arXiv:2305.01749v2 [math.OC] 9 Aug 2023

时周期涡流问题最优控制的后验误差估计

M. WOLFMAYR

摘要。本文对分布式涡流最优控制问题及其状态方程在时周期设置下进行多谐波分析，并推导函数型后验估计。通过推导最优性系统和正问题的弱时空变分形式的 inf-sup 条件和上确界-上确界条件，证明了其解的存在性和唯一性。利用 inf-sup 条件和上确界-上确界条件，在函数型后验估计框架下，我们为最优控制问题和正问题的逼近误差推导出有保证、精确且完全可计算的界。本文给出了所推导估计的首批计算结果。

1. 引言

我们讨论时周期涡流最优控制及其相应的边值问题。我们为时周期边值问题和最优控制问题的最优性系统推导后验误差估计。此前， [33, 34] 已针对时间周期抛物型问题推导出类似估计。然而，时周期涡流问题的函数型估计尚属新内容，本文将对此进行讨论。这些问题源于麦克斯韦方程组在电磁学中的应用。 [15] 讨论了麦克斯韦方程组的涡流模型。

由于时间周期性，用时间傅里叶级数展开来表述这些问题是一个自然的框架。随后可以通过例如有限元法对傅里叶系数进行离散化。这种方法此前已应用于 [56] 中的非线性涡流问题，之后在 [8, 9, 10]中进行了分析并提出了高效求解器。 [18, 19]中应用了区域分解方法。

最优控制问题是许多出版物探讨的主题，其中包括著作 [25,52, 14]。多谐波有限元法是一种时空方法。近期， [36, 37, 35]中介绍了用于抛物型最优控制问题的时空方法。

[38, 54]中讨论了针对时间周期抛物型最优控制问题的多谐波分析及其 inf-sup 和 sup-sup 估计。应用巴布什卡-阿齐兹定理可由这些条件得到解的存在性和唯一性，参见 [6, 7]。 [44], 中提出了最小残量法（MINRES）的稳健预条件，该方法随后在 [26, 27]中用于时间周期和多谐波抛物型最优控制问题。

函数型后验估计已在例如 [50] 中提出，并在 [48]中针对时变问题进行了讨论。这类可靠的方法已在多篇论文和著作中得到探讨。我们还可参阅著作 [43, 49, 39] 以及近期的文献 [46] ，其中也讨论了涡流问题。 [24, 2, 42, 45, 1]将泛函后验估计应用于麦克斯韦型问题。对于最优控制问题， [21, 22] 讨论了函数型后验估计，并对杨不等式引入的参数进行了二次泛函最小化。

本研究聚焦于涡流问题，因为电磁设备仿真方面存在广泛的应用需求。为了求得精确解近似的候选解，我们采用多谐波有限元法对问题进行了离散化。多谐波方法用于时间离散，而与傅里叶系数对应的时空相关线性方程组则采用有限元法进行离散化。在 [57], 中，讨论了时谐情形下系数的有限元分析。我们使用最低阶 Nédélec（边）基函数来

近似空间旋度空间，参见 [40, 41]。数值测试中，我们使用 *Fast FEM assembly:* 边元工具箱 计算质量矩阵、刚度矩阵和载荷向量，参见 [47, 3, 53]。时周期涡流最优控制问题的高效求解器和预条件子已在 [29, 28, 30] 中讨论，之后也在 [4, 5]中进行了探讨。

文献 [17] 等讨论了涡流问题的自适应方法。文献 [55]，介绍了一种用于拟线性旋度-旋度问题的自适应边元方法。文献 [12] 研究了涡流问题的层次误差估计子，文献 [11, 51] 等以及近期的文献 [13] 则研究了基于残差的误差估计子。关于谐波涡流问题误差估计子的近期研究包括文献 [20]。文献 [16]，给出了基于分片局部平衡的估计。

本文结构如下：第 2 节介绍模型问题，该问题是一个关于状态和控制的最小化问题，并包含时周期状态方程，即正问题。第 3 节介绍时周期问题的傅里叶空间框架，并推导弱时空变分形式，这些形式构成第 4 节中下确界-上确界条件和上确界-上确界条件及相关估计的基础。第 5 节介绍多谐波有限元离散。最后，第 6 节和第 7 节分别推导正问题和最优控制问题的后验误差估计。第 8 节讨论数值结果，第 9 节总结全文并展望未来工作。

2. 模型问题

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为一个有界利普希茨区域，其中 $\Gamma := \partial\Omega$ 表示边界。我们考虑一个时周期设置，给定时间区间 $(0,T)$，该区间也等于时间周期。我们分别用 $Q := \Omega \times (0,T)$ 和 $\Sigma := \Gamma \times (0,T)$ 表示完整的时空域（也称为时空柱）及其外表面积。设 $\boldsymbol{y_d}$ 为给定的期望状态。状态和控制函数 $\boldsymbol{y}$ 及 $\boldsymbol{u}$ 是最小化问题的研究对象

$$\min_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}} \mathcal{J}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}) = \min_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}} \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_d}\|^2_{L^2(Q)} + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(Q)} \tag{1}$$

和时周期状态方程

$$\sigma\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial t} + \mathbf{curl}(\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u} \qquad \text{在 } Q \text{ 中,} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{n} = 0 \qquad \text{于 } \Sigma, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}(T) \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中,} \tag{4}$$

$$\operatorname{div}(\sigma\boldsymbol{y}) = 0 \qquad \text{在 } Q. \tag{5}$$

我们隐式地纳入库仑规范条件 (5)：假定给定的期望状态 $\boldsymbol{y_d}$ 满足弱无散条件，即

$$\int_\Omega \boldsymbol{y}_d \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} = 0 \qquad \forall\, v \in H^1_0(\Omega). \tag{6}$$

在时周期设置下，涡流最优控制问题中的未知函数 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 也继承了无散性质。系数 $\sigma = \sigma(\boldsymbol{x})$ 和 $\nu = \nu(\boldsymbol{x})$ 分别表示电导率和磁阻率。综上，该问题构成一个时周期分布式涡流最优控制问题。本文考虑涡流问题 (2)-(4) 的线性版本，其中 Ω 为导电区域：磁阻率 ν 与 $|\textbf{旋度}\,\boldsymbol{y}|$无关，且 σ 和 ν 均严格为正且一致有界，即

$$0 < \underline{\sigma} \le \sigma(\boldsymbol{x}) \le \overline{\sigma} \quad \text{ and } \quad 0 < \underline{\nu} \le \nu(\boldsymbol{x}) \le \overline{\nu}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

然而，我们也可以将分析扩展到由导电区域和非导电区域组成的有界区域情形，见 [29]。期望状态 $\boldsymbol{y_d}$ 是给定的目标，我们尝试通过合适的控制 $\boldsymbol{u}$ 来达到该目标。正则化参数 α 在式 (1) 的代价泛函 $\mathcal{J}(\cdot,\cdot)$ 中对控制代价进行加权。

最优控制问题 (1)-(4) 的解等价于其最优性系统的解。最小化问题的拉格朗日泛函为

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}) := \mathcal{J}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}) - \int_0^T \int_\Omega \big(\sigma\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial t} + \mathbf{curl}(\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{u}\big)\boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{x}dt, \tag{7}$$

其中，$\boldsymbol{p}$ 表示所谓的拉格朗日乘子或伴随状态。必要最优性条件

$$\nabla_{\boldsymbol{y}}\mathcal{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}) = 0, \qquad \nabla_{\boldsymbol{u}}\mathcal{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}) = 0, \qquad \nabla_{\boldsymbol{p}}\mathcal{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}) = 0, \tag{8}$$

刻画了拉格朗日泛函 (7) 的一个驻点。我们不对控制施加任何不等式约束。因此，我们可以利用 (8) 的第二个条件，即 $\boldsymbol{u} = -\alpha^{-1}\boldsymbol{p}$ in Q，从最优性系统中消去控制 $\boldsymbol{u}$。由此可推导出一个约化最优性系统，其经典形式可写为

$$\sigma\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial t} + \mathbf{curl}(\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}) = -\alpha^{-1}\boldsymbol{p} \quad \text{在 } Q \text{ 中,} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}(T) \quad \text{在 } \overline{\Omega} \text{ 中,} \tag{11}$$

$$-\sigma\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} + \mathbf{curl}(\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_d} \quad \text{在 } Q \text{ 中,} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{在 } \Sigma \text{ 上,} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}(T) \quad \text{在 } \overline{\Omega} \text{ 中。} \tag{14}$$

$\boldsymbol{y}_d$ 的弱散度自由性质传递给状态 $\boldsymbol{y}$ 和控制 $\boldsymbol{u}$，因此也传递给伴随状态 $\boldsymbol{p}$。

在本文中，我们推导状态方程 (2)-(5) 和最优性系统 (9)-(14) 的弱时空变分形式。随后，我们为最优控制问题导出后验误差估计。在下一节中，我们将介绍时空区域 Q 上函数的索伯列夫空间。本文所用的记号与 Ladyzhenskaya [31] 和 Ladyzhenskaya 等人 [32] 使用的记号相近。

3. 傅里叶空间设定

令 $\boldsymbol{L^2}(\Omega) := [L^2(\Omega)]^3$ 且 $\boldsymbol{L^2}(Q) := [L^2(Q)]^3$。定义空间 $\boldsymbol{H^{curl}}(\Omega) := \{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L^2}(\Omega) : \textbf{旋度}\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L^2}(\Omega)\}$ 以及 $\boldsymbol{H_0^{curl}}(\Omega) := \{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H^{curl}}(\Omega) : \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n} = 0$（定义于 Γ} 上）。此外，$H^1(\Omega) := \{v\in L^2(\Omega) : \nabla v\in\boldsymbol{L^2}(\Omega)\}$ 以及 $H_0^1(\Omega) := \{v\in H^1(\Omega) : v = 0$（定义于 Γ} 上）。

对于时空域 Q，定义函数空间 $\boldsymbol{H^{curl,\,0}}(Q) = \{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L^2}(Q) : \textbf{旋度}_{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L^2}(Q)\}$ 以及 $\boldsymbol{H^{curl,\,1}}(Q) = \{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L^2}(Q) : \textbf{旋度}_{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L^2}(Q)\ \partial_t\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L^2}(Q)\}$。接下来，定义 $H^{1,\,0}(Q) = \{v\in L^2(Q) : \nabla_{\boldsymbol{x}}v\in\boldsymbol{L^2}(Q)\}$ 以及 $H^{1,\,0\,0}(Q)$，后者包含齐次狄利克雷边界条件。符号$\textbf{旋度}_{\boldsymbol{x}}$、$\partial_t$ 和 $\nabla_{\boldsymbol{x}}$ 分别表示弱空间旋度、弱时间导数和弱空间梯度。

为简化记号，我们引入以下简写：省略 $\boldsymbol{x}$ in $\textbf{旋度}_{\boldsymbol{x}}$ and $\nabla_{\boldsymbol{x}}$中的指标，并将 $\boldsymbol{L^2}$ 中与Q 整个时空域.相关的所有内积和范数分别记为 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$。内积 $(\cdot,\cdot)_\Omega$ 和范数 $\|\cdot\|_\Omega$ 对应于 $\boldsymbol{L^2}(\Omega)$，内积和范数 $(\cdot,\cdot)_{1,\,\Omega}$ 以及 $\|\cdot\|_{1,\,\Omega}$ 对应于 $\boldsymbol{H^1}(\Omega)$，而 $(\cdot,\cdot)_{\mathbf{curl},\,\Omega}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathbf{curl},\,\Omega}$对应于 $\boldsymbol{H^{curl}}(\Omega)$。所有内积和范数符号均用于标量情形和向量情形，因为具体所指可由上下文清楚判断，且这样可以简化记号。

时空索伯列夫空间 $\boldsymbol{H^{curl,0}}(Q)$ 和 $\boldsymbol{H^{curl,1}}(Q)$ 分别赋予以下范数

$$\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{H^{curl,0}}} := \|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\|^2 \qquad \text{and} \qquad \|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{H^{curl,1}}} := \|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\|^2 + \|\partial_t\boldsymbol{v}\|^2,$$

边界条件和时间周期性条件通过定义以下函数空间纳入考虑:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_0^{\mathbf{curl},0}(Q) &:= \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},0}(Q) : \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0 \text{ on } \Sigma\},\\
\boldsymbol{H}_0^{\mathbf{curl},1}(Q) &:= \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},1}(Q) : \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0 \text{ on } \Sigma\},\\
\boldsymbol{H}_{0,per}^{\mathbf{curl},1}(Q) &:= \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^{\mathbf{curl},1}(Q) : \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},T) \text{ for almost all } \boldsymbol{x} \in \Omega\}.
\end{aligned}$$

此外，我们引入以下空间

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}^{0,1}(Q) &:= \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{2}}(Q) : \partial_t \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{2}}(Q)\},\\
\boldsymbol{H}_{per}^{0,1}(Q) &:= \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^{0,1}(Q) : \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},T) \text{ for almost all } \boldsymbol{x} \in \Omega\}.
\end{aligned}$$

所有 $L^2(Q)$ 函数都可表示为傅里叶级数展开。对于 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{2}}(Q)$，其关于时间的实傅里叶级数展开为

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{v}_0^c(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\boldsymbol{v}_k^c(\boldsymbol{x})\cos(k\omega t) + \boldsymbol{v}_k^s(\boldsymbol{x})\sin(k\omega t)\right)$$

其中余弦傅里叶系数和正弦傅里叶系数为

$$\boldsymbol{v}_k^c(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{T}\int_0^T \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cos(k\omega t)\,dt, \quad \boldsymbol{v}_k^s(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{T}\int_0^T \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\sin(k\omega t)\,dt$$

and

$$\boldsymbol{v}_k^c(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\,dt.$$

Th周期性为 T，相应的频率为 $\omega = 2\pi/T$。我们使用以下记号 :

$$\boldsymbol{v}_k = (\boldsymbol{v}_k^c, \boldsymbol{v}_k^s)^T, \quad \boldsymbol{v}_k^\perp = (-\boldsymbol{v}_k^s, \boldsymbol{v}_k^c)^T, \quad \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_k = (\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_k^c, \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_k^s)^T.$$

关系式 $\|\boldsymbol{v}_k^\perp\|_\Omega^2 = \|\boldsymbol{v}_k\|_\Omega^2$ 成立。我们定义如下垂直傅里叶级数，其引入见 [54]:

$$\boldsymbol{v}^\perp(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\boldsymbol{v}_k^c(\boldsymbol{x})\sin(k\omega t) + \boldsymbol{v}_k^s(\boldsymbol{x})\cos(k\omega t)\right).$$

我们定义如下 σ加权内积:

$$\left(\sigma\partial_t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}\right) := \int_Q \sigma\partial_t\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}\,dt = \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k\omega(\sigma\boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{v}_k)_\Omega \tag{15}$$

and

$$\left(\sigma\partial_t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}^\perp\right) := \int_Q \sigma\partial_t\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{v}^\perp\,d\boldsymbol{x}\,dt = \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k\omega(\sigma\boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{v}_k^\perp)_\Omega. \tag{16}$$

定义*1.* 通过引入傅里叶空间中的范数 $\left\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}\right\|^2 := \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k\omega\|\boldsymbol{v}_k\|_\Omega^2$，我们定义空间 $\boldsymbol{H}^{0,\frac{1}{2}}_{per}(Q) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{2}}(Q) : \left\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}\right\| < \infty\}$, $\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},0}_{per}(Q) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},0}(Q) : \left\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}\right\| < \infty\}$ 以及 $\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}_{per}(Q) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}_{per}(Q) : \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0$，定义在 $\Sigma\}$ 上，且满足 $|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^{0,\frac{1}{2}}_{per}} = \left\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}\right\|$。我们将 σ-加权内积定义如下

$$\left(\sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}, \partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}\right) := \int_Q \sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}\,dt = \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k\omega(\sigma\boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{v}_k)_\Omega \tag{17}$$

and

$$\left(\sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}, \partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}^\perp\right) := \int_Q \sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}^\perp\,d\boldsymbol{x}\,dt = \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k\omega(\sigma\boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{v}_k^\perp)_\Omega. \tag{18}$$

$\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\ per\ \frac{1}{2}}(Q)$-半范数和范数定义为

$$|\boldsymbol{v}|^2_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}} := T\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_0^c\|^2_\Omega + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(k\omega\|\boldsymbol{v}_k\|^2_\Omega + \|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_k\|^2_\Omega\Big)$$

and

$$\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}} := T(\|\boldsymbol{v}_0^c\|^2_\Omega + \|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_0^c\|^2_\Omega) + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big((1+k\omega)\|\boldsymbol{v}_k\|^2_\Omega + \|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_k\|^2_\Omega]\Big).$$

以下引理可在 [38, 33] 中找到，适用于标量情形。这里我们介绍其向量版本。

引理 1. 恒等式

$$\big(\sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y},\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}\big) = \big(\sigma\partial_t\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}^\perp\big) \quad \textit{and} \quad \big(\sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y},\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}^\perp\big) = \big(\sigma\partial_t\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}\big) \tag{19}$$

对所有 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{H}^{0,\ 1}_{,per}(Q)$ 以及 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^{0,\ \frac{1}{2}}_{,per}(Q)$均成立。

正交关系

$$\begin{aligned}&\big(\sigma\partial_t\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\big)=0 \quad\text{and}\quad (\sigma\boldsymbol{y}^\perp,\boldsymbol{y})=0 \qquad \forall\,\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{H}^{0,1}_{per}(Q),\\ &\big(\sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y},\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}^\perp\big)=0 \quad\text{and}\quad \big(\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y},\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}^\perp\big)=0 \quad \forall\,\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}_{per}(Q)\end{aligned} \tag{20}$$

对所有 $\big(\nu\,$**旋度** $\boldsymbol{y},$**旋度** $\boldsymbol{y}^\perp\big) := \sum_{k=1}^{\infty}(\nu\,$**旋度** $\boldsymbol{y}_k,$**旋度** $\boldsymbol{y}_k^\perp)_\Omega$ 以及 **旋度** $\boldsymbol{y}_k^\perp :=(-$**旋度** $\boldsymbol{y}_k^s,$**旋度** $\boldsymbol{y}_k^c)^T$ $k\in\mathbb{N}$均成立。对于 $\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl}}(\Omega)$，Friedrichs 不等式（参见例如 [23]）对用傅里叶级数表示的函数同样成立，如下所示

$$\begin{aligned}\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\|^2 &= \int_Q |\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt = T\,\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_0^c\|^2_\Omega + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_k\|^2_\Omega\\ &\geq \frac{1}{{C_F^{\mathrm{curl}}}^2}\left(T\,\|\boldsymbol{v}_0^c\|^2_\Omega + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\|\boldsymbol{v}_k\|^2_\Omega\right) = \frac{1}{{C_F^{\mathrm{curl}}}^2}\|\boldsymbol{v}\|^2\end{aligned} \tag{21}$$

对于弱发散函数 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\ 0}(Q)$，其中 $C_F^{\mathrm{curl}}>0$ 是一个仅取决于区域 Ω 的常数。伴随状态 $\boldsymbol{p}$ 的弱无散条件可表述为

$$\int_Q \boldsymbol{p}\cdot\nabla v\,d\boldsymbol{x}\,dt = 0 \qquad \forall\, v\in H_0^{1,0}(Q). \tag{22}$$

我们通过引入以下定义来纳入规范条件。

定义 2. 我们定义以下空间

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W} &:= \{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl}}(\Omega) : \exists\,\psi\in H^1(\Omega) : \boldsymbol{v}=\nabla\psi, (\psi,1)_\Omega=0,\ \psi|_\Gamma = c,\ c\in\mathbb{R}\},\\ \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl}|_0,0}(Q) &:= \{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},0}(Q) : (\sigma\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{v})_\Omega = 0\ \forall\,\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{W}\ \textit{for a.e.}\ t\in(0,T)\},\\ \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl}|_0,\frac{1}{2}}_{0,per}(Q) &:= \{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}_{0,per}(Q) : (\sigma\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{v})_\Omega = 0\ \forall\,\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{W}\ \textit{for a.e.}\ t\in(0,T)\},\end{aligned}$$

因此，后两个分别是 $\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\ 0}(Q)$ 和 $\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\ _1\ _{20},\ per}(Q)$ 的规范子空间。

注 1. 无散性质 (6)传递到 $\boldsymbol{u}$ 后在频域中仍然成立，因此对所有模态 $k\in\mathbb{N}_0$ 均成立。这导出

$$0 = (\boldsymbol{u}(t),\nabla\psi)_\Omega = (\boldsymbol{u}_0^c,\nabla\psi)_\Omega + \sum_{k=0}^{\infty}[(\boldsymbol{u}_k^c,\nabla\psi)_\Omega\cos(k\omega t) + (\boldsymbol{u}_k^s,\nabla\psi)_\Omega\sin(k\omega t)]$$

对所有 $t\in(0,T)$ 均成立。由于余弦函数和正弦函数的正交性，我们立即得到各个傅里叶系数均为弱无散。

期望状态的弱无散条件 (6) 对傅里叶系数可写为

$$\int_\Omega \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{d}_k} \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} = 0 \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \tag{23}$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 和

$$\int_\Omega \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{d}_0^c} \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} = 0 \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \tag{24}$$

对于 $k = 0$。

注 2。在 $k = 0$ 的情况下，规范条件至关重要。系数 $\boldsymbol{y}_0^c$ 是常数，并且对于仅对应于正问题的涡流问题，解 $\boldsymbol{y}$ 中存在非唯一贡献。然而，对于完整的最优控制问题，情况并非如此。对于 $k \in \mathbb{N}$ 这些情况，该条件始终是冗余的，因为此时它从右端项$\boldsymbol{u}$ 传递到 $\boldsymbol{y}_k$，作为 $k \in \mathbb{N}$ 的非恒定唯一贡献。

4. 弱时空变分形式

为了推导泛函型误差估计，我们给出正问题 (2)-(5) 和最优性系统 (9)-(14) 的变分形式。我们从正问题开始。在这种情况下，函数 $\boldsymbol{u}$ 承担给定数据的作用。问题表述如下：给定$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L^2}(Q)$，满足 (6)，求 $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\,1\,2\mathbf{0},\,per}(Q)$，使得

$$\int_Q \left(\sigma \partial_t^{1/2} \boldsymbol{y} \cdot \partial_t^{1/2} \boldsymbol{v}^\perp + \nu \, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{y} \cdot \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v} \right) d\boldsymbol{x}\, dt = \int_Q \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x}\, dt \tag{25}$$

对所有 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\,1\,2\mathbf{0},\,per}(Q)$。将这些函数展开为傅里叶级数。由于满足时间周期性条件，这是一种自然的处理方法。通过应用巴布什卡-阿齐兹定理，引理 2 可得变分问题 (25) 的解存在且唯一（见 [6] 和 [7]）。

引理 2. 以下下确界-上确界条件和上确界-上确界条件均成立

$$\underline{c} |\boldsymbol{y}|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}} \leq \sup_{0 \neq \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}_{0,per}(Q)} \frac{a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}}} \leq \overline{c} |\boldsymbol{y}|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}} \tag{26}$$

对所有 $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\,1\,2\mathbf{0},\,per}(Q)$，其中 $\underline{c}$ 和 $\overline{c}$ 是正数，仅取决于电导率和磁阻率参数的最大值和最小值：$\underline{c} = \min\{\underline{\nu}, \underline{\sigma}\}/\sqrt{2}$ 和 $\overline{c} = \max\{\overline{\sigma}, \overline{\nu}\}$。时空双线性形式如下

$$a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}) = \int_Q \left(\sigma \partial_t^{1/2} \boldsymbol{y} \cdot \partial_t^{1/2} \boldsymbol{v}^\perp + \nu \, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{y} \cdot \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v} \right) d\boldsymbol{x}\, dt.$$

证明. 应用三角不等式和柯西-施瓦茨不等式可得上界估计

$$\begin{aligned}
|a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})| &= \left| \int_Q \left(\sigma \partial_t^{1/2} \boldsymbol{y} \cdot \partial_t^{1/2} \boldsymbol{v}^\perp + \nu \, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{y} \cdot \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v} \right) d\boldsymbol{x}\, dt \right| \\
&\leq \overline{\sigma} \left| \int_Q \partial_t^{1/2} \boldsymbol{y} \cdot \partial_t^{1/2} \boldsymbol{v}^\perp \, d\boldsymbol{x}\, dt \right| + \overline{\nu} \left| \int_Q \mathbf{curl}\, \boldsymbol{y} \cdot \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x}\, dt \right| \\
&\leq \overline{\sigma} \left\| \partial_t^{1/2} \boldsymbol{y} \right\| \left\| \partial_t^{1/2} \boldsymbol{v} \right\| + \overline{\nu} \| \mathbf{curl}\, \boldsymbol{y} \| \| \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v} \| \\
&\leq \max\{\overline{\sigma}, \overline{\nu}\} |\boldsymbol{y}|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}} |\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

推导常数 $\overline{c} = \max\{\overline{\sigma}, \overline{\nu}\}$。对于下界估计，我们选取测试函数 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^\perp$，并应用 σ 加权和 ν 加权的正交关系 (20)。由此得到以下不等式

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) &= \int_Q \left(\sigma \partial_t^{1/2} \boldsymbol{y} \cdot \partial_t^{1/2} \boldsymbol{y}^\perp + \nu \, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{y} \cdot \mathbf{curl}\, \boldsymbol{y} \right) d\boldsymbol{x}\, dt \\
&= \int_Q \nu \, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{y} \cdot \mathbf{curl}\, \boldsymbol{y} \, d\boldsymbol{x}\, dt \geq \underline{\nu} \left\| \mathbf{curl}\, \boldsymbol{y} \right\|^2
\end{aligned}$$

and

$$a(\boldsymbol{y},-\boldsymbol{y}^{\perp}) = \int_Q \left(\sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y} - \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}^{\perp}\right)d\boldsymbol{x}\,dt$$
$$= \int_Q \sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}\,dt \geq \underline{\sigma}\left\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}\right\|^2,$$

二者均导出

$$a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^{\perp}) \geq \underline{\nu}\left\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\right\|^2 + \underline{\sigma}\left\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}\right\|^2$$
$$\geq \min\{\underline{\nu},\underline{\sigma}\}\left(\left\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\right\|^2 + \left\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}\right\|^2\right).$$

定义 $\underline{c} = \min\{\underline{\nu},\underline{\sigma}\}/\sqrt{2}$，由此得到 inf-sup 条件

$$\sup_{0\neq\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}_{0,per}(Q)} \frac{a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}} \geq \frac{a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^{\perp})}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^{\perp}|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}} \geq \underline{c}|\boldsymbol{y}|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}.$$

□

最优性系统 (9)-(14) 的时空变分表述可用与正问题相同的方法得到。具体如下：给定满足 (6) 的 $\boldsymbol{y_d}\in\underline{\boldsymbol{L}}^{\boldsymbol{2}}(Q)$，求 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl}}_{,\ 1\,20,\ per}(Q)$，使得

$$\int_Q \left(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{v} - \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{p}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v} + \sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{p}\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}^{\perp}\right)d\boldsymbol{x}\,dt = \int_Q \boldsymbol{y_d}\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}\,dt, \tag{27}$$

$$\int_Q \left(\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{q} + \sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{q}^{\perp} + \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\right)d\boldsymbol{x}\,dt = 0 \tag{28}$$

对所有 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl}}_{,\ \tau\,20,\ per}(Q)$ 均成立。类似地，我们为双线性形式推导 inf-sup 和上确界-上确界条件

$$\mathcal{B}((\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})) = \int_Q \Big(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{v} - \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{p}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v} + \sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{p}\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}^{\perp}$$
$$+ \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{q} + \sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{q}^{\perp} + \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt. \tag{29}$$

引理 3. 时空双线性形式 (29) 满足以下 *inf-sup* 和上确界-上确界条件：

$$\underline{c}\|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})\|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}} \leq \sup_{0\neq(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in(\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}_{0,per}(Q))^2} \frac{\mathcal{B}((\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}))}{\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}}} \leq \overline{c}\|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})\|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}} \tag{30}$$

对所有 $(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{p})\in(\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl}}_{,\ 1\,20,\ per}(Q))^2,,$ 其中 $\underline{c}=(1+2\text{最大}\{\alpha,\frac{1}{\alpha}\})^{-1/2}$(最小$\{\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\underline{\nu},\underline{\sigma}\}$最小$\{\sqrt{\alpha},\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\}$)且 $\overline{c}=$最大$\{1,\frac{1}{\alpha},\overline{\nu},\overline{\sigma}\}$ 为正数。

证明。 应用三角不等式和柯西–施瓦茨不等式可得上界

$$\left|\mathcal{B}((\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}))\right| = \Big|\int_Q \Big(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{v} - \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{p}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v} + \sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{p}\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}^{\perp}$$
$$+ \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{q} + \sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{q}^{\perp} + \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt\Big|$$
$$\leq \|\boldsymbol{y}\|\|\boldsymbol{v}\| + \overline{\nu}\,\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{p}\|\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\| + \overline{\sigma}\left\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{p}\right\|\left\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}\right\|$$
$$+ \overline{\nu}\,\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\|\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{q}\| + \overline{\sigma}\left\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}\right\|\left\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{q}\right\| + \frac{1}{\alpha}\|\boldsymbol{p}\|\|\boldsymbol{q}\|$$
$$\leq \overline{c}\|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})\|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}$$

其中 $\overline{c}=\max\{1,\frac{1}{\alpha},\overline{\nu},\overline{\sigma}\}$。下界估计通过选取测试函数来证明

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{y} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\boldsymbol{p} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\boldsymbol{p}^{\perp}, \boldsymbol{p} + \sqrt{\alpha}\boldsymbol{y} - \sqrt{\alpha}\boldsymbol{y}^{\perp})$$

并应用 σ-和 ν-加权正交关系 (20)。我们得到方程 s

$$\mathcal{B}((\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})) = \|\boldsymbol{y}\|^2 + \frac{1}{\alpha}\|\boldsymbol{p}\|^2,$$
$$\mathcal{B}((\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}),(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\boldsymbol{p},\sqrt{\alpha}\boldsymbol{y})) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{p},\mathbf{curl}\,\boldsymbol{p}) + \sqrt{\alpha}(\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y},\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}),$$
$$\mathcal{B}((\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}),(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\boldsymbol{p}^{\perp},-\sqrt{\alpha}\boldsymbol{y}^{\perp})) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{p},\partial_t^{1/2}\boldsymbol{p}) + \sqrt{\alpha}(\sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y},\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}),$$

从而得到下界估计

$$\mathcal{B}((\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})) \geq \min\{\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\underline{\nu},\underline{\sigma}\}\min\{\sqrt{\alpha},\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\}\|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})\|^2_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}}.$$

连同

$$\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}} \leq \left(1+2\max\{\alpha,\frac{1}{\alpha}\}\right)^{1/2}\|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})\|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}},$$

我们推导如下的（30）式的inf-sup估计。

$$\sup_{0\neq(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in(\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}_{0,per}(Q))^2}\frac{\mathcal{B}((\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}))}{\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\|_{\boldsymbol{H}^{\mathrm{curl},\frac{1}{2}}}} \geq \frac{\min\{\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\underline{\nu},\underline{\sigma}\}\min\{\sqrt{\alpha},\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\}\|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})\|^2_{\boldsymbol{H}^{\mathrm{curl},\frac{1}{2}}}}{\sqrt{1+2\max\{\alpha,\frac{1}{\alpha}\}}\|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})\|_{\boldsymbol{H}^{\mathrm{curl},\frac{1}{2}}}}$$

并定义 $\underline{c}=(1+2\max\{\alpha,\frac{1}{\alpha}\})^{-1/2}(\min\{\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\underline{\nu},\underline{\sigma}\}\min\{\sqrt{\alpha},\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\})$。 □

5. 离散化

我们采用多谐波有限元法对该问题进行离散化。时空变分问题中的所有函数均展开为傅里叶级数，并将问题设置转换到频域。利用问题的线性性以及余弦函数和正弦函数的 L^2-正交关系，我们推导出所有傅里叶模态 $k\in\mathbb{N}$对应的变分问题。对于最优性系统：给定 $\boldsymbol{y_d}_k\in(\boldsymbol{L^2}(\Omega))^2$ 满足（23），求 $\boldsymbol{y}_k=(\boldsymbol{y}_k^c,\boldsymbol{y}_k^s)^T$、 $\boldsymbol{p}_k=(\boldsymbol{p}_k^c,\boldsymbol{p}_k^s)^T\in\mathbb{V}=V\times V=(\boldsymbol{H}_0^{\mathbf{curl}}(\Omega))^2$，使得

$$\int_\Omega\left(\boldsymbol{y}_k\cdot\boldsymbol{v}_k-\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{p}_k\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_k+k\omega\sigma\,\boldsymbol{p}_k\cdot\boldsymbol{v}_k^{\perp}\right)d\boldsymbol{x}=\int_\Omega\boldsymbol{y_d}_k\cdot\boldsymbol{v}_k\,d\boldsymbol{x}, \tag{31}$$

$$\int_\Omega\left(\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}_k\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{q}_k+k\omega\sigma\,\boldsymbol{y}_k\cdot\boldsymbol{q}_k^{\perp}+\frac{1}{\alpha}\,\boldsymbol{p}_k\cdot\boldsymbol{q}_k\right)d\boldsymbol{x}=0 \tag{32}$$

对所有 $\boldsymbol{v}_k$、 $\boldsymbol{q}_k\in\mathbb{V}$均成立。 $k=0$ 情形下的变分问题为：给定满足（24）的 $\boldsymbol{y_d}_0^c\in\boldsymbol{L^2}(\Omega)$，求 $\boldsymbol{y}_0^c$、 $\boldsymbol{p}_0^c\in V=\boldsymbol{H}_0^{\mathbf{curl}}(\Omega)$，使得

$$\int_\Omega\left(\boldsymbol{y}_0^c\cdot\boldsymbol{v}_0^c-\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{p}_0^c\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_0^c\right)d\boldsymbol{x}=\int_\Omega\boldsymbol{y_d}_0^c\cdot\boldsymbol{v}_0^c\,d\boldsymbol{x} \tag{33}$$

$$\int_\Omega\left(\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}_0^c\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{q}_0^c+\frac{1}{\alpha}\,\boldsymbol{p}_0^c\cdot\boldsymbol{q}_0^c\right)d\boldsymbol{x}=0 \tag{34}$$

对于所有 $\boldsymbol{v}_0^c,\boldsymbol{q}_0^c\in V$。接下来对傅里叶级数进行截断。我们用 N表示截断指标。我们使用有限元函数 $\boldsymbol{y}_{kh}=(\boldsymbol{y}_{kh}^c,\boldsymbol{y}_{kh}^s)^T$, $\boldsymbol{p}_{kh}=(\boldsymbol{p}_{kh}^c,\boldsymbol{p}_{kh}^s)^T\in\mathbb{V}_h=V_h\times V_h\subset\mathbb{V}$来近似傅里叶系数 $\boldsymbol{y}_k=(\boldsymbol{y}_k^c,\boldsymbol{y}_k^s)^T$, $\boldsymbol{p}_k=(\boldsymbol{p}_k^c,\boldsymbol{p}_k^s)^T\in\mathbb{V}$，其中有限元空间 $\mathbb{V}_h=V_h\times V_h$和 $V_h=$张成$\{\boldsymbol{\phi}_1,...,\boldsymbol{\phi}_{N_h}\}$，离散化参数为 h，而 V_h的维数由 $N_h=\mathcal{O}(h^{-3})$给出。我们使用最低阶 Nédélec（边）基函数来近似空间 $V=\boldsymbol{H}_0^{\mathbf{curl}}(\Omega)$（参见 [40] 和 [41]）。我们推导出线性方程组

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{M_h}&0&-\boldsymbol{K_h}&k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}}\\0&\boldsymbol{M_h}&-k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}}&-\boldsymbol{K_h}\\-\boldsymbol{K_h}&-k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}}&-\alpha^{-1}\boldsymbol{M_h}&0\\k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}}&-\boldsymbol{K_h}&0&-\alpha^{-1}\boldsymbol{M_h}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\boldsymbol{y}}_k^c\\\underline{\boldsymbol{y}}_k^s\\\underline{\boldsymbol{p}}_k^c\\\underline{\boldsymbol{p}}_k^s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{d}k}^c\\\underline{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{d}k}^s\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{35}$$

对应于 (31)-(32) 的线性方程组。（加权）质量矩阵和刚度矩阵定义如下：

$$(\boldsymbol{M_h})_{ij} = (\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j)_\Omega, \quad (\boldsymbol{M_{h,\sigma}})_{ij} = (\sigma\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j)_\Omega, \quad (\boldsymbol{K_h})_{ij} \quad = (\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_i, \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_j)_\Omega,$$

其中 i、$j = 1$、...、N_h。傅里叶模态 $k = 0$ 对应的线性方程组为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{M_h} & -\boldsymbol{K_h} \\ -\boldsymbol{K_h} & -\alpha^{-1}\boldsymbol{M_h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{y}}_0^c \\ \underline{\boldsymbol{p}}_0^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{y}}_{d0}^c \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

将线性系统（35）和（36）的解相加，这些解分别给出了状态和伴随状态的傅里叶系数近似，并将其代入截断傅里叶级数，可得状态和伴随状态的多谐波有限元近似，即

$$\boldsymbol{y}_{Nh}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=0}^{N} [\boldsymbol{y}_{kh}^c(\boldsymbol{x}) \cos(k\omega t) + \boldsymbol{y}_{kh}^s(\boldsymbol{x}) \sin(k\omega t)], \tag{37}$$

$$\boldsymbol{p}_{Nh}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=0}^{N} [\boldsymbol{p}_{kh}^c(\boldsymbol{x}) \cos(k\omega t) + \boldsymbol{p}_{kh}^s(\boldsymbol{x}) \sin(k\omega t)]. \tag{38}$$

关于鞍点系统（35）和（36）的快速且稳健的求解器，例如可参见 [29, 28]或 [5]。

类似地，我们可以推导出正问题的多谐波变分问题：给定$\boldsymbol{u}_k \in (\boldsymbol{L^2}(\Omega))^2$, ，求 $\boldsymbol{y}_k \in \mathbb{V} = V \times V = (\boldsymbol{H_0^{curl}}(\Omega))^2$，使得

$$\int_\Omega \left(k\omega\sigma\, \boldsymbol{y}_k \cdot \boldsymbol{v}_k^\perp + \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}_k \cdot \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_k\right) d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{v}_k\, d\boldsymbol{x}, \tag{39}$$

对所有 $\boldsymbol{v}_k \in \mathbb{V}$均成立。对于 $k = 0$的情形，我们有：给定 $\boldsymbol{u}_0^c \in \boldsymbol{L^2}(\Omega)$，求 $\boldsymbol{y}_0^c \in V = \boldsymbol{H_0^{curl}}(\Omega)$，使得

$$\int_\Omega \left(\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}_0^c \cdot \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_0^c\right) d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{u}_0^c \cdot \boldsymbol{v}_0^c\, d\boldsymbol{x} \tag{40}$$

对所有 $\boldsymbol{v}_0^c \in V$。正问题的多谐波有限元离散得到
系　　统如下线性方程

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K_h} & k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}} \\ -k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}} & \boldsymbol{K_h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{y}}_k^c \\ \underline{\boldsymbol{y}}_k^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{u}}_k^c \\ \underline{\boldsymbol{u}}_k^s \end{pmatrix}, \tag{41}$$

且 $\boldsymbol{K_h}\underline{\boldsymbol{y}}_0^c = \underline{\boldsymbol{u}}_0^c$ 对 $k = 0$。

在接下来的章节中，我们将针对两个不同的问题给出后验泛函估计：首先是偏微分方程约束（时间周期涡流正问题），其次是最优控制问题的最优性系统。

6. 正问题的后验误差估计

我们用函数 $\boldsymbol{\eta}$ 表示状态函数 $\boldsymbol{y}$的一个近似。令 $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{H}^{\mathbf{curl}}{}_{,1\ 0,per}(Q)$。注意，目前 $\boldsymbol{\eta}$ 是任意的，但我们将选择 $\boldsymbol{y}_{Nh}$ 为 $\boldsymbol{\eta}$。需要注意的是，对于正问题本身，我们假设 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L^2}(Q)$ 已知且满足 (6)。我们希望推导出误差 $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\eta}$ 在 $\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl}}{}_{,1\ 20,per}(Q)$中的一个上界估计。双线性形式 $a(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{v})$ 等于

$$\begin{aligned} &\int_Q \left(\sigma\partial_t^{1/2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\eta}) \cdot \partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}^\perp + \nu\,\mathbf{curl}\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\eta}) \cdot\ \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\right) d\boldsymbol{x}\, dt \\ &\quad = \int_Q \left(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} - \sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{\eta} \cdot \partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}^\perp - \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\eta} \cdot\ \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\right) d\boldsymbol{x}\, dt \end{aligned} \tag{42}$$

对所有 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^{\mathbf{curl}}{}_{,\ 1\ 20,\ per}(Q)$。我们将式（42）右端定义为关于 $\boldsymbol{v}$ 的线性泛函，如下所示

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{v}) = \int_Q \left(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} - \sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{\eta} \cdot \partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}^\perp - \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\eta} \cdot\ \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\right) d\boldsymbol{x}\, dt.$$

定理 1。 设 $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\,1\,0,\,per}(Q)$。设双线性形式 $a(\cdot,\ \cdot)$ 满足式 (26) 中的 *inf-sup* 条件。精确状态 $\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{\eta}$ 之间的误差可估计如下

$$|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\eta}|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{\underline{c}}\left(C_F^{curl}\,\|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\| + \|\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|\right) \tag{43}$$

其中 $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\,0}(Q)$，*Friedrichs* 常数 C_F^{curl}定义见 (21)，以及常数 $\underline{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}\min\{\underline{\nu},\underline{\sigma}\}$。残差函数 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$ 定义如下

$$\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{u} - \sigma\partial_t\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\tau} \qquad \textit{and} \qquad \mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau} - \nu\,\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\eta}. \tag{44}$$

证明。 对于所有 $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\,1\,0,\,per}(Q)$ 和 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\,1\,0,\,per}(Q)$，恒等式

$$\left(\sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{\eta}, \partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}^{\perp}\right) = \left(\sigma\partial_t\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{v}\right) \tag{45}$$

利用 (19) 可知该式成立。结合

$$\int_Q \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}\,dt = \int_Q \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}\,dt \qquad \forall\,\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_0^{\mathbf{curl},0}(Q) \quad \forall\,\boldsymbol{\tau}\in\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},0}(Q), \tag{46}$$

由此可将泛函 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{v})$ 表示为

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{v}) = \int_Q \Big((\boldsymbol{u} - \sigma\partial_t\boldsymbol{\eta} - \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{\tau} - \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\eta})\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt \qquad \forall\,\boldsymbol{\tau}\in\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},0}(Q).$$

我们得到估计式

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{v}) \leq \|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|\|\boldsymbol{v}\| + \|\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\| \tag{47}$$

对 (44) 中定义的残差函数 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$ 应用柯西-施瓦茨不等式。对 (21) 中的 $\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl}}(\Omega)$ 应用 Friedrichs 不等式，可得估计

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{v}) \leq \|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|\|\boldsymbol{v}\| + \|\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\| \leq \left(C_F^{\mathrm{curl}}\,\|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\| + \|\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|\right)\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\|.$$

由此得到

$$\sup_{0\neq\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_{0,per}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}(Q)} \frac{\mathcal{F}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}}} \leq C_F^{\mathrm{curl}}\,\|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\| + \|\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|. \tag{48}$$

根据 (42)，有

$$\sup_{0\neq\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_{0,per}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}(Q)} \frac{a(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}} = \sup_{0\neq\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_{0,per}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}(Q)} \frac{\mathcal{F}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}}}.$$

再应用 inf-sup 条件 (26)，可得

$$|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\eta}|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{\underline{c}} \sup_{0\neq\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_{0,per}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}(Q)} \frac{a(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\underline{c}} \sup_{0\neq\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_{0,per}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}(Q)} \frac{\mathcal{F}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}}},$$

这就证明了 (43)。 □

注意，当 $\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau}) = 0$和 $\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau}) = 0$时，涡流问题 (2) 可表示为 $\sigma\partial_t\boldsymbol{\eta} + \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{\tau} = \nu\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\eta}$，其中 $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},1\,0,per}(Q)$ 满足边界条件 (3) 和周期性条件 (4)，从而给出问题 (2) 的解。因此，$\mathcal{R}_1(\boldsymbol{y},\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}) = 0$和 $\mathcal{R}_2(\boldsymbol{y},\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}) = 0$。

我们将上界定义为主函数

$$\mathcal{M}_{|\cdot|}^{\oplus}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{\underline{c}}\left(C_F^{\mathrm{curl}}\,\|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\| + \|\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|\right) \tag{49}$$

这一点有保证且可计算。通过应用杨不等式，可用其二次表示来估计主导量：

$$\mathcal{M}_{|\cdot|}^{\oplus}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})^2 \leq \mathcal{M}_{|\cdot|}^{\oplus}(\beta;\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})^2 = \frac{1}{\underline{c}^2}\big(C_F^{\mathrm{curl}^2}(1+\beta)\|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\tau})\|^2 + \frac{(1+\beta)}{\beta}\|\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|^2\big) \tag{50}$$

常数为 $\beta>0$。根据 Friedrichs 不等式，$\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}$ 中的半范数与范数等价，从而满足下确界-上确界条件和上确界-上确界条件

$$\underline{c}\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}} \le \sup_{0\neq\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}_{0,per}(Q)} \frac{a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}} \le \overline{c}\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}} \tag{51}$$

对所有 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\,1\,20,\,per}(Q)$，其中常数为 $\underline{c}=\min\{\underline{\nu}/(1+{C_F^{\mathrm{curl}}}^2)\,\underline{\sigma}\}/\sqrt{2}$和 $\overline{c}=\max\{\overline{\sigma},\overline{\nu}\}$，这里我们对下界使用 Friedrichs 不等式 (21)

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) &= \int_Q \Big(\sigma(\boldsymbol{x})\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}^{\perp}+\nu(\boldsymbol{x})\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt \\ &= \int_Q \nu(\boldsymbol{x})\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}\,dt \ge \underline{\nu}\,\big\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\big\|^2 \ge \frac{\underline{\nu}}{1+{C_F^{\mathrm{curl}}}^2}\|\boldsymbol{y}\|^2_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},0}} \end{aligned}$$

否则，证明与 (2) 的证明类似。由此得到主导量

$$\mathcal{M}^{\oplus}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{\underline{c}}\sqrt{\|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|^2+\|\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|^2}, \tag{52}$$

其中我们应用了

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{v}) \le \sqrt{\|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|^2+\|\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|^2}\sqrt{\|\boldsymbol{v}\|^2+\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\|^2}$$

主导量均非负。只有当 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{y}$和 $\boldsymbol{\tau}=\nu$**旋度** $\boldsymbol{y}$时，主导量才为零。

主导量 (52) 的多谐波表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\oplus}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{\underline{c}}\Big(&T\big(\|\mathcal{R}_{1\,0}^{c}(\boldsymbol{\eta}_0^c,\boldsymbol{\tau}_0^c)\|^2_\Omega+\|\mathcal{R}_{2\,0}^{c}(\boldsymbol{\eta}_0^c,\boldsymbol{\tau}_0^c)\|^2_\Omega\big) \\ &+\frac{T}{2}\sum_{k=1}^{N}\big(\|\mathcal{R}_{1k}(\boldsymbol{\eta}_k,\boldsymbol{\tau}_k)\|^2_\Omega+\|\mathcal{R}_{2k}(\boldsymbol{\eta}_k,\boldsymbol{\tau}_k)\|^2_\Omega\big)+\mathcal{P}_N\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

项 $\mathcal{P}_N$ 称为余项，且完全可计算

$$\mathcal{P}_N=\frac{T}{2}\sum_{k=N+1}^{\infty}\|\boldsymbol{u}_k\|^2_\Omega=\frac{T}{2}\sum_{k=N+1}^{\infty}\big(\|\boldsymbol{u}_k^c\|^2_\Omega+\|\boldsymbol{u}_k^s\|^2_\Omega\big)=\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N\|$$

其中，$\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{L^2}(Q)$ 是正问题的给定数据，可展开为傅里叶级数，而 $\boldsymbol{u}_N$ 是其截断傅里叶展开。依赖于傅里叶系数的残差函数为

$$\mathcal{R}_{1\,0}^{c}(\boldsymbol{\eta}_0^c,\boldsymbol{\tau}_0^c)=-\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\tau}_0^c+\boldsymbol{u}_0^c,\qquad \mathcal{R}_{2\,0}^{c}(\boldsymbol{\eta}_0^c,\boldsymbol{\tau}_0^c)=\boldsymbol{\tau}_0^c-\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\eta}_0^c,$$

and

$$\mathcal{R}_{1k}(\boldsymbol{\eta}_k,\boldsymbol{\tau}_k)=-k\omega\,\sigma\boldsymbol{\eta}_k^{\perp}-\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\tau}_k+\boldsymbol{u}_k,\qquad \mathcal{R}_{2k}(\boldsymbol{\eta}_k,\boldsymbol{\tau}_k)=\boldsymbol{\tau}_k-\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\eta}_k.$$

7. 最优控制问题的后验误差估计

我们引入状态 $\boldsymbol{y}$ 和伴随状态 $\boldsymbol{p}$ 的近似，分别记为 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\zeta}$，它们来自空间 $\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},1\ 0,per}(Q)$。例如，多谐波有限元近似（37）和（38）就是合适的选择。与上一节一样，我们推导误差 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\eta}$和 $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\zeta}$的误差估计

in $\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\Gamma_{20},per}(Q)$。式（29）中定义的双线性形式 $\mathcal{B}((\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\zeta}),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}))$ 可以表示为

$$\begin{aligned}&\int_Q \Big((\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\eta})\cdot\boldsymbol{v} - \nu\,\mathbf{curl}\,(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\zeta})\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v} + \sigma\partial_t^{1/2}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\zeta})\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}^\perp \\ &\qquad + \nu\,\mathbf{curl}\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\eta})\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{q} + \sigma\partial_t^{1/2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\eta})\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{q}^\perp + \frac{1}{\alpha}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\zeta})\cdot\boldsymbol{q}\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt \\ &= \int_Q \Big(\boldsymbol{y_d}\cdot\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{v} + \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v} - \sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}^\perp \\ &\qquad - \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{q} - \sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{\eta}\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{q}^\perp - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{q}\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt\end{aligned} \tag{53}$$

对所有 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl}}{}_{,\ 1\,20,\ per}(Q)$。我们将 (53) 右端定义为关于 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的线性泛函，如下所示

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}) = \int_Q \Big(&\boldsymbol{y_d}\cdot\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{v} + \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v} - \sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}^\perp \\ &- \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{q} - \sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{\eta}\cdot\partial_t^{1/2}\boldsymbol{q}^\perp - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{q}\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt.\end{aligned}$$

定理 2. 设 $\boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\zeta}\in\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl}}{}_{,\ 1\ 0,\ per}(Q)$。设双线性形式 $\mathcal{B}(\cdot,\ \cdot)$ 满足(30)中的 *inf-sup* 条件。精确状态$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{p}-\boldsymbol{\zeta})$ 之间的误差可由以下不等式从上方估计

$$\begin{aligned}\|(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\zeta})\|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}} \le \frac{1}{\underline{c}}\Big(&\|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\tau})\|^2 + \|\mathcal{R}_3(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\rho})\|^2 \\ &+ \|\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|^2 + \|\mathcal{R}_4(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\rho})\|^2\Big)^{1/2}\end{aligned} \tag{54}$$

其中 $\boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{\rho}\in\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl}}{}_{,\ 0}(Q)$，常数 $\underline{c}=(1+2\max\{\alpha,\frac{1}{\alpha}\})^{-1/2}(\min\{\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\underline{\nu},\underline{\sigma}\}\min\{\sqrt{\alpha},\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\})$。残差函数 $\mathcal{R}_1$、$\mathcal{R}_2$、$\mathcal{R}_3$ 和 $\mathcal{R}_4$ 定义如下

$$\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\rho}) = \sigma\partial_t\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{y_d},\qquad \mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau} - \nu\,\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\eta}, \tag{55}$$

$$\mathcal{R}_3(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\tau}) = \sigma\partial_t\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\tau} + \alpha^{-1}\boldsymbol{\zeta},\qquad \mathcal{R}_4(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\rho} - \nu\,\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\zeta}. \tag{56}$$

证明。利用 $\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{\rho}\in\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl}}{}_{,\ 0}(Q)$ 的恒等式 (45) 和 (46)，可将泛函$\mathcal{F}_{(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})$表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}) &= \int_Q \Big(\boldsymbol{y_d}\cdot\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{v} + \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v} - \sigma\partial_t\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{q} - \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\tau}\cdot\ \boldsymbol{q}) \\ &\qquad - \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{q} - \sigma\partial_t\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{q} - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{q} + (-\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v} + \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\rho}\cdot\ \boldsymbol{v})\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt \\ &= \int_Q \Big((\boldsymbol{y_d} - \boldsymbol{\eta} - \sigma\partial_t\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\rho})\cdot\ \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{\tau} - \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\eta})\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{q} \\ &\qquad + (-\sigma\partial_t\boldsymbol{\eta} - \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\tau})\cdot\ \boldsymbol{q} + (\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\rho})\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt.\end{aligned}$$

应用柯西-施瓦茨不等式可得以下估计:

$\mathcal{F}_{(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}) \le \|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\rho})\|\|\boldsymbol{v}\| + \|\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|\|$**旋度** $\boldsymbol{q}\| + \|\mathcal{R}_3(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\tau})\|\|\boldsymbol{q}\| + \|\mathcal{R}_4(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\rho})\|\|$**旋度** $\boldsymbol{v}\|$, 其中残差函数 $\mathcal{R}_1$、$\mathcal{R}_2$、$\mathcal{R}_3$ 和 $\mathcal{R}_4$ 定义于（55）—（56）中。结合

$\mathcal{F}_{(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}) \le \sqrt{\|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\rho})\|^2 + \|\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|^2 + \|\mathcal{R}_3(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\tau})\|^2 + \|\mathcal{R}_4(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\rho})\|^2}\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},0}}$

且 $\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},0}} \le \|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},12}}$，将 (30) 和 (53) 代入

$$\begin{aligned}\underline{c}\|(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\zeta})\|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}} &\le \sup_{0\neq(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in(\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}_{0,per}(Q))^2} \frac{\mathcal{B}((\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\zeta}),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}))}{\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}} \\ &= \sup_{0\neq(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in(\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}_{0,per}(Q))^2} \frac{\mathcal{F}_{(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})}{\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}}\end{aligned}$$

我们得到 (54)。 □

我们还推导了半范数的 inf-sup 条件和上确界-上确界条件，从而得到最优性系统半范数的误差估计。我们可以证明，

$$\underline{c}|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}} \le \sup_{0\neq(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in(\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}_{0,per}(Q))^2} \frac{\mathcal{B}((\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}))}{|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}} \le \overline{c}|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}} \tag{57}$$

对所有 $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}) \in (\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl}}_{,\ 1\,20,\ per}(Q))^2$,，其中常数现在给定为 $\underline{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}\min\{\underline{\nu},\underline{\sigma}\}\min\{\alpha,\frac{1}{\alpha}\}$和 $\overline{c}=\max\{1,1+C_F^{\mathrm{curl}^2}\}\max\{1,\frac{1}{\alpha},\overline{\nu},\overline{\sigma}\}$。证明与引理 3 的证明类似，此外我们还估计了

$$\begin{aligned}
\big|\mathcal{B}((\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}))\big| &\le \max\{1,\frac{1}{\alpha},\overline{\nu},\overline{\sigma}\}|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}\\
&\le \max\{1,\frac{1}{\alpha},\overline{\nu},\overline{\sigma}\}\big((1+C_F^{\mathrm{curl}^2})\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{p}\|^2+\big\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{p}\big\|^2+(1+C_F^{\mathrm{curl}^2})\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\|^2\\
&\quad+\big\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}\big\|^2\big)^{1/2}\big((1+C_F^{\mathrm{curl}^2})\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\|^2+\big\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{v}\big\|^2+(1+C_F^{\mathrm{curl}^2})\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{q}\|^2\\
&\quad+\big\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{q}\big\|^2\big)^{1/2}\le \overline{c}\,|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

通过应用 Friedrichs 不等式 (21) 得到。下界通过代入简化的测试函数 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}) = (-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}^{\perp})\ \sqrt{\alpha}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^{\perp}))$ 计算，得到

$$|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}} \le \sqrt{2}\max\{\sqrt{\alpha},\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\}|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})|_{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{curl},\frac{1}{2}}}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}((\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{p},\mathbf{curl}\,\boldsymbol{p})+\sqrt{\alpha}(\nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y},\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y})\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{p},\partial_t^{1/2}\boldsymbol{p})+\sqrt{\alpha}(\sigma\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y},\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y})\\
&\ge \frac{\underline{\nu}}{\sqrt{\alpha}}\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{p}\|^2+\underline{\nu}\sqrt{\alpha}\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{y}\|^2+\frac{\underline{\sigma}}{\sqrt{\alpha}}\big\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{p}\big\|^2+\underline{\sigma}\sqrt{\alpha}\big\|\partial_t^{1/2}\boldsymbol{y}\big\|^2.
\end{aligned}$$

结合这两个估计可得到式 (57) 中的 inf-sup 条件，其常数为 $\underline{c}$。对泛函 $\mathcal{F}_{(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})$ 应用 Friedrichs 不等式 (21) 如下

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}) \le\ & C_F^{\mathrm{curl}}\|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\rho})\|\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\|+\|\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{q}\|\\
&+C_F^{\mathrm{curl}}\|\mathcal{R}_3(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\tau})\|\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{q}\|+\|\mathcal{R}_4(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\rho})\|\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}\|,
\end{aligned}$$

得到该半范数的主导量

$$\mathcal{M}^{\oplus}_{|\cdot|}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\underline{c}}\big(C_F^{\mathrm{curl}}(\|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\tau})\|+\|\mathcal{R}_3(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\rho})\|)+\|\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|+\|\mathcal{R}_4(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\rho})\|\big). \tag{58}$$

通过应用杨不等式，可以利用其二次代表估计主导量 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{\oplus}_{|\cdot|}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\rho})^2 &\le \mathcal{M}^{\oplus}_{|\cdot|}(\beta_1,\beta_2,\beta_3;\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\rho})^2\\
&= \frac{1}{\underline{c}^2}\big(C_F^{\mathrm{curl}^2}(1+\beta_1)(1+\beta_2)\|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\tau})\|^2\\
&\quad+C_F^{\mathrm{curl}^2}\frac{(1+\beta_1)(1+\beta_3)}{\beta_1}\|\mathcal{R}_3(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\rho})\|^2\\
&\quad+\frac{(1+\beta_1)(1+\beta_2)}{\beta_2}\|\mathcal{R}_2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})\|^2+\frac{(1+\beta_1)(1+\beta_3)}{\beta_1\beta_3}\|\mathcal{R}_4(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\rho})\|^2\big).
\end{aligned} \tag{59}$$

其中常数为 β_1、β_2、$\beta_3 > 0$。(??) 的多谐波表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\oplus}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\underline{c}}\Big(&T\big(\|\mathcal{R}_{1\,0}^{c}(\boldsymbol{\eta}_0^c,\boldsymbol{\rho}_0^c)\|_\Omega^2 + \|\mathcal{R}_{2\,0}^{c}(\boldsymbol{\eta}_0^c,\boldsymbol{\tau}_0^c)\|_\Omega^2 + \|\mathcal{R}_{3\,0}^{c}(\boldsymbol{\zeta}_0^c,\boldsymbol{\tau}_0^c)\|_\Omega^2\\ &+ \|\mathcal{R}_{4\,0}^{c}(\boldsymbol{\zeta}_0^c,\boldsymbol{\rho}_0^c)\|_\Omega^2\big) + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{N}\big(\|\mathcal{R}_{1\,k}(\boldsymbol{\eta}_k,\boldsymbol{\zeta}_k,\boldsymbol{\rho}_k)\|_\Omega^2 + \|\mathcal{R}_{2\,k}(\boldsymbol{\eta}_k,\boldsymbol{\tau}_k)\|_\Omega^2\\ &+ \|\mathcal{R}_{3\,k}(\boldsymbol{\eta}_k,\boldsymbol{\zeta}_k,\boldsymbol{\tau}_k)\|_\Omega^2 + \|\mathcal{R}_{4\,k}(\boldsymbol{\zeta}_k,\boldsymbol{\rho}_k)\|_\Omega^2\big) + \mathcal{Q}_N\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

项 $\mathcal{Q}_N$ 称为余项，且可完全计算

$$\mathcal{Q}_N = \frac{T}{2}\sum_{k=N+1}^{\infty}\|\boldsymbol{y_d}_k\|_\Omega^2 = \frac{T}{2}\sum_{k=N+1}^{\infty}\big(\|\boldsymbol{y_d}_k^c\|_\Omega^2 + \|\boldsymbol{y_d}_k^s\|_\Omega^2\big) = \|\boldsymbol{y_d} - \boldsymbol{y_d}_N\|$$

其中，$\boldsymbol{y_d} \in \boldsymbol{L^2}(Q)$ 是给定的期望状态，可展开为傅里叶级数，而 $\boldsymbol{y_d}_N$ 是其截断傅里叶展开。依赖于傅里叶系数的残差函数如下：

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_{1\,0}^{c}(\boldsymbol{\eta}_0^c,\boldsymbol{\rho}_0^c) = -\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\rho}_0^c + \boldsymbol{\eta}_0^c - \boldsymbol{y_d}_0^c, \qquad \mathcal{R}_{2\,0}^{c}(\boldsymbol{\eta}_0^c,\boldsymbol{\tau}_0^c) = \boldsymbol{\tau}_0^c - \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\eta}_0^c,\\ &\mathcal{R}_{3\,0}^{c}(\boldsymbol{\zeta}_0^c,\boldsymbol{\tau}_0^c) = \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\tau}_0^c + \alpha^{-1}\boldsymbol{\zeta}_0^c, \qquad \mathcal{R}_{4\,0}^{c}(\boldsymbol{\zeta}_0^c,\boldsymbol{\rho}_0^c) = \boldsymbol{\rho}_0^c - \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\zeta}_0^c,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_{1\,k}(\boldsymbol{\eta}_k,\boldsymbol{\zeta}_k,\boldsymbol{\rho}_k) = -k\omega\,\sigma\boldsymbol{\zeta}_k^{\perp} - \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\rho}_k + \boldsymbol{\eta}_k - \boldsymbol{y_d}_k, \qquad \mathcal{R}_{2\,k}(\boldsymbol{\eta}_k,\boldsymbol{\tau}_k) = \boldsymbol{\tau}_k - \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\eta}_k,\\ &\mathcal{R}_{3\,k}(\boldsymbol{\eta}_k,\boldsymbol{\zeta}_k,\boldsymbol{\tau}_k) = -k\omega\,\sigma\boldsymbol{\eta}_k^{\perp} + \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\tau}_k + \alpha^{-1}\boldsymbol{\zeta}_k, \qquad \mathcal{R}_{4\,k}(\boldsymbol{\zeta}_k,\boldsymbol{\rho}_k) = \boldsymbol{\rho}_k - \nu\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\zeta}_k.\end{aligned}$$

8. 数值实验

这里给出初步的数值测试。我们展示两个数值算例的结果：一个针对状态方程，另一个针对相应的最优控制问题。这里选择电导率和磁阻率参数为 $\sigma = \nu = 1$。计算域选为单位立方体 $\Omega = [0,1]^3$。我们采用 MINRES 方法计算离散解，参见 [44], ，并结合预条件子

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K_h} + k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K_h} + k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}} \end{pmatrix} \tag{60}$$

对于重新表述为如下形式的鞍点系统 (41)

$$\begin{pmatrix} k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}} & -\boldsymbol{K_h} \\ -\boldsymbol{K_h} & -k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{y}}_k^s \\ \underline{\boldsymbol{y}}_k^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{\boldsymbol{u}}_k^c \\ -\underline{\boldsymbol{u}}_k^s \end{pmatrix}$$

对于正问题。对于最优控制问题，我们使用预条件子

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K_h} + k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K_h} + k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1}(\boldsymbol{K_h} + k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^{-1}(\boldsymbol{K_h} + k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}}) \end{pmatrix} \tag{61}$$

and

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K_h} + k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}} & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}(\boldsymbol{K_h} + k\omega\boldsymbol{M_{h,\sigma}}) \end{pmatrix} \tag{62}$$

对于 (35) 和 (41)，后者对应 $k = 0$。这类预条件子此前已在 [29, 38, 54], 中讨论过，后两者针对时间周期抛物型问题。我们给出了不同傅里叶模态的结果。为评估主导量的性能，我们给出了所谓的效率指标值，其计算方法为

$$I_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{M}^{\oplus}_{|\cdot|}(\beta;\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\tau})^2}{\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\eta}\|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl},\frac{1}{2}}}}$$

对于正问题以及

$$I_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{M}_{|\cdot|}^{\oplus}(\beta_1, \beta_2, \beta_3; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\rho})^2}{\|(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{p} - \boldsymbol{\zeta})\|_{\boldsymbol{H}^{\mathbf{curl}, \frac{1}{2}}}}$$

针对最优控制问题。我们给出主导量 (50) 和 (59) 的结果，因为可以对参数 β 、 β_1、 β_2、 β_3 进行优化，从而得到更好的效率指标。

数值测试使用 Matlab (MATLAB R2022a) 在一台配备 Intel(R) Core(TM) i5-8250U CPU @ 1.60GHz 1.80 GHz 处理器、16.0 GB 随机存取存储器和 512 MB 系统内存的计算机上完成。我们使用快速有限元组装：边元工具箱 ([53]) 计算有限元离散，包括质量矩阵、刚度矩阵和载荷向量。

8.1. **正问题**。

我们选取给定数据

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = (0, 0, e^t(\cos t + (2\pi^2 + 1)\sin t)\sin \pi x_1 \sin \pi x_2)^T$$

其精确解为

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}, t) = (0, 0, e^t \sin t \sin \pi x_1 \sin \pi x_2)^T. \tag{63}$$

表1列出了针对模式 $k = 1$ ，关于 β 对主导量 $\mathcal{M}_{|\cdot|}^{\oplus}(\beta; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau})^2$ 进行最小化的结果，其中包括计算主导量最小化所需的计算时间（秒） $ctime$ 。用于计算 $k = 1$ 对应主导量效率指标的误差范数为 $1.52e+02$。迭代在第8次迭代时停止，停止准则为相邻迭代步之间的误差值小于$1e-04$。表2列出了模式 $k = 0$ 的结果。对应的误差范数，

迭代	计算时间	β	$\mathcal{M}_{\|\cdot\|}^{\oplus}(\beta; \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\tau}_1)^2$	I_{eff}
1	2.605e-03	1.000	2.246e+02	1.473990
2	2.119e-03	1.166	2.089e+02	1.370469
3	2.722e-03	1.275	2.005e+02	1.315729
4	4.290e-03	1.320	1.975e+02	1.295754
5	6.208e-03	1.332	1.967e+02	1.290793
6	2.071e-03	1.334	1.966e+02	1.289807
7	1.129e-03	1.335	1.965e+02	1.289624
8	1.383e-03	1.335	1.965e+02	1.289590

表1. 在主导量最小化（正问题）中，主导量 $\mathcal{M}_{|\cdot|}^{\oplus}(\beta; \boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\tau}_k)^2$ 关于 $k = 1$ 的表达式，以及相对于 β 的相应效率指标。

用于计算主导量效率指标的公式为 $5.18e+01$。最小化的停止准则仍为迭代步之间的误差值小于 $1e-04$。结果表明，针对 β 实现了适当的最小化。所有迭代步的计算时间基本相同。

迭代	ctime	β	$\mathcal{M}_{\|\cdot\|}^{\oplus}(\beta; \boldsymbol{\eta}_0^c, \boldsymbol{\tau}_0^c)^2$	I_{eff}
1	2.691e-03	1.000	1.093e+02	2.111
2	2.669e-03	1.725	1.015e+02	1.959
3	2.217e-03	1.968	1.011e+02	1.951

表2. 主导量 $\mathcal{M}_{|\cdot|}^{\oplus}(\beta; \boldsymbol{\eta}_0^c, \boldsymbol{\tau}_0^c)^2$ 对于 $k = 0$ 以及相对于 β 的对应效率指标（正问题中的主导泛函最小化）。

8.2. **最优控制问题**。

给定的期望状态选为

$$\boldsymbol{y_d}(\boldsymbol{x},t) = (0,0,e^t(\sin t + (2\pi^2+1)((2\pi^2+1)\sin t - \cos t))\sin \pi x_1 \sin \pi x_2)^T$$

对于代价参数 $\alpha = 1$，其解与（63）相同。在表3中，我们给出了模式 $k = 0$下不同代价参数值 α 对应的主导量数值、效率指标和计算时间（秒） $ctime$ 。在表 4 中，我们给出了模式 $k = 1$ 下不同代价参数值 α 对应的主导量数值、效率指标和计算时间（秒） $ctime$ 。关于 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的最小化通常在两次迭代后停止。结果表明，主导量具有良好的性能。对于离散化最优性系统，采用预条件最小残量法时，对不同代价参数值的稳健性与预条件子（62）和（61）的结果一致。所有单次计算的计算时间都相近。

α	计算时间	$\mathcal{M}^{\oplus}_{\lvert\cdot\rvert}{}^2$	I_{eff}
1e-04	3.466e-03	2.851e+05	1.788
1e-03	3.350e-03	2.854e+05	1.790
1e-02	4.157e-03	2.854e+05	1.790
1e-01	3.398e-03	2.853e+05	1.790
1e+00	4.364e-03	2.849e+05	1.787
1e+01	4.076e-03	2.805e+05	1.759
1e+02	3.156e-03	2.431e+05	1.518
1e+03	3.305e-03	2.345e+05	1.471
1e+04	4.958e-03	2.329e+05	1.461

表3。针对 $k = 0$ 的主导量 $\mathcal{M}^{\oplus}_{|\cdot|}(\beta_1, \beta_2, \beta_3;\ \boldsymbol{\eta}^c_0, \boldsymbol{\tau}^c_0, \boldsymbol{\zeta}^c_0, \boldsymbol{\rho}^c_0)^2$ 及相应的效率指标（最优控制问题）。

α	ctime	$\mathcal{M}^{\oplus}_{\lvert\cdot\rvert}{}^2$	I_{eff}
1e-04	3.301e-03	4.983e+05	1.819
1e-03	4.666e-03	5.317e+05	2.373
1e-02	9.359e-03	5.317e+05	2.351
1e-01	4.302e-03	5.316e+05	1.455
1e+00	4.164e-03	5.265e+05	3.279
1e+01	3.334e-03	5.216e+05	1.798
1e+02	4.553e-03	4.838e+05	1.527
1e+03	4.768e-03	4.733e+05	1.486
1e+04	3.726e-03	4.718e+05	1.480

表 4. 主导量 $\mathcal{M}^{\oplus}_{|\cdot|}(\beta_1, \beta_2, \beta_3;\ \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\rho}_1)^2$ 关于 $k = 1$ 及相应的效率指标（最优控制问题）。

9. 结论与展望

本文推导了时周期涡流问题的后验误差估计，其中包括标准的时周期边值问题及相应的最优控制问题，而其正问题即为偏微分方程约束。这些估计具有可靠性、紧确性，且完全可计算。我们还讨论了适用于此类问题的一种恰当离散方法，即多谐波有限元法，并给出了初步计算结果。本文推导了正问题和最优控制问题的上界。若进一步推导下界，便可得到一个完全可计算的误差界

，从而同时给出上界和下界。相关主题及计算实验将作为作者后续工作的内容。

致谢

作者衷心感谢芬兰中部区域委员会/坦佩雷地区委员会以及欧洲区域发展基金提供的资金支持。这笔资助属于于韦斯屈莱应用科学大学的*coADDVA* - 通过计算为制造业增添价值项目的一部分。

参考文献

[1] I. Anjam. 麦克斯韦型与椭圆型问题的后验误差控制。于韦斯屈莱计算研究，(190)，2014。[2] I. Anjam、O. Mali、A. Muzalevsky、P. Neittaanmäki 和 S. Repin。麦克斯韦型问题的后验误差估计。《俄罗斯数值分析与数学建模杂志》，24(5):395–408，2009。[3] I. Anjam 和 J. Valdman。二维和三维有限元矩阵的 Matlab 快速组装：边元。《应用数学与计算》，267:252–263，2015。[4] O. Axelsson 和 Z.-Z. Liang。时周期涡流最优控制问题的预处理方法。《计算与应用数学杂志》，352:262–277，2019。[5] O. Axelsson 和 D. Lukáš。涡流最优控制时谐电磁问题的预处理方法。《数值数学杂志》，27(1):1–21，2019。[6] I. Babuška。有限元法的误差界。《数值数学》，16(4):322–333，1971。[7] I. Babuška 和 A. Aziz。有限元方法数学基础的综述讲座。《有限元方法的数学基础及其在偏微分方程中的应用》，第1–359页，1972。[8] F. Bachinger、M. Kaltenbacher 和 S. Reitzinger。谐波平衡有限元法的高效求解策略。IGTE 会议论文集，2:385–389，2002。[9] F. Bachinger、U. Langer 和 J. Schöberl。非线性多谐波涡流问题的数值分析。《数值数学》，100:593–616，2005。[10] F. Bachinger、U. Langer 和 J. Schöberl。非线性时周期涡流问题的高效求解器。《科学计算与可视化》，9(4):197–207，2006。[11] R. Beck、R. Hiptmair、R. H. Hoppe 和 B. Wohlmuth。涡流计算的基于残差的后验误差估计子。《ESAIM：数学建模与数值分析》，34(1):159–182，2000。[12] R. Beck、R. Hiptmair 和 B. Wohlmuth。涡流计算的层次误差估计子。《数值数学与高级应用》（于韦斯屈莱，1999），第110–120页，1999。[13] D. Boffi、L. Gastaldi、R. Rodríguez 和 I. Šebestová。麦克斯韦特征值问题的基于残差的后验误差估计。《IMA数值分析杂志》，37(4):1710–1732，2017。[14] A. Borzì 和 V. Schulz。由偏微分方程支配的系统的计算优化。工业与应用数学学会，2011。[15] A. Buffa、H. Ammari 和 J.-C. Nédélec。麦克斯韦方程组涡流模型的合理性。《工业与应用数学学会应用数学杂志》，60(5):1805–1823，2000。[16] T. Chaumont-Frelet、A. Ern 和 M. Vohralík。稳定的分片 H(curl) 多项式延拓，以及通过旋度-旋度问题的分片局部平衡获得的 p 鲁棒后验误差估计。《数学计算》，91(333):37–74，2022。[17] J. Chen、Z. Chen、T. Cui 和 L.-B. Zhang。含电路/场耦合的涡流模型自适应有限元方法。《工业与应用数学学会科学计算杂志》，32(2):1020–1042，2010。[18] D. Copeland、M. Kolmbauer 和 U. Langer。频域有限元方程的区域分解求解器。载于《科学与工程中的区域分解方法XIX》，第301–308页。Springer，2010。[19] D. M. Copeland 和 U. Langer。非线性多谐波有限元方程的区域分解求解器。《数值数学杂志》，18(3):157–175，2010。[20] E. Creusé、Y. Le Menach、S. Nicaise、F. Piriou 和 R. Tittarelli。涡流问题谐波公式的两种有保证的平衡误差估计子。《计算机与应用数学》，77(6):1549–1562，2019。[21] A. Gaevskaya、R. H. Hoppe 和 S. Repin。最优控制问题代价泛函的后验估计。载于《数值数学与高级应用：ENUMATH 2005 论文集，第六届欧洲数值数学与高级应用会议，西班牙圣地亚哥-德孔波斯特拉，2005年7月》，第308–316页。Springer，2006。[22] A. Gaevskaya、R. H. Hoppe 和 S. Repin。含分布控制的椭圆型最优控制问题后验误差估计的泛函方法。《数学科学杂志》，144:4535–4547，2007。[23] V. Girault 和 P.-A. Raviart。纳维-斯托克斯方程的有限元近似。《数学讲义》，749，1986。

[24] A. Hannukainen。麦克斯韦方程组的泛函型后验误差估计。载于《数值数学与高级应用：ENUMATH 2007 论文集，第七届欧洲数值数学与高级应用会议，奥地利格拉茨，2007年9月》，第41–48页。Springer，2008。[25] M. Hinze、R. Pinnau、M. Ulbrich 和 S. Ulbrich。偏微分方程约束优化，第23卷。Springer Science & Business Media，2008。[26] M. Kollmann 和 M. Kolmbauer。时周期抛物型最优控制问题的预处理最小残量法求解器。《数值线性代数及其应用》，20(5):761–784，2013。[27] M. Kollmann、M. Kolmbauer、U. Langer、M. WOLFMAYR 和 W. Zulehner。多谐波抛物型最优控制问题的鲁棒有限元求解器。《计算机与应用数学》，65(3):469–486，2013。[28] M. Kolmbauer。用于涡流问题仿真与控制的多谐波有限元与边界元方法。博士论文，林茨约翰内斯·开普勒大学，2012。[29] M. Kolmbauer 和 U. Langer。分布控制时周期涡流最优控制问题的鲁棒预处理最小残量法求解器。《工业与应用数学学会科学计算杂志》，34(6):B785–B809，2012。[30] M. Kolmbauer 和 U. Langer。若干类时周期涡流最优控制问题的高效求解器。载于《偏微分方程数值解：理论、算法及应用：谨以此书纪念 Raytcho Lazarov 教授从事计算方法与应用数学研究40周年》，第203–216页。Springer，2013。[31] O. A. Ladyzhenskaya。《数学物理边值问题》。莫斯科 Nauka，1973。俄文。译文载于《应用数学科学》第49卷，Springer，1985。[32] O. A. Ladyzhenskaya、V. A. Solonnikov 和 N. N. Ural'ceva。《抛物型线性与拟线性方程》。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1968。[33] U. Langer、S. Repin 和 M. WOLFMAYR。抛物型时周期边值问题的泛函型后验误差估计。《计算应用数学方法》，15(3):353–372，2015。[34] U. Langer、S. Repin 和 M. WOLFMAYR。时周期抛物型最优控制问题的泛函型后验误差估计。《数值泛函分析与优化》，37(10):1267–1294，2016。[35] U. Langer 和 A. Schafelner。抛物型最优控制问题的自适应时空有限元方法。《数值数学杂志》，30(4):247–266，2022。[36] U. Langer、O. Steinbach、F. Tröltzsch 和 H. Yang。含能量正则化的抛物型最优控制问题的时空有限元离散。《工业与应用数学学会数值分析杂志》，59 695，2021 2 675( ): – 。[37] U. Langer、O. Steinbach、F. Tröltzsch 和 H. Yang。抛物型方程最优控制的非结构化时空有限元方法。《工业与应用数学学会科学计算杂志》，43(2):A744–A771，2021。[38] U. Langer 和 M. WOLFMAYR。时周期抛物型最优控制问题的多谐波有限元分析。《数值数学杂志》，21(4):265–300，2013。[39] O. Mali、P. Neittaanmäki 和 S. Repin。精度验证方法：理论与算法，第32卷。Springer Science & Business Media，2013。[40] J.-C. Nédélec。《v18》中的混合有限元。《数值数学》，35:315–341，1980。[41] J.-C. Nédélec。《v20》中的一类新型混合有限元。《数值数学》，50:57–81，1986。[42] P. Neittaanmäki 和 S. Repin。麦克斯韦型问题协调近似的有保证误差界。载于《应用与数值偏微分方程：多学科背景下的仿真、优化与控制科学计算》，第199–211页。Springer，2009。[43] P. Neittaanmäki 和 S. R. Repin。可靠的计算机仿真方法：误差控制与后验估计。Elsevier，2004。[44] C. C. Paige 和 M. A. Saunders。稀疏不定线性方程组的求解。《工业与应用数学学会数值分析杂志》，12(4):617–629，1975。[45] D. Pauly、S. Repin 和 T. Rossi。麦克斯韦方程组柯西问题精确解偏差的估计。《芬兰科学院数学年刊》，36(2):661–676，2011。[46] D. Praetorius、S. Repin 和 S. A. Sauter。数学建模的可靠方法。《计算应用数学方法》，21(2):263–266，2021。[47] T. Rahman 和 J. Valdman。二维和三维有限元矩阵的 Matlab 快速组装：节点元。《应用数学与计算》，219(13):7151–7158，2013。[48] S. Repin。热方程初边值问题精确解偏差的估计。《林琴科学院院刊：物理、数学与自然科学部，林琴数学与应用》，13(2):121–133，2002。[49] S. Repin。《偏微分方程的后验估计》。Walter de Gruyter，2008。[50] S. I. Repin。基于对偶误差主导量的后验误差估计统一方法。《数学与计算机仿真》，50(1-4):305–321，1999。[51] J. Schöberl。麦克斯韦方程组的后验误差估计。《数学计算》，77 649，2008 262 633( ): – 。[52] F. Tröltzsch。偏微分方程最优控制：理论、方法与应用，第112卷。美国数学学会，2010。[53] J. Valdman。有限元快速组装：边元。
(https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4663

5-
fast-fem-assembly-edge-elements)，MATLAB Central File Exchange，2023。

[54] M. WOLFMAYR。抛物型时间周期模拟与最优控制问题的多谐波有限元分析。博士论文，林茨约翰内斯·开普勒大学，2014 年。[55] Y. Xu、I. Yousept 和 J. Zou。拟线性 $h(curl)$-椭圆问题的自适应边缘元逼近。应用科学中的数学模型与方法，30(14)：2799–2826，2020 年。[56] S. Yamada 和 K. Bessho。结合有限元分析与谐波平衡法计算谐波场。*IEEE* 磁学汇刊，24(6)：2588–2590，1988 年。[57] I. Yousept。时间谐波涡流方程系数最优控制问题的有限元分析。应用科学中的数学模型与方法，154：879–903，2012 年。

（M. Wolfmayr）芬兰于韦斯屈莱应用科学大学和芬兰于韦斯屈莱大学电子邮箱地址：monika.wolfmayr@jamk.fi