k-1]$，当指代 $\mathcal{G}^\ell$ 中与 $u_i$ 在 $\mathcal{G}_{k,t_\ell}$ 中对应的顶点时，我们记作 $u_i^\ell$；对于 $v_i^\ell, w_{i,j}^\ell, E_i^\ell$ 和 $E_{i,j}^\ell$ 也类似。

现在，设 $x_0$ 是一个额外的顶点，它不包含在任何 $\mathcal{V}^\ell$、 $\ell \in [k-1]$ 中。我们定义 $\mathcal{H}(t_1, \ldots, t_{k-1}) = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$，使得

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^1 \cup \cdots \cup \mathcal{V}^{k-1} \cup \{x_0\} \quad \text{and} \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}^1 \cup \cdots \cup \mathcal{E}^{k-1} \cup \{E_0\},$$

其中 $E_0 = \{x_0, u_1^1, u_1^2, \ldots, u_1^{k-1}\}$。示意见图2： $\mathcal{H}(t_1、\ldots\ldots、t_{k-1})$。

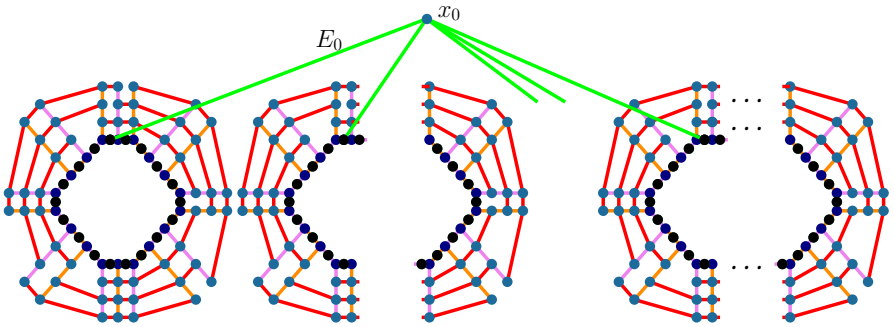


图2： $k$-图 $\mathcal{H}(t_1、\ldots\ldots、t_{k-1})$

当 $k = 3$ 或 $k = 5$ 时， $k$-图 $\mathcal{H}(t_1、\ldots、t_{k-1})$ 是非非对称的，因为引理 10 对这类 $k$ 不成立，另见图 4。因此，我们给出另外两个构造来涵盖这些情况。

构造 7。设 $k \in \{3,5\}$ 和 $2 \le t < t'$。设 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 分别是 $\mathcal{G}_{k,t}$ 和 $\mathcal{G}_{k,t'}$ 的顶点不相交副本。我们将 $u'_i$ 记为 $\mathcal{G}_{k,t'}$ 中与 $u_i$ 对应的顶点；对于 $v'_i, w'_{i,j}, E'_i$ 和 $E'_{i,j}$，记法类似。对于 $\mathcal{G}$ 中的顶点，我们沿用为$\mathcal{G}_{k,t}$定义的标签，例如，$u_i$ 指 $\mathcal{G}$ 中与 $\mathcal{G}_{k,t}$ 中的 $u_i$ 对应的顶点。设 $x_0, y$ 和 $y'$ 是三个互不相同的顶点，且与 $\mathcal{V}(\mathcal{G}) \cup \mathcal{V}(\mathcal{G}')$ 不相交。

对于 $k = 3$，设 $E_0 = \{x_0, u_1, u'_1\}$、$E_y = \{y, u_2, u_3\}$ 和 $E'_y = \{y', u'_2, u'_3\}$。我们定义 3-图

$$\mathcal{H}^3(t,t') = \big(\mathcal{V}(\mathcal{G}) \cup \mathcal{V}(\mathcal{G}') \cup \{x_0, y, y'\}, \mathcal{E}(\mathcal{G}) \cup \mathcal{E}(\mathcal{G}') \cup \{E_0, E_y, E'_y\}\big).$$

对于 $k = 5$，设 $E_0 = \{x_0, u_1, u_2, u'_1, u'_2\}$ 并定义 5-图

$$\mathcal{H}^5(t,t') = \big(\mathcal{V}(\mathcal{G}) \cup \mathcal{V}(\mathcal{G}') \cup \{x_0\}, \mathcal{E}(\mathcal{G}) \cup \mathcal{E}(\mathcal{G}') \cup \{E_0\}\big).$$

这两种构造如图 3 所示。

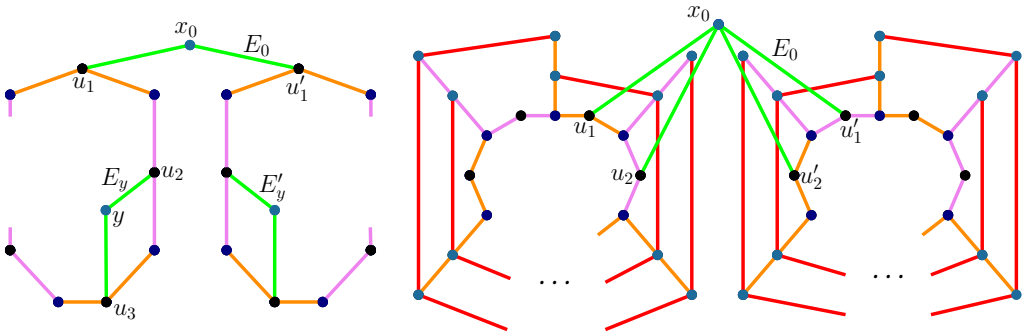


图 3：超图 $\mathcal{H}^3(t,\ t')$ 和 $\mathcal{H}^5(t,\ t')$

## 2.2 $\mathcal{G}_{k,\ t}$的性质

首先，我们陈述 Jiang 和 Ne˘set˘ril [8]所证明的两个性质的略微改写形式。

**引理 8** (Jiang, Ne˘set˘ril [8])。设 $k \ge 3$ 和 $t \ge 2$。设 $\mathcal{G}'$ 是$\mathcal{G}_{k,\ t}$ 的一个诱导子超图，且至少有两个顶点。

*(i)* $\mathcal{G}'$上存在一个非平凡自同构，即 $\mathcal{G}'$ 是对称的。

*(ii)* 若 $E_1 \in \mathcal{E}(\mathcal{G}')$ 且 $|\mathcal{V}(\mathcal{G}')| < |\mathcal{V}(\mathcal{G}_{k,\ t})|$，则存在一个非平凡自同构 $\phi$，它作用于$\mathcal{G}'$，使得 $\phi(E_1) = E_1$ 且 $\phi(u_1) = u_1$。

引理 8(i)的一个更强版本见 [8]，中的引理 4(2)，其中考虑的是弱 子超图。引理 8(ii)由 [8] 中引理 3(3)的证明可得。

**引理 9**。设 $k \ge 3$ 和 $t \ge 2$。设 $\phi$ 是 $\mathcal{G}_{k,\ t}$ 上的自同构。

*(i)* 则 $\{\phi(u_i) :\ i \in [tk]\} = \{u_i :\ i \in [tk]\}$。此外，对于每个 $E \in \mathcal{E}_L$，$\phi(E) \in \mathcal{E}_L$，且 $\{\phi(v_i) :\ i \in [tk]\} = \{v_i :\ i \in [tk]\}$。*(ii)* 存在一个 $j \in [tk]$，使得以下二者之一成立：对于每个 $i \in [tk]$，$\phi(E_i) = E_{i+j-1}$；或者对于每个 $i \in [tk]$，$\phi(E_i) = E_{j-i+1}$，其中索引均按 $tk$ 取模。

我们指出，引理 9(i) 的陈述在 [8] 中是隐含给出的。与引理 9(ii) 类似的陈述，见于 [8] 中的引理 3(1) 以及 [9] 中的引理 9(1)。遗憾的是，这两个版本都只准确涵盖了 $\phi$ 的两种刻画之一。

*引理 9 的证明。*注意，$u_i$ 恰好是 $\mathcal{G}_{k,t}$ 中度为 1 的顶点。注意，由于 $\phi$ 是一个自同构，对于每个顶点 $v$，$v$ 和 $\phi(v)$ 的度都相同，因此$\phi(\{u_i: i \in [tk]\}) = \{u_i: i \in [tk]\}$。这就证明了 (i)。

(i) 的一个推论是，对于某个 $j \in [tk]$，$\phi(E_1) = E_j$，因此 $\{\phi(v_1)\ \phi(v_2)\} = \{v_j, v_{j+1}\}$。如果 $\phi(v_1) = v_j$ 且 $\phi(v_2) = v_{j+1}$，那么 $\phi(E_2) = E_{j+1}$，从而 $\phi(v_3) = v_{j+2}$。通过迭代，我们发现对于每个 $i \in [tk]$，$\phi(E_i) = E_{i+j-1}$。现在假设 $\phi(v_1) = v_{j+1}$ 且 $\phi(v_2) = v_j$。那么 $\phi(E_2) = E_{j-1}$，并通过迭代可得，对于每个 $i \in [tk]$，$\phi(E_i) = E_{j-i+1}$。至此，(ii) 得证。 □

**引理 10.** 设 $k = 4$ 或 $k \geq 6$ 和 $t \geq 2$。设 $\phi$ 是 $\mathcal{G}_{k,t}$ 上的自同构。如果$\phi(E_1) = E_1$，那么 $\phi$ 是恒等映射。

[9] 的引理 9(2) 给出了一个与引理 10 密切相关的结果，但没有提供证明。请注意，[8] 的引理 3(2) 几乎对应于我们的引理 10，但对于 $k = 3$ 和 $k = 5$ 并不成立，例如参见图 4 中所示的非平凡自同构。

*引理 10 的证明。*假设 $\phi$ 不是恒等映射。则由引理 9 可知，对于每个 $i \in [tk]$，$\phi(E_i) = E_{2-i}$。

若 $k = 4$，则引理 9(i) 表明 $\{\phi(w_{i,1}): i \in [tk]\} = \{w_{i,1}: i \in [tk]\}$。由于 $\phi(E_1) = E_1$ 且 $\phi(E_2) = E_{tk}$，我们分别得到 $\phi(w_{1,1}) = w_{1,1}$ 和 $\phi(w_{2,1}) = w_{tk,1}$。注意，边 $E_{1,1}$ 包含顶点 $w_{1,1}$ 和 $w_{2,1}$。然而，在 $\mathcal{G}_{k,t}$ 中不存在包含 $\phi(w_{1,1}) = w_{1,1}$ 和 $\phi(w_{2,1}) = w_{tk,1}$ 的边，这就产生了矛盾。

现在假设 $k \geq 6$。那么考虑边 $E_{3,3} = \{w_{3,3}, \ldots, w_{k+2,3}\}$。它与每一条边 $E_3, \ldots, E_{k+2}$ 都有交集。由于 $\phi$ 是一个自同构，$\phi(E_{3,3})$ 与每一条边 $\{\phi(E_3) \ldots, \phi(E_{2+k})\} = \{E_{(t-1)k}, \ldots, E_{tk-1}\}$ 都有非空交集。然而，很容易从我们的构造中看出，在 $\mathcal{G}_{k,t}$ 中不存在这样一条边。 □

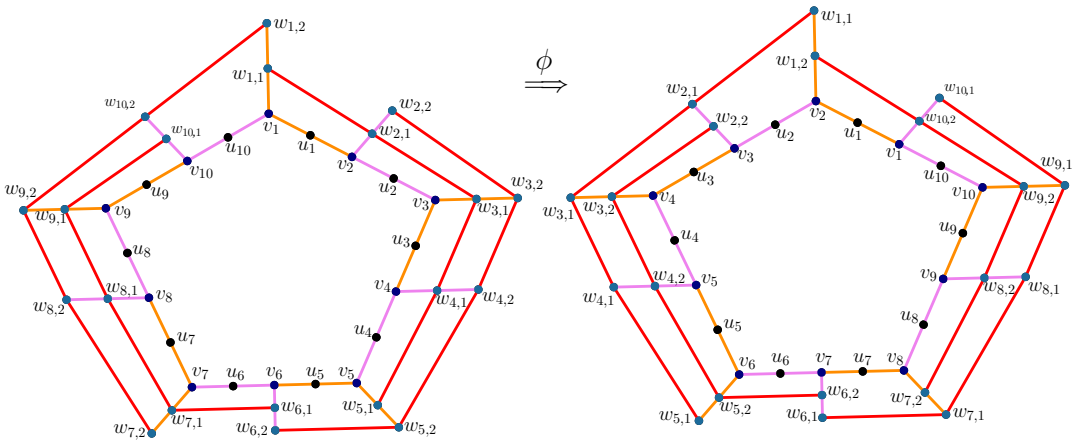


图 4：非平凡自同构 $\phi$ 在 $\mathcal{G}_{5,\,2}$ 与 $\phi(E_1) = E_1$

## 2.3 连通性

接下来，我们引入 $k$-图中两个顶点之间的连通性这一概念。在 $k$-图$\mathcal{G}$中， $v_1 - v_{r+1}$-路径是一个交替序列（$v_1, E_1, v_2, E_2, \ldots, E_r, v_{r+1}$），其中包含 $r+1$ 个互不相同的顶点 $v_i \in \mathcal{V}$（$\mathcal{G}$）和 $r$ 条互不相同的边 $E_i \in \mathcal{E}$（$\mathcal{G}$），并且对于任意 $i \in [r]$， $v_i$ 和 $v_{i+1}$ 都包含在 $E_i$ 中。此类路径通常称为*Berge*路径。如果两条 $u-v$-路径的底层边集互不相交，则称它们是边不相交的。如果存在 $t$ 条两两边不相交的 $u-v$-路径，则称 $u$ 和 $v$ 是$t$-连通的。显然，自同构保持连通性不变：

**命题 11.** 设 $\mathcal{G}$ 是一个 $k$-图，且 $u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$。设 $\phi$ 是 $\mathcal{G}$ 上的一个自同构。那么 $u$ 和 $v$ 是 $t$-连通的，当且仅当 $\phi(u)$ 和 $\phi(v)$ 是 $t$-连通的。

**引理 12**。 设 $k \geq 3$ 和 $t \geq 2$，并考虑 $\mathcal{G} := \mathcal{G}_{k,\,t}$。设 $E \in \mathcal{E}$（$\mathcal{G}$），并令 $u$、$v \in E$ 为两个不同的度为2的顶点，即 $u$、$v \notin \{u_1, \ldots, u_{tk}\}$。那么 $u$和 $v$是2-连通的。

证明。 考虑 $\mathcal{G}'$，即由 $\mathcal{G}$ 删除边 $E$得到的 $k$-图。我们将证明 $u$ 和 $v$ 在 $\mathcal{G}'$中是 1-连通的。回顾一下，边集 $\mathcal{E}(\mathcal{G}) = \mathcal{E}_L \cup \mathcal{E}_{cyc}$ 由 L-边 $E_i$ 和循环边 $E_{i,\,j}$组成。

如果 $E \in \mathcal{E}_{cyc}$，那么 $u$ 和 $v$ 包含在 $\mathcal{G}$ 的不同 L-边中，不妨设为 $u \in E_1$ 和 $v \in E_j$。那么 $(u, E_1, v_2, E_2, v_3, \ldots, E_j, v)$ 是 $\mathcal{G}'$ 中的一条 $u-v$-路径。

若 $E \in \mathcal{E}_L$，令 $i$ 使得 $E = E_i$。注意， $\mathcal{G}'$ 的 L-边构成一条包含所有 $v_j$、 $j \in [tk]$ 的 $v_{i+1} - v_i$-路径。因此，若对于任意$j$， $j' \in [tk]$， $\mathcal{G}'$中存在一条 $u - v_j$-路径和一条 $v - v_j$-路径，那么我们也能在 $\mathcal{G}'$ 中找到一条 $u-v$-路径。若 $u \in \{v_1, v_2\}$，则存在一条平凡的 $u - v_i$-路径。否则，对于某条循环边 $E' \in \mathcal{E}_{cyc}$，有 $u \in E'$。取 $E' \setminus \{u\}$ 中任意一个顶点 $w$。那么 $w$ 也包含在某条 L-边 $E_j \in \mathcal{E}_L$ 中，其中 $j \in [tk]$。于是 $(u,\ E',\ w,\ E_j,\ v_j)$ 是一条 $u - v_j$-路径。类似地，我们找到一条 $v - v_j$-路径，从而完成证明。

□

## 2.4 主要结果的证明

定理 *2* 的证明。 对于证明的第一部分，设 $k = 4$ 或 $k \geq 6$。令 $t_i \in \mathbb{N}$ for$i \in [k-1]$，使得 $2 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1}$。我们将证明 $\mathcal{H} := \mathcal{H}(t_1, \ldots, t_{k-1})$ 是极小非对称的。为了验证 $\mathcal{H}$ 是非对称的，令 $\phi$ 为 $\mathcal{H}$ 上的任意一个自同构。回顾一下， $E_0$ 是 $\mathcal{H}$ 的一条边，它连接了原本彼此不相交的 $\mathcal{G}_{k,t_i}$, $i \in [k-1]$ 的副本。

首先，我们证明 $\phi(E_0) = E_0$。我们知道 $\phi(E_0) \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$，因此假设对于某个 $E \neq E_0$， $\phi(E_0) = E$。那么对于某个 $\ell \in [k-1]$， $E \in \mathcal{E}(\mathcal{G}^\ell)$。考虑两个不同的顶点$u$、$v \in E_0 \setminus \{x_0\}$。这两个顶点在 $\mathcal{H}$ 中的度均为 2。由于 $\phi$ 是一个自同构， $\phi(u)$ 和$\phi(v)$ 是 $E$ 中两个不同的、度为 2 的顶点。根据引理 12， $\phi(u)$ 和 $\phi(v)$ 在 $\mathcal{G}^\ell$ 中是 2-连通的，因此特别地，它们在 $\mathcal{H}$ 中也是 2-连通的。然而，在我们的构造中，顶点 $u$ 和$v$并非 2-连通，因为它们之间唯一的路径是 $(u, E_0, v)$。这与命题 11 矛盾。因此，我们得出 $\phi(E_0) = E_0$，所以特别地， $\phi(x_0) = x_0$。

由于 $\phi(E_0) = E_0$, $\phi$ 也是 $k$-图 $\mathcal{H} - E_0$ 上的一个自同构，而该图是一个孤立顶点 $x_0$ 与 $k$ 个 $\mathcal{G}^\ell$-图的不交并。回想一下， $t_\ell$ 两两不相交，因此 $\mathcal{G}^\ell$ 两两不同构。这意味着，对于每个 $\ell \in [k-1]$，都有 $\{\phi(E) :\ E \in \mathcal{E}(\mathcal{G}^\ell)\} = \mathcal{E}(\mathcal{G}^\ell)$，即 $\phi$ 将每个 $\mathcal{G}^\ell$ 映射到自身。

现在我们证明 $\phi$ 是恒等映射，因此 $\mathcal{H}$ 是非对称的。任取一个 $\ell \in [k-1]$。注意到 $\phi(u_1^\ell) \in \phi(E_0) \cap \phi(E_1^\ell)$，因此 $\phi(u_1^\ell) \in E_0 \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}^\ell)$。这意味着 $\phi(u_1^\ell) = u_1^\ell$，从而 $\phi(E_1^\ell) = E_1^\ell$。现在，由引理 10可知， $\phi$ 在 $\mathcal{G}^\ell$ 上的限制是恒等映射。由于

$\ell$ 是任意选取的，因此整个自同构 $\phi$: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是恒等映射。我们得出结论： $\mathcal{H}$ 是非对称的。

现在令 $\mathcal{H}'$ 为 $\mathcal{H}$ 的任意诱导子超图，其中 $2 \leq |\mathcal{V}(\mathcal{H}')| < |\mathcal{V}(\mathcal{H})|$。我们将证明 $\mathcal{H}'$ 是对称的。可以假设 $|\mathcal{E}(\mathcal{H}')| \geq 2$；否则， $\mathcal{H}'$ 显然是对称的。

**情形 1：** $E_0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{H}')$。
令 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H}')$ 满足 $E \neq E_0$，即对于某个固定的 $\ell \in [k-1]$，有 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{G}^\ell)$。令 $\mathcal{H}''$ 为 $\mathcal{H}'$ 中由顶点集 $\mathcal{V}(\mathcal{G}^\ell)$ 诱导的子超图。由于 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H}'')$， $\mathcal{H}''$ 至少有两个顶点。现在，引理 8(i) 给出了 $\mathcal{H}''$ 上的一个非平凡自同构 $\psi$ 。我们按如下方式将这个自同构扩展到 $\mathcal{H}'$ 。令 $\phi$ ：对于每个 $w \in \mathcal{V}(\mathcal{H}'')$， $\mathcal{V}(\mathcal{H}') \to \mathcal{V}(\mathcal{H}')$，且 $\phi(w) = \psi(w)$；对于每个 $w \notin \mathcal{V}(\mathcal{H}'')$， $\phi(w) = w$ 。那么 $\phi$ 是 $\mathcal{H}'$ 上的一个非平凡自同构，因此 $\mathcal{H}'$ 是对称的。

**情形 2：** $E_0 \in \mathcal{E}(\mathcal{H}')$.
如果存在某个 $\ell \in [k-1]$ 使得 $E_1^\ell \notin \mathcal{E}(\mathcal{H}')$，那么考虑函数 $\phi$：$\mathcal{V}(\mathcal{H}') \to \mathcal{V}(\mathcal{H}')$，其中 $\phi(u_1^\ell) = x_0$， $\phi(x_0) = u_1^\ell$，并且对于每个 $w \in \mathcal{V}(\mathcal{H}') \setminus \{u_1^\ell, x_0\}$，都有 $\phi(w) = w$。注意，这是 $\mathcal{H}'$上的一个非平凡自同构。

如果对每个 $\ell' \in [k-1]$ 都有 $E_1^{\ell'} \in \mathcal{E}(\mathcal{H}')$，则固定 $\ell$，使得存在一个顶点 $v \in \mathcal{V}(\mathcal{G}^\ell) \setminus \mathcal{V}(\mathcal{H}')$，并令 $\mathcal{H}''$ 为由 $\mathcal{V}(\mathcal{G}^\ell)$ 诱导的 $\mathcal{H}'$ 的子超图。于是 $2 < |\mathcal{V}(\mathcal{H}'')| < |\mathcal{V}(\mathcal{G}^\ell)|$，因此引理 8(ii) 得出 $\mathcal{H}''$ 上存在一个非平凡自同构 $\psi$，满足 $\psi(u_1^\ell) = u_1^\ell$。与情形 1 类似，我们将 $\psi$ 扩展为 $\mathcal{H}'$ 上的一个非平凡自同构。

这就完成了对 $k = 4$ 和 $k \geq 6$的证明。对于 $k = 3$ 和 $k = 5$，令 $t$ 和 $t'$ 为满足 $2 \leq t < t'$的任意整数。我们证明 $\mathcal{H}^3 := \mathcal{H}^3(t,\ t')$ 和 $\mathcal{H}^5 := \mathcal{H}^5(t,\ t')$ 是极小非对称的。证明与上文给出的论证类似，因此这里只提供证明概要。详细证明见第一作者的学位论文 [2]。

若 $k = 3$，令 $\phi$ 为 $\mathcal{H}^3$上的任意自同构。于是 $\phi(E_0) = E_0$，因此 $\{\phi(E) :\ E \in \mathcal{E}(\mathcal{G})\} = \mathcal{E}(\mathcal{G})$，以及 $\{\phi(E) :\ E \in \mathcal{E}(\mathcal{G}')\} = \mathcal{E}(\mathcal{G}')$。因此， $\phi(u_1) = u_1$，且 $\phi(u_1') = u_1'$。其中有六条边，每个顶点的度均为 2，即 $E_i$ 和 $E_i'$（当 $i \in [3]$时）。容易看出，它们在 $\phi$下均保持不变，由此可推出 $\phi$ 是恒等映射。因此， $\mathcal{H}^3$ 是非对称的。

现在考虑一个由 $\mathcal{H}^3$ 诱导的子超图 $\mathcal{H}'$ ，其中 $2 \leq |\mathcal{V}(\mathcal{H}')| < |\mathcal{V}(\mathcal{H}^3)|$。我们可以假设不存在一条边包含两个度为 1 的顶点，否则 $\mathcal{H}'$ 显然是对称的。如果 $E_0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{H}')$，则 $\mathcal{H}'$ 上存在一个非平凡自同构 $\phi$ ，满足 $\phi(u_2) = u_3$ 且 $\phi(u_3) = u_2$。如果 $E_0 \in \mathcal{E}(\mathcal{H}')$，则 $E_1, E_1' \in \mathcal{E}(\mathcal{H}')$。令 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H}^3) \setminus \mathcal{E}(\mathcal{H}')$，并设 $E \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$。现在，若 $E_y \notin \mathcal{E}(\mathcal{H}')$，我们可以像情形 2 中那样应用引理 8(ii)，因此不妨设 $E_y \in \mathcal{E}(\mathcal{H}')$。由于没有边包含两个度为 1 的顶点，我们得出 $\mathcal{E}(\mathcal{H}') \cap \mathcal{E}(\mathcal{G}) = \{E_1, E_2, E_3, E_y\}$。于是， $\mathcal{G}$ 上存在一个自同构 $\phi$，满足 $\phi(E_y) = E_3$ 且 $\phi(E_3) = E_y$。

若 $k = 5$，给定 $\mathcal{H}^5$ 上的一个自同构 $\phi$，我们可见 $\phi(E_0) = E_0$，因此 $\{\phi(u_1)\ \phi(u_2)\} = \{u_1, u_2\}$。若 $\phi(u_1) = u_2$ 且 $\phi(u_2) = u_1$，则 $\phi(E_1) = E_2$， $\phi(E_2) = E_1$ 且 $\phi(E_3) = E_{tk}$。注意，边 $E_1$,1 与 $E_1$、$E_2$ 和 $E_3$ 均相交，但在 $\mathcal{E}(\mathcal{H}^5)$ 中不存在一条边与 $\phi(E_1) = E_2$、$\phi(E_2) = E_1$、$\phi(E_3) = E_{tk}$ 相交，这就产生了矛盾。因此 $\phi(u_1) = u_1$ 且 $\phi(u_2) = u_2$；类似地， $\phi(u_1') = u_1'$ 且 $\phi(u_2') = u_2'$。由引理 9(ii)， $\phi$ 是恒等映射，因此 $\mathcal{H}^5$ 是非对称的。

设 $\mathcal{H}'$ 是 $\mathcal{H}^5$ 的一个诱导子超图，使得 $2 \leq |\mathcal{V}(\mathcal{H}')| < |\mathcal{V}(\mathcal{H}^5)|$。若$E_0 \notin \mathcal{E}(\mathcal{H}')$，则按情形 1 的方法处理。否则，类似于情形 2 的论证，我们可以假设 $E_1$，$E_2$，$E_1'$，$E_2' \in \mathcal{E}(\mathcal{H}')$。那么，引理 8(ii) 的一个变式（参见 [2], 的引理 2.9(i)）给出了 $\mathcal{H}'$ 上的一个非平凡自同构。 □

# 3 正则非对称 $k$-图

为了证明定理 3，我们需要 Izbicki [7] 的一个结果。

**定理 13** (Izbicki [7])。 对于每个 $k \geq 3$，都存在无穷多个 $k$-正则非对称的2-图。

给定一个 $k$-正则 2-图 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$，$G$ （超图）对偶是 $k$-图 $\mathcal{H} = (\mathcal{E}, \{A(v) : v \in \mathcal{V}\})$，其中 $A(v) = \{E \in \mathcal{E} : v \in E\}$ 是 $v$ 的邻接集。注意，对于每个 $v$，都有$|A(v)| = k$，因此 $\mathcal{H}$ 是一个定义良好的 $k$-图。图 5 给出了一个超图对偶的示例。注意，正则 2-图中的邻接集是唯一的：

**命题 14.** 设 $G$ 是一个 $r$-正则 2-图，$r \geq 2$。设 $u, v \in \mathcal{V}(G)$ 是 $G$的两个不同顶点。那么 $A(u) \neq A(v)$。

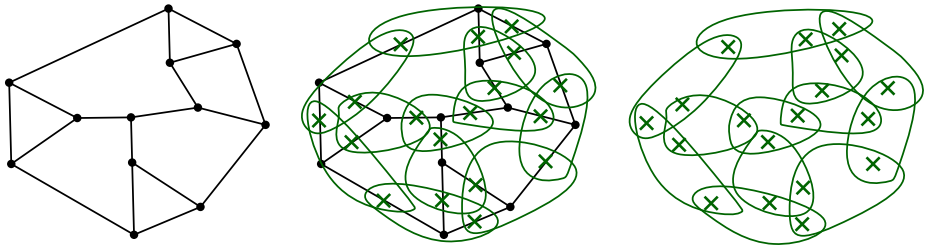

图 5：3-正则 Frucht 图（左）及其超图对偶（右）。

**引理 15**。 设 $G$ 是某个 $r \geq 3$ 的 $r$-正则非对称图。那么 $G$ 的超图对偶也非对称。

证明。 设 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$。令 $\phi_{\mathcal{H}}$ 为对偶 $\mathcal{H}$ 上的任意一个自同构。根据对偶的定义，我们知道 $\phi_{\mathcal{H}}$: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ 是一个双射，使得对于任意 $v \in \mathcal{V}$，其邻接集 $A(v)$ 中的边被映射到 $\{\phi_{\mathcal{H}}(E) : E \in A(v)\} = A(w_v)$，其中 $w_v \in \mathcal{V}$ 是某个顶点。根据命题 14，$w_v$ 被唯一确定。

我们定义函数 $\phi_G$: $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $\phi_G(v) = w_v$。注意到 $\phi_G$ 是一个双射。现在我们证明 $\phi_G$ 是 $G$ 上的一个自同构。考虑任意一条边 $E_{uv} = \{u, v\} \in \mathcal{E}$。那么 $E_{uv} \in A(v)$，因此 $\phi_{\mathcal{H}}(E_{uv}) \in \{\phi_{\mathcal{H}}(E) : E \in A(v)\} = A(w_v) = A(\phi_G(v))$。同理，我们得到 $\phi_{\mathcal{H}}(E_{uv}) \in A(\phi_G(u))$。因此，

$$\phi_{\mathcal{H}}(E_{uv}) = \{\phi_G(u), \phi_G(v)\}. \tag{1}$$

这意味着 $\{\phi_G(u)\ \phi_G(v)\} \in \mathcal{E}$，因此 $\phi_G$ 是 $G$上的一个自同构。由于 $G$ 是非对称的，$\phi_G$ 是恒等映射。于是，对于每条边 $E_{uv} = \{u, v\} \in \mathcal{E}$，由 (1) 可得$\phi_{\mathcal{H}}(E_{uv}) = \{u, v\} = E_{uv}$，即 $\phi_{\mathcal{H}}$ 是恒等映射。因此，$\mathcal{H}$ 是非对称的。 □

定理 *3* 的证明。令 $k \geq 3$。令 $G_1, G_2, \ldots$ 为定理 13 所给出的两两不同的无限族 $k$-正则非对称图。令 $\mathcal{H}_i$ 为 $G_i$的超图对偶， $i \in \mathbb{N}$。注意， $\mathcal{H}_i$是两两不同的 2-正则 $k$图。引理 15 给出， $\mathcal{H}_i$是非对称的。

□

**致谢：** 第二位作者的研究部分得到了德国研究联合会（DFG）资助项目 FKZ AX 93/2-1 的支持。作者感谢 Maria Axenovich 和 Torsten Ueckerdt 富有帮助的讨论，并感谢 Felix Clemen 对稿件提出的意见。

# 参考文献

[1] J. Bang-Jensen、B. Reed、M. Schacht、R. ˇS´amal、B. Toft 和 U. Wagner。《关于 Jarik Neˇsetˇril 提出的六个问题》。载于：《离散数学专题》。算法与组合学，第 26 卷。施普林格，柏林，2006 年。[2] D. Bohnert。《非对称超图》。学士论文，卡尔斯鲁厄理工学院，2023 年。[3] R. Diestel。《图论》。第五版。数学研究生教材，第 173 卷。施普林格，柏林，2017 年。[4] M. N. Ellingham 和 J. Z. Schroeder。《区分划分与非对称均匀超图》。《当代数学艺术》4，111–123，2011 年。[5] P. Erd˝os 和 A. R´enyi。《非对称图》。《匈牙利科学院数学学报》14，295–315，1963 年。[6] R. Frucht。《具有给定抽象群的三度图》。《加拿大数学杂志》1(4)，365–378，1949 年。[7] H. Izbicki。《具有预定性质的任意度正则图》。《数学月刊》64，15–21，1960 年。[8] Y. Jiang 和 J. Neˇsetˇril。《关于非对称超图》。载于：《EuroComb 2021 扩展摘要集》。数学发展趋势，第 14 卷。Birkh¨auser，Cham，2021 年。[9] Y. Jiang 和 J. Neˇsetˇril。《极小非对称超图》。arXiv 预印本，见 arXiv:2111.08077v3，2023 年。[10] J. Neˇsetˇril。《关于非对称树的同余定理》。《太平洋数学杂志》37(3)，771–778，1971 年。[11] J. Neˇsetˇril 和 G. Sabidussi。《诱导长度为 4 的极小非对称图》。《图与组合》8，343–359，1992 年。[12] G. Sabidussi。《团簇、极小非对称图与对合》。《组合理论杂志》B 辑 53(1)，40–79，1991 年。[13]Pascal Schweitzer 和 Patrick Schweitzer。《极小非对称图》。《组合理论杂志》B 辑 127，215–227，2017 年。