符号操作的伴随范畴

Francesco Gavazzo 比萨大学 fr
ancesco.gavazzo@unipi.it

arXiv:2305.01772v1 [cs.LO] 2 May 2023

摘要——从（抽象）语法的数学理论出发，我们发展了一种一般性的符号操作关系理论，该理论相对于一般性的语法概念具有参数化特征，并对其加以刻画。我们依托自由代数和单子等范畴概念对语法进行建模，并展示了如何将这些概念扩展到伴随范畴的框架，从而获得一种具有重写系统风格的一般符号操作理论。由此，我们得到了一种能够处理基于语法的重写的增广关系演算。通过推广并统一重写领域中的里程碑式结果（如平行移动和 Tait-Martin-Löf 技术），我们证明了关系方法的有效性。

索引词——重写、关系推理、合流性

I. 引言

对符号表达式及其操作的研究，一直是数学，尤其是理论计算机科学的主要目标之一。的确，正是“符号操作”使符号推理以及与之相关的符号计算概念如此有效。Charles Wells[1] 精辟地概括了符号表达式与其操作之间深刻而根本的关系，他写道：符号项就是封装计算。

长期以来，数学家、逻辑学家和计算机科学家所使用的符号表达式，一直鲜少受到数学家和逻辑学家的关注。相反，自二十世纪七十年代起，计算机科学家取得了显著成果 [1]–[13], ，主要集中在编程语言理论领域；他们以初始代数和自由单子的形式，发展了（抽象）语法的代数理论 [1]。总体而言，这些成果催生了一个新的研究领域，通常称为语法数学；在这一领域中，语法被默认理解为抽象语法。

然而，没有（符号）动力学或操作语义，符号语法在很大程度上便毫无生气。[2] 传统上，重写理论 [14]–[17] 是研究表达式之间此类符号化离散变换的学科。不过，尽管重写理论远早于前述语法数学，但可以说它尚未达到同等的普遍性。事实上，符号表达式有不同的类型：既可以像代数中那样是一阶的，也可以像微积分中那样是高阶的；既可以像程序设计语言理论中那样带类型，也可以像逻辑中那样无类型；既可以像传统数学中那样是一维的，也可以像范畴论中那样是二维的，等等。这个简单的观察正是前文提到的句法数学理论的核心：在该理论中，不同形式的语法由不同的数据结构构成，并统一地通过代数来理解 [1]。

1) 重写：重写领域是否也出现了类似情况？并非如此！事实上，前面提到的每一类表达式都促成了特定的、以语法为基础的重写理论的发展。例如，项重写 [15]–[17], 研究一阶表达式的符号操作，而高阶 [15], [18] 重写和名义重写 [19] 则关注带有变量绑定的表达式。这种特设重写形式体系的泛滥，使重写理论无法成为符号操作的一般理论。

事实上，一种符号操作的一般理论，即所谓的抽象归约系统（抽象重写系统）理论（ARSs） [14], [17]，大约在一个世纪前就已提出（尽管其现行表述归功于 Huet [17]）。这种理论基于一个概念性假设：“符号操作”是一种关系性概念；它研究这种关系的抽象性质，例如合流性和终止性。抽象重写系统通过忽略表达式的句法结构来实现其一般性，因此它们对符号操作的一般理论所作的贡献有限（但并非无足轻重）。遗憾的是，由于抽象重写系统本质上不涉及语法，它们只能将符号操作视为离散变换，因而无法说明这些变换如何与表达式的句法结构相互作用。引述 Ghani 和 Lüth [20]:

> [. . .] 抽象重写系统缺乏足够的结构，无法充分建模替换、上下文以及层结构等关键概念；在模组化问题中，层结构指的是将一个系统中的项叠加在另一个系统的项之上。因此，抽象重写系统主要被用作组织工具，而困难的结果则直接在语法层面上得到证明。

基于语法的临时性重写理论层出不穷，恰恰是由前述抽象重写系统的缺陷所致。为克服这些缺陷，并迈向一种通用的符号归约理论，使其既能以表达式的句法结构为参数，又能将其纳入考量，若干作者提议以范畴基础而非关系基础重建重写理论。显著的例子包括基于多图 [21], Lawvere理论 [22], 2-范畴（及其变体） [23]–[26],以及（富化）单子的理论 [20], [27], [28]。

[1]参见 https://abstractmath.org/MM/（数学的符号语言）。[2]操作语义通常涵盖一大类语义行为，符号操作只是其中之一。

尽管采用了不同的范畴框架，这些理论都具有两个共同特征：首先，它们放弃了对符号操作的关系性理解，转而采用范畴构造，例如适当的自然变换；从概念上说，这些构造与日常的符号操作实践及其理解相去更远。其次，它们是指称式而非操作式的，也就是说，符号操作并非定义在句法表达式上，而是定义在其指称上（例如适当范畴中的态射）。因此，通用性只有在指称层面上才能实现，代价则是失去直觉。问题显而易见：能否在保持对符号操作的直觉性关系理解的同时，在操作层面实现同等程度的通用性?

A. 贡献

本文通过肯定地回答上述问题表明，抽象重写系统的核心——关系方法——能够以高度通用、模块化且极其自然的方式，处理一大类句法表达式，并与前文提到的（抽象）语法数学相辅相成。这使我们得以在所谓的（形式）表达式数学与其（符号）操作数学之间架起一座新的桥梁。前者是代数的，建立在范畴论之上；后者则基于关系，建立在伴随范畴理论之上 [29]。值得注意的是，定义重写关系理论所需的，恰恰是用于定义语法的范畴概念在伴随范畴中的对应物，即初始代数、自由单子等。这勾勒出一个通用框架：范畴概念用于定义句法表达式，而它们在伴随范畴中的扩展则为这些表达式提供符号操作。我们将按如下步骤得出这些结果。

1. 我们使用恰当的范畴（即 Grothendieck拓扑斯 [30]）$\mathcal{E}$ 来为我们关注的不同种类表达式建模（例如，用集合表示一阶表达式 [1]，用预层表示带绑定子的表达式 [2], [7]）。2. 随后，我们通过在 $\mathcal{E}$ 上定义恰当的签名函子来给出语法规范，而语法本身则由这些函子上的自由单子定义。3. 接着，我们采用关系方法，注意到如果某个托扑斯 $\mathcal{E}$ 为一个表达式宇宙建模，那么它的诱导关系范畴 [29], [31] Rel($\mathcal{E}$) 就为这些表达式之间的符号变换建模。4. 通过将函子、单子和（初始）代数从$\mathcal{E}$ 扩展到 Rel ($\mathcal{E}$)——在恰当条件下，这总是可以做到的 [32]——[35] ——我们定义新的关系算子，它们基于语法，并使我们能够以纯粹的关系方式定义有趣的重写概念。5. 通过利用上述算子的代数律，我们对非平凡的重写性质进行建模并加以证明。例如，我们通过给出所谓平行移动 [18] 以及 Tait 和 Martin-Löf [36]–[38] 技巧的关系推广，证明了正交系统的合流性。1) 增广关系演算：通过将定义语法的范畴构造扩展到代数，我们获得了丰富而新颖的关系词汇，使我们能够在伴随范畴的框架中定义许多重写概念。尽管这种词汇是在对语法（的数学）进行关系分析的过程中得到的，但事实证明，对我们的目的而言，重要的只是这种分析所产生的一系列新算子，以及支配其（操作式）行为的（代数）定律。此时，抽象这一步便顺理成章：我们可以忘却语法结构（及其关系对应物），转而在一种完全公理化的方式下，运用由上述算子及其定律增广的关系演算 [39]–[41] 。正如普通关系演算为研究抽象归约系统提供了优雅的框架，上述增广关系演算也以一种与句法无关的方式，为研究（多种）基于语法的归约系统提供了类似的框架。

2) 重写与程序等价之间的桥梁：或许令人惊讶的是，这种增广关系演算并非全新事物：它可以被视为 Lassen [42],[43] 在高阶程序等价的背景下发展出的 λ-项关系演算的一种（非平凡）推广。由此，我们建立了重写与程序等价之间的新颖联系。由此得出的第一个（且令人惊讶的）结果是，我们观察到，在 Tait 和 Martin-Löf 的合流性技术中使用的所谓多步归约 [36]–[38] 的构造，与 Howe 对预同余候选的构造 [44], [45] 相吻合；后者是应用双模拟等价的同余性这一（操作式）证明中的关键概念 [46]。这种联系不仅使我们能够将程序等价领域的结果和技术引入重写领域（正如本文将要做的那样），也为操作式概念带来了新的认识（例如，我们将看到，上述 Howe 的构造是通过初始关系代数得到的）。

B. 相关工作

纵观重写文献，按照三种不同的学派来划分理论和结果是很自然的 [47] ，它们反映了程序语义中的主流分类：操作式 [15], [16], 、逻辑式 [48], 和指称式 [20]–[28]。不过，还有第四种学派，尽管较少为人所知，即关系学派。

关于关系推理在重写中重要性的首次观察归功于 Bäumer [49] ，此后，人们采用了若干关系演算系统（及类似方法）来研究抽象归约系统。在这一研究方向取得的众多成果中，我们提到 Church-Rosser 定理 [50], 、纽曼引理 [51],[52], 的关系证明，以及关于终止性 [51], [53]的模块性定理。关系重写也扩展到了非传统的关系概念，例如单子关系 [54] 以及模糊关系和定量关系 [55]–[58]。据作者所知，文献中尚无对基于语法的系统进行关系分析的研究。最后，我们提到重写的公理化方法 [59]–[64] ；尽管它并非关系性的，但其精神与本文工作接近。

II. 序言：（项）无语法重写

在进入重写的一般理论之前，我们先通过研究一个简单但富有启发性的例子——项重写——来向读者介绍本工作的部分主要思想。从广义上说，项重写系统 [15]–[17]（TRSs）规定了一阶项如何进行语法操作。给定一个签名 Σ，即一个包含运算符号 o 及其元数的集合，以及一个变量集合 X，回顾一下，项集合 $\mathcal{T}(X)$ 的（Σ-）项是按如下方式归纳定义的：

$$\frac{x \in X}{\mathtt{x} \in \mathcal{T}(X)} \qquad \frac{\mathtt{t}_1 \in \mathcal{T}(X) \cdots \mathtt{t}_n \in \mathcal{T}(X) \quad (o,n) \in \Sigma}{o(\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_n) \in \mathcal{T}(X)}$$

因此，项重写系统由定义在 $\mathcal{T}(X)$ 上的二元关系 $\mapsto$ 给出。我们将 $\mapsto$ 这类关系称为归约关系。

从这个角度看，项重写系统与抽象重写系统在概念上并无区别；后者是赋有二元自关系的集合。然而，只需几秒钟便会意识到，单独的关系 $\mapsto$ 几乎没有什么意义，因为它并未说明如何将 $\mapsto$ 实例化到任意复杂的表达式上，也没有说明如何沿着这些表达式的结构传播它。例如，考虑以下刻画自然数加法的关系：add(0, y) $\mapsto$ y, add(succ(x), y) $\mapsto$ succ(add(x,y))。仅依赖 $\mapsto$，无法将项 succ(add(0, 0)) 归约为 succ(0)，因为前者不是可归约表达式，[3]尽管它包含一个可归约表达式的代换实例。

因此，要在 Σ-项上得到有用的归约概念，我们需要 (i) 考虑 $\mapsto$的代换实例，以及 (ii) 指定如何沿项的语法传播这些实例。第一个问题通过使用 $\mapsto$的代换闭包 $\twoheadrightarrow$ 来处理，由此我们考虑 $\mapsto$的（代换）实例。[4] 对于第二个问题，根据所考虑的归约概念，有许多自然的扩展方式。例如：

- 序贯归约是这样一种关系 $\rightarrow$ ：每次恰好归约一个可归约表达式。
- 并行归约是这样一种关系 $\Rightarrow$ ：并行归约任意数量的互不嵌套的可归约表达式。
- 完全归约是这样一种关系 $\Rightarrow$：并行归约任意数量、可能相互嵌套的可归约表达式。

对所有这些概念进行形式化定义，需要首先引入项上的若干特定句法概念，例如位置、出现、上下文等。以序贯归约为例，其定义规定，当且仅当 $C[\mathtt{t}]_p \rightarrow C[\mathtt{s}]_p$ 成立时，$\mathtt{t} \twoheadrightarrow \mathtt{s}$也成立，其中 p 是一个位置，而 $C[-]_p$ 是一个在位置 p处有一个孔的上下文。由此产生的一个主要后果是，项重写系统在本质上变得依赖于项，从而失去了抽象重写系统所赋予归约的关系性理解。从归约关系本身转向被归约对象的句法结构，极大地影响了对项重写系统进行推理的方式，使关系推理让位于关于项的句法论证。这类论证存在几个众所周知的缺点：容易出错、难以形式化，而且最重要的是缺乏模块性。

[3]回顾一下，可归约表达式是一个可以被归约的项。[4]形式化地说，当 $\mathtt{t} \mapsto \mathtt{s}$时，我们有 $\mathtt{t}[\bar{\mathtt{v}}/\bar{\mathtt{x}}] \twoheadrightarrow \mathtt{s}[\bar{\mathtt{v}}/\bar{\mathtt{x}}]$。

项的句法结构发生细微变化，就需要从头重新开发底层的重写理论。

1) 项重写：以句~~法关系的方式~~：刚才描述的情形揭示了抽象重写系统与项重写系统（更一般地说，基于语法的重写系统）之间存在概念上的鸿沟。然而，这一鸿沟并非实质性的；正如本文将要展示的，我们可以建立一个完全关系化的项重写系统理论。

首先，我们观察到，通过对 $\twoheadrightarrow$.[5] 应用适当的关系构造，可以得到并行归约和完全归约。例如，以下关系构造称为相容细化 [42], [65], ，它定义了$\widehat{a}$ 关系：该关系作用于具有相同最外层句法构造、且其参数逐项满足 a关系的项之间。

$$\frac{x \in X}{\mathtt{x} \mathbin{\widehat{a}} \mathtt{x}} \qquad \frac{\mathtt{t}_1 \mathbin{\widehat{a}} \mathtt{s}_1 \quad \cdots \quad \mathtt{t}_n \mathbin{\widehat{a}} \mathtt{s}_n}{o(\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_n) \mathbin{\widehat{a}} o(\mathtt{s}_1, \ldots, \mathtt{s}_n)}$$

利用相容细化，我们可以将 $\Rightarrow$ 的关系（归纳）定义写作 $\mu x.{\twoheadrightarrow} \vee \widehat{x}$。这种视角的转变并非只是为了给出更简洁的定义。将 $\Rightarrow$ 的定义与 $\widehat{\ }$ 的（最简单）定义分开之后，自然就会关注后者的代数性质，而非项的语法。例如，很容易证明 $\widehat{\ }$ 是函子性的（它保持关系复合和恒等关系），并且是（ω-）连续的：这样一来，上述 $\Rightarrow$ 的关系定义不仅是良定义的，而且还使我们能够通过代数计算和不动点归纳 [66]来推理并行归约。

此外，我们还可以使用代数的和关系推理来证明 $\Rightarrow$ 的重写性质。例如，在第 VII 节中，我们将通过证明以下类似 Kleisli 扩展引理（此处已针对 $\Rightarrow$ 作了适当实例化）来证明正交系统 [17] 中 $\Rightarrow$ 的菱形性质；该引理类似于一种半合流性证明技术：$\twoheadleftarrow$；$\Rightarrow \subseteq \Rightarrow$；$\Leftarrow$ 蕴含 $\Leftarrow$；$\Rightarrow \subseteq \Rightarrow$；$\Leftarrow$。我们将仅依赖代数律证明这一结果，然后使用相同的方法论，说明上述扩展引理中的包含关系对于一大类（以关系定义的）归约系统（即正交系统）成立。整个过程都是通过进一步的关系构造，即关系替换 [42], 及其代数律，对 $\twoheadrightarrow$ 进行关系上的分解来完成的。熟悉 TRS 的读者可以将这一结果视为对著名平行移动技术 [18] 的推广。

2）你好，语法，我的老朋友：前面的讨论暗示，通过引入适当的关系算子，可以对 TRS 进行关系分析，在代数层面描述语法如何作用于归约。这使得对 TRS 的操作式分析确实更接近对抽象重写系统的相应分析：对于前者，只需要比抽象重写系统所需的更强大的关系演算（稍后我们会回到这一点）。所有这些都显著改善了推理，但并未摆脱对语法的依赖：新关系构造（例如 $\widehat{\ }$）的定义仍然依赖于手头的语法。

[5]序贯归约也同样如此，不过我们将其形式化分析留待未来工作（见第 X 节）。

为了使关系框架真正具有一般性，我们注意到，对于我们的目的而言，项的实际语法并非必需。事实上，众所周知，语法概念可以建模为适当签名函子上的自由代数（及其相应的单子） [1]。对于一阶项，任意签名 Σ 都会在由集合与函子构成的集合范畴 Set 上诱导一个（签名）函子 Σ。这样的函子充当语法规范，并诱导出一个函子 $\mathcal{S}$：给定一个集合 X，它返回由 X 上的 Σ-项构成的集合。函子 $\mathcal{S}$ 是单子（$\mathcal{S}$、η、ρ）的载体；该单子是 Σ 上的自由单子，因为结构 $X \xrightarrow{\eta} \mathcal{S}X \xleftarrow{\sigma} \Sigma(\mathcal{S}X)$ 给出了 X 上的自由 Σ- 代数。映射 η 充当变量构造子，将 x 映射到 x；而映射 σ 描述了 Σ-项定义中的归纳步骤，即项对于运算符号是封闭的。最后，乘法 ρ将“项之项”展平为一个项，实际上它是递归定义的，依赖于 η 和 σ。

现在的关键观察是：作用于（项的）集合上的这些数据，恰好就是定义归约关系（背后的关系算子）所需的内容，前提是我们能够将它们对函数的作用扩展到关系上，从而扩展到由集合和关系组成的范畴 Rel。例如，给定一个 a 上的关系 $\mathcal{S}X$，我们可将 $\widehat{a}$ 还原为 η°；$\eta \vee \sigma^\circ$；$\overline{\Sigma}a$；σ。对于一个关系[6] $a : A \nrightarrow B$，我们用 $a^\circ : B \nrightarrow A$ 表示 a 的逆关系，用 $\overline{\Sigma}$ 表示 Σ 的关系扩张，也就是一个类似函子的映射，它将 a 映到 $\overline{\Sigma}a : \Sigma A \nrightarrow \Sigma B$（当然，我们必须检查使用 $\overline{\Sigma}$ 是否确实能还原 $\widehat{a}$，但我们将看到事实确实如此；而且，这还是典范的）。

现在的问题是：我们如何定义 $\overline{\Sigma}$? 幸运的是，这个问题很久以前就有了答案，如今我们可以依托关于集合构造 [67]–[69] 的关系扩张的成熟理论。特别是，根据 Barr 的一项著名结果， [32]， Σ 可扩张为 Rel 上的保逆单调函子 $\overline{\Sigma}$。此外， $\overline{\Sigma}$ ——通常统称为 Σ 的 Barr 扩张——是唯一的，并且还诱导出一个保逆单调函子 $\overline{\mathcal{S}}$；正如记号所示，它是 $\mathcal{S}$ 的 Barr 扩张。

保逆单调函子称为关系子 [33], [70], [71] ，关于关系子以及如何将函子扩展为关系子，已有丰富的理论。我们将关系子视为描述（归约）关系如何沿底层函子所给出的句法结构传播。例如， $\overline{\Sigma}$ 确实按照上述概述定义了 $-$。此外，从单子角度考察 $\mathcal{S}X$ ，我们可以利用 $\overline{\mathcal{S}}$ 将 $\Rightarrow$ 进一步分解为 ρ°；$\overline{\mathcal{S}}(\twoheadrightarrow)$；$\rho$。从语法角度看，这一定义对应于并行归约的“基于上下文”的定义；借助关系子，我们可以在不涉及语法的情况下讨论上下文。最后，我们可以证明这里概述的并行归约的两种定义确实等价。

3）从代数到程序等价：这一（非正式的）分析表明，并行归约可以通过关系得到完整理解；此外，关系子（尤其是 Barr 扩张）所发挥的作用暗示，并行归约是由语法诱导出的规范归约概念。

[6]我们使用记号 $a : A \nrightarrow B$，代替 $a \subseteq A \times B$。

事实确实如此吗？其他归约概念又如何？

第一个问题的答案是肯定的，至少当我们将 $\mathcal{S}$ 视为单子时如此。不过，并行归约并非由语法诱导出的唯一规范归约概念。事实上，由于 $\mathcal{S}X$ 是自由的，初始代数理论告诉我们，也可以将其描述为（Set）函子 $X + \Sigma(-)$ 的初始代数，因此我们也可以将语法视为一个初始代数。

这与重写有什么关系？所谓的 Eilenberg-Wright 引理 [34] 指出，Set 中的初始代数在 Rel 中也同样是初始代数。特别地，只要我们有一个关系 $a : X + \Sigma A \nrightarrow A$，初始性就给出一个唯一的关系 $(\!|a|\!) : \mathcal{S}X \nrightarrow A$，使得[7] $[\eta, \sigma]$; $(\!|a|\!) = \overline{\Sigma}(\!|a|\!)$; a。若将 a 视为归约，那么 $(\!|a|\!)$ 就沿着项的句法结构递归地进行 a-归约。

从这一直觉出发，我们会发现， $\Rightarrow$ 恰好就是$(\!|[\eta, \sigma]; \twoheadrightarrow|\!)$。但故事还没有结束。事实上，即使这种基于初始代数的 $\Rightarrow$ 定义“超越了”用于定义并行归约（的最小不动点刻画）的关系算子，我们仍能用这套术语对 $\Rightarrow$ 作出归纳刻画，即将其定义为 $\mu x_\circ\, \widehat{x}; \twoheadrightarrow_\circ$。熟悉程序等价的读者对此应当会有似曾相识之感：事实上，形如 $\mu x_\circ\, \widehat{x}; a$ 的关系并不新鲜，因为它们正是著名的 Howe 技术 [44], [45] 中用于证明应用双模拟等价 [46]具有同余性的所谓预同余候选（定义在 a上）。与并行归约一样，这套关系演算工具也足以证明 $\Rightarrow$具有有趣的重写性质。我们将通过给出所谓 Tait-Martin-Löf 技巧 [36]–[38]的一个完全关系化推广来见证这一点。

4) 超越项重写系统：到目前为止的讨论表明，项重写系统理论可以在关系框架中给出。这一观察建立在三个关键点之上：(i) 一阶表达式的语法可以在 Set 上以范畴的方式建模；(ii) 后一个范畴拥有一个丰富的关系范畴，即 Rel，它对一阶表达式的符号操作进行建模；(iii) 对语法进行建模的范畴的概念可以扩展到 Rel，而这些概念恰恰是定义归约关系并证明关于它们的定理所需要的（(iv) 作为我们稍后将讨论的一个额外要点，我们注意到，这类扩展使我们能够用适当的算子扩展 Rel 所给出的丰富的关系演算，从而得到一种扩展的关系演算，在其中可以表达重写理论）。

然而，符号表达式的领域远比一阶项丰富：其中有带名称和绑定子的表达式 [2], [7], 、带序和类型的表达式、图表和二维表达式 [73], 等。所有这些表达式都有适用于它们的符号操作概念（例如高阶重写 [15], [18], 、名义重写 [19], 、图示重写 [74]–[77], 等），而

[7]根据兰贝克引理 [72], 我们有 $[\eta, \sigma] : X + \Sigma(\mathcal{S}X) \cong \mathcal{S}X$。

为了称得上符号操作的一般理论，我们将要发展的关系理论必须涵盖所有这些例子。

为实现这一目标，我们注意到，上述关键点并非 Set、Rel 和一阶项所独有。迄今提及的所有表达式，都可以用初始代数和自由单子来理解，前提是转向 Set 以外的范畴。例如，带绑定子的表达式以变量（即预层） [7] 和名义集合 [2], [3], 为模型，而图示表达式则依托于跨度范畴 [74]。

这使我们能够恢复上文的第 (i) 点。如果也能恢复第 (ii) 点和第 (iii) 点，那么我们就可以为所讨论的所有类别的符号表达式建立符号操作的关系理论。事实确实如此，因为迄今提及的每个范畴$\mathcal{E}$都会在其上诱导出一个丰富的关系范畴 Rel($\mathcal{E}$)，并且语法函子和单子也可扩展到 Rel ($\mathcal{E}$) 上，其中 $\mathcal{E}$。要实现真正一般的理论，我们还需最后一步：通过恰当的公理体系，将上述过程提炼为一种形式，捕捉 $\mathcal{E}$ 和 Rel ($\mathcal{E}$) 所需具备的基本结构。我们将通过采用一种非最小但行之有效的公理化来实现这一目标： $\mathcal{E}$ 是一个 Grothendieck拓扑斯 [30]。事实上，任何 Grothendieck 拓扑斯 $\mathcal{E}$ 都会诱导出一个关系范畴 Rel($\mathcal{E}$)，它具有局部完备幂代数 [29], [31] 的结构。后者这些代数提供了强大且表达力极强的关系演算，使我们能够以格外清晰优雅的方式发展一般的重写理论。尽管应当避免口号式的说法，但本文发展的重写伴随范畴理论及其与句法数学理论的深刻联系，似乎表明：语法是范畴的，而语法操作是伴随范畴的。

5）公理化方法：让我们总结一下目前为止所取得的成果。将语法视为一种范畴构造，并考察其关系扩张，我们以完全关系化的方式重新获得了归约的概念。这一过程可以组织为两种互补的方法，两者都定义了归约的概念，并证明了关于归约的性质。第一种方法以代数的方式展开，通过向传统关系演算系统加入适当的关系算子（相容细化、关系替换等），并依靠它们的代数律来证明重写性质。第二种方法则是结构性的，它建立在语法经关系扩张后的范畴性质之上，以给出归约的定义，并依靠这些性质的普遍性来证明重写性质。

一种自然的进一步抽象方式，是将第一种方法彻底公理化。也就是说，我们不再以签名函子、关系子等为基础来构造关系算子，而是以公理化的方式，将它们（以及它们的代数律）加入传统的关系演算（或其变体） [39]–[41] 中。然后，我们便可以在这种增广关系演算中发展重写系统理论，从而为重写提供真正基于关系的基础。前面提到的结构化方法，则可以视为构造这种演算模型的一种方式。这种公理化方法有若干优点：例如，它使我们能够确立重写与程序等价之间新颖而深刻的联系，并为改进重写理论的证明形式化开辟了道路。[8]

现在读者已经熟悉了本工作的思想，我们转向其形式化展开。

III. 数学预备知识

在继续之前，我们先回顾一些预备概念。我们假设读者熟悉基本的范畴论 [79]。除以下约定外，我们将使用标准记号：态射的复合采用图表顺序（f; g），恒等态射记作 Δ （关系记法）。

1) 初始代数：给定一个范畴 $\mathcal{C}$ 和其上的函子Σ : $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ，一个 Σ-代数由一个对象 A （载体）和一个态射 α : $\Sigma A \to A$ （代数映射）组成。这类代数是一个范畴 Σ-Alg 的对象，其态射f : $(A, \alpha) \to (B, \beta)$ 是满足α; $f = \Sigma f$; β的 $\mathcal{C}$-态射 f : $A \to B$ 。若 Σ的初始代数存在，它就是 Σ-Alg 中的初始对象。具体而言，它是一个 Σ-代数 $(\mu\Sigma, \xi)$，对于任意 Σ-代数 (A, α)，都存在唯一的Σ-Alg 态射 $(\!|\alpha|\!)$: $\mu\Sigma \to A$。我们将初始代数 Σ 的载体记为 $\mu\Sigma$ （或 $\mu x.\Sigma x$），并将态射 $(\!|\alpha|\!)$称为折叠态射。由于初始代数是初始对象，它们在同构意义下唯一。此外，著名的兰贝克引理 [72] 指出，ξ 有一个逆，因此 $\mu\Sigma \cong \Sigma(\mu\Sigma)$。

一般而言，初始代数不一定存在。以下结果 [80] 给出了函子保证初始代数存在的一个充分条件。

定理1 ([80])。设 $\mathcal{C}$ 是一个具有初始对象0的范畴，且设 Σ 是其上的有限函子，即 Σ 保ω-余极限 Then $\mu\Sigma$ 存在，并且与链 $0 \xrightarrow{!} \Sigma 0 \xrightarrow{\Sigma!} \Sigma^2 0 \xrightarrow{\Sigma^2!} \cdots \Sigma^n 0 \xrightarrow{\Sigma^n!} \cdots$的余极限重合。

2) 单子：回顾一下，范畴 $\mathcal{C}$ 上的单子是一个三元组 $(\mathcal{R}, \eta, \rho)$，由函子 $\mathcal{R}$: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 和自然变换 η_A : $A \to \mathcal{R}A$, ρ_A : $\mathcal{R}\mathcal{R}A \to \mathcal{R}A$ 组成，并满足适当的相容条件 [79]。为避免不必要地增加记号，我们用 $\mathcal{R}$ 同时表示单子 $(\mathcal{R}, \eta, \rho)$ 及其载体函子，只要这样做不会造成混淆。

当如上所述的函子 Σ 具有初始代数（且 $\mathcal{C}$ 具有足够的结构）时，它会导出一个单子 $\mathcal{S}$，称为 Σ上的自由单子。假设 $\mathcal{C}$ 具有有限余积，并且对于任意对象 A，函子 $A + \Sigma(-)$ 的初始代数都存在；只要 Σ 的初始代数存在，这一条件就成立。那么，赋值 $\mathcal{S}A$, $\mu x.A + \Sigma x$ 确定了一个单子，称为由 Σ [79] 生成的（代数的）自由单子。初始代数映射 ξ : $A + \Sigma\mathcal{S}A \to \mathcal{S}A$ 可分解为$[\eta, \sigma]$，其中 η : $A \to \mathcal{S}A$ 且 σ : $\Sigma\mathcal{S}A \to \mathcal{S}A$。只要余积嵌入在 $\mathcal{C}$ 中是单态射， η 和 σ 都是单态射；任意托扑斯都满足这一条件。态射 η 给出

[8]关系演算非常适合证明形式化 [40]–[78], , 其中重写领域的一个典型例子是纽曼引理的证明 [51], [78]。

$\mathcal{S}$的幺元，而乘法 ρ 由初始性定义为 $(\!|[\Delta, \sigma]|\!)$。

IV. 语法的范畴论纲要

回顾了初始代数和自由单子的概念后，本节将简要概述如何将这些概念具体化，从而构建句法数学理论 [1]–[13]。尽管不同作者对抽象语法的不同方面提出了不同方法，但所有这些方法或许都可以纳入以下概念框架来理解（见图 1）。

1. 固定一个范畴（表达式宇宙） $\mathcal{E}$，用于刻画人们所关注的表达式类型。2. 语法规范由一个（签名）函子 Σ: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ 给出，通常是多项式函子，用于规定表达式如何组合。3. 语言的实际语法由 Σ 生成的自由单子 $\mathcal{S}$ 给出。

显然，上述框架只有在适当的范畴和函子中才适用，而这些范畴和函子又可能取决于该框架旨在描述的具体特征。下文将逐点详细讨论，并明确陈述我们的语法预备理论公理（我们将在此基础上发展符号操作理论）。

1）表达式宇宙：从第1点，即表达式宇宙 $\mathcal{E}$出发，我们已经注意到，形式表达式有多种类型（一阶、高阶、带类型、二维等），并且每种类型都对应于一个特定的范畴（集合、预层、名义集合、跨度、超图等）。范畴 $\mathcal{E}$ 的目的正是形式化地规定表达式的性质。正如目前提到的例子具有相同的结构：范畴 $\mathcal{E}$ 是一个托扑斯；更进一步说，它是一个 Grothendieck拓扑斯 [30]。鉴于此，我们提出理论的第一条公理。

假设1。宇宙 $\mathcal{E}$ 是一个 Grothendieck拓扑斯。

假设1绝非最小要求，我们可以通过许多方式放宽它（例如，使用具有可数余极限的初等拓扑斯，或者采用更弱的结构）。假设1的优点在于：（i）它涵盖了许多有趣的例子，而无需引入临时定义；（ii）$\mathcal{E}$ 支持一种表达力丰富的关系演算，我们将在此基础上构建符号操作的一般理论。

2）语法规范：签名函子 Σ： $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ 指定表达式如何构造，即如何组合起来形成新的表达式。我们要求 Σ 能够体现我们所关注的语法的一个关键特征：语法具有有限性且是递归定义的[9]。根据定理1，这意味着 Σ 必须具有有限性。此外，我们还需要能够沿着表达式的句法结构操作表达式，例如，对表达式的各个部分应用句法变换。

[9]我们将无限语法的研究留待未来工作。

假设 2。签名函子 Σ： $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$：(i) 几乎保持拉回（pbs）；(ii) 保持强满态射；(iii) 具有有限性。

条件 (i) 和 (ii) 将在下一节详细讨论，它们确保 Σ 具有良好定义的“符号操作”概念；后者通过对 Σ进行关系扩张而得到。Carboni 等人 [33], 提出的这些条件相当宽松：条件 (i) 可由弱拉回保持性推出，而弱拉回保持性又可由拉回保持性推出；条件 (ii) 则等价于正则满态射保持性 [29], ，而正则满态射保持性本身可由满态射保持性推出。在 Set 中，选择公理确保任意函子都保持满态射，但在任意托扑斯中并非如此。尽管如此，我们可以证明，在任何托扑斯 $\mathcal{E}$ 中，简单多项式函子都保持满态射。

3) 语法：关于 $\mathcal{E}$和 Σ的公理已给出，因此 $\mathcal{S}$无须多言。它只是充当语言的实际语法：给定一个表示某些基本表达式集合的对象 A，它便按照 Σ递归地组合先前定义的表达式，从而构造出完整表达式。事实上，由于 $\mathcal{E}$具有余积，若 $\mathcal{S}$ 存在，它就将对象 A 映射到 $\mu x A + \Sigma x$。假设 2 保证这样的初始代数存在；此外，由于只要 Σ 是有限性的，$\mathcal{S}$ 就是有限性的，因此根据定理1，该初始代数也可由定理1得到。这恰好刻画了我们关于语法具有有限性的假设。显然，$\mathcal{S}$ 也应有关系扩张，因此我们可以问，是否需要对 $\mathcal{S}$施加额外要求。答案是否定的，因为正如我们将在后续各节中看到的，只要 Σ 有关系扩张，$\mathcal{S}$就有关系扩张。

A. 示例

我们通过考察一些具体的抽象语法概念如何由一般的范畴框架刻画，来结束本节。

例 1. 在转向具体示例之前，我们注意到，语法理论中的大量实例都可通过简单多项式函子得到。回顾一下，在托扑斯 $\mathcal{E}$ 上的函子若由恒等函子和常值函子通过复合、有限积以及以集合为指标的余积构造而成，则称为简单多项式函子 [81]。简单多项式函子（及其适当的扩展）可视为语法（规约）的抽象概念 [8]。

例 2（一阶项）。我们已在第二节看到，一阶签名 Σ 在 Set 上诱导出一个（简单多项式）函子 Σ，而 $\mathcal{S}$ 给出 Σ-项的语法。

[10]更一般地，给定 $f\colon B \to A$ 在 $\mathcal{E}$ 中，由 f 诱导的多项式函子 $P_f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ 定义为 $P_f(X) = \sum_{a\colon A} X^{B(a)}$，其中后一个表达式使用 $\mathcal{E}$ 的内部语言书写（等价地，考虑切片范畴 $\sum_B \dashv f^* \dashv \prod_B$ 上的伴随函子，其中 $\sum_B$、$\prod_B\colon \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}/A$ 以及 $f^*\colon \mathcal{E}/A \to \mathcal{E}/B$; 记 $B^*\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}/B$ 为通过取 $A = 1$ 而得到的函子（因而 $f\colon B \to 1$），我们有 $P_f = B^*$; $\prod_f$; $\sum_f$）。

范畴语法
- Uni诗句 o f E表达式：一个 Grothendieck拓扑斯 $\mathcal{E}$
- 语法规范：一个函子 $\Sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$- 有限元语法意味着有限元函子 - 如果 Σ 是有限元的，那么 $\mu\Sigma = \mathrm{colim}\,\Sigma^n$ (0)
- 语法：自由单子 $\mathcal{S} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$- 自由单子存在当且仅当 $\mu\Sigma$ 存在 - $\mathcal{S}A = \mu x.A + \Sigma x$

寓言语法
- Uni诗句 o f Rel关系：LCP allegory Rel($\mathcal{E}$)
- 关系签名：一个关系子 $\overline{\Sigma} : \mathrm{Rel}(\mathcal{E}) \to \mathrm{Rel}(\mathcal{E})$，适用于 Σ- 若 Σ 保持强满态射并几乎保持拉回，则存在唯一的 $\overline{\Sigma}$ - Σ 是有限元的意味着 $\overline{\Sigma}$ ω-连续： $\overline{\Sigma}(\bigvee_n a_n) = \bigvee_n \overline{\Sigma} a_n$
- 关系语法：一个关系子 $\overline{\mathcal{S}} : \mathrm{Rel}(\mathcal{E}) \to \mathrm{Rel}(\mathcal{E})$，对于 $\mathcal{S}$- $\overline{\mathcal{S}}$，若 $\overline{\Sigma}$ 存在，则 $\mathcal{S}a = \mu x$也存在。η°； a； $\eta \vee \sigma^\circ$； $\overline{\Sigma}$； σ

图 1：语法理论的范畴理论（左）与伴随范畴理论（右）的基本概念

例 3（高阶项： λ-演算）。现在我们超越一阶语法，引入变量绑定。为便于说明，我们不从一般情形完整定义绑定签名和项（这很容易做到 [7]），而是聚焦于这类语法的一个例子：模 α-转换 [82]的 λ-演算项。沿袭 Fiore 等人 [7], 的开创性工作，使用绑定子对项建模的关键见解是从 Set 转向上下文表达式范畴。令 $\mathcal{N}$ 为有限基数范畴，即 Set 的全子范畴，其对象为集合 $\boldsymbol{n}$, $\{0, \ldots, n-1\}$。我们将集合 $\boldsymbol{n}$ 视为有限上下文（中的变量索引），并将函数 $f\colon \boldsymbol{n} \to \boldsymbol{m}$ 视为上下文重命名。因此，我们考虑预层范畴 $\mathrm{Set}^{\mathcal{N}}$，其对象是上下文中的集合（表达式）。固定一个可数的变量集合 $\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \ldots$, 则 λ-项的预层 Λ 将 $\boldsymbol{n}$ 映射到集合 $\Lambda(\boldsymbol{n})$，其中包含自由变量属于 $\{\mathrm{x}_0, \ldots, \mathrm{x}_{n-1}\}$的 λ-项，且这些项按（α-）重命名取模。 Λ 的归纳定义如下：

$$\frac{i \in \boldsymbol{n}}{\mathrm{x}_i \in \Lambda(\boldsymbol{n})} \qquad \frac{\mathtt{t} \in \Lambda(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}{\lambda \mathrm{x}_{n+1}.\mathtt{t} \in \Lambda(\boldsymbol{n})} \qquad \frac{\mathtt{t} \in \Lambda(\boldsymbol{n}) \quad \mathtt{s} \in \Lambda(\boldsymbol{n})}{\mathtt{t}\ \mathtt{s} \in \Lambda(\boldsymbol{n})}$$

按照惯例 [45], , 我们常写作 $\boldsymbol{n} \vdash \mathtt{t}$（或 $\bar{\mathrm{x}} \vdash \mathtt{t}$，默认假设 $\bar{\mathrm{x}} = \mathrm{x}_0, \ldots, \mathrm{x}_{n-1}$），来代替 $\mathtt{t} \in \Lambda(\boldsymbol{n})$。我们来考虑签名函子 $\Sigma X, \delta X + (X \times X)$，其中$\delta X(\boldsymbol{n})$ $X(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$，并将 V记作变量预层，它将 $\boldsymbol{n}$ 映射到 $\mathrm{x}_0, \ldots, \mathrm{x}_{n-1}$。那么， Σ 上的自由单子 $\mathcal{S}$将 V映射到预层 $\mathcal{S}V \cong V + \delta(\mathcal{S}V) + (\mathcal{S}V \times \mathcal{S}V)$，即模去 α-重命名后的 λ-项。函子 δ 是有限性多项式） [7], [8] , 且满足假设 2）的条件，因此整个函子 Σ 也满足这些条件。有鉴于此，我们可以通过纳入δ 来扩展简单多项式函子的类别，同时不改变简单多项式函子的“良好”性质。由此得到的类别有时称为绑定函子类别 [83]。

示例 4（名义集合）。范畴 Nom 的名义集合提供了一个用于建模带有变量绑定和名称的表达式的替代宇宙 [2], [3]。受篇幅所限，我们不再详述，只指出 Nom 是一个 Grothendieck拓扑斯（它同构于 Schanuel 拓扑 [2]），并且带有名称和绑定子的表达式语法可以表示为基于前一示例中定义的绑定函子的适度变体的自由单子。

例 5（更多示例）。更一般地，形如 $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$、其中 $\mathcal{C}$ small 的预层范畴，可用于对许多表达式宇宙建模，并且已有若干种语法概念被定义为其上适当函子的初始代数。示例包括带排序表达式 [84],simply [8] 、多态类型表达式 [9], [10],、图和超图，以及图表 [73]。例如，Bonchi 等人 [74] 将弦图建模为 Set 中跨图范畴 $\mathrm{N} \leftarrow S \rightarrow \mathrm{N}$ 上类多项式函子的初始代数（态射是跨图态射）。请注意，这样的范畴同构于 $\mathrm{Set}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$，其中 N ×N 是以自然数对为对象的离散范畴。

B. 替换

除了前述数学语法的关键特征（例如递归的项构造、结构归纳等）之外，还有另一种主要的类语法结构，它刻画了符号语法的许多概念：替换。尽管人们普遍认同采用初始代数方法进行项构造，但已经提出了若干关于替换的公理体系——例如幺半范畴上的单子 [7], [9], 替换代数, 以及（异质）结构 [7], [85], 带指向强度的单子 [86], 模 [87]——[90], 以及名义集合上的单子 [2], [3], , 这里只列举少数几种——但对于这些体系，或许尚未形成普遍共识。

尽管如此，所有这些方法都有一个共同特点；它们都将替换视为一种（结构上）递归定义的、保持语法的态射。对于一阶语法（即签名函子及其在 Set 上的自由代数），只需借助单子就能对替换作出令人满意的说明：由于处于 Set 中，可以将 $\mathcal{S}$ 的单子结构内化，从而得到关于 X 自然的（单子绑定）映射 $\varsigma\colon \mathcal{S}X \times \mathcal{S}X^X \to \mathcal{S}X$，以实现替换：给定一个项 t 和一个替换 $[\bar{\mathrm{s}}/\bar{x}]$ （将其视为从变量 X 到 $\mathcal{S}X$ 的映射），项 $\varsigma(\mathtt{t}, [\bar{\mathrm{s}}/\bar{x}])$——通常写作 $\mathtt{t}[\bar{\mathrm{s}}/\bar{x}]$ ——表示在 t 中同时用 s_i 替换变量 x_i 的结果。单子定律保证了替换所需的等式性质；此外，由于任意签名函子 Σ 都具有强度 ϖ：$\Sigma A \times B \to \Sigma(A \times B)$，我们可以通过（某个恰当实例的）唯一箭头 $\mathcal{S}A \times B \to \mathcal{S}(A \times B)$（其延拓自 ϖ [7]）重新得到替换。由此，我们得到替换的结构递归定义。

前述替换观点无法扩展到更丰富的语法形式，例如带变量绑定的语法。为克服这一问题，在定义的众多结构中，我们采用替换代数 [7], , 即对象 A及其态射 ν： （泛新变量）和ς： $A \times A^V \to A$ （替换），并满足适当的相容性

条件。这里，V 是一个适当的对象，充当变量对象。直观地说，后者是任何能够确保存在用于变量操作（如复制或交换变量）的映射的对象，而这些映射是表达前述相容条件所必需的。[11]

固定这样一个对象 V，映射 η（经柯里化后）为我们提供了一个候选映射 ν；此外，假设 Σ 具有强度ϖ：$\Sigma(\mathcal{S}V^V) \times \mathcal{S}V \to \Sigma(\mathcal{S}V^V \times \mathcal{S}V)$，[12] 我们便可由初始性得到映射$\varsigma$。这些映射与 $\mathcal{S}V$ 的 Σ-代数结构相容，因此赋予 ΣV 初始Σ-替换代数 [7] 的地位。

定义 1. 1. 若对象 V 属于 $\mathcal{E}$，且配有定义 3.1] 中给出的映射 [7, ，则称其为变量对象。2. 替换代数是一个三元组 (A, ν, ς)，其中 A 是 $\mathcal{E}$ 的一个对象，并且有态射 ν：$1 \to A^V$ 和 ς：$A \times A^V \to A$。我们要求这些数据满足定义 3.1] 中的相容性条件 [7, 。3. Σ-替换代数是带有如 [7] 中所述相容的替换代数结构的 Σ- 代数。

最后，我们假设签名函子 Σ 具有上述（带基点）强度，从而确保（$\mathcal{S}V$，$[\eta, \sigma]$，ν，ς）是一个 Σ-替换代数。

备注 1。定义 1 有意写得不够严谨，而且没有客观理由必须依赖代换代数，而非其他结构。背后的原因有两个：一方面，这种选择让缺乏特定范畴论背景的读者也能读懂本文，从而提高了文章的可读性；另一方面（也是最重要的一点），在通读重写的关系分析后，读者应当能够确信，所选的替换模型在操作层面并不重要：关键在于要有一种替换概念，能够导出操作性质良好的关系替换算子。所谓操作性质良好，是指一组为关系替换提供公理化定义的代数律。对于重写而言，这些定律（命题 9 和命题 10）就是全部关键所在，因此我们完全可以不拘泥于所用的代换结构，只需假定存在一种能够导出此类关系算子的结构即可。代换代数确实满足这一点，但读者不难发现，许多其他结构（例如 Σ-幺半群）也同样满足。作为一条一般性（尽管非正式）的原则，任何将替换建模为递归定义且保持语法的映射的结构，都会导出一个性质良好的关系替换算子（见备注 4 和第 VI 节末尾）。

[11]例如，在 Fiore 等人 [7],提出的基于预层的框架中，这样的对象由变量预层给出；而在名义集合中，它由名称的（名义）集合给出。Menni [91]对名称对象作了更一般的分析。[12]这一点实际上颇为微妙：事实上，关键在于该过程中 $\mathcal{S}V$ 在 V 上带有基点，这意味着我们有一个箭头 $V \to \mathcal{S}V$。这一观察促成了将带指向强度的单子视为在内部表达替换概念的一种方式 [86]。

V. 代数：理论最小值

初始代数和自由单子为（抽象）语法提供了一种优雅的数学描述。我们在此关注的语法类型是符号表达式。“语法数学方法”非常适用于这类语法（前文提到的诸多例子便是明证），但它无法捕捉其深层本质，也就是使符号语法区别于例如自然语言语法的特质。事实上，符号表达式的独特之处并不在于其语法，而在于其（操作式）“语义”：它们可以进行符号操作（参见第 I 节：符号项是封装计算）。

在本文中，我们从这样一个概念性假设出发：符号操作本质上是一种关系性概念。这一概念视角极具力量，因为它为从语法通往语义开辟了一条路径：要获得表达式的符号动力学，我们只需取抽象语法的范畴理论，并在一种我们将要精确定义的意义上，将其扩展到关系环境中。事实上，任何表达式宇宙 $\mathcal{E}$都会诱导出一个范畴 Rel ($\mathcal{E}$)，其对象是描述表达式间操作的关系。Rel($\mathcal{E}$)是一个代数 [29] ，因此我们可以依托丰富的关系框架对其进行研究。

从范畴的视角转向伴随范畴的视角，可以看到许多范畴概念都有相应的伴随范畴概念；而要定义符号操作的关系理论，恰恰需要对定义范畴语法的概念作伴随范畴扩展，即自由单子和初始代数，如图 1 所示。本节将专门研究这类扩展。

A. 代数

给定一个表达式宇宙 $\mathcal{E}$，其关系范畴 Rel ($\mathcal{E}$) 以 $\mathcal{E}$ 的对象作为对象，而从 A 到 B 的箭头是一个子对象 a：$A \times B \to \Omega$，其中 Ω 是 $\mathcal{E}$ 的子对象分类器。形如 a：$A \times B \to \Omega$ 的子对象表现得像从 A 到 B 的关系：它们有逆关系、复合、并等。它们具体以何种意义表现为关系，是通过代数这一概念来定义的 [29]。更准确地说，Rel ($\mathcal{E}$) 是一个局部完备幂泛关系 [29], [35]。

定义 2（ [29]）。代数 $\mathcal{A}$ 是一个范畴，其中每个同态集 $\mathcal{A}(A, B)$ 都赋有：(i) 一个偏序$\leq$ 和一个交运算 $\wedge$，使复合满足单调性；(ii) 一个保持序的逆变对合 $-^\circ$（从而$a^{\circ\circ} = a$、$(a; b)^\circ = b^\circ; a^\circ$，以及 $(a \wedge b)^\circ = a^\circ \wedge b^\circ$）。此外，所有这些数据还必须满足所谓的模律：$a; b \wedge c \leq (a \wedge c; b^\circ); b$。

给定一个代数 $\mathcal{A}$，我们将其态射称为关系，并将关系 a°：$B \to A$ 称为关系 a：$A \to B$的逆关系。通常，如果 $\Delta \leq a$、$a^\circ \leq a$和 $a; a \leq a$，我们分别称关系 a：$A \to A$ 为自反的、对称的和传递的。此外，如果 $\Delta \leq a; a^\circ$，我们称 a：$A \to B$ 为整体的；如果 $a^\circ; a \leq \Delta$，则称其为简单的；若它既整体又简单，则称其为映射。代数的子范畴 Map($\mathcal{A}$)

$\mathcal{A}$ 是一个范畴，其对象是 $\mathcal{A}$ 的对象，态射是 $\mathcal{A}$的映射。

例 6. Rel($\mathcal{E}$) 中的映射恰好是 $\mathcal{E}$ 中的态射，因此 Map(Rel ($\mathcal{E}$)) $\simeq \mathcal{E}$。这意味着，我们可以（并且将会）不再把 $\mathcal{E}$ 作为原始概念，而是采取真正的关系视角，研究 Rel ($\mathcal{E}$)（的公理化），从而将 $\mathcal{E}$ 视为 Rel ($\mathcal{E}$) 对函数关系的限制。[13] 定理 2 将这一对应关系推广到大类代数和范畴。

注 2. 为避免同时处理 $\mathcal{E}$和 Rel ($\mathcal{E}$) 时产生歧义，我们用记号 $f\colon A \to B$ 和 $a\colon A \nrightarrow B$分别表示 $\mathcal{E}$ 和 Rel($\mathcal{E}$) 中的态射。实际上，我们只在本节需要这一约定，因为下一节我们将在一个完整的伴随范畴框架中进行讨论。

定义 3. 给定一个代数 $\mathcal{A}$，我们称 $\mathcal{A}$ 为：
1. 可表格化的：若任意关系 $a\colon A \to B$ 都有一个表格化（在同构意义下必然唯一），即存在映射 $f\colon R \to A$ 和$g\colon R \to B$，使得 $a = f^\circ; g$ 和 $f; f^\circ \wedge g; g^\circ = \Delta$。2. 幺元的：若它有一个幺元 U，即存在一个对象 U，满足：(i)$\Delta\colon U \to U$ 是 $\mathcal{A}(U,U)$ 中最大的关系；(ii) 对任意对象 A，存在一个全关系（必然是一个映射） $u\colon A \to U$。3. 局部完备的：若它是幺元的且可表格化的，并且对所有对象 A, B, 集合 $\mathcal{A}(A,B)$ 是一个完备格，且复合和有限交对任意并分配。[14] 我们用 $a \vee b$ 表示关系 $\bigvee\{a,b\}$，用 $\bot$ 表示关系 $\bigvee\emptyset$。
4. 若一个代数是局部完备的，且对任意对象 A，都存在一个幂对象 PA，使得：(i) 对任意关系 $a\colon A \to B$，都存在与之对应的映射 $\Lambda a\colon A \to PB$；(ii) 存在关系$\ni_A\colon PA \to A$；(iii) 满足 $f = \Lambda a$ 当且仅当 $f; \ni = a$，则称其为局部完备幂代数（LCP allegory）。

定义 3 是代数理论文献中的标准定义。从范畴论视角看，它可由以下结果来说明。

定理 2（ [29], [31]）。对于任意 Grothendieck拓扑斯 $\mathcal{E}$，其关系范畴 Rel($\mathcal{E}$) 是一个 LCP allegory，且$\mathcal{E} \simeq$ Map(Rel ($\mathcal{E}$))。反过来，对于任意 LCP allegory $\mathcal{A}$，其映射子范畴 Map($\mathcal{A}$) 是一个 Grothendieck拓扑斯，且 $\mathcal{A} \simeq$ Rel (Map($\mathcal{A}$))。

因此，对于表达式宇宙 $\mathcal{E}$，我们看到 Rel($\mathcal{E}$) 是一个 LCP allegory。

例7. 原则上不需要举例（只需为上一节中提到的 $\mathcal{E}$ 示例构造 Rel($\mathcal{E}$)）。不过，我们还是列举如下：

1. Rel（Set）是 Rel。2. Rel（Set$^{\mathcal{N}}$）是对上下文重命名和弱化封闭的依赖关系代数。也就是说，关系 $a\colon A \to B$是 $a \in \prod_{\boldsymbol{n}}$ Rel($A(\boldsymbol{n})$, $B(\boldsymbol{n})$) 的一个元素，使得对于任意 $\phi\colon \boldsymbol{n} \to \boldsymbol{m}$，都有： $a(\boldsymbol{n})$; $B\phi \subseteq A\phi$; $a(\boldsymbol{m})$。

$$\begin{array}{ccc} A(\underline{n}) & \xrightarrow{A\phi} & A(\underline{m}) \\ {\scriptstyle a(\underline{n})}\downarrow & \subseteq & \downarrow{\scriptstyle a(\underline{m})} \\ B(\underline{n}) & \xrightarrow[B\phi]{} & B(\underline{m}) \end{array}$$

注意，考虑 λ-项的预层时，Rel($\mathcal{F}$)中的关系恰好就是所谓的项关系 [42]↓[45], [93] ，它们用于对 λ-项进行关系推理。因此，我们使用记号 $\ulcorner \mathtt{x} \vdash \mathtt{t}\ a\ \mathtt{s}$来表示$\ulcorner \mathtt{x} \vdash \mathtt{t}$、s，并且$\mathtt{t}\ a\ (\ulcorner \mathtt{x})\ \mathtt{s}$。特别要注意，我们有以下弱化和重命名规则：

$$\frac{\bar{\mathtt{x}} \vdash \mathtt{t}\ a\ \mathtt{s}}{\bar{\mathtt{x}}, \bar{\mathtt{y}} \vdash \mathtt{t}\ a\ \mathtt{s}} \qquad \frac{\bar{\mathtt{x}} \vdash \mathtt{t}\ a\ \mathtt{s}}{\bar{\mathtt{y}} \vdash \mathtt{t}[\bar{\mathtt{y}}/\bar{\mathtt{x}}]\ a\ \mathtt{s}[\bar{\mathtt{y}}/\bar{\mathtt{x}}]}$$

3. Rel(Nom)是等变关系的代数 [2]。

B. 关系子

从 $\mathcal{E}$ 构造 Rel($\mathcal{E}$)，得到假设1的一个关系对应物：我们需要一个 LCP allegory。然而，要扩展语法和语法规范，我们需要了解初始代数和自由单子的关系对应物是什么。为此，关键概念是关系子 [35], [68], [70], [71][15]，，即函子的关系对应物。

定义4. 代数 $\mathcal{A}$ 上的关系子是一个函子 $\Gamma\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，它是单调的并且保持逆关系。

特别地，关系子 Γ 满足定律 $\Gamma(a^\circ) = (\Gamma a)^\circ$，因此我们可以明确地写作 Γa°。容易证明，只要 f 是映射， Γf 就是映射。此外，由于 $\mathcal{A}$ 是可表格化的，我们可以看到，一个函子是关系子，当且仅当它保持逆关系 [35, 定理 5.1]。

由于抽象语法由有限基数范畴上的函子指定，我们关注以下问题：给定一个有限基数范畴上的函子，能否将其扩张为 Rel(有限基数范畴) 上的关系子?

定义5. 函子 $\Sigma\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ 的关系扩张，是指 Rel ($\mathcal{E}$) 上的关系子 $\overline{\Sigma}$，使得 $\overline{\Sigma}A = \Sigma A$ 和 $\overline{\Sigma}f = \Sigma f$，对任意对象 A 和映射 f 均成立。

因此，我们看到，如果将 a 表格化为 $f^\circ; g$，那么必有 $\overline{\Sigma}a = \overline{\Sigma}(f^\circ; g) = \overline{\Sigma}f^\circ; \overline{\Sigma}g = (\Sigma f)^\circ; \Sigma g$。因此， Σ的关系扩张如果存在，就必定是唯一的，并由 $\overline{\Sigma}(f^\circ; g) \triangleq (\Sigma f)^\circ; \Sigma g$ 定义（请注意，该定义与表格化的选择无关）。这意味着，对于任意 Σ，我们都有一个候选关系子$\overline{\Sigma}$。Barr [32] 和 Carboni 等人 [33] 找到了肯定回答上述问题的条件，从而确保 $\overline{\Sigma}$ 确实是一个关系子。

[13]沿着这一视角，我们将托扑斯视为一种关系与集合值映射相重合的结构 [92]。
[14]特别地，我们有 a; $\bigvee_i b_i = \bigvee_i a$; b_i 以及（$\bigvee_i a_i$）; $b = \bigvee_i a_i$; b。

[15]与关系子本质等价的概念，例如关系扩张 [32]、关系提升 [81], [94]，和松弛扩张 [67], [95]，已在多个领域中独立提出。

定理 3（ [32], [33]）。当且仅当 Σ 几乎保持拉回并保持强满态射时， $\overline{\Sigma}$ 才是关系子。此外， $\overline{\Sigma}$ 是 Σ唯一的关系扩张。

定理 3 也可以从伴随范畴的视角来看：任意关系子 $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 给出一个函子 $\Gamma : \mathrm{Map}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Map}(\mathcal{A})$，该函子几乎保持拉回并保持强满态射。值得注意的是，如果一个函子保持（弱）拉回，那么它就几乎保持拉回；并且在任意托扑斯中，强满态射与正则满态射相同（参见假设 2）。

例 8。1. 由于 Set 满足选择公理，其上的任意函子都保持正则满态射。因此，如果 Σ 几乎保持拉回，那么 $\overline{\Sigma}$ 就是关系子。2. 简单多项式函子都可扩张为关系子 [92]。所得的关系子类称为多项式关系子类。多项式关系子可以通过（余）积（双）关系提升子、常值关系子和恒等关系提升子来明确定义。 [92]3. Set 上的函子 $\delta^{\mathcal{N}}$ 可扩张为关系子 [7], [83], ，从而绑定多项式函子都可扩张为关系子。

总而言之，假设1意味着 Rel（$\mathcal{E}$）是一个 LCP allegory，而假设 2 则意味着 $\overline{\Sigma}$ 是关系子。然而，后一个公理对 Σ 施加了一个额外条件；要确保 $\overline{\Sigma}$ 是关系子，其实并不需要这一条件：Σ 必须具有有限性。这会如何影响 $\overline{\Sigma}$? 通过对 Rel（$\mathcal{E}$）中可数并的定义稍作研究（其中使用了余积关系提升子 [92]），我们看到，如果 Σ 具有有限性，那么 $\overline{\Sigma}$是 ω-连续的，这意味着对于任意 ω-链 $(a_n)_{n\geq 0}$ 的关系，均有 $\overline{\Sigma}\left(\bigvee_n a_n\right) = \bigvee_n \overline{\Sigma} a_n$。

命题 1. 如果 $\Sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ 具有有限性，那么$\overline{\Sigma}$ 是 ω-连续的。

根据命题 1，我们称 $\mathcal{A}$ 上的关系子具有有限性，如果它作为 Map($\mathcal{A}$)上的函子具有有限性。因此，只要 Σ 具有有限性，$\curlywedge\Sigma$ 就具有有限性。接下来要做的是为 $\mathcal{S}$给出一个关系对应物。由于 $\mathcal{S}$（的载体）是一个函子，我们可以直接选取 $\overline{\mathcal{S}}$ 作为它的关系扩张。当然，我们必须确保 $\overline{\mathcal{S}}$ 是一个关系子。这直接源于 $\overline{\Sigma}$ 是一个关系子的事实。

命题 2 ([35])。如果$\overline{\Sigma}$ 是一个关系子，那么 $\overline{\mathcal{S}}$也是。

例 9. 1. 令 Σ 为由 Set 上的一阶签名 Σ 给出的函子，使得 $\mathcal{S}$ 是 Σ-项单子。关系子 $\overline{\mathcal{S}}$ 具有如下归纳刻画：

$$\frac{x\ a\ y}{\mathtt{x}\ \overline{\mathcal{S}}a\ \mathtt{y}} \qquad \frac{\mathtt{t}_1\ \overline{\mathcal{S}}a\ \mathtt{s}_1 \quad \cdots \quad \mathtt{t}_n\ \overline{\mathcal{S}}a\ \mathtt{s}_n}{o(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)\ \overline{\mathcal{S}}a\ o(\mathtt{s}_1,\ldots,\mathtt{s}_n)}$$

等价地，我们称 $\mathtt{t}\ \overline{\mathcal{S}}a\ \mathtt{s}$，当且仅当存在一个上下文 C，使得 $\mathtt{t} = C[\mathtt{x}_1,\ldots,\mathtt{x}_n]$，$\mathtt{s} = C[\mathtt{y}_1,\ldots,\mathtt{y}_n]$，并且 $x_i\ a\ y_i$，对于任意 i。

2. 例如，$\mathsf{Set}^{\mathcal{N}}$ 上的 λ-项单子也可以有类似的归纳刻画。

1) 关系初始代数：此时自然会产生一个问题。函子 Σ 在 $\mathcal{E}$ 上的关系与它所生成的自由单子 $\mathcal{S}$ 之间的关系是清楚的：后者本质上被定义为 Σ 上某种适当构造的不动点（兰贝克引理）。此外，若 Σ 具有有限性，则 $\mathcal{S}$ 是对 Σ（上的某种构造）反复应用所得的不动点（定理1）。那么， $\overline{\Sigma}$ 与 $\overline{\mathcal{S}}$之间是否也存在类似的关系？答案是肯定的，而且借助两个优美的结果，可以优雅地将 $\mathcal{S}$ 刻画为某个适当的不动点：前面提到的 Eilenberg-Wright 引理 [34] 和 Hylomorphism 定理 [35]。

定理 4（Eilenber-Wright 引理）。给定托扑斯 $\mathcal{E}$ 上的函子 Σ，其关系扩张为$\overline{\Sigma}$，则 $\mathcal{E}$ 中的初始 Σ-代数与 Rel($\mathcal{E}$) 中的初始 $\overline{\Sigma}$-代数相同。

因此，给定初始代数 $\xi : \Sigma(\mu\Sigma) \to \mu\Sigma$（在 $\mathcal{E}$ 中）和关系 $a : \Sigma A \nrightarrow A$，存在唯一的关系 $(\!|a|\!) : \mu\Sigma \nrightarrow A$，使得 $\xi; (\!|a|\!) = \overline{\Sigma}(\!|a|\!); a$。

在陈述混合态射定理之前，我们先回顾一下：在 LCP allegory $\mathcal{A}$ 中，根据 Knaster-Tarski 定理 [96], ，任意形如 $F : \mathcal{A}(A,B) \to \mathcal{A}(A,B)$ 的单调（集合论）函数都有一个最小不动点，记作 μF（或 $\mu x.F$）；它是 F 的预不动点中最小的一个。

定理 5（Hylomorphism）。给定 $a : \Sigma A \to A$ 和 $b : \Sigma B \to B$，我们有 $(\!|b|\!)^\circ;\ (\!|a|\!) = \mu x.\ b^\circ;\ \overline{\Sigma}x;\ a$。

定理 5 提供了一种强有力的证明技巧，我们将在后续各节中广泛使用。本节最后将展示定理 5 如何给出 $\overline{\mathcal{S}}$ 的归纳刻画。据作者所知，这一结果虽是 Set 上的常识，却未见于文献。

命题 3. $\overline{\mathcal{S}}a = \mu x.(\eta^\circ; a; \eta) \vee (\sigma^\circ;\ \overline{\Sigma}x; \sigma)$。

证明。由于 $[\eta,\sigma]^\circ;\ (a+\Sigma x);\ [\eta,\sigma] = (\eta^\circ;\ a;\ \eta) \vee (\sigma^\circ;\ \overline{\Sigma}x;\ \sigma)$，只需证明 $\overline{\mathcal{S}}a = \mu x.[\eta,\sigma]^\circ;\ (a + \Sigma x);\ [\eta,\sigma]$。考虑 a 的一个表格化 $A \xleftarrow{f} R \xrightarrow{g} B$，使得 $a = f^\circ;\ \Delta_R;\ g$且 $\overline{\mathcal{S}}a = (\mathcal{S}f)^\circ;\ \mathcal{S}g$。由于 $\mathcal{S}f = (\!|[f;\ \eta,\sigma]|\!)$（ g 也同理），我们得到 $\overline{\mathcal{S}}a = (\!|[f;\ \eta,\sigma]|\!)^\circ;\ (\!|[g;\ \eta,\sigma]|\!)$，从而有 $\overline{\mathcal{S}}a = \mu x.[f;\ \eta,\sigma]^\circ;\ (\Delta_R + \overline{\Sigma}x);\ [g;\ \eta,\sigma]$，由定理 5 以及余积函子和常值函子的 Barr 扩张定义可得。于是我们得到所需的结论：

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{S}}a &= (\!|[f;\eta,\sigma]|\!)^\circ;\ (\!|[g;\eta,\sigma]|\!) \\
&= \mu x.[f;\eta,\sigma]^\circ;\ (\Delta_R + \overline{\Sigma}x);\ [g;\eta,\sigma] \\
&= \mu x.(\eta^\circ; f^\circ; \Delta_R; g; \eta) \vee (\sigma^\circ; \overline{\Sigma}x; \sigma) \\
&= \mu x.(\eta^\circ; a; \eta) \vee (\sigma^\circ; \overline{\Sigma}x; \sigma)
\end{aligned}$$

□

C. 关于不动点与归纳

在转向本文的主要主题——符号操作的伴随范畴理论——之前，我们先运用几个不动点归纳原理 [66], [96] ，并将在关于此类理论中不动点概念的定理证明中用到它们。下文中，我们默认为函数具有如下形式： F: $\mathcal{A}(A,B) \to \mathcal{A}(A,B)$。我们陈述的第一个归纳原理就是所谓的不动点

归纳原理，它是 Knaster-Tarski 定理的直接推论。

命题 4（不动点归纳）。如果 F 是单调的，那么要证明 $\mu F \leq a$，只需证明 $F(a) \leq a$。

我们将在后续章节中定义的关系算子几乎全都不只是单调的，而且还是 ω-连续的——回顾一下，F 是 ω-连续的，当且仅当它保持 ω-链的上确界：$F(\bigvee_n x_n) = \bigvee_n F(x_n)$。根据 Kleene 不动点定理 [96], , 如果 F 是 ω-连续的，那么我们就可以对μF给出一种迭代刻画，即：$\mu F = \bigvee_n F^n(\bot)$，其中 F^n 是 F的第 n 次迭代。与 Knaster-Tarski 定理一样，Kleene 不动点定理也有相应的归纳原理，我们称之为 ω-连续不动点归纳。[16]

命题 5（ω-连续不动点归纳）。如果 F 是ω-连续的，那么要证明 $\mu F \leq a$，只需证明$x \leq \mu F \wedge a \implies F(x) \leq a$，对任意 x均成立。

证明。假设 $\forall x_\circ\ x \leq \mu F \wedge a \implies F(x) \leq a$（我们称之为归纳假设）。由于 F 是 ω-连续的，要证明 $\mu F \leq a$，就需要证明 $\bigvee_n F^n(\bot) \leq a_\circ$ 我们对 n进行归纳。基础情形显然成立，因为$F^0(\bot) = \bot \leq a_\circ$ 现在假设 $F^k(\bot) \leq a$，我们来证明$F(F^k(\bot)) \leq a_\circ$ 由于 $F^k(\bot) \leq \bigvee_n F^n(\bot) = \mu F$，根据$F^k(\bot) \leq a$，我们可以推得 $F^k(\bot) \leq \mu F \wedge a_\circ$ 因此，我们可以运用归纳假设，得出 $F(F^k(\bot)) \leq a_\circ$ □

最后，我们提及命题 5 的一种改进：可以在一个 ω-连续的严格函数内部进行归纳（回想一下，若 $F(\bot) = \bot$，则称 F 为严格的）。

命题 6（增强的 ω-连续不动点归纳）。设 F, G 是 ω-连续函数。另假设 G 是严格的。那么，要证明 $G(\mu F) \leq a$，只需证明：对于任意满足 $x \leq \mu F$ 且 $G(x) \leq a$ 的 x，都有 $G(F(x)) \leq x_\circ$

证明。假设对于任意 $x \leq \mu F$，$G(x) \leq a$ 蕴含 $G(F(x)) \leq x_\circ$ 我们称这一蕴含为归纳假设。证明 $G(F(x)) \leq a$，即证明 $G(\bigvee_n F^n(\bot)) \leq a$，也就是 $\bigvee_n G(F^n(\bot)) \leq a$，因为 G 是 ω- 连续的。我们对 n 进行归纳。基础情形是证明 $G(\bot) \leq a$；这成立，因为 G 是严格的（因此 $G(\bot) = \bot$）。在归纳步骤中，假设 $G(F^k(\bot)) \leq a$，并注意到我们可以应用归纳假设，因为 $F^k(\bot) \leq \mu F_\circ$ □

对于给定的关系 a, b，我们将对形如 $G(x)$ a 的函数 G $x; b$ 使用命题 6。注意，G 确实是严格的，并且是 ω-连续的（这是由复合对并的分配律推出的）。

最后，我们注意到，利用不动点，可以轻松地将重写中有用的关系概念推广到任意 LCP allegory。例如，a^*的自反传递闭包 a：$A \to A$定义为 $\mu x_\circ\ \Delta \vee a;\ x_\circ$ 此外，任何关系子都有最小不动点，并且对于具有有限性的关系子，我们可以应用刚刚陈述的 ω-连续不动点归纳原理。还要注意，如果 Γ 具有有限性且 f、g是映射，那么 $f^\circ;\ \Gamma(-);\ g$也具有有限性。这还意味着，只要 Σ 具有有限性，$\overline{\Sigma}$ 和 $\overline{\mathcal{S}}$ 也都具有有限性。

VI. 符号操作的 allegorical 理论

现在我们可以开始运用 allegorical 机制了。在本节中，我们将本文的主要贡献形式化，由此开始发展一种符号操作的 allegorical 理论。这种理论所研究的主要结构是一个（抽象的）表达式系统（简称 E-系统），[17] 即三元组 (Σ, V, a)，由一个签名函子 $\Sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$、一个变量对象 V，以及一个（基项）归约关系 $a : \mathcal{S}V \nrightarrow \mathcal{S}V$（属于 Rel（$\mathcal{E}$））组成。正如具体系统中通常假定变量集合与签名互不相交，我们也假定 $\eta; \sigma^\circ = \bot_\circ$

例 10. E-系统的标准例子包括 Set 上的项重写系统 $(\Sigma, X, \mapsto)$ 以及预层中的高阶重写系统 [97]。作为后者的典型例子，我们考虑 λ-项的 E-系统 (Σ, V, β)，其中 Σ 是 λ-项的签名，并且 $\neg x \vdash (\lambda x.t)s\ \beta\ t[s/x]_\circ$

备注 3. 为便于发展 E-系统理论，从一开始就在 allegorical 框架中开展工作是很方便的。因此，我们不再从一个托扑斯 $\mathcal{E}$ 和一个签名函子 Σ（由此构造 Rel ($\mathcal{E}$) 和 $\overline{\Sigma}$）开始，而是假设已经固定了 (i) 一个 LCP allegory $\mathcal{A}$，以及 (ii) 一个有限性签名关系子$\Sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_\circ$ 因此，我们将 $\mathcal{E}$ 视为 Map($\mathcal{A}$)，并将签名函子视为 Map($\mathcal{A}$) 上的关系子 Σ。这样，我们还得到语法关系子 $\mathcal{S}$；当其限制在 Map($\mathcal{A}$) 上时，它确实给出了 Σ 上的自由单子。鉴于此，我们使用记号 $a : A \to B$ 表示 $\mathcal{A}$中的态射（因而也是关系），从而不再区分 $\to$与 $\nrightarrow$（但我们仍保留字母 f、g.....表示 $\mathcal{A}$中的映射）。最后，回顾定理 4，$[\eta, \sigma] : V + \Sigma(\mathcal{S}V) \to \mathcal{S}V$是 $\mathcal{A}$中的初始 $(V + \Sigma(-))$-代数。

给定一个 E-系统（Σ、V、a），关系 a 旨在对基底归约建模。实际的归约关系随后应通过扩展 a 以涵盖语法的代换结构，从而能够考虑 a 的替换实例，并沿项的句法结构传播归约来获得。这两类（族）运算通常以句法方式定义，但也可以优雅地通过纯粹的关系方式构造。下文将介绍关系替换和相容细化这两种强大的运算 [42], [65], [93]，它们对于定义上述基底归约的扩展至关重要。

[16]尽管证明起来很直接，作者仍未能在文献中找到命题 5 的归纳原理。为求完整起见，我们因此给出其证明。

[17]为了便于阅读，我们不采用标准的重写术语，而是沿用 Aczel 的术语 [37]。

1) 相容细化：关系 [65] a 的相容细化关联具有相同最外层语法结构且其参数彼此满足 a 关系的表达式，因此在多种（并行）归约的定义与分析中起着关键作用。

定义 6. 给定一个 E-系统 (Σ, V, a)， a 的相容细化是关系 $\widehat{a}$: $\mathcal{S}V \to \mathcal{S}V$ 定义为$[\eta,\sigma]^\circ$; $(\Delta_V + \Sigma a)$; $[\eta,\sigma]$。注意， $\widehat{a} = \eta^\circ$; $\eta \vee \sigma^\circ$; Σa; σ。

由于 $\widehat{a} = \eta^\circ$; $\eta \vee \sigma^\circ$; Σa; σ，我们可以通过定义算子 $\widetilde{a}$ 来简化 $\widehat{=}$的定义， σ°; Σa; σ，从而通过将 $\widetilde{a}$ 与关系 $\mathrm{I}\eta$ 合并来恢复$\widehat{a}$， η°; η （即 $\widehat{a} = \mathrm{I}_\eta \vee \widetilde{a}$）。后者是一种所谓的核自反 [29], [35], ，即满足 $a \le \Delta$的关系a ，可以将其视为变量这一性质（例如，在 Set 中，$\mathrm{I}\eta$ 表示一个项实际上是变量）。此外，由于我们假定变量与签名互不相交，即 η; $\sigma^\circ = \bot$，因此有 $\widetilde{a} \wedge \mathrm{I}_\eta = \bot$，由此可得 $\mathrm{I}\eta$; $\widetilde{a} = \bot$ $(= \widetilde{a}$; $\mathrm{I}\eta)$，因为 $\mathrm{I}_\eta \le \Delta$。

命题 7。 $\widetilde{=}$ 和 $\widehat{=}$ 都是 ω-连续关系子。

将其实例化于一阶系统（Σ、 X、 $\mapsto$）上，我们看到，$\widehat{a}$ 由以下规则定义：

$$\frac{x \in X}{\mathtt{x} \mathrel{\widehat{\mapsto}} \mathtt{x}} \qquad \frac{\mathtt{t}_1 \mapsto \mathtt{s}_1 \quad \cdots \quad \mathtt{t}_n \mapsto \mathtt{s}_n \quad o \in \Sigma}{o(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n) \mathrel{\widehat{\mapsto}} o(\mathtt{s}_1,\ldots,\mathtt{s}_n)}$$

如果只考虑第二条规则，我们得到 $\mathrel{\widehat{\mapsto}}$。

有了相容细化的概念，下一步自然是定义相容性以及与之关联的上下文闭包算子。

定义 7。1. 关系 a 是相容的，当且仅当 $\widehat{a} \le a$。
2. a 的上下文闭包定义如下： a^{c} 、 μx。$a \vee \widehat{x}$。

延续一阶系统 $(\Sigma, X, \mapsto)$ 的例子，我们看到 $\mapsto^{\mathrm{c}}$ 是按如下方式归纳定义的：

$$\frac{\mathtt{t} \mapsto \mathtt{s}}{\mathtt{t} \mapsto^{\mathrm{c}} \mathtt{s}} \quad \frac{x \in X}{\mathtt{x} \mapsto^{\mathrm{c}} \mathtt{x}} \quad \frac{\mathtt{t}_1 \mapsto^{\mathrm{c}} \mathtt{s}_1 \quad \cdots \quad \mathtt{t}_n \mapsto^{\mathrm{c}} \mathtt{s}_n \quad o \in \Sigma}{o(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n) \mapsto^{\mathrm{c}} o(\mathtt{s}_1,\ldots,\mathtt{s}_n)}$$

容易看出， $-^{\mathrm{c}}$ 是单调且幂等的，并且若 $\widehat{a} \le a$，则 $a^{\mathrm{c}} = a$。由于 $a^{\mathrm{c}} = a \vee \widehat{a^{\mathrm{c}}}$，我们注意到 a^{c} 是相容的，并且扩展了 a，因此 a^{c} 是包含 a的最小相容关系。此外，由于 $\widehat{a} = \eta^\circ; \eta \vee \sigma^\circ; \Sigma a; \sigma$，可知 a^{c} 在变量上是自反的。鉴于 a^{c}具有归纳性质，自然会期望 a^{c}具有完全自反性。确实如此（参见二元归纳原理 [98]）。

命题 8. 恒等关系是最小的相容关系——即 $\Delta = \mu x.\widehat{x}$ ——因此任何相容关系都是自反的。

证明。我们已经知道 $\Delta \le \Delta$。我们证明它是这样的关系中最小的一个。给定一个相容关系 a，由初始性可知 $\Delta = (\!|[\eta,\sigma]|\!)$，因此要证明 $\Delta \le a$ ，我们可以依据定理 5 并证明 η°; $\eta \vee \sigma^\circ$; Σa; $\sigma \le a$，但这无非就是 $\widehat{a} \le a$。□

2) 关系替换：有了相容的精化和上下文闭包——也就有了沿句法构造传播归约的方法——现在我们需要一个将替换扩展到（归约）关系的算子。为此，我们依赖于 Lassen 的关系替换扩展 [42]】【。

定义 8. 给定一个替换代数 $A \times A^V \xrightarrow{\varsigma} A \xleftarrow{\nu} V$以及关系 a, b: $A \to A$，我们将 b 替换到a 中的关系定义为 $a[b]$: $A \to A$，其定义为 $\varsigma^\circ;(a \times b^V);\ \varsigma$。这里回顾一下， $\times$ 和 V^- 都是与相应函子关联的（二元）关系子。

例如，将关系 $a[b]$ 用于一阶或二阶语法时，它会关联所有项 $\mathtt{t}[\bar{}\mathtt{s}/\bar{x}]$、$\mathtt{t}'[\bar{}\mathtt{s}'/\bar{x}]$ ，其中 t、t′通过 a 相关，且 $\mathtt{s}_i$、$\mathtt{s}'_i$ 通过 b 相关，对任意 i均成立。

命题 9（ [42], [99]）。1） $-[=]$是一个（双）关系子。2） $-[=]$ 在第一个参数上是 ω-连续的。3） $-[=]$ 满足结合律： $a[b][c] = a[b[c]]$。

计算 $-[=]$时，注意到它有一个右伴随 [42]，这很有用： $a[b] \le x$ 当且仅当 $a \le b \mathbin{»} x$。具体而言，$a \mathbin{»} b = \bigvee\{x \mid x[a] \le b\}$。注意，»具有宽松函子性（即 $(a \mathbin{»} b);\ (a' \mathbin{»} b') \le (a;\ a') \mathbin{»} (b;\ b')$），在第一个参数上反单调，在第二个参数上单调。

定义 9. 我们称关系 a 在替换下闭合，当且仅当 $a[\Delta] \le a$; 称其具有替换性，当且仅当 $a[a] \le a$。

具体而言，我们将 $a[\Delta]$ 视为通过对 a取代换实例而得到的归约。例如，在一个项重写系统（Σ, X, $\mapsto$）中，第 II 节所述的关系 $\twoheadrightarrow$ 恰好就是 $\mapsto[\Delta]$。注意，由于 $-[=]$ 关于第一个参数是 ω-连续的，（一元）算子 $-[\Delta]$ 本身也是 ω-连续的。

到这里，我们已经引入了一些新的关系算子，用于简洁地描述重写概念（正如我们将在后续章节中进一步看到的那样）。要使它们真正有用，我们还必须给出用于对其进行计算的代数律。[18]

Pr命题 10. 我们有以下代数律 *[42]* ， *[99]*:

1） $\widetilde{a}[b] \le a[b]$
2） $\mathrm{I}_\eta[b] \le b$ 3） $\widehat{\widehat{a}[b] \le a[b] \vee b}$。

备注 4. 命题 10 和命题 9 中的代数律构成了关系层面上替换的操作性定义。尽管它建立在替换结构（即替换代数）的特定定义之上，但真正

[18]命题 10 中的代数律最初由 Lassen [42], 证明，随后由 Levy [99], λ $\widehat{\widetilde{a}[b] \le}$ 在特定的 $\widehat{\ }$-演算背景下加以扩展。我们的规则 $a[b] \vee b$ 不同于 Lassen 的规则，即 $\widehat{a}[b] \le a[b] \vee b$，后者似乎是错误的。因为假设 $\mathtt{x}\ \widehat{a}\ \mathtt{x}$和 $\lambda\mathtt{y}.\mathtt{y}\ b\ \mathtt{yy}$。然后，取两个代换$[\lambda\mathtt{y}.\mathtt{y}/\mathtt{x}]$和 $\mathtt{yy}/\mathtt{x}]$，我们得到 $\lambda\mathtt{y}.\mathtt{y}\ \widetilde{a}[b]\ \mathtt{yy}$。然而，后面的项不能由任何关系的相容细化联系起来，因为它们不是变量，并且具有不同的最外层句法构造（即，第一个是抽象，第二个是应用）。请注意，这个不等式在 Lassen 关于关系的 Howe 扩张的代换性的证明中起着关键作用。与对同一结果的通常表述不同，Lassen 不要求该关系具有传递性；而如果使用命题 10 中所陈述的正确不等式重新审视证明，则需要这一条件。

对于（操作式）推理和符号操作而言，重要的是拥有一个 $-[=]$ 遵守上述代数律的算子。例如， ω-连续性在$-[=]$ 的第一个参数上意味着替换由$\frown$结构递归定义，而规则 $\widetilde{a}[b] \leq a[b]$ 表明替换的行为像一个保持语法的态射。用于对替换建模的实际结构并不重要：任何“良好”的结构都会诱导出一个满足上述代数律的关系代换算子。例如，读者可以自行验证，将代换代数替换为例如 Σ-幺半群，会得到本质上（即在操作意义上）相同的算子 $-[=]$。此外，只要有一个满足命题 10 和命题 9 的“代换”算子可用，就可以研究替换的重写性质，而不论后者的实际定义为何。这一观察还可以进一步推进：完全忘却一个系统的实际语法，并在一个增广关系演算中以公理化方式进行工作，即在传统关系演算中加入本节所述的算子和代数律：只要存在一个语法模型，能够容纳这种关系演算的一个实例，就可以免费得到重写。我们将在本节末尾进一步讨论公理化方法。

最后，我们可以将替换的定义与上下文闭包的定义合并，从而得到 a 的替换上下文闭包。

定义 10. 关系 a 的替换上下文闭包是关系 a^{sc} , $a[\Delta]^{\mathrm{c}} = \mu x.\ a[\Delta] \vee \widehat{x}$。

将其应用于一阶系统（Σ, X, a）时，我们得到 a^{sc} 的如下归纳刻画：

$$\frac{t \mapsto s}{\mathtt{t}[\bar{\mathtt{v}}/\bar{x}] \mapsto^{\mathrm{sc}} \mathtt{s}[\bar{\mathtt{v}}/\bar{x}]} \quad \frac{x \in X}{\mathtt{x} \mapsto^{\mathrm{sc}} \mathtt{x}} \quad \frac{\forall i \leq n.\ \mathtt{t}_i \mapsto^{\mathrm{sc}} \mathtt{s}_i \quad o \in \Sigma}{o(\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_n) \mapsto^{\mathrm{sc}} o(\mathtt{s}_1, \ldots, \mathtt{s}_n)}$$

我们以一项方法论（或许也是概念性）的考量结束本节。

3) 增广关系演算：让我们从操作的角度审视迄今构建的关系工具体系。因此，我们可以将框架视为一种增广关系演算：除关系上的经典运算（如复合、交、并等）外，还包含运算 $\check{}$、I_η （因此还有 $\hat{}$）以及 $-[=]$，并配有适当的等式定律（即命题 7、命题 9 和命题 10 中的定律）和证明原则（即不动点归纳）。假设已有不动点算子，便可以在这种增广演算中定义算子 $-^{\mathrm{sc}}$ 和 $-^{\mathrm{c}}$ （否则，也可以将它们作为原始算子加入，同时配以适当的等式定律和证明原则）。

正如我们将看到的，这种扩充后的关系演算表达能力足够强，可以定义有趣的归约概念，并证明关于它们的非平凡性质。基于这一观察，我们可以将整个关系框架完全公理化，抽象掉语法，只使用前述扩充后的关系演算。

事实上，我们从一个语法系统（Σ, V）中提取出这样一种演算，这可以被看作构建该扩充演算模型的一种方式。

本文其余部分致力于定义并分析若干特定的归约概念：我们将首先依据语法代数来进行定义（借此说明它们确实对应于重写文献中的那些概念），然后通过在扩充的关系演算中给出等价定义，展示如何避免对语法的依赖。此外，为证明我们的合流性定理——这是本文证明的主要结果——我们将只使用扩充演算的定律，从而证明公理化方法确实有效（关于这种方法对操作推理的影响，另见第 X 节中的更一般讨论）。

VII. 并行归约

既已定义 E-系统以及用于对其进行推理的（扩充）关系演算，现在该介绍基项归约的扩展了；这类扩展给出了实际的（操作式）归约。我们将重点讨论其中两种扩展——即并行归约和完全归约——并在本文最后一部分仅对序贯归约作少量说明。除了介绍这些概念并证明其基本性质外，我们证明的主要结果是关于所谓正交系统 [17] 的一种推广的合流性定理。我们从并行归约开始。

注 5. 在本文余下部分，我们假设对于一个 E-系统 (Σ, V, a)，有 $\mathrm{I}\eta; a = \bot$。这对应于通常的假设：归约规则的左侧不能是变量 [15]。

暂且忽略替换，并回顾一下：在具体的归约系统（例如项系统和高阶系统）中，并行归约会在任意选定的不相交的缩约子集合上并行地应用基底归约。从抽象角度看，我们依赖语法的单子结构来得到并行归约（正如我们将看到的，并行归约对应于将语法视为一个单子，而完全归约则对应于将语法视为一个自由代数）。

定义 11. 给定一个 E-系统 (Σ, V, a)，我们定义（不含替换的）并行归约 $a^{\mathrm{P}} : \mathcal{S}V \to \mathcal{S}V$as $\rho^{\circ}; \mathcal{S}a; \rho$.[19] 替换式并行扩展定义为$a^{\mathrm{sp}}$, $a[\Delta]^{\mathrm{p}}$。

关系 a^{sp} 将基于语法的重写系统中的并行归约的基于上下文的定义推广了。

例 11. 将其应用于项重写系统 $(\Sigma, X, \mapsto)$ 时，我们看到 t $\Rightarrow$ s，其中 $\Rightarrow = \mapsto^{\mathrm{sp}}$，当且仅当存在一个上下文 C、项 $\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_n$、 $\mathtt{s}_1, \ldots, \mathtt{s}_n$ 以及代换 γ_i，使得：(i) 对每个 i，都有 $\mathtt{t}_i \mapsto \mathtt{s}_i$；(ii) $t = C[\mathtt{t}_1\gamma_1, \ldots, \mathtt{t}_n\gamma_n]$；(iii) $s = C[\mathtt{s}_1\gamma_1, \ldots, \mathtt{s}_n\gamma_n]$；(iv) 所有 $\mathtt{t}_i$ 和 $\mathtt{s}_j$ 在 t 和 s 中分别两两不相交。

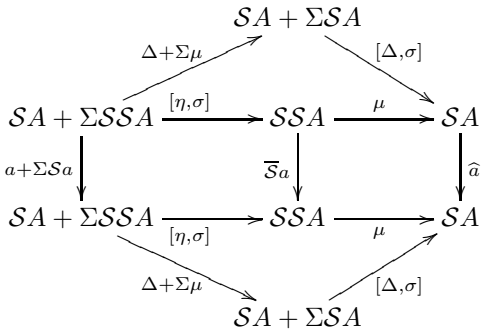
[19]请注意，在代数中进行朴素处理时， $\mathcal{S}$ 是一个关系子（它必然是其在 Map($\mathcal{A}$) 上限制的 Barr 扩张）。

由于 $\mathcal{S}$ 具有有限性，我们可以立即注意到，$-^{\mathbf{P}}$ 继承了 $\mathcal{S}$的许多结构性质：它是 ω-连续的（因此也是单调的），并且与逆关系运算可交换（$a^{\mathbf{P}\circ} = a^{\circ\mathbf{P}}$）。此外，它确实扩展了 a，即 $a \leq a^{\mathbf{P}}$。

$a^{\mathbf{P}}$（因此也包括 $a^{\mathbf{SP}}$）的定义依赖于 $\mathcal{S}$ 的单子乘法，因此超出了上一节概述的增广关系演算。与基于具体语法的系统一样，$a^{\mathbf{P}}$ 可以通过归纳来刻画，而这种刻画恰好展示了如何在关系演算中定义并行扩展。

命题 11. $a^{\mathbf{P}} = a^{\mathbf{C}}(= \mu x.a \vee \widehat{x})$，因此 $a^{\mathbf{SP}} = a^{\mathbf{SC}}$。

证明。首先，我们注意到 $a^{\mathbf{P}} = a \vee a^{\mathbf{P}}$，因此 $a^{\mathbf{C}} \leq a^{\mathbf{P}}$。为此，考虑以下图表和推导（其中我们使用命题 3 给出的 $\mathcal{S}$ 的归纳刻画）：



$$
\begin{aligned}
a^{\mathbf{P}} &= \rho^{\circ}; \mathcal{S}a; \rho \\
&= ((\Delta + \Sigma\rho); [\Delta, \sigma])^{\circ}; (a + \Sigma\mathcal{S}a); (\Delta + \Sigma\rho); [\Delta, \sigma] \\
&= [\Delta, \Sigma\rho; \sigma]^{\circ}; (a + \Sigma\mathcal{S}a); [\Delta, \Sigma\rho; \sigma] \\
&= a \vee \sigma^{\circ}; \Sigma\rho^{\circ}; \Sigma\mathcal{S}a; \Sigma\rho; \sigma \\
&= a \vee \sigma^{\circ}; \Sigma(\rho^{\circ}; \mathcal{S}a; \rho); \sigma \\
&= a \vee \sigma^{\circ}; \Sigma a^{\mathbf{P}}; \sigma \\
&= a \vee \widehat{a^{\mathbf{P}}}
\end{aligned}
$$

现在我们来证明 $a^{\mathbf{P}} \leq a^{\mathbf{C}}$。根据命题 3，我们有 $\mathcal{S}a = \mu x.(\eta^{\circ}; a; \eta) \vee (\sigma^{\circ}; \Sigma x; \sigma)$，因此可以通过关于 ω-连续不动点的归纳来证明。假设 $\rho^{\circ}; x; \rho \leq a^{\mathbf{C}}$，则有：

$$
\begin{aligned}
&\rho^{\circ}; ((\eta^{\circ}; a; \eta) \vee (\sigma^{\circ}; \Sigma x; \sigma)); \rho \\
&= (\rho^{\circ}; \eta^{\circ}; a; \eta; \rho) \vee (\rho^{\circ}; \sigma^{\circ}; \Sigma x; \sigma; \rho) \\
&= a \vee (\rho^{\circ}; \sigma^{\circ}; \Sigma x; \sigma; \rho) \\
&= a \vee (\sigma^{\circ}; \Sigma\rho^{\circ}; \Sigma x; \Sigma\rho; \sigma;) \\
&= a \vee (\sigma^{\circ}; \Sigma(\rho^{\circ}; x; \rho); \sigma;) \\
&= a \vee (\sigma^{\circ}; \Sigma a^{\mathbf{C}}; \sigma;) \\
&= a \vee \widehat{a^{\mathbf{C}}} \\
&= a^{\mathbf{C}}.
\end{aligned}
$$

□

根据命题11，$a^{\mathbf{P}}$ 和 $a^{\mathbf{SP}}$ 是相容的，并且由于相容关系是自反的，它们也是自反的。

因此，我们确实看到，$a^{\mathbf{P}}$ 可以随意规约不相交的缩约子。在转向 $a^{\mathbf{SP}}$的合流性之前，我们注意到 $a^{\mathbf{SP}}$ 在替换下是闭合的。

命题 12. $a^{\mathbf{SP}}[\Delta] \leq a^{\mathbf{SP}}$。

证明。只需证明 $a^{\mathbf{SP}} \leq \Delta \gg a^{\mathbf{SP}}$，我们通过不动点归纳来完成证明。关键在于证明 $\widehat{\Delta} \gg a^{\mathbf{SP}} \leq \Delta \gg a^{\mathbf{SP}}$。为此，我们注意到有如下通用规律：$\widehat{x} \gg y \leq x \gg (\widehat{y} \vee x)$,[20] 由此可得 $\widehat{\Delta} \gg a^{\mathbf{SP}} \leq \Delta \gg (\widehat{a^{\mathbf{SP}}} \vee \Delta) \leq \Delta \gg a^{\mathbf{SP}}$，因为 $\gg$ 对第二个参数是单调的，并且 $a^{\mathbf{SP}}$是自反且相容的。 □

A. 关系式并行移动技术

定义了并行归约之后，我们现在来证明它的有效性。我们通过考察符号系统最重要的性质之一：合流性 [100]来展开讨论。一般而言：(i) 若关系 $a : A \to A$ 满足菱形性质，则有 $a^{\circ}; a \leq a; a^{\circ}$，(ii) 若 a^* 满足菱形性质，则称其为合流的，(iii) 若 $a^{\circ}; a \leq a^*; a^{*\circ}$，则称其为弱合流的（注意 $a^{\circ *} = a^{*\circ}$）。

要证明并行归约$a^{\mathbf{SP}}$（以及类似的归约）的合流性时，采用局部证明技术是可取的。事实上，合流性在两方面都是非局部性质：（i）它涉及归约序列（即 $a^{\mathbf{SP}*}$），而非单个归约步骤；（ii）它会在复杂表达式内部进行归约。本文将要证明的证明技术大多以类似菱形的性质给出（从而获得上述第一类局部性），其假设则建立在基底归约a或其代换实例之上，即 $a[\Delta]$，从而获得上述第二类半局部性。

本文证明的首个主要结果，是所谓平行移动引理 [18]，的一个抽象关系版本；这是一种用于证明正交系统 [17]合流性的著名技术。对于一阶系统，项重写系统（TRS）的正交性意味着系统不存在临界对 [17]，且所有基底归约都是左线性的（即基底可约表达式中的变量至多出现一次）。这些条件高度依赖语法，几乎无法推广到任意基于语法的系统。

我们通过提炼出正交性的操作性概念来解决这一问题。当将其应用于项重写系统时，它确实可由前述正交性的句法定义推出。这种正交性的操作性概念将正交系统背后的非形式化直觉直接转化到关系框架中，即当可归约表达式的子项被约简时，它们仍保持为可归约表达式（换言之，约简是局部的，即约简一个可归约表达式不会影响其他可归约表达式）。

定义 12. E-系统（Σ, V, a）是正交的，当且仅当：

$$a[\Delta]^{\circ}; a[\Delta] \leq \Delta \qquad a[\Delta]^{\circ}; \widetilde{a^{\mathbf{SP}}} \leq a^{\circ}[a^{\mathbf{SP}}].$$

只需证明 $\widehat{x} \gg y[x] \leq \widehat{y} \vee x$。由命题 9 可得后者：$\widehat{x} \gg y[x] \leq \widehat{x\ y}(\gg)[x] \vee x \leq \widehat{y} \vee x$。

定义 12 中的第一个条件显然成立：基底归约规则本质上是唯一的。[21] 第二个条件指出，当我们归约可归约表达式的子项时，它的（实例）仍然是可归约表达式。对于项重写系统，我们可以将该条件具体表述如下：对于任意基底归约 $\ell \mapsto r$，若我们归约实例 $\ell[\mathsf{v}/\bar{x}]$ of ℓ 的一个真子项 s，例如 $\mathsf{s} \Rightarrow \mathsf{t}$，那么 $\mathsf{t} = \ell[\mathsf{w}/\bar{x}]$ 且 $\mathsf{v}_i \Rightarrow \mathsf{w}_i$。请注意，使用相容细化算子，我们确实可以表达归约 $\mathsf{s} \Rightarrow \mathsf{t}$ 发生在 $\ell[\mathsf{v}/\bar{x}]$ 的一个真子项上。

我们的目标是证明正交系统是合流的，方法是证明并行归约具有菱形性质：这种技巧称为平行移动[15], [18]。在继续之前，我们要指出，后一陈述一般并不成立；例如，涉及变量绑定的语法就不满足这一性质。在这些情况下，并行归约只有弱合流性。通过关系式的处理，我们可以清楚地看到平行移动技巧失效之处，从而分离出使其奏效所需的操作条件；例如，一阶语法就满足这样的条件。此外，通过弱化正交条件，我们或许还能获得证明非正交系统弱合流性的新技巧。

作为迈向合流性的第一步，我们注意到，并行算子具有类 Kleisli 提升性质。

引理 1. 若 $a^\circ;\ a^{\mathsf{P}} \leq a^{\mathsf{P}};a^{\mathsf{P}\circ}$，则 $a^{\mathsf{P}\circ};a^{\mathsf{P}} \leq a^{\mathsf{P}};a^{\mathsf{P}\circ}$

证明。我们假设 $a^\circ;a^{\mathsf{P}} \leq a^{\mathsf{P}};a^{\mathsf{P}\circ}$，并注意到，对偶化后，我们还得到 $a^{\mathsf{P}\circ};a \leq a^{\mathsf{P}};a^{\mathsf{P}\circ}$。由于 $a^{\mathsf{P}\circ} = a^{\circ\mathsf{P}} = \mu x.a^\circ \vee \widehat{x}$，我们可以通过 ω-连续归纳证明该论文（注意，确实 $\phi(x)\ a^\circ \vee \widehat{x}$ 是 ω-连续的——这也可由命题 11 得出，而且 $\phi(x);a^{\mathsf{P}}$ 也是如此）。设 $x \leq a^{\mathsf{P}\circ}$ 且 $x;\ a^{\mathsf{P}} \leq a^{\mathsf{P}};a^{\mathsf{P}\circ}$。我们证明 $(a^\circ \vee \widehat{x});\ a^{\mathsf{P}} \leq a^{\mathsf{P}};a^{\mathsf{P}\circ}$。后者相当于证明 $a^\circ;a^{\mathsf{P}} \vee \widehat{x};a^{\mathsf{P}} \leq a^{\mathsf{P}};a^{\mathsf{P}\circ}$，而这又可由 $a^\circ;a^{\mathsf{P}} \leq a^{\mathsf{P}};a^{\mathsf{P}\circ}$ 和 $\widehat{x};a^{\mathsf{P}} \leq a^{\mathsf{P}};a^{\mathsf{P}\circ}$ 得出。前者由假设得出。对于后者，由于 $a^{\mathsf{P}} = a \vee a^{\mathsf{P}}$，只需证明 $\widehat{x};\ a \leq a^{\mathsf{P}};\ a^{\mathsf{P}\circ}$ 和 $\widehat{x};\ \widehat{a^{\mathsf{P}}} \leq a^{\mathsf{P}};\ a^{\mathsf{P}\circ}$。第一项由假设的对偶版本得出，因为 $x \leq a^{\mathsf{P}\circ}$ 给出

$$\widehat{x};a \leq \widehat{a^{\mathsf{P}\circ}};a \leq \widehat{a^{\mathsf{P}}}^{\circ};a \leq a^{\mathsf{P}\circ};a.$$

对于第二个不等式，我们首先如下使用归纳假设

$$\widehat{x};\widehat{a^{\mathsf{P}}} = \widehat{x;a^{\mathsf{P}}} \leq \widehat{a^{\mathsf{P}};a^{\mathsf{P}\circ}}$$

然后注意到 $a^{\mathsf{P}};a^{\mathsf{P}\circ}$ 确实是相容的（由此可得论文中的结论）。对于

$$\begin{aligned}\widehat{a^{\mathsf{P}};a^{\mathsf{P}\circ}} &= \widehat{a^{\mathsf{P}}};\widehat{a^{\mathsf{P}\circ}}\\ &= \widehat{a^{\mathsf{P}}};\widehat{a^{\circ\mathsf{P}}}\\ &\leq (a \vee \widehat{a^{\mathsf{P}}});(a^\circ \vee \widehat{a^{\circ\mathsf{P}}})\\ &= a^{\mathsf{P}};a^{\circ\mathsf{P}}\\ &= a^{\mathsf{P}};a^{\mathsf{P}\circ}.\end{aligned}$$

□

[21]注意，这样的规则实际上给出了弱正交性 [15]。

由于 $a^{\mathsf{SP}} = a[\Delta]^{\mathsf{P}}$，我们可以通过证明 $a[\Delta]^\circ;\ a[\Delta]^{\mathsf{P}} \leq a[\Delta]^{\mathsf{P}};\ a[\Delta]^{\mathsf{P}\circ}$，并依赖引理 1 得出后者具有菱形性质。为此，我们需要两个辅助结果。第一个指出，并行归约可扩展到代换。[22]

Lemma 2. $\Delta[a^{SP}] \leq a^{SP}$.

证明。只需证明 $\Delta \leq a^{\mathsf{SP}} \mathbin{»} a^{\mathsf{SP}}$。由于 $\Delta = \mu x.\widehat{x}$，我们通过不动点归纳证明 $a^{\mathsf{SP}} \mathbin{»} a^{\mathsf{SP}}$ 是相容的。由于 a^{SP} 是相容的（且 » 对第二个参数是单调的），我们有：$\widehat{a^{\mathsf{SP}}} \mathbin{»} a^{\mathsf{SP}} \leq a^{\mathsf{SP}} \mathbin{»} (\widehat{a^{\mathsf{SP}}} \vee a^{\mathsf{SP}}) \leq a^{\mathsf{SP}} \mathbin{»} a^{\mathsf{SP}}$。 □

所需的第二个性质指出，一次归约不能产生嵌套重写红 ex。

定义 13。如果 Σ, V, a 是一个 E-系统，则当 $a^\circ[a^{\mathsf{SP}}] \leq a^{\mathsf{SP}};\ a^\circ[\Delta]$ 时，该系统具有嵌套性质。

项重写系统具有嵌套性质，不带绑定子的高阶系统 [101] 也具有该性质。然而，正如已经提到的，对于带变量绑定的语法，该性质并不成立。例如，在 λ-演算的情况下，它表明，只要我们有

$$\mathtt{t}[\bar{\mathtt{v}}/\bar{x}][\mathtt{s}[\bar{\mathtt{v}}/\bar{x}]/x] \leftarrow_\beta (\lambda x.\mathtt{t}[\bar{\mathtt{v}}/\bar{x}])\mathtt{s}[\bar{\mathtt{v}}/\bar{x}] \Rightarrow_\beta (\lambda x.\mathtt{t}[\bar{\mathtt{w}}/\bar{x}])\mathtt{s}[\bar{\mathtt{w}}/\bar{x}],$$

于是 $\mathsf{t}[\mathsf{v}/\bar{x}][\mathsf{s}[\mathsf{v}/\bar{x}]/x] \Rightarrow \mathsf{t}[\mathsf{w}/\bar{x}][\mathsf{s}[\mathsf{w}/\bar{x}]/x]$。后一种归约并不成立，因为可能存在嵌套重写红ex $\mathsf{v}_i\mathsf{s}$。正如我们将在下一节看到的，这一性质可由代换性推出，而 a^{SP}并不具备代换性。

定理 6（平行移动）。设 (Σ, V, a) 是满足嵌套性质的正交系统。那么 a^{SP} 具有菱形性质。

证明。由引理 1，只需证明 $a[\Delta]^\circ;a[\Delta]^{\mathsf{P}} \leq a[\Delta]^{\mathsf{P}};\ a[\Delta]^{\mathsf{P}\circ}$ b $a[\Delta]^{\mathsf{P}}\ a[\Delta]^{\mathsf{P}\circ}$ $a[\Delta]^{\mathsf{P}} = a[\Delta] \vee$；。令为；。由于 $a[\Delta]^{\mathsf{P}}$，只需证明 $a[\Delta]^\circ;a[\Delta] \leq b$ 和 $a[\Delta]^\circ;\widehat{a[\Delta]^{\mathsf{P}}} \leq b,$，即 $a[\Delta]^\circ;\widehat{a^{\mathsf{SP}}} \leq b$。前者直接由正交性得出，因为 $\Delta \leq b$。对于后者，只需证明 $a[\Delta]^\circ;\mathsf{I}_\eta \leq b$ 和 $a[\Delta]^\circ;a^{\mathsf{SP}} \leq b$。第一项由注 5 显然成立；对于第二项，由正交性和嵌套性质可得

$$a[\Delta]^\circ;\widetilde{a^{\mathsf{SP}}} \leq a^\circ[a^{\mathsf{SP}}] \leq a^{\mathsf{SP}};a^\circ[\Delta].$$

我们由此得出论文结论，因为 a^{SP} 在替换下封闭（引理 2）（因此 $a^\circ[\Delta] \leq a^{\mathsf{SP}\circ}[\Delta] \leq a^{\mathsf{SP}\circ}$）。 □

1) 超越合流性：我们已经看到，在具有嵌套性质的情况下，正交系统是合流的。但如果缺少这种性质会怎样呢？λ-演算就是一个例子。下一节中，我们将看到实现合流性的另一条途径。这里，我们注意到，关系式平行移动技术勾勒出了一种蓝图，可用于在条件放宽的情况下证明较弱形式的合流性。例如，我们可以调整引理 1 来处理弱合流性。

[22]On a TRS we have: $\mathtt{v}_i \Rightarrow \mathtt{w}_i$ implies $\mathtt{t}[\bar{\mathtt{v}}/\bar{x}] \Rightarrow \mathtt{t}[\bar{\mathtt{w}}/\bar{x}]$.

引理 3. $\widehat{a^*} = \widehat{a}^*$。

证明。根据命题 7，利用 $a^* = \mu x.\Delta \vee a; x$。 □

命题 13. 若 $a^\circ; a^{\mathrm{P}} \leq a^{\mathrm{P}*}; a^{\mathrm{P}*\circ}$，则 $a^{\mathrm{P}\circ}; a^{\mathrm{P}} \leq a^{\mathrm{P}*}; a^{\mathrm{P}*\circ}$

证明概要。我们按照引理 1 的证明进行，只需 $\widehat{\ }$ 注意到：(i) $a^{\mathrm{P}*} \leq a^{\mathrm{P}*}$（这可由引理 3 得出）；以及 $\widehat{\widehat{\ }}$ (ii) $a^{\mathrm{P}*}; a^{\mathrm{P}*\circ} \leq a^{\mathrm{P}*}; a^{\mathrm{P}*\circ}$。 □

利用命题 13，我们现在可以仿照定理 6 的证明，但采用更弱的假设。例如，我们可以弱化嵌套性质，允许进行多步并行归约，即 $a^\circ[a^{\mathrm{SP}}] \leq a[\Delta]; \Delta[a^{\mathrm{SP}*\circ}]$。这一性质在含绑定子的语法中也成立，因此可以据此得出正交系统是弱合流的结论。这或许不算特别有趣，因为我们将看到，利用深度归约可以证明正交系统具有合流性；不过请注意，还可以进一步弱化这一结果，例如要求 $a^\circ[\Delta]; a[\Delta] \leq a^{\mathrm{SP}*}; a^{\mathrm{SP}*\circ}$，从而推广到正交性之外。

VIII. 完全归约

将语法视为（自由）单子 $\mathcal{S}$ 时，我们可以把并行归约——它是借助单子乘法和关系扩张定义的——称为由语法 $\mathcal{S}$ 诱导的规范归约概念。我们还可以将 $\mathcal{S}$ 视为初始代数，并借助定理 4 在关系层面利用初始性。事实上，任意基关系 $a : \mathcal{S}V \to \mathcal{S}V$（出于很快就会明了的原因，我们实际上将考虑 $a \vee \Delta$）都通过与代数映射 $[\eta, \sigma] : V + \Sigma(\mathcal{S}V) \to \mathcal{S}V$ 后复合，在 $\mathcal{S}V$ 上诱导出一个关系 $(V + \Sigma)$ 代数。

定义 14. 给定一个 E-系统 (Σ, V, a)，我们将完全归约关系定义为 $a^{\mathrm{F}}, (\!|[\eta, \sigma]; (a \vee \Delta)|\!)$。

深度归约的具体实例已广泛用于一阶和高阶重写中，以证明合流性。例如，对于一个项重写系统 $(X, \Sigma, \mapsto)$，我们看到 $\mapsto^{\mathrm{F}}$ 是按如下方式归纳定义的关系：

$$\frac{}{\mathtt{x} \mapsto^{\mathrm{F}} \mathtt{x}} \qquad \frac{\mathtt{x} \mapsto \mathtt{t}}{\mathtt{x} \mapsto^{\mathrm{F}} \mathtt{t}} \qquad \frac{\mathtt{t}_1 \mapsto^{\mathrm{F}} \mathtt{s}_1 \ \cdots \ \mathtt{t}_n \mapsto^{\mathrm{F}} \mathtt{s}_n}{o(\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_n) \mapsto^{\mathrm{F}} o(\mathtt{s}_1, \ldots, \mathtt{s}_n)}$$

$$\frac{\mathtt{t}_1 \mapsto^{\mathrm{F}} \mathtt{s}_1 \ \cdots \ \mathtt{t}_n \mapsto^{\mathrm{F}} \mathtt{s}_n \quad o(\mathtt{s}_1, \ldots, \mathtt{s}_n) \mapsto \mathtt{u}}{o(\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_n) \mapsto^{\mathrm{F}} \mathtt{u}}$$

注意到，由于在项重写系统中变量不能是可归约表达式，因此上面的第二个子句永远不会适用。取 $a[\Delta]^{\mathrm{F}}$，我们便恢复了传统的完全归约概念 $\Rightarrow$。

关系 a^{F} 递归地作用于整个表达式，因此可以任意并行归约可能嵌套的可约表达式。这保证了 a^{F} 扩展了 a。此外，Δ 的存在使得可以随时停止归约。

引理 4. 1) $\Delta \leq a^{\mathrm{F}}$,
2) $a \leq a^{\mathrm{F}}$.

利用定理 5，我们可以发挥 a^{F} 的归纳性质。

命题 14。 $a^{\mathrm{F}} = \mu x.\ \mathrm{I}_\eta \vee \mathrm{I}\eta;\ a \vee \widetilde{x} \vee \widetilde{x};\ a$。

注 6. 实际上，如果利用注 5 中的假设，我们还可以进一步简化命题 14，得到 $a^{\mathrm{F}} = \mu x.\mathrm{I}_\eta \vee \mathrm{I}\eta; a \vee \widetilde{x} \vee \widetilde{x}; a$。

在研究 a^{F}的重写性质之前，自然会想知道 a^{F} 与 a^{P}之间的关系。直观地说，后者是前者的一个子关系，它仅通过归约非嵌套的可约表达式得到。因此，可以预期 $a^{\mathrm{P}} \leq a^{\mathrm{F}}$。此外，同样的论证方式表明，经过 a^{P}的可能多步归约，可以恢复 a^{F}。确实如此：实际上，a^{F} 和 a^{P}确定了相同的归约序列。

Lemma 5. $a^{\mathrm{P}} \leq a^{\mathrm{F}} \leq a^{\mathrm{P}*} = a^{\mathrm{F}*}$.

证明概要.. 证明是一次直接的（不动点）归纳。唯一（或许）并非显然的步骤 $\widehat{\ }$ 是观察到 $a^{\mathrm{P}*}\ a \leq a^{\mathrm{P}*}$ 3；。这由引理推出：$\widehat{a^{\mathrm{P}*}};\ a \leq a^{\mathrm{P}*};\ a \leq a^{\mathrm{P}*};\ a \leq a^{\mathrm{P}*};\ a^{\mathrm{P}} \leq a^{\mathrm{P}*}$。 □

将a^{SF} 记作 $a[\Delta]^{\mathrm{F}}$，我们看到上述所有结果都可推广到 a^{SF} 和 a^{SP}。

现在我们转向完全归约的合流性。由于a^{SF} 也归约嵌套重写红ex，我们预期这种关系至少在正交系统上满足定义 13 的嵌套性质（经适当改写，将 a^{SP} 替换为 a^{SF}）；此处正交性的定义与定义 12 中相同，只是用 a^{SF} 替代 a^{SP}。为证明 a^{SF}的嵌套性质，我们首先观察到后者可由代换性推出。

引理 6. 如果 a^{SF} 具有代换性（即 $a^{SF}[a^{SF}] \leq a^{SF}$]），那么它具有嵌套性质：也就是说，$a^\circ[a^{SF}] \leq a^{SF}$；$a^\circ[\Delta]$。

证明。回顾一下，$-[=]$ 是函子的，并且 $\Delta \leq a^{\mathrm{SF}}$。我们有：$a^\circ$；$[a^{\mathrm{SF}}] = (\Delta;\ a^\circ)[a^{\mathrm{SF}}]$；$\Delta] \leq (a^{\mathrm{SF}};\ a^\circ)[a^{\mathrm{SF}}]$；$\Delta] = a^{\mathrm{SF}}[a^{\mathrm{SF}}]$；$a^\circ[\Delta] \leq a^{\mathrm{SF}}$；$a^\circ[\Delta]$，其中最后一个不等式由代换性得出。 □

现在我们旨在证明 a^{SF}的代换性。为此，我们利用 a^{SF} 与程序等价中一种众所周知的关系式技术之间出人意料的联系：Howe 方法 [44], [45]。

A. 完全归约与 Howe 方法

Howe 方法是一种强大的操作式技术，用于证明应用式（双）模拟的同余性，最初是在纯 λ-演算系统的背景下发展起来的。Howe 方法已扩展到各种具体形式体系——例如带有计算效应 [42], [99], [102]–[111] 的演算系统——以及范畴语义 [112]–[114]。Gordon [65], [93] 和 Lassen [42], [43] 针对特定的 λ-演算系统发展出了一种优雅的 Howe 方法关系式刻画；沿着第 VI 节的思路，通过对具体语法进行抽象，可以使这种刻画完全一般化。

我们将证明，关系的 Howe 扩张a 与 a^{F}一致。尽管这个等式十分简单，却是新的（至少据作者所知如此）；它有两方面的优势：一方面，我们可以从以下角度对 Howe 方法获得新的理解：

如定义 14 所述的初始关系代数；另一方面，我们可以获得强有力的证明技术，用于推理完全归约。

定义 15。对于关系 $a : \mathcal{SV} \to \mathcal{SV}$，将其 Howe 扩张[23] 定义为 $a^{\mathbf{H}}, \mu x.\widehat{x};\ (a \vee \Delta)$。我们将 $a^{\mathbf{SH}}$ 定义为 $a[\Delta]^{\mathbf{H}}$。

现在我们证明 $a^{\mathbf{H}}$ 与 $a^{\mathbf{F}}$ 相同，并由此推导出 $a^{\mathbf{SF}}$的归纳刻画。本节余下部分中，我们用记号 $y^{=}$ 表示 y的自反闭包，即 $y^{=}, y \vee \Delta$。

引理 7。 $a^{H} = a^{F}$。

证明。根据定理 5，我们有：

$$\begin{aligned} a^{\mathbf{F}} &= (\!|[\eta,\sigma]; a^{=}|\!) \\ &= \mu x.[\eta,\sigma]^{\circ}; (\Delta_V + \Sigma x); [\eta,\sigma]; a^{=} \\ &= \mu x.\eta^{\circ}; \eta; a^{=} \vee \sigma^{\circ}; \Sigma x; \sigma; a^{=} \\ &= \mu x.\mathtt{I}_{\eta}; a^{=} \vee \widetilde{x}; a^{=} \\ &= \mu x.(\mathtt{I}_{\eta} \vee \widetilde{x}); a^{=} \\ &= \mu x.\widehat{x}; a^{=} \\ &= a^{\mathbf{H}}. \end{aligned}$$

□

为了利用引理 7 的推论，我们先明确说明自反闭包算子的一个（显然的）性质。

引理 8。 $a[\Delta]^{=} = a^{=}[\Delta]$。

证明。展开 $(\text{–})^{=}$ 的定义，我们看到需要证明 $a[\Delta] \vee \Delta = (a \vee \Delta)[\Delta]$。首先，我们注意到 $a[\Delta] \vee \Delta \leq (a \vee \Delta)[\Delta]$ 可由 $a[\Delta] \leq (a \vee \Delta)[\Delta]$ 得出（这又由命题 9 得出，因为 $a \leq a \vee \Delta$），以及 $\Delta \leq (a \vee \Delta)[\Delta]$。（同样地，由命题 9 可得 $\Delta = \Delta[\Delta] \leq (a \vee \Delta)[\Delta]$。）因此，要完成证明，只需证明相反的不等式，即 $(a \vee \Delta)[\Delta] \leq a[\Delta] \vee \Delta$。后者等价于 $a \vee \Delta \leq \Delta \mathbin{\text{»}} (a[\Delta] \vee \Delta)$，而这由 $a \leq \Delta \mathbin{\text{»}} (a[\Delta] \vee \Delta)$（即 $a[\Delta] \leq a[\Delta] \vee \Delta$，显然成立）以及 $\Delta \leq \Delta \mathbin{\text{»}} (a[\Delta] \vee \Delta)$（即 $\Delta[\Delta] \leq a[\Delta] \vee \Delta$，显然由 $\Delta[\Delta] = \Delta$ 得出）推出。 □

命题 15. 对于一个 E-系统 (Σ, V, a)，有：

1) $a^{\mathbf{SF}} = a^{\mathbf{SH}} = \mu x.\mathtt{I}_{\eta} \vee \widetilde{x}; a^{=}[\Delta]$.
2) $a^{\mathbf{SF}\circ} = a^{\mathbf{SH}\circ} \mu x.\mathtt{I}_{\eta} \vee a^{=}[\Delta]^{\circ}; \widetilde{x}$.

证明. 我们证明第 1 项，因为第 2 项可由其直接推出。根据引理 7，有

$$a^{\mathbf{SF}} = a^{\mathbf{SH}} = a[\Delta]^{\mathbf{H}} = \mu x.\widehat{x}; a[\Delta]^{=}.$$

[23]通常将 $a^{\mathbf{H}}$ 定义为 $\mu x.\widehat{x};\ a$ ——因此不强制 a 满足自反性——随后将分析限制在自反关系上（程序近似和等价关系都属于此类）。为便于说明，我们将自反性直接纳入 $a^{\mathbf{H}}$的定义，这与我们处理 $a^{\mathbf{F}}$的方式大致相同。当然，也可以从这两个定义中去掉自反性，并经过相应调整，得到本节所证明的相同结果。

接下来计算：

$$\begin{aligned} \mu x.\widehat{x}; a[\Delta]^{=} &= \mu x.\widehat{x}; a^{=}[\Delta] && \text{(Lemma 8)} \\ &= \mu x.(\mathtt{I}_{\eta} \vee \widetilde{x}); a^{=}[\Delta] \\ &= \mu x.\mathtt{I}_{\eta}; a^{=}[\Delta] \vee \widetilde{x}; a^{=}[\Delta] \\ &= \mu x.\mathtt{I}_{\eta}; a[\Delta]^{=} \vee \widetilde{x}; a^{=}[\Delta] && \text{(Lemma 8)} \\ &= \mu x.\mathtt{I}_{\eta}; (a[\Delta] \vee \Delta) \vee \widetilde{x}; a^{=}[\Delta] \\ &= \mu x.\mathtt{I}_{\eta}; a[\Delta] \vee \mathtt{I}_{\eta} \vee \widetilde{x}; a^{=}[\Delta] \\ &= \mu x.\bot \vee \mathtt{I}_{\eta} \vee \widetilde{x}; a^{=}[\Delta] && \text{(Remark 5)} \\ &= \mu x.\mathtt{I}_{\eta} \vee \widetilde{x}; a^{=}[\Delta]. \end{aligned}$$

□

现在我们可以证明完全归约的代换性（以及相容性）了。

命题 16. $a^{\mathbf{SF}}$ 相容且具有代换性。

证明. 我们首先证明 $a^{\mathbf{SF}}$ 具有代换性，即 $a^{\mathbf{SF}}[a^{\mathbf{SF}}] \leq a^{\mathbf{SF}}$。我们通过 ω-连续不动点归纳证明等价不等式 $a^{\mathbf{SF}} \leq a^{\mathbf{SF}} \mathbin{\text{»}} a^{\mathbf{SF}}$（回想一下，$-[=]$ 在第一个参数上是 ω-连续的）。利用命题 15。因此我们假设 $x \leq a^{\mathbf{SF}}$ 且 $x \leq a^{\mathbf{SF}} \mathbin{\text{»}} a^{\mathbf{SF}}$ ——即 $x[a^{\mathbf{SF}}] \leq a^{\mathbf{SF}}$ ——并证明 $\mathtt{I}_{\eta} \vee \widetilde{x};\ a^{=}[\Delta] \leq a^{\mathbf{SF}} \mathbin{\text{»}} a^{\mathbf{SF}}$。证明后者等价于证明 $\mathtt{I}_{\eta} \leq a^{\mathbf{SF}} \mathbin{\text{»}} a^{\mathbf{SF}}$ 且 $\widetilde{x};\ a^{=}[\Delta] \leq a^{\mathbf{SF}} \mathbin{\text{»}} a^{\mathbf{SF}}$。前者等价于 $\mathtt{I}_{\eta}[a^{\mathbf{SF}}] \leq a^{\mathbf{SF}}$，这由命题 9 推出。对于后者，只需证明 $(\widetilde{x}; a^{=}[\Delta])[a^{\mathbf{SF}}] \leq a^{\mathbf{SF}}$。计算如下：[24]

$$\begin{aligned} (\widetilde{x}; a^{=}[\Delta])[a^{\mathbf{SF}}] &= (\widetilde{x}; a^{=}[\Delta])[a^{\mathbf{SF}}; \Delta] \\ &\leq \widetilde{x}[a^{\mathbf{SF}}]; a^{=}[\Delta] \\ &\leq \widetilde{x[a^{\mathbf{SF}}]}; a^{=}[\Delta] \\ &\leq \widetilde{a^{\mathbf{SF}}}; a^{=}[\Delta] && (\text{since } x[a^{\mathbf{SF}}] \leq a^{\mathbf{SF}}) \\ &\leq \mathtt{I}_{\eta} \vee \widetilde{a^{\mathbf{SF}}}; a^{=}[\Delta] \\ &= a^{\mathbf{SF}}. \end{aligned}$$

$\widehat{\ }$关于相容性，即 $a^{\mathbf{SH}} \leq a^{\mathbf{SH}}$ $a^{=}[\Delta]$，我们注意到，由于具有自反性，因此有 $a^{\mathbf{SH}} = a^{\mathbf{SH}}; \Delta \leq a^{\mathbf{SH}}; a^{=}[\Delta] \leq a^{\mathbf{SH}}$。

注 7。请注意，$a^{\mathbf{SH}}$ 的代换性成立与 $a^{=}[\Delta]$ 的自反性无关（而相容性则明确依赖于它）。这是注 5 的结果——注 5 给出了命题 15——因此我们不必考虑 $\mathtt{I}\eta; a^{=}[\mathtt{I}_{\eta}] \leq a^{\mathbf{SF}} \mathbin{\text{»}} a^{\mathbf{SF}}$ 这种情况。要处理这种情况，我们确实需要依赖 $a^{=}[\mathtt{I}_{\eta}]$ 的自反性。

结合命题 16 和引理 6，我们得到 $a^{\mathbf{SF}}$ 的嵌套性质。

推论 1。完全归约 $a^{\mathbf{SF}}$ 具有嵌套性质。

现在，我们已经具备了证明完全归约具有菱形性质所需的全部要素。不过在此之前，我们先介绍另一个候选的“完全归约”定义，它会主动运用代换性。此类定义通常

[24]根据关系替换的结合律，即 $x[y][z] = x[y[z]]$，我们有 $a^{=}[\Delta][\Delta] = a^{=}[\Delta[\Delta]] \leq a^{=}[\Delta]$。

在项重写中称为多步归约 [15] ，有时也用于所谓的 Tait-Martin-Löf 技术的上下文中 [36]–[38] —不过请注意，在具体的演算系统中，例如 λ-演算，这种技术使用的是完全归约（的具体实例），而不是多步归约。

至于并行归约和完全归约，在程序等价的文献中也可以（重新）发现多步归约，它被称为关系 [42], [43] 的替换上下文闭包。

定义 16. 设 (Σ, V, a) 是一个 E-系统。 a 的替换上下文闭包定义为 a^{SCC} , $\mu x.a[x] \vee \widehat{x}$。

由于 a^{SH} 是替换的且相容， a^{SCC} 包含于其中（ $a^{\text{SCC}} \leq a^{\text{SH}}$），并且这两个关系给出相同的归约序列。我们不再进一步研究多步归约，不过我们注意到（但不提供形式证明） a^{SCC} 满足所谓的三角性质（即 $x \leq x; x^{\circ}$），由此可推出合流性。

B. Tait-Martin-Löf 技巧

我们终于可以证明本节的主要结果了：在正交系统中，完全归约具有菱形性质，因此它是合流的。我们的结果为所谓的 Tait-Martin-Löf 技巧 [36]–[38]，提供了抽象的关系版本；该技巧通过证明完全归约具有菱形性质，来证明一个系统（最初是 λ 演算）的合流性。

定理 7. 称一个 E-系统 (Σ, V, a) 是正交的$\widetilde{\ }$当且仅当 $a[\Delta]^{\circ}; a[\Delta] \leq \Delta$ 且 $a[\Delta]^{\circ}; a^{\text{SF}} \leq a^{\circ}[a^{\text{SF}}]$。那么，在正交系统中，完全归约 a^{SF} 具有菱形性质：$a^{\text{SF}\circ}; a^{\text{SF}} \leq a^{\text{SF}}; a^{\text{SF}\circ}$。

证明。首先，我们注意到，利用正交性和嵌套性质（推论 1），可以得到：

$$a[\Delta]^{\circ}; \widetilde{a^{\text{SF}}} \leq a^{\circ}[a^{\text{SF}}] \leq a^{\text{SF}}; a^{\circ}[\Delta] \qquad \text{(ortho-nesting)}$$
$$\widetilde{a^{\text{SF}}}^{\circ}; a[\Delta] \leq a[a^{\text{SF}\circ}] \leq a[\Delta]; a^{\text{SF}\circ} \qquad \text{(ortho-nesting}^{\circ}\text{)}$$

设 s , $a^{\text{SF}}; a^{\text{SF}\circ}$。我们通过对 $a^{\text{SF}\circ}$ 进行 ω-连续不动点归纳（命题 15）来证明 $a^{\text{SF}\circ}; a^{\text{SF}} \leq s$。因此，我们假设 $x \leq a^{\text{SF}\circ}$ 和 $x; a^{\text{SF}} \leq s$ ，并证明如下（我们默认利用复合对并的分配律以及并的泛性质）：

$$\mathtt{I}_{\eta}; a^{\text{SF}} \leq s \qquad (1)$$
$$a^{=}[\Delta]^{\circ}; \widetilde{x}; a^{\text{SF}} \leq s \qquad (2)$$

对于 (1)，我们首先注意到，对于任意 z，都有 $\mathtt{I}\eta; \widetilde{z} = \bot$。因此，我们得到：

$$\begin{aligned}\mathtt{I}_{\eta}; a^{\text{SF}} &= \mathtt{I}_{\eta}; (\mathtt{I}_{\eta} \vee \widetilde{a^{\text{SF}}}; a^{=}[\Delta]) \\ &= \mathtt{I}_{\eta}; \mathtt{I}_{\eta} \vee \mathtt{I}_{\eta}; \widetilde{a^{\text{SF}}}; a^{=}[\Delta] \\ &= \mathtt{I}_{\eta} \vee \bot \\ &\leq s.\end{aligned}$$

现在让我们转向 (2)。按照 (1) 的方法进行，我们得到：

$$\begin{aligned}a^{=}[\Delta]^{\circ}; \widetilde{x}; a^{\text{SF}} &= a^{=}[\Delta]^{\circ}; \widetilde{x}; (\mathtt{I}_{\eta} \vee \widetilde{a^{\text{SF}}}; a^{=}[\Delta]) \\ &= a^{=}[\Delta]^{\circ}; \widetilde{x}; \mathtt{I}_{\eta} \vee a^{=}[\Delta]^{\circ}; \widetilde{x}; \widetilde{a^{\text{SF}}}; a^{=}[\Delta] \\ &= a^{=}[\Delta]^{\circ}; \widetilde{x}; \widetilde{a^{\text{SF}}}; a^{=}[\Delta].\end{aligned}$$

现在我们利用归纳假设，得到：

$$\begin{aligned}a^{=}[\Delta]^{\circ}; \widetilde{x}; \widetilde{a^{\text{SF}}}; a^{=}[\Delta] &= a^{=}[\Delta]^{\circ}; \widetilde{x; \widetilde{a^{\text{SF}}}}; a^{=}[\Delta] \\ &\leq a^{=}[\Delta]^{\circ}; \widetilde{a^{\text{SF}}; a^{\text{SF}\circ}}; a^{=}[\Delta] \\ &\leq a^{=}[\Delta]^{\circ}; \widetilde{a^{\text{SF}}}; \widetilde{a^{\text{SF}}}^{\circ}; a^{=}[\Delta].\end{aligned}$$

因此，要得出论文结论，只需证明 $a^{=}[\Delta]^{\circ}$; $\widetilde{a^{\text{SF}}}$; $\widetilde{a^{\text{SF}}}^{\circ}$; $a^{=}[\Delta] \leq s$。我们使用引理 8（它还给出 $a^{=}[\Delta]^{\circ} = a^{\circ}[\Delta]^{=} = a[\Delta]^{\circ=}$），并将上述不等式的证明归约为证明以下各式：

$$\begin{aligned}\widetilde{a^{\text{SF}}}; \widetilde{a^{\text{SF}}}^{\circ} &\leq s \\ a[\Delta]^{\circ}; \widetilde{a^{\text{SF}}}; \widetilde{a^{\text{SF}}}^{\circ} &\leq s \\ \widetilde{a^{\text{SF}}}; \widetilde{a^{\text{SF}}}^{\circ}; a[\Delta] &\leq s \\ a[\Delta]^{\circ}; \widetilde{a^{\text{SF}}}; \widetilde{a^{\text{SF}}}^{\circ}; a[\Delta] &\leq s.\end{aligned}$$

第一式是显然的。对于第二式，我们计算：

$$\begin{aligned}a[\Delta]^{\circ}; \widetilde{a^{\text{SF}}}; \widetilde{a^{\text{SF}}}^{\circ}; a[\Delta] &\leq a^{\text{SF}}; a^{\circ}[\Delta]; \widetilde{a^{\text{SF}}}^{\circ}; a[\Delta] \qquad \text{(ortho-nesting)} \\ &= a^{\text{SF}}; a[\Delta]^{\circ}; \widetilde{a^{\text{SF}}}^{\circ}; a[\Delta] \\ &= a^{\text{SF}}; (\widetilde{a^{\text{SF}}}; a[\Delta])^{\circ} \\ &\leq a^{\text{SF}}; (\widetilde{a^{\text{SF}}}; a^{=}[\Delta])^{\circ} \\ &\leq a^{\text{SF}}; a^{\text{SF}\circ} \ (= s).\end{aligned}$$

对于第三个不等式，我们以与第二个不等式相同的方式进行，但采用对偶的处理（因此依赖于 (ortho-nesting$^{\circ}$)）。最后，对于第四个不等式，我们有：

$$\begin{aligned}a[\Delta]^{\circ}; \widetilde{a^{\text{SF}}}; \widetilde{a^{\text{SF}}}^{\circ}; a[\Delta] &\leq a^{\text{SF}}; a^{\circ}[\Delta]; \widetilde{a^{\text{SF}}}^{\circ}; a[\Delta] \qquad \text{(ortho-nesting)} \\ &\leq a^{\text{SF}}; a^{\circ}[\Delta]; a[\Delta]; a^{\text{SF}\circ} \qquad \text{(ortho-nesting}^{\circ}\text{)} \\ &\leq a^{\text{SF}}; a^{\text{SF}\circ} \ (= s). \qquad \text{(正交性)}\end{aligned}$$

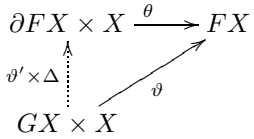
□

IX. 序贯归约：简言几句

迄今建立的理论表明，从结构和代数的角度来看，并行归约和完全归约都极为自然。然而，若从计算角度思考归约，通常会认为序贯（或线性）归约更为基础。事实上，几乎所有重写理论教材都会先定义序贯归约，然后再以此为基础引入并行归约（以及完全归约）。

尽管序贯归约的关系分析仍在进行中，我们在此指出，序贯归约可以在伴随范畴的框架中以结构和代数两种方式恢复。前一种情况下，所依据的是签名函子（以及相应单子）的导数 [115]–[118] 。事实上，若函子 $F\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ 的导数存在，它就是带有一个插件式弱笛卡尔自然变换的函子 $\partial F\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$

dF_X：$\partial FX \times X \to FX$，满足以下泛映射性质：对于任意带有弱笛卡尔[25]自然变换 ϑ：$GX \times X \to FX$ 的函子 G，存在唯一的弱笛卡尔自然变换 ϑ'：$GX \to \partial FX$，满足下图。



例如，简单多项式函子及其自由单子的导数总是存在[116]–[118]。在这些情况下，很容易看出，此类导数提供了带有一个线性空位的上下文，而这正是定义序贯归约所需要的。因此，序贯归约的一种可能定义（针对 E-系统 (Σ, V, a)）是关系 $a^{\text{L}}, d\mathcal{S}^{\circ}; (\Delta \times a); d\mathcal{S}$。

类似地，可以定义一个线性相容精化算子 $\hat{\text{E}}, d\Sigma^{\circ}; (\Delta \times a); d\Sigma$，并用它将 a^{L} 归纳刻画为 $\mu x.a \vee \hat{\text{E}}x$。此时，可以遵循增广关系演算的方法，分离出定义 – 的代数定律 Á。不过请注意，这些定律与 $\hat{}$ 的定律大不相同。例如，我们有 È a; $b \leq \hat{\text{E}}a$; $\hat{\text{E}}b$，但反过来不成立。

另一种刻画顺序性形式（尽管不是顺序归约本身）的方式，是将并行归约和完全归约视为基本操作，并把类似顺序归约的归约看作它们的限制。沿着这一思路，我们可以引入关系子 Σ 的顺序化这一概念，即一族有限元映射 Γ：$\mathcal{A}(A, A) \to \mathcal{A}(\Sigma A, \Sigma A)$，满足：

$$\begin{gathered}\Delta = \Gamma\Delta \\ \Gamma(a^{\circ}) = (\Gamma a)^{\circ} \\ \Gamma(a \vee b) = \Gamma a \vee \Gamma b \\ \Gamma a \leq \Sigma a \\ \Sigma a \leq (\Gamma a)^{*}.\end{gathered}$$

例如，若 Σ 是由一阶签名诱导的函子，那么 Σ（的 Barr 扩张）的一个顺序化是下面这个归纳定义的映射：

$$\frac{x\ a\ y}{\mathtt{x}\ \Gamma a\ \mathtt{y}} \qquad \frac{\mathtt{t}\ \Gamma a\ \mathtt{s} \quad n \geq 0}{o(\mathtt{u}_1, \ldots, \mathtt{t}, \ldots, \mathtt{u}_n)\ \Gamma a\ o(\mathtt{u}_1, \ldots, \mathtt{s}, \ldots, \mathtt{u}_n)}$$

注意，（由 Γ 诱导的）归约并不等同于通常的顺序归约。事实上，Γ 总是允许将零元运算（即常量）归约到其自身（否则，它的行为与顺序归约相同）。

此时，我们可以像前几节那样继续进行，只需改为处理（固定的）Γ Σ 的顺序化，而不是后者。我们不再进一步展开，只指出沿着命题 13的思路，可以很容易地证明一个适用于顺序化归约的弱 Kleisli 型引理。

X. 结论

在本文中，我们概述了一种以重写风格处理符号操作的一般关系理论。该理论以伴随范畴理论为框架，并与所谓的句法数学理论相辅相成：值得注意的是，这两种理论建立在同一组概念之上；句法理论以范畴方式实现这些概念，而符号操作理论则以伴随范畴的关系方式实现它们。随后，我们进一步推进了关系方法，指出上述句法概念的关系对应物定义了作用于关系的新算子，并且这些算子满足特定的代数律。事实证明，研究符号操作所需的全部内容就是这些算子及其定律，因此，我们得以建立一种独立于语法的增广关系演算，并在其中定义了经典归约关系（即并行归约和完全归约），还证明了它们的一些非平凡性质。

A. 关系重写与操作语义

本文呈现的结果初步表明，重写的关系方法远远超出了抽象归约系统的范畴。作者希望这些结果能够促使人们重新关注重写的关系方法（下一节将概述一项相关的研究计划）。

然而，（关系）重写只是（操作式）拼图中的一块。事实上，增广关系演算，尤其是其底层方法论表明，（部分）操作推理可以用公理化且与句法无关的方式加以发展。事实上，解读本研究结果的一种方式是，结合此前关于程序等价的研究结果来看，增广关系演算足以表达操作推理的两种主要形式：重写和程序等价（以及精化）。[26] 此外，作者推测，更多的操作推理，例如程序动力学理论，也可以在这种演算系统（或其变体）中加以发展。

这种视角可称为关系式或寓意式操作语义，其目标是在（真正的）关系范式中系统地发展操作技术，使程序关系、[27] 它们的运算及代数性质成为一等公民。关系演算成功应用于程序等价和重写领域，这表明关系方法用于操作语义具有实现

[25] 若自然变换的自然性方块都是弱拉回 [119]，则称其为弱笛卡尔的。直观地说，我们可以将这类自然变换视为函子之间的线性映射 [120]。

[26] 增广关系演算所涵盖的演算系统已被用于对逻辑关系 [111],上下文等价和 CIU 等价 [42], [106], [65], [104], [121], [123] 用式和正规双模拟等价进行关系式刻画——。

[27] 适用于程序文本而非其抽象指称的关系概念。

一种通用的公理化且在很大程度上与句法无关的操作推理基础。[28]

B. 未来工作

基于目前的讨论，未来工作可分为两个研究方向。第一个方向致力于发展关系重写，从而补充前文已证明的合流性结果；第二个方向则聚焦于扩展关系框架，以涵盖更多操作行为，进而朝着前述寓意式操作语义迈进。

先从前一个方向谈起，暂且不论已经讨论过的序贯归约问题（第 IX 节），以下是一个可能的研究议程。

1. 终止性。Hasegawa [124] 的工作表明，项重写系统上的基于语法的终止技术（例如多重集序和递归路径序 [15]）可以通过提升（解析）函子的方式在抽象层面上得到重现 [115],，由此也表明，基于语法的终止性确实可以在关系框架中加以分析。[29] 因此，在伴随范畴的框架中纳入并扩展 Hasegawa 的结果，似乎顺理成章。

2. 策略与因子分解。除了合流性和终止性，重写系统的另一项关键性质是因子分解 [127]。本文证明的 Kleisli 型引理已经可以推广到因子分解技术（只需将 a° 及类似符号替换为任意关系 b）。然而，这些结果对因子分解的刻画仍较为表面，因此值得探究能否从关系角度对因子分解作更深入的分析，例如沿着 Accattoli 等人近期工作的思路 [128]。

3. 解析函子与模重写。在本文中，我们的示例旨在刻画基于语法的符号系统的概念。因此，我们着重研究类似语法的有限元函子（及自由单子），其中多项式函子是最具代表性的一类。另一类有趣但尚未研究的示例是解析函子 [115]。粗略而言，解析函子可视为在对称群所诱导的等价关系下取商的多项式函子。从重写的角度来看，使用解析函子可以恢复模置换语法的概念，而且具有非常一般的意义。因此，研究解析函子或许能将关系重写应用于更宽泛的语法概念，这类语法具有不可忽视的语义含义。

4. 无限语法与余归纳重写。本文提出的理论适用于有限元语法与重写。这自然引出了一个问题：伴随范畴的论述能否扩展到无限语法与余归纳重写？对此，一个合理的猜想是将有限性语法替换为无限语法，并通过迭代代数 [129], 或类似结构对后者进行建模。请注意，这样一来，归约关系仍将通过关系子来定义，不过在扩展后的关系演算中，它们将不再被构造为归纳关系（即最小不动点），而是余归纳关系（即最大不动点）或混合的归纳—余归纳关系（即嵌套的最小与最大不动点） [130]。

5. 定量重写。最后但同样重要的是，代数框架的一个有趣局限在于，它无法处理定量形式的重写 [55]–[58]。这是一个基础性问题：定量关系范畴并不构成代数，因为它们不满足模律。不过，它们构成 Frobenius 量子序范畴 [131] ，因此自然可以进一步探讨，能否在这类结构之上建立类似代数的重写理论（很可能还需加入幂对象等结构）。有趣的是，从增广关系演算的公理化视角来看，模态程序等价（即程序度量）的关系演算系统早已得到定义 [111], [132]。这类演算系统与增广关系演算极为接近，唯一的区别是增加了一种作为缩放的分级余单子模态 [133], [134]。因此，研究定量重写的一个有前景的方向，是通过公理化方法，为增广关系演算加入适当的模态。

现在让我们转向寓意式操作语义。在这种情况下，概述研究议程更为困难，因为这一主题相当广泛。尽管如此，我们仍可确定几个总体研究目标，以探索关系方法（更具体地说，增广关系演算）作为操作推理基础形式体系的潜力。

1. 基于归约的语义。为了检验关系演算的稳健性，首先自然要回答的问题是：能否在这类演算系统中构建程序动力学理论？一种可能的解答路径是，证明基于归约的操作语义可以在对增广关系演算进行适当扩展后得到。这类扩展应当通过定义 Felleisen 风格的求值上下文 [135] 方法，以一种相当统一的方式构造。相应地，操作式动力学（例如按名调用动力学）的规范，不是借助适当的求值上下文以句法方式给出，而是通过上下文算子以关系方式给出；这些算子定义了求值上下文对关系的作用。请注意，这种方法与归约策略密切相关，我们可以将上下文算子视为对本工作中所用相容细化算子的精化（从理念上说，如果将任意上下文都视为求值上下文，就可以恢复后一个算子）。沿着这一思路，值得关注的便不是操作式动力学的显式定义，而是能够确保上下文算子具备理想语义性质的适当公理体系

[28]还请注意，这样的基似乎也非常适合机器形式化。[29]针对抽象系统的终止性关系分析已经有人开展，尤其涉及模块性方面的结果 [51], [125], [126]。

：例如，我们不必显式定义按名调用语义（这与具体语言有关），而可以证明任何宽松函子性的上下文算子都以某种方式运行，然后再进一步说明，对于适当的语言族，按名调用动力学会诱导出这样的算子。

2. 计算效应。操作行为往往带有效应，因此，我们希望扩展关系框架，使其能够涵盖计算效应的产生。在操作语义中引入这些效应的一种方式是采用单子求值语义 [104], [136]；另一种似乎更适合本文目的的方法，则是单子重写 [54]。后者以单子关系为基础，发展出一种针对带有（单子）计算效应的抽象归约系统的一般关系理论。粗略地说，单子关系可以视为建模计算效应的单子的 Kleisli allegory 中的态射。遗憾的是，单子重写目前只针对抽象系统发展，尚无将该理论扩展到基于语法的系统的成果。本文发展的理论表明，要同时处理基于语法的重写和带效应重写，关键在于从伴随范畴的层面结合语法单子与计算效应单子。

致谢

作者谨向匿名评审致谢，感谢他们提出的宝贵意见。特别感谢 Filippo Bonchi、Francesco Dagnino、Ugo Dal Lago 和 Simone Martini。

参考文献

[1] J. A. Goguen、J. W. Thatcher、E. G. Wagner 和 J. B. Wright，“初始代数语义与连续代数”，《J. ACM》，第 24 卷，第 1 期，第 68–95 页，1977 年。[2] A. Pitts，《名义集合：计算机科学中的名称与对称性》，剑桥理论计算机科学专著丛书。剑桥大学出版社，2013 年。[3] M. Gabbay 和 A. M. Pitts，“一种涉及绑定子的抽象语法新方法”，载于第 14 届 IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会，意大利特伦托，1999 年 7 月 2–5 日。IEEE计算机学会，1999 年，第 214–224 页。[4] A. M. Pitts，“在函数式编程中表示具有静态绑定子的语法的新方法”，载于第六届 ACM SIG-PLAN 函数式编程国际会议论文集（ICFP ’01），意大利佛罗伦萨，2001 年 9 月 3–5 日，B. C. Pierce 编。ACM，2001 年，第 1 页。[5] ——，“等变语法与语义”，载于《自动机、语言与编程：第 29 届国际研讨会 ICALP 2002，西班牙马拉加，2002 年 7 月 8–13 日，论文集》，计算机科学讲义丛书，P. Widmayer、F. T. Ruiz、R. M. Bueno、M. Hennessy、S. J. Eidenbenz 和 R. Conejo 编，第 2380 卷。施普林格，2002 年，第 32–36 页。[6] ——，“Alpha结构递归与归纳”，《J. ACM》，第 53 卷，第 3 期，第 459–506 页，2006 年。[7] M. P. Fiore、G. D. Plotkin 和 D. Turi，“抽象语法与变量绑定”，载于第 14 届 IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会，意大利特伦托，1999 年 7 月 2–5 日。IEEE计算机学会，1999 年，第 193–202 页。[8] N. Arkor 和 M. Fiore，“简单类型理论的代数模型：一种多项式方法”，载于《LICS ’20：第 35 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会》，德国萨尔布吕肯，2020 年 7 月 8–11 日，H. Hermanns、L. Zhang、N. Kobayashi 和 D. Miller 编。ACM，2020 年，第 88–101 页。

[9] M. Hamana，《自由 s-单子：带元变量的高阶语法》，载于《程序设计语言与系统：第二届亚洲研讨会，APLAS 2004》，中国台北，2004 年 11 月 4—6 日。论文集，丛书《计算机科学讲义》，W. Chin 编，第 3302 卷。施普林格，2004 年，第 348—363 页。[10] ——，《通过 Grothendieck 构造实现多态抽象语法》，载于《软件科学与计算结构基础——第 14 届国际会议，FOSSACS 2011》，作为软件理论与实践联合欧洲会议 ETAPS 2011 的一部分举行，德国萨尔布吕肯，2011 年 3 月 26 日—4 月 3 日。论文集，丛书《计算机科学讲义》，M. Hofmann 编，第 6604 卷。施普林格，2011 年，第 381—395 页。[11] M. Hofmann，《高阶抽象语法的语义分析》，载于《第 14 届 IEEE 计算机科学逻辑研讨会》，意大利特伦托，1999 年 7 月 2—5 日。IEEE计算机学会，1999 年，第 204—213 页。[12] F. Pfenning 和 C. Elliott，《高阶抽象语法》，载于《ACM SIGPLAN’88 程序设计语言设计与实现会议（PLDI）论文集》，美国佐治亚州亚特兰大，1988 年 6 月 22—24 日，R. L. Wexelblat 编。ACM，1988 年，第 199—208 页。[13] D. Miller，《变量绑定子的抽象语法：概述》，载于《计算逻辑——CL 2000：第一届国际会议》，英国伦敦，2000 年 7 月 24—28 日。论文集，丛书《计算机科学讲义》，J. W. Lloyd、V. Dahl、U. Furbach、M. Kerber、K. Lau、C. Palamidessi、L. M. Pereira、Y. Sagiv 和 P. J. Stuckey 编，第 1861 卷。施普林格，2000 年，第 239—253 页。[14] M. H. A. Newman，《论具有等价关系组合定义的理论》，《数学年刊》，第 43 卷，第 243 页，1942 年，第 223 页。[15] M. Bezem、J. Klop、E. Barendsen、R. de Vrijer 和 Terese，《项重写系统》，丛书《剑桥理论计算机科学专著》。剑桥大学出版社，2003 年。[16] F. Baader 和 T. Nipkow，《项重写及其他》。剑桥大学出版社，1998 年。[17] G. P. Huet，《合流归约：项重写系统的抽象性质及应用：项重写系统的抽象性质及应用》，《ACM 学报》，第 27 卷，第 4 期，第 797—821 页，1980 年。[18] J. W. Klop，《组合归约系统》，博士论文，乌得勒支大学，1980 年。[19] M. Fernández 和 M. Gabbay，《名义重写》，《信息与计算》，第 205 卷，第 6 期，第 917—965 页，2007 年。[20] N. Ghani 和 C. Lüth，《通过余等化子进行重写》，《北欧计算机学报》，第 10 卷，第 4 期，第 290—312 页，2003 年。[21] A. Burroni，《具有等式逻辑应用的高维字问题》，《理论计算机科学》，第 115 卷，第 1 期，第 43—62 页，1993 年。[22] A. Power，《重写系统的抽象表述》，载于《范畴论与计算机科学》，D. Pitt、D. Rydeheard、P. Dybjer、A. Pitts 和 A. Poigné 编，第 389 卷。施普林格，1989 年，第 300—312 页。[23] H. Reichel，《临界对完备化的二范畴方法》，载于《数据类型规范的近期趋势》，丛书《计算机科学讲义》，第 534 卷。施普林格出版社，1991 年，第 266—273 页。[24] D. E. Rydeheard 和 J. G. Stell，《等式推导基础：等式证明与合一算法的范畴论处理》，载于《范畴论与计算机科学》，丛书《计算机科学讲义》，第 283 卷。施普林格出版社，1987 年，第 114—139 页。[25] J. G. Stell，《用拟范畴建模项重写系统》，基尔大学，技术报告 TR94-02，1994 年。[26] R. A. G. Seely，《计算建模：一个二范畴框架》，载于《第二届逻辑与计算机科学年度研讨会论文集》，1987 年，第 65—71 页。[27] C. Lüth 和 N. Ghani，《单子与模块化项重写》，载于《计算机科学中的范畴论 CTCS’97》，丛书《计算机科学讲义》，第 1290 卷。意大利圣玛格丽塔：施普林格出版社，1997 年，第 69—86 页。[28] C. Lüth，《范畴项重写：单子与模块性》，博士论文，爱丁堡大学，1998 年。[29] P. J. Freyd 和 A. Scedrov，《范畴、代数》，丛书《诺斯-霍兰德数学文库》。诺斯-霍兰德，1990 年，第 39 卷。[30] P. Johnstone，《大象素描：托扑斯理论概要：第 2 卷》，丛书《牛津逻辑指南》。克拉伦登出版社，2002 年。[31] A. M. Pitts，《上格丰富范畴论在层理论中的应用》，《伦敦数学学会学报》，第 57 卷，第 433—480 页，1988 年。[32] M. Barr，《关系代数》，《数学讲义》，第 137 卷，第 55 页，1970 年，第 39 页。

[33] A. Carboni、G. M. Kelly 和 R. J. Wood，《基变换与几何态射的二范畴方法 I》，《Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques》，第 32 卷，第 1 期，第 47—95 页，1991 年。[34] S. Eilenberg 和 J. B. Wright，《一般代数中的自动机》，《信息与控制》，第 11 卷，第 4 期，第 452—470 页，1967 年。[35] R. S. Bird 和 O. de Moor，《程序代数》，丛书《普伦蒂斯·霍尔国际计算机科学丛书》。普伦蒂斯·霍尔，1997 年。[36] A. Barber，《对偶直觉线性逻辑》，计算机科学基础实验室，爱丁堡大学，技术报告 ECS-LFCS-96-347，1996 年。[37] P. Aczel，《一般 Church-Rosser 定理》，草稿，曼彻斯特，1978 年。[38] M. Takahashi，《λ 演算中的并行归约》，《信息与计算》，第 118 卷，第 1 期，第 120—127 页，1995 年。[39] A. Tarski，《关系演算》，《符号逻辑学报》，第 6 卷，第 3 期，第 73—89 页，1941 年。[40] G. Schmidt，《关系数学》，丛书《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，2011 年，第 132 卷。[41] R. D. Maddux，《关系代数》，载于《计算机科学中的关系方法》，丛书《计算科学进展》，C. Brink、W. Kahl 和 G. Schmidt 编。施普林格，1997 年，第 22—38 页。[42] S. Lassen，《关于函数与非确定性的关系推理》，博士论文，计算机科学系，奥胡斯大学，1998 年 5 月。[43] ——，《关于上下文的关系推理》，载于《语义学中的高阶操作技术》，A. D. Gordon 和 A. M. Pitts 编，1998 年，第 91—136 页。[44] D. Howe，《证明函数式编程语言中双模拟的同余性》，《信息与计算》，第 124 卷，第 2 期，第 103—112 页，1996 年。[45] A. Pitts，《高阶语言的 Howe 方法》，载于《双模拟与余归纳进阶主题》，丛书《剑桥理论计算机科学专著》，D. Sangiorgi 和 J. Rutten 编。剑桥大学出版社，2011 年，第 52 卷，第 197—232 页。[46] S. Abramsky，《惰性 λ 演算》，载于《函数式编程研究主题》，D. Turner 编。Addison Wesley，1990 年，第 65—117 页。[47] A. Corradini、F. Gadducci 和 U. Montanari，《关联项重写的两个范畴模型》，载于《RTA 1995 论文集》，丛书《计算机科学讲义》，J. Hsiang 编，第 914 卷。施普林格，1995 年，第 225—240 页。[48] J. Meseguer，《重写逻辑二十年》，《逻辑与代数编程期刊》，第 81 卷，第 7 期，第 721—781 页，2012 年，重写逻辑及其应用。[49] H. Bäumer，《关系代数在归约系统理论中的应用》，载于 CSN，第 92 卷，1992 年，第 5464 页。[50] G. Struth，《在克莱尼代数中计算 Church-Rosser 证明》，载于《RelMICS 2001 论文集》，丛书《计算机科学讲义》，H. C. M. de Swart 编，第 2561 卷。施普林格，2001 年，第 276—290 页。[51] H. Doornbos、R. C. Backhouse 和 J. van der Woude，《数学归纳法的计算方法》，《理论计算机科学》，第 179 卷，第 1—2 期，第 103—135 页，1997 年。[52] G. Struth，《抽象的抽象归约》，《逻辑与代数方法编程学报》，第 66 卷，第 2 期，第 239—270 页，2006 年。[53] L. Bachmair 和 N. Dershowitz，《交换、变换与终止性》，载于《1986 年自动演绎国际会议论文集》。施普林格，1986 年，第 5—20 页。[54] F. Gavazzo 和 C. Faggian，《单子重写系统的关系理论，第一部分》，载于《LICS 2021 论文集》。电气电子工程师学会，2021 年，第 1—14 页。[55] R. Belohlávek、T. Kuhr 和 V. Vychodil，《模糊关系的合流性与终止性》，《信息科学》，第 180 卷，第 17 期，第 3288—3303 页，2010 年。[56] ——，《模糊关系的合流性及相关性质》，载于《FUZZ-IEEE 2009，IEEE 国际模糊系统会议》，韩国济州岛，2009 年 8 月 20—24 日，论文集。电气电子工程师学会，2009 年，第 569—574 页。[57] T. Kuhr 和 V. Vychodil，《相似性与广义伪度量空间上的重写系统及其性质》，《模糊集合与系统》，第 275 卷，第 110—129 页，2015 年。[58] F. Gavazzo 和 C. Di Florio，《定量重写要素》，《ACM程序设计语言会议论文集》，第 7 卷，POPL，2023 年 1 月。 [在线]。可访问：https://doi.org/10 1145 3571256 。 / G. Gonthier、J. Lévy 和 [59] P. Melliès，《抽象标准化定理》，载于《LICS 1992 论文集》。IEEE计算机学会，1992 年，第 72—81 页。

[60] P. Melliès，《重写理论中的一个因子分解定理》，载于《CTCS 1997论文集》，丛书《计算机科学讲义》，E. Moggi和G. Rosolini编，第1290卷。施普林格，1997年，第49–68页。[61] ——，《重写理论中的稳定性定理》，载于《LICS 1998论文集》。IEEE计算机学会，1998年，第287–298页。[62] ——，《公理化重写理论II： $\lambda\sigma$-演算具有有限正规化锥》，《逻辑与计算杂志》，第10卷，2000年，第487–461页。[63] ——，《公理化重写理论VI：重新审视残余理论》，载于《RTA 2002论文集》，丛书《计算机科学讲义》，S. Tison编，第2378卷。施普林格，2002年，第24–50页。[64] ——，《公理化重写理论I：图解标准化定理》，载于《过程、项与循环：通往无穷之路——献给Jan Willem Klop的论文集，以纪念其60岁生日》，丛书《计算机科学讲义》，A. Middeldorp、V. van Oostrom、F. van Raamsdonk和R. C. de Vrijer编，第3838卷。施普林格，2005年，第554–638页。[65] A. D. Gordon，《作为函数式编程理论的双模拟等价》，载于《MFPS 1995论文集》，丛书《理论计算机科学电子札记》，S. D. Brookes、M. G. Main、A. Melton和M. W. Mislove编，第1卷。Elsevier，1995年，第232–252页。[66] R. C. Backhouse，《伽罗瓦连接与不动点演算》，载于《程序构造数学中的代数与余代数方法：国际暑期学校与研讨会，牛津，英国，2000年4月10日至14日，修订版讲义》，丛书《计算机科学讲义》，R. C. Backhouse、R. L. Crole和J. Gibbons编，第2297卷。施普林格，2000年，第89–148页。[67] D. Hoffman，《松弛扩张的“家庭手工业”》，《范畴与一般代数结构及其应用》，第3卷，第1期，第113–151页，2015年。[68] R. C. Backhouse和P. F. Hoogendijk，《数据类型的关系理论基础》，载于《形式化程序开发——IFIP TC2/WG 2.1现状报告》，1993年，第7–42页。[69] A. Kurz和J. Velebil，《关系提升：综述》，《逻辑、代数与程序方法杂志》，第85卷，第4期，第475–499页，2016年。[70] Y. Kawahara，《关于关系函子普遍性的注记》，《九州大学理学院院刊A辑：数学》，第27卷，第2期，第275–289页，1973年。[71] R. C. Backhouse、P. J. de Bruin、P. F. Hoogendijk、G. Malcolm、E. Voermans和J. van der Woude，《多项式关系子（扩展摘要）》，载于《（AMAST ’91论文集》，丛书《计算研讨会》。施普林格，1991年，第303–326页。[72] J. Lambek，《完备范畴的不动点定理》，《数学杂志》，第103卷，第151–161页，1968年。[73] P. Selinger，《幺半范畴的图形语言综述》，柏林、海德堡：施普林格柏林海德堡，2011年，第289–355页。[74] F. Bonchi、R. Piedeleu、P. Sobocinski和F. Zanasi，《字符串图的双代数语义》，载于《第30届国际并发理论会议，CONCUR 2019，2019年8月27日至30日，阿姆斯特丹，荷兰》，丛书LIPIcs，W. J. Fokkink和R. van Glabbeek编，第140卷。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2019年，第37:1–37:17页。[75] F. Bonchi、F. Gadducci、A. Kissinger、P. Sobocinski和F. Zanasi，《字符串图重写理论I：使用弗罗贝尼乌斯结构进行重写》，《ACM学报》，2022年。[76] ——，《字符串图重写理论II：使用对称幺半结构进行重写》，《计算机科学中的数学结构》，2022年。[77] ——，《字符串图重写理论III：有弗罗贝尼乌斯结构与无弗罗贝尼乌斯结构时的合流性》，《计算机科学中的数学结构》，2022年。[78] D. Pous、C. Doczkal、I. Stucke和Coq开发团队，《Coq中的关系代数与KAT》。 [在线]。可访问：http://perso.ens-lyon.fr/damien.pous/ra/#desc [79] S. MacLane，《工作数学家的范畴论》。施普林格出版社，1971年。[80] J. Adámek，《范畴语言中的自由代数与自动机实现》，《查理大学数学评论》，第015卷，第4期，第589–602页，1974年。[81] B. Jacobs，《余代数导论：走向状态与观察的数学》，丛书《剑桥理论计算机科学专著》。剑桥大学出版社，2016年，第59卷。[82] H. Barendregt，《λ演算：其语法与语义》，丛书《逻辑与数学基础研究》。诺斯-霍兰德，1984年。

[83] M. Miculan, 《融合演算的范畴模型》, 载于《第24届编程语义数学基础会议论文集, MFPS 2008, 美国宾夕法尼亚州费城, 2008年5月22日至25日》, 丛书《理论计算机科学电子札记》, A. Bauer和M. W. Mislove编, 第218卷。Elsevier, 2008年, 第275–293页。[84] E. Robinson, 《代数的变体: 单子性与等式理论的推广》, 《计算机形式化方面》, 第13卷, 第3–5期, 第308–326页, 2002年。[85] R. Matthes和T. Uustalu, 《带变量绑定的非良基语法中的替换》, 《理论计算机科学电子札记》, 第82卷, 第1期, 第191–205页, 2003年, cMCS'03, 即计算机科学中的余代数方法（ETAPS 2003卫星活动）。[86] M. P. Fiore, 《二阶与依赖排序抽象语法》, 载于《LICS 2008论文集》。IEEE计算机学会, 2008年, 第57–68页。[87] A. Hirschowitz和M. Maggesi, 《单子上的模与线性性》, 载于《WoLLIC 2007论文集》, 丛书《计算机科学讲义》, D. Leivant和R. J. G. B. de Queiroz编, 第4576卷。施普林格, 2007年, 第218–237页。[88] ——, 《单子上的模与初始语义》, 《信息与计算》, 第208卷, 第5期, 第545–564页, 2010年。[89] A. Hirschowitz、T. Hirschowitz和A. Lafont, 《单子上的模与操作语义（扩展版）》, 《逻辑、计算与计算机科学方法》, 第18卷, 第3期, 2022年。[90] A. Hirschowitz、T. Hirschowitz、A. Lafont和M. Maggesi, 《（无名）哑元的变量绑定与替换》, 载于《FOSSACS 2022论文集》, 丛书《计算机科学讲义》, P. Bouyer和L. Schröder编, 第13242卷。施普林格, 2022年, 第389–408页。[91] M. Menni, 《关于n-量词》, 《应用范畴结构》, 第11卷, 第5期, 第421–445页, 2003年。[92] O. de Moor, 《范畴、关系与动态规划》, 《计算机科学中的数学结构》, 第4卷, 第1期, 第33–69页, 1994年。[在线]。可访问: https://doi.org/10 1017 0960129500000360 。/S A.[93] Gordon, 《余归纳与函数式编程教程》, 载于《计算研讨会》。伦敦施普林格, 1994年9月, 第78–95页。[94] C. Hermida和B. Jacobs, 《纤维化框架中的结构归纳与余归纳》, 《信息与计算》, 第145卷, 第2期, 第107–152页, 1998年。[95] D. Hofmann、G. Seal和W. Tholen编, 《幺半拓扑: 序、度量与拓扑的范畴方法》, 丛书《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社, 2014年, 第153号。[96] B. Davey和H. Priestley, 《格与序导论》。剑桥大学出版社, 1990年。[97] M. Hamana, 《带变量绑定子的项重写系统的初始代数方法》, 《高阶符号计算》, 第19卷, 第2–3期, 第231–262页, 2006年。[98] B. Jacobs和J. J. M. M. Rutten, 《（余）代数与（余）归纳教程》, 《欧洲理论计算机科学协会通报》, 1997年。[99] P. Levy, 《无穷Howe方法》, 《理论计算机科学电子札记》, 第164卷, 第1期, 第85–104页, 2006年。[100] A. Church和J. B. Rosser, 《转换的一些性质》, 《AMS汇刊》, 第39卷, 第472–482页, 1936年。[101] T. Yamada, 《简单类型项重写系统的合流性与终止性》, 载于《RTA 2001论文集》, 丛书《计算机科学讲义》, A. Middeldorp编, 第2051卷。施普林格, 2001年, 第338–352页。[102] C. L. Ong, 《函数式环境中的非确定性》, 载于《LICS 1993论文集》。IEEE计算机学会, 1993年, 第275–286页。[103] U. Dal Lago、D. Sangiorgi和M. Alberti, 《高阶概率函数式程序的余归纳等价关系》, 载于《POPL 2014论文集》, 2014年, 第297–308页。[104] U. Dal Lago、F. Gavazzo和P. Levy, 《效应应用双模拟等价: 单子、关系子与Howe方法》, 载于《LICS 2017论文集》, 2017年, 第1–12页。[105] U. Da Lago和F. Gavazzo, 《具有连续概率选择的λ演算中的双模拟等价》, 2019年, 待发表。[106] F. Gavazzo, 《具有代数效应的高阶语言的余归纳等价关系与度量》, 博士论文, 博洛尼亚大学, 意大利, 2019年。[在线]。可访问: http://amsdottorato.unibo.it/9075/ [107] U. Dal Lago、F. Gavazzo和R. Tanaka, 《按名调用λ演算的效应应用相似性》, 载于《联合论文集》

第18届意大利理论计算机科学会议与第32届意大利计算逻辑会议, 与2017年电气电子工程师学会国际测量与网络研讨会（2017 IEEE M&N）同期举行, 2017年, 第87–98页。[108] R. Crubillé 和 U. Dal Lago, "关于概率应用双模拟与按值调用λ演算", 载于 ESOP 2014 论文集, 2014年, 第209–228页。[109] D. Biernacki 和 S. Lenglet, "按名调用与按值调用 $\lambda\mu$演算系统的应用双模拟等价", 《理论计算机科学电子札记》, 第308卷, 第49–64页, 2014年。[110] U. Dal Lago、F. Gavazzo 和 R. Tanaka, "按名调用λ演算的效应应用相似性", 《理论计算机科学》, 第813卷, 第234–247页, 2020年。[111] U. Dal Lago 和 F. Gavazzo, "效应与共效应的关系理论", 《ACM程序设计语言会议论文集》, 第6卷, 文章28, 2022年, 第POPL期, 第–页。[112] P. Borthelle、T. Hirschowitz 和 A. Lafont, "细胞 Howe 定理", 载于 LICS 2020 论文集, H. Hermanns、L. Zhang、N. Kobayashi 和 D. Miller 编。ACM, 2020年, 第273–286页。[113] T. Hirschowitz 和 A. Lafont, "高阶语言中应用双模拟等价同余的范畴框架", 《逻辑方法与计算机科学》, 第18卷, 第3期, 2022年。[114] H. Urbat、S. Tsampas、S. Goncharov、S. Milius 和 L. Schröder, "高阶数学操作语义中的弱相似性", CoRR, 卷号 abs/2302.08200, 2023年。[在线]。可访问: https://doi.org/10 48550 arXiv.2302 08200 。/ [115] A. Joyal, "解析函子与结构种类", 《法国科学院院刊: 数学辑》, 第298卷, 第15期, 第393–396页, 1984年。[116] C. Mcbride, "正则类型的导数即其单孔上下文类型（扩展摘要）", 2009年4月。[117] M. G. Abbott、T. Altenkirch、N. Ghani 和 C. McBride, "容器的导数", 载于 TLCA 2003 论文集, 丛书: 计算机科学讲义, M. Hofmann 编, 第2701卷。施普林格, 2003年, 第16–30页。[118] M. G. Abbott、T. Altenkirch、C. McBride 和 N. Ghani, "关于数据: 对数据结构求导", 《基础信息学》, 第65卷, 第1–2期, 第1–28页, 2005年。[119] M. M. Clementino、D. Hofmann 和 G. Janelidze, "经典代数的单子很少是弱笛卡尔的", 《同伦与相关结构杂志》, 第9卷, 第175–197页, 2014年。[120] C. Faggian, "概率重写: 规范化、终止性与唯一正规形", 载于 FSCD 2019 论文集, 2019年, 第19:1–19:25页。[121] S. B. Lassen, "无类型λ演算中的双模拟: Böhm 树与基于上下文的双模拟", 《理论计算机科学电子札记》, 第20卷, 第346–374页, 1999年。[122] ——, "急切正规形双模拟", 载于 LICS 2005 论文集, 2005年, 第345–354页。[123] U. Dal Lago 和 F. Gavazzo, "效应正规形双模拟", 载于 ESOP 2019 论文集, 2019年, 第263–292页。[124] R. Hasegawa, "解析函子的两个应用", 《理论计算机科学》, 第272卷, 第1–2期, 第113–175页, 2002年。[125] H. Doornbos 和 B. von Karger, "关于良基关系的并", 《逻辑学杂志: IGPL》, 第6卷, 第2期, 第195–201页, 1998年。[126] H. Doornbos 和 R. C. Backhouse, "程序终止的代数", 载于《程序构造数学中的代数与余代数方法: 国际暑期学校与研讨会, 英国牛津, 2000年4月10日至14日, 修订版讲稿》, 丛书: 计算机科学讲义, R. C. Backhouse、R. L. Crole 和 J. Gibbons 编, 第2297卷。施普林格, 2000年, 第203–236页。[127] H. Curry 和 R. Feys, 《组合逻辑》, 丛书: 组合逻辑。诺斯-霍兰德出版公司, 1958年, 第1卷。[128] B. Accattoli、C. Faggian 和 G. Guerrieri, "分解因式分解", 载于 CSL 2021 论文集, 丛书: LIPIcs, C. Baier 和 J. Goubault-Larrecq 编, 第183卷。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心, 2021年, 第6:1–6:25页。[129] E. Nelson, "迭代代数", 《理论计算机科学》, 第25卷, 第1期, 第67–94页, 1983年。[130] J. Endrullis、H. H. Hansen、D. Hendriks、A. Polonsky 和 A. Silva, "无限重写与无限等式逻辑的余归纳基础", 《逻辑方法与计算机科学》, 第14卷, 第1期, 2018年。[131] C. Schubert, "松弛代数: 一种风景式方法", 博士论文, Universit¨t Bremen, 2006年。[132] F. Gavazzo, "高阶效应程序的定量行为推理: 应用距离", 载于第33届

ACM/IEEE计算机科学逻辑年会，LICS 2018，英国牛津，2018年7月9日至12日，2018年，第452–461页。[133] D. Orchard、V.-B. Liepelt 和 H. Eades III，“利用分级模态类型进行定量程序推理”，《ACM程序设计语言会议论文集》，第3卷，ICFP期，第110:1–110:30页，2019年。[134] F. Dagnino 和 F. Pasquali，“定量等式的逻辑基础”，第16:1–16:13页，2022年。[135] A. K. Wright 和 M. Felleisen，“类型可靠性的句法方法”，《信息与计算》，第115卷，第1期，第38–94页，1994年。[136] G. D. Plotkin 和 J. Power，“代数效应的适切性”，载于 FOSSACS 2001 论文集，2001年，第1–24页。