arXiv:2305.01774v2 [math.CO] 4 May 2023

广义阿兹特克三角形的多米诺铺砌

SYLVIE CORTEEL[†]、FREDERICK HUANG[†]和 CHRISTIAN KRATTENTHAL R

ABSTRACT. Di Francesco [《电子组合学杂志》28.4（2021年），第4号论文。38] Di Francesco 将阿兹特克三角形引入为一种组合对象，其多米诺骨牌铺砌数量与二十顶点模型中某些构型的数量相同，这些构型是他文章的主要研究对象。我们推广了 Di Francesco 对阿兹特克三角形的构造。虽然我们尚不清楚这是否仍与二十顶点模型中的构型存在对应关系，但我们证明了广义阿兹特克三角形的多米诺铺砌数量具有闭式乘积公式。作为特例，我们证明了 Di Francesco 关于其阿兹特克三角形的多米诺铺砌数量的猜想公式，从而也证明了相应二十顶点模型构型数量的猜想公式。

1. INTRODUCTION

最近，Di Francesco 和 Guitter [DFG20] 揭示了二十顶点（20V）模型中有趣的组合学性质；此前，该模型主要受到物理学家的关注（参见 [Bax89] 或 [Kel74]）。20V 模型研究三角晶格某个有限区域内边的所有定向方式，如图 1 所示，并要求每个顶点的入边数等于出边数。由于三角晶格中的每个顶点都与六条边相邻，其中三条必须指向顶点，另外三条必须从顶点指出，因此每个顶点恰有二十种可能的边配置——这也就是二十顶点模型名称的由来。20V 模型类似于六顶点（6V）模型（参见 [Bax89, Ch. 8] 或 [CP06]），后者采用方格晶格（每个顶点有六种可能的边配置）。著名的交错符号矩阵（ASM）定理证明中便用到了这一 6V 模型 [Kup96], ，即 $n \times n$ ASM 的数量由 $\prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!}$ 给出。组合学家长期以来一直对 ASM 感兴趣，而关于其枚举的这一结果的第一个证明见于 [Zei96]。

在 [DFG20], Di Francesco 和 Guitter 的研究中，他们证明了，在方形区域上（满足特定边界条件）的 20V 模型构型数，可以通过对类似区域上的 6V 模型构型进行（加权）枚举来计算（事实上，这些构型来自 ASM 定理）。之后，Di Francesco 考察了另一种区域上的 20V 模型，这种区域称为阿兹特克三角形，图 2 给出了一个示例；Di Francesco

日期：2023年5月5日。2020年数学主题分类：主要分类 05A15；次要分类 05A19、82B23。关键词和短语：阿兹特克三角形的多米诺铺砌、二十顶点模型、六顶点模型、半标准杨表、辛杨表、德兰诺伊数、不相交路径。

[†]SC 和 FH 部分获得了美国国家科学基金会 DMS-2054482 项目资助。SC 部分获得了法国国家研究署 ANR-19-CE48-0011 项目资助。

[DF21] 还猜想，这些区域上的 20V 模型可由以下对象枚举：

$$2^{n(n-1)/2}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{(4i+2)!}{(n+2i+1)!}, \tag{1.1}$$

一个与 ASM 定理中的公式惊人相似的公式。Koutschan 最近利用 Zeilberger 的全纯 Ansatz [Zei07]证明了这个公式，该方法借助计算机可以（或多或少）自动证明行列式求值结果。

在同一篇论文中 [DF21], Di Francesco 证明，在这个扩展区域上的 20V 模型构型数量，与某个特定区域的多米诺骨牌铺砌数量相同；图 2 展示了其中一个例子。不过，这两个等势集合之间并不存在组合双射。另一方面，众所周知，多米诺铺砌与不相交路径族之间存在双射。Di Francesco 运用 Lindstr¨om–Gessel–Viennot 引理，证明这类铺砌的数量可以用行列式表示。

定理 1.1（[DF21，定理 3.4 和 8.2]）。大小为 n 的阿兹特克三角形的多米诺铺砌数为

$$\begin{aligned} Z_n &= \det_{0\le i,j\le n-1}\left([u^iv^j]\frac{1+u}{1-v-4uv-u^2v+u^2v^2}\right)\\ &= \det_{0\le i,j\le n-1}\left(2^i\binom{i+2j-1}{2j+1}-\binom{i-1}{2j+1}\right). \end{aligned}$$

事实上，在证明（1.1）时，Koutschan 计算了后一个行列式。

本文将这些多米诺铺砌解释为满足特定条件的分拆序列 $2n$，其中最终分拆为 $(n, n-1, \dots, 1)$，类似于 [BCC17] 中所见的情形。更一般地，我们构造了一些区域，称为广义阿兹特克三角形，用于表示最终分拆为任意分拆 μ、且序列中分拆的数量为 $\ell+1$（当 $\ell\ge 0$ 时）的序列。基于此，我们给出多种方法来枚举这些区域的多米诺铺砌，并证明这些多米诺铺砌与一类既超又辛的杨表之间存在双射。此外，当最终分拆为 $\mu=(k, k-1, \dots, 1, 0^{n-k})$ 时，我们给出 Di Francesco 公式的一个推广。

定理 1.2. 设 ℓ 和 k 为正整数，且 $\mu=(k, k-1, \dots, 1, 0^{n-k})$，其中 $n=\lfloor \ell/2\rfloor$。那么，最终分拆为 μ、参数为 ℓ 的广义阿兹特克三角形的多米诺铺砌数等于

$$\prod_{j\ge 0}\left(\prod_{i=-2k+4j+1}^{-k+2j}(\ell+i)\prod_{i=k-2j}^{2k-4j-2}(\ell+i)\right)\Bigg/\prod_{j=1}^{k-1}(2j+1)^{k-j}. \tag{1.2}$$

精确表述见定理 4.1。Di Francesco 的猜想对应于 $\mu=(n, n-1, \dots, 2, 1)$ 且 $\ell=2n$ 的情形。因此，我们得到以下推论。

推论 1.3. 在大小为 n 的阿兹特克三角形上的 20V 构型数量为

$$2^{n(n-1)/2}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{(4i+2)!}{(n+2i+1)!}.$$

实际上还有另一族，即对于 $\mu = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$ 和 $\ell = 2n$，其数量由同一公式给出。

定理 1.4. 最终分拆为$\mu = (n, n-1, \ldots, 1)$、参数为 $\ell = 2n$ 的广义阿兹特克三角形的多米诺骨牌铺砌数量，与最终分拆为 $\mu = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$、参数为 $\ell = 2n+1$ 的广义阿兹特克三角形的多米诺骨牌铺砌数量相同。

等价的表述见定理4.5。我们将寻找这两类多米诺铺砌之间的双射留作一个公开问题。

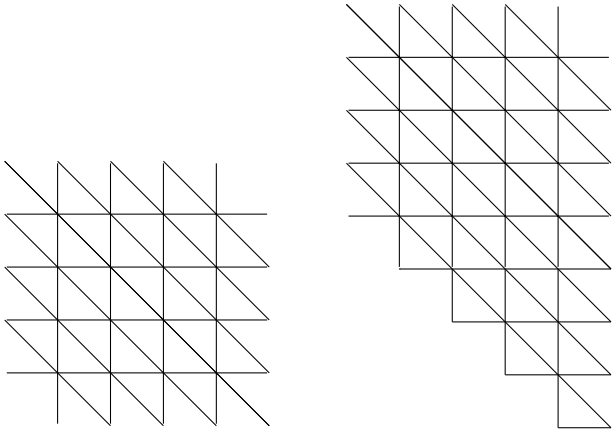


FIGURE 1. 左侧展示了 [DFG20]中研究的 20V 模型区域，其中对各种边界条件下的构型进行计数。右侧是另一个感兴趣区域的示例，该区域在 [DF21]中进行了研究。

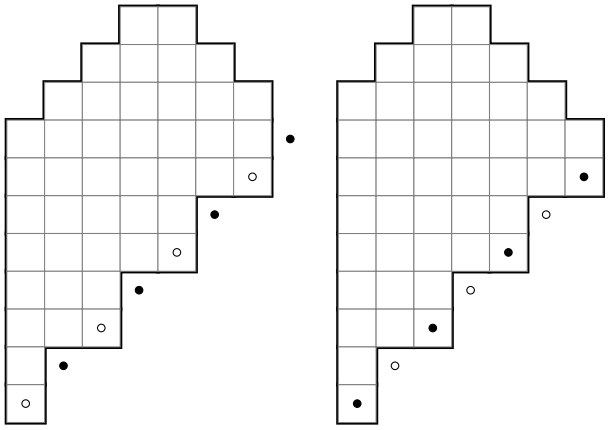


FIGURE 2.左侧是 Di Francesco 在 [DF21] 中研究的区域示例，其多米诺骨牌铺砌数量与图 1 右侧区域上的 20V 构型数量相同。右侧是一个区域，其多米诺骨牌铺砌数量与左侧区域的多米诺骨牌铺砌数量相同；对于 $n = 4$，这与定理 1.4 一致。

本文结构安排如下。第2节中，我们定义所有组合模型和相关概念。第3节中，我们定义与铺砌一一对应的分拆序列、杨表和路径系统。随后，在第4节中，我们陈述主要的（枚举）结果，即广义阿兹特克三角形的多米诺铺砌数量的乘积公式；见定理4.1（与定理 1.2 等价）和定理4.5（与定理 1.4 等价）。我们在同一节中证明定理4.5（以定理4.1成立为条件），而另一个定理的证明则需要多得多的工作。为准备这一证明（我们将在第5节给出），我们将乘积公式改写成后一节所需的形式，并回顾第3节中关于多米诺铺砌的行列式公式。结果发现，要证明定理4.1，我们需要计算两个由 Delannoy 数构成的行列式。不过，我们在定理 4.2 中证明，这两个行列式之间存在一个简单关系，因此只需计算其中一个。我们在第5节的定理 5.1 中完成了这一计算。最后，本文以结论一节收尾，概述在多米诺铺砌与20V模型构型交汇之处有待探索的开放问题和未竟课题。

2. Preliminaries

2.1. 分拆序列。

定义 2.1. 分拆 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ 是一个由非负整数构成的序列，满足 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$。我们称 $\mu_1, \ldots, \mu_n$ 为分拆 μ的部分，称n 为分拆 μ的长度。长度为 n 的任意分拆，也可以视为长度为 m 的分拆，其中任意 $m \geq n$ （甚至是 m 无穷）的长度都可通过在分拆末尾补上 0 来得到。

我们还将 μ 的共轭分拆定义为分拆 μ'，其长度为 μ_1，且满足 $\mu'_i = \#\{\mu_j \mid \mu_j \geq i\}$。

杨图是由盒子组成的图形，这些盒子排列成行，各行左对齐，且从下到上长度非递减。我们可以将分拆 μ 可视化为一个杨图，其各行长度等于 μ的各部分，如图 3 所示。

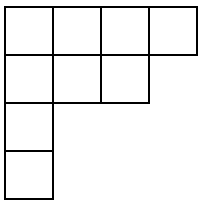


Figure 3. 对应于分拆 $\mu = (4, 3, 1, 1)$ 的杨图。

定义 2.2. 对于长度相等的分拆 λ, μ，若对所有 i 都有 $\lambda_i \geq \mu_i$，则可将斜图 λ/μ 定义为分拆 λ 的杨图中不属于分拆 μ 的杨图的那些方格。若斜图 λ/μ 的杨图在每一列中至多包含一个方格，则称其为水平条带。类似地，若 λ'/μ' 是水平条带，或等价地，其杨图在每一行中至多包含一个方格，则称其为垂直条带。

在图4中，我们展示了几个斜图，其中一个是水平条带，另一个是垂直条带。

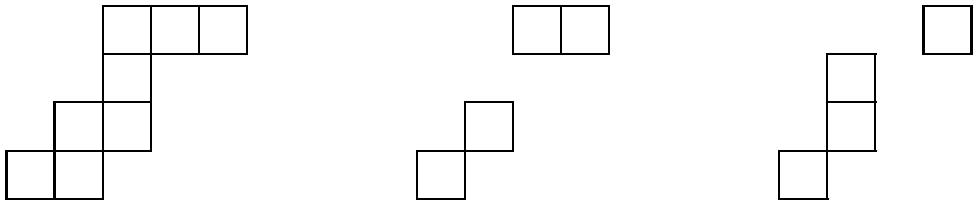


FIGURE 4. 三个斜图 λ/μ 其中 $\lambda = (5, 3, 3, 2)$。左侧为 $\mu = (2, 2, 1, 0)$。中间为 $\mu = (3, 3, 2, 1)$，由此得到一条水平条带。右侧为 $\mu = (4, 2, 2, 1)$，由此得到一条垂直条带。

2.2. 德拉诺伊路径。

定义 2.3. 对于任意 $i, j \in \mathbb{Z}$，Delannoy 数 $D(i, j)$ 是从 $(0, 0)$ 到 (i, j)，且只使用北向步、东北向步或东向步的路径数量。

Remark 2.4. Delannoy 数 $D(i, j)$ 也可以递归地定义为

(1) $D(i, j) = 0$ if $i < 0$ or $j < 0$;
(2) $D(0, 0) = 1$;
(3) $D(i, j) = D(i - 1, j) + D(i, j - 1) + D(i - 1, j - 1)$.

我们使用以下关于 Delannoy 数的标准公式（参见 [Com74，第 I 章例 21]，其中介绍了 Delannoy 数；这些等式很容易通过标准的生成函数演算推导得出）：

$$\begin{aligned} D(i,j) &= [u^n v^m] \frac{1}{1-u-v-uv} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{n-\ell} \binom{n}{\ell} \binom{m+\ell}{\ell} 2^\ell \qquad (2.1) \\ &= \sum_{\ell=0}^{i} \binom{i}{\ell} \binom{j}{\ell} 2^\ell \qquad (2.2) \\ &= \sum_{\ell=0}^{i} \binom{i+j-\ell}{i-\ell, j-\ell, \ell}. \qquad (2.3) \end{aligned}$$

上文及下文中，我们使用

$$\binom{i}{\ell} := \begin{cases} \dfrac{i(i-1)\cdots(i-\ell+1)}{\ell!}, & \text{if } \ell \geq 0, \\ 0, & \text{if } \ell < 0, \end{cases} \qquad (2.4)$$

作为二项式系数的定义。由此可见，式 (2.2) 告诉我们，$D(i, j)$ 是关于 j 的 i 次多项式。

德兰诺伊数将在某些铺砌的枚举中出现。对于其他铺砌，我们将需要一类略有不同的数。

定义 2.5。对于 i、$j \in \mathbb{Z}$，我们定义数 $H(i, j)$ 如下：

(1) $H(i, j) = 0$ 如果 $i < 0$ 或 $j < 0$，但 $(i, j) = (0, -1)$ 除外：
(2) $H(0, -1) = 1$;

(3) $H(i,j) = 2D(i-1,j) + H(i,j-1) = D(i,j) + D(i-1,j)$.

我们也可以将 $H(i,j)$ 解释为路径数—— $H(i,j)$ 是从 $(0,0)$ 到 $(i,j+1)$、使用北向步、东北向步或东向步且不经过 $(i-1,j+1)$ 的路径数，如图 5 所示。我们称这些为 H–德拉诺伊路径。关于 D 和 H，已有许多恒等式。

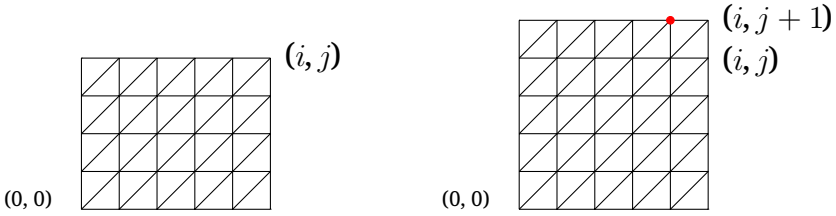


FIGURE 5. 左侧， $D(i,j)$所计数的路径是从 $(0,0)$ 到 (i,j)，且只由北向步、东北向步和东向步组成的路径。右侧， $H(i,j)$所计数的路径是从 $(0,0)$ 到 $(i,j+1)$，由北向步、东北向步和东向步组成，且不经过红色点 $(i-1,j+1)$ 的路径。

命题 2.6. 对任意非负整数 i,j ，有

$$D(i,j) = D(i-1,j) + H(i,j-1) \tag{2.5}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{i} H(\ell, j-1) \tag{2.6}$$

$$= \sum_{\ell} \binom{i}{\ell}\binom{j}{\ell} 2^{\ell} \tag{2.7}$$

$$H(i,j) = H(i-1,j) + H(i,j-1) + H(i-1,j-1) \tag{2.8}$$

$$= 2\sum_{\ell=0}^{j-1} D(\ell, i) \tag{2.9}$$

$$= \sum_{\ell} \binom{i-1}{\ell-1}\binom{j+1}{\ell} 2^{\ell} \quad \textit{for } i \geq 1. \tag{2.10}$$

证明。考虑定义 2.3 中的几何构造以及上面的观察，可知等式 (2.5) 显然成立。随后由关于 i 的归纳法可得等式 (2.6)。为证明等式 (2.7)，我们先注意到， $\binom{i}{m}\binom{j}{m}$ 是从 $(0,0)$ 到 (i,j)、仅由东向步和北向步组成且恰有 m 个转弯的路径数，其中每个转弯都由一个东向步接一个北向步构成。然后，为了计数德拉诺伊路径，我们得到一个因子 2^m ，因为在每个这样的转弯处，我们都可以改走一个东北向步。

现在，方程 (2.5) 给出 $H(i,j) = D(i,j+1) - D(i-1,j+1)$；结合注记 2.4 中的第 3 项，我们得到方程 (2.8)。方程 (2.9) 可由对 i 的归纳法并应用定义 2.5 中的第 3 项得到。最后，方程 (2.10) 的证明沿用方程 (2.7) 的论证，注意这里考虑的是从 $(0,0)$ 到 $(i,j+1)$ 的路径，其中最东侧的列必须包含前面提到的某个向东再向北转弯。□

2.3. 杨表。给定一个分拆 $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$，形状为 μ 的杨表是对 μ 的图形中的单元格进行填充，并满足某些条件。

我们首先回顾经典杨表定义。

定义 2.7（[Kra98、Kin76、Ham97]）。形状为μ 的半标准辛杨表，是对与 μ 对应的杨图方格的一种填充，填入 $1<\overline{1}<2<\overline{2}<\cdots$ 中的元素，并满足：

（1）行弱递增，列严格递增；（2） i和 $\bar{\imath}$ 不得出现在第 i行以下。

第一个条件称为半标准条件，第二个条件称为辛条件。注意，行弱递增且列严格递增这一半标准条件也可以等价地表述为：

（i）行和列均弱递增。（ii）对于所有 i，元素 i 或$\bar{\imath}$ 构成水平条带。

定义 2.8（[Kra96]）。形状为 μ 的超半标准杨表，是对与 μ 对应的杨图中的方格进行填充，填入条目 $1<\overline{1}<2<\overline{2}<\cdots$，满足：

（1）行和列均弱递增；（2）对于所有 i，条目 i 构成水平条带（即每列至多有一个 i ）；（3）对于所有 i，条目 $\bar{\imath}$ 构成垂直条带（即每行至多有一个 $\bar{\imath}$ ）。

2.4. 多米诺骨牌铺砌。

定义 2.9。设 D 是欧几里得平面中的一个区域，它是若干单位正方形的并集，且这些正方形的顶点位于整数格 $\mathbb{Z}^2$上。多米诺骨牌是两个共边的此类单位正方形的并集。于是，我们将 D 的多米诺骨牌铺砌定义为由 $\mathcal{D}$ 个两两不相交（即互不重叠）的多米诺骨牌组成的集合，使得$\bigcup_{d\in\mathcal{D}}=D$。

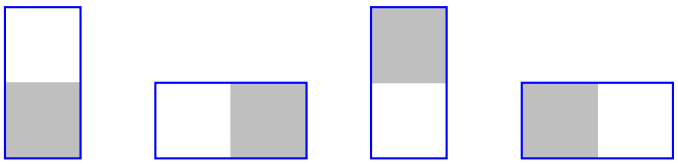


FIGURE 6. 四种多米诺骨牌

定义 2.10. 对于定义 2.9 中所述的由单位正方形构成的区域，我们从西北向东南为其西南至东北对角线编号，从对角线 0 开始。我们称这些对角线始于其最靠西南的方格。我们还可以将区域中的方格涂成棋盘式，使偶数对角线始终由浅色方格组成。因此，我们的区域可由图6所示的四种多米诺骨牌铺砌。我们将多米诺骨牌的北侧或西侧方格称为其起始方格。起始于偶数对角线的多米诺骨牌称为偶数多米诺骨牌，起始于奇数对角线的多米诺骨牌称为奇数多米诺骨牌，如图6所示。

对于连通区域的多米诺骨牌铺砌，我们按如下方式得到一个分拆序列：偶数多米诺骨牌中填入空位，奇数多米诺骨牌中填入粒子（见图6）。最后一条对角线可能包含不属于我们区域的方格，此时我们将这些方格视为某块多米诺骨牌的起始方格，例如图7右侧所示。于是，第 i 条对角线按以下规则确定第 i 个分拆 $\lambda^{(i)}$：该分拆的第 j 部分 $\lambda_j^{(i)}$，恰好等于位于倒数第 j 个粒子西南方的空位数。

注 2.11。这里的每个分拆都是通过其玛雅图得到的。杨图（因而也包括分拆）由构成其东南边界的边确定。特别地，这些边将依次是向北和向东的步，始于杨图底行的西南端点。这样，对于区域 D 的多米诺骨牌铺砌中的每条对角线，我们都可以通过将空穴视为东向步、将粒子视为北向步，得到一个分拆。

此外，在每条对角线上，我们可以将区域外西南方的无限方格序列视为含有粒子，并将区域外东北方的无限方格序列视为空位。参见图8。

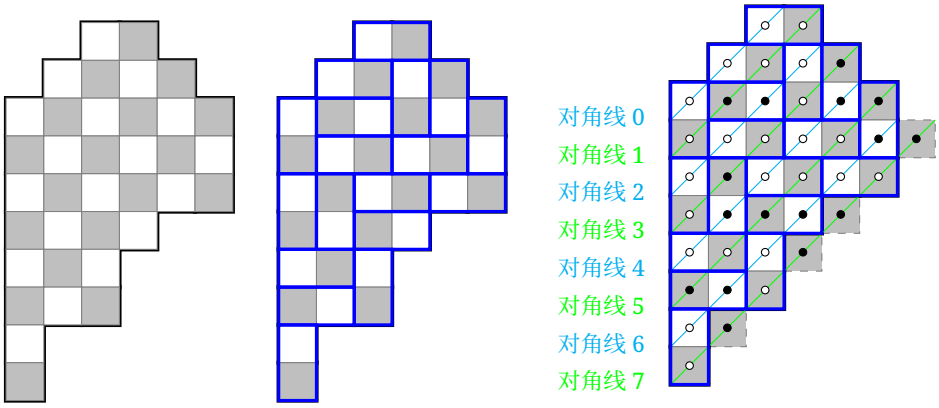


FIGURE 7. 一个特定的区域、该区域上的多米诺骨牌铺砌，以及用空穴与粒子填充的该多米诺骨牌铺砌。相应的分拆序列为 $\lambda^{(0)} =$ (0,0,0,0)、$\lambda^{(1)} =$ (1,0,0,0)、$\lambda^{(2)} =$ (2,0,0,0)、$\lambda^{(3)} = \lambda^{(4)} = \lambda^{(5)} =$ (3,1,0,0)、$\lambda^{(6)} =$ (3,2,1,0)、$\lambda^{(7)} =$(3, 2,2,1)。

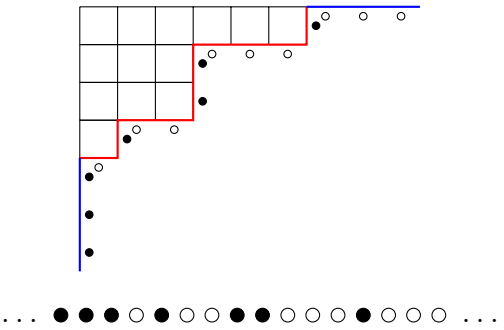


FIGURE 8. 分拆 (6, 3, 3, 1) 的杨图及其玛雅图。其形状完全由红色的向北和向东的步确定。我们也可以将其视为一个无限的向北和向东的步序列：在前面加上蓝色的北向步，在后面加上蓝色的东向步。

3. Combinatorial objects related to domino tilings of generalized Aztec triangles

在本小节中，所有对象均由一个分拆 $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$（分为 n 个非负部分）以及一个参数 ℓ 编号，其中 $\ell=2n$ 或 $\ell=2n+1$。我们分别将它们称为情形1和情形2。我们将先考察分拆序列，再考察杨表，最后考察不相交路径。在下一小节中，我们将给出这些对象与广义阿兹特克三角形的多米诺铺砌之间的一个双射。

3.1. 分拆序列。现在我们定义一些分拆序列，其条件与 [BCC17、BK18] 中的条件类似。这里我们增加了一项额外条件，用于限制每个分拆的部分数。

定义 3.1。给定一个分拆 $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ 和参数 $\ell=2n$ 或 $\ell=2n+1$，考虑满足以下条件的分拆序列 $\lambda^{(0)},\dots,\lambda^{(\ell-1)}$：
(1) $\lambda^{(0)}$ 为空；(2) $\lambda^{(\ell-1)}=\mu$；(3) $\lambda^{(2i+1)}/\lambda^{(2i)}$ 是水平条带；(4) $\lambda^{(2i)}/\lambda^{(2i-1)}$ 是垂直条带；(5) $\lambda^{(i)}$ 至多有$\lceil\frac{i}{2}\rceil$ 个非零部分。

我们将序列 $\lambda^{(0)}$、...、$\lambda^{(2n-1)}$ 称为情形1，将序列 $\lambda^{(0)}$、...、$\lambda^{(2n)}$ 称为情形2。

3.2. 超辛杨表。这里我们确定一族与情形 1 和情形 2 的序列成双射的组合对象。为此，我们结合定义2.7和2.8中超表与辛表的条件。

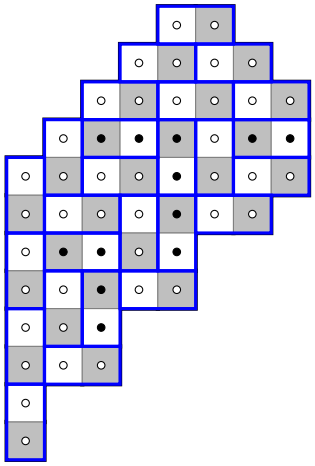
定义3.2. 形状为 μ 的超辛半标准表，是在对应于 μ 的杨图的方格中填入 $1<\overline{1}<2<\overline{2}<\cdots$，使其满足：
(1) 行和列均弱递增；(2) 对所有 i，条目 i 构成水平条带；(3) 对所有 i，条目 $\overline{\imath}$ 构成垂直条带；(4) i和 $\overline{\imath}$ 不出现在第 i 行以下。

命题 3.3. 对任意 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$，情形 1 序列与形状为 μ、条目为 $1 < \overline{1} < 2 < \overline{2} < \cdots < n$的超辛半标准杨表构成双射。

证明。通过在对应于$\lambda_{2i-1}/\lambda_{2i-2}$的单元格中填入 i，并在对应于 $\lambda_{2i}/\lambda_{2i-1}$的单元格中填入 $\bar{i}$，即可建立该双射。任意 λ_i 中非零部分的数量限制确保满足我们的辛条件。反过来，给定这样一个杨表，我们可以取杨表中条目不大于 i的单元格来恢复 λ_{2i}，并取杨表中条目不大于 $i+1$的单元格来恢复 λ_{2i+1}。□

例如，$\mu = (5, 3, 2, 1)$ 和 $\ell = 7$ 如图 9 所示。分拆序列为 $\lambda^{(0)} = \emptyset$, $\lambda^{(1)} = (2)$ $\lambda^{(2)} = (3)$ $\lambda^{(3)} = (3, 1)$ $\lambda^{(4)} = (3, 2)$ $\lambda^{(5)} = (4, 3, 2)$ $\lambda^{(6)} = (5, 3, 2)$，以及 $\lambda^{(7)} = (5, 3, 2, 1)$。

注 3.4. 我们的超辛半标准杨表的行是过分割 [CL04]；若不考虑辛条件，我们的杨表便是超半标准杨表 [Kra96]。



1	1	$\overline{1}$	3	$\overline{3}$
2	$\overline{2}$	3		
3	3			
4				

FIGURE 9. 区域上的一个多米诺骨牌铺砌，如定理 3.8 所述，其中 $\mu = (5,3,2,1)$ 且 $\ell = 7$，以及对应的超辛半标准杨表。

类似地，情形 2 序列与填入条目 $1 < \overline{1} < 2 < \overline{2} < \cdots < n < \overline{n}$ 并满足相同的条件。

命题 3.5. 对任意 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$，情形 2 序列与形状为 μ 且条目取自 $1 < \overline{1} < 2 < \overline{2} < \cdots < n < \overline{n}$ 的超辛半标准杨表构成双射。

我们称这些为类型 1 和 2、形状为 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ 的超辛半标准杨表。

3.3. 不相交路径。现在我们提出一种双射，将形状为 μ 的类型 1 和类型 2 超辛半标准杨表与不相交的德拉诺伊路径组对应起来。

命题 3.6. 存在一种双射，将形状为 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ 的类型 1 超辛半标准杨表与一组不相交的德拉诺伊路径对应起来；这些路径分别始于点 $u_j = (-j, j)$，终于点 $v_j = (\mu_j - j, n)$，其中$j = 1, \ldots, n$。

证明。给定一个形状为 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ 的超辛半标准表，杨表第 j 行中的未加横线项给出从 u_j 到 v_j 的路径中东向步的位置，而加横线项则给出向东北步的位置。具体来说，如果第 j 行恰好包含 i 共 m 次，那么从 u_j 到 v_j 的路径在直线 $y = i$ 上恰好包含 m 个东向步。如果第 j 行包含加横线项 $\overline{i}$，那么该路径有一个向东北步，其起点是直线 $y = i$ 上的一个格点。由此，插入北向步以完成从 $\{u_i\}$ 到 $\{v_i\}$ 的路径的方式是唯一的。

超辛半标准表的条件保证了这个映射定义良好——它确实会将每个杨表映射为一组不相交路径。因此，这个映射显然是单射且满射。□

接续图 9 中的例子，我们在图 10 中展示了到不相交路径的双射。对于 2 型超辛标准杨表，我们也有类似的命题。

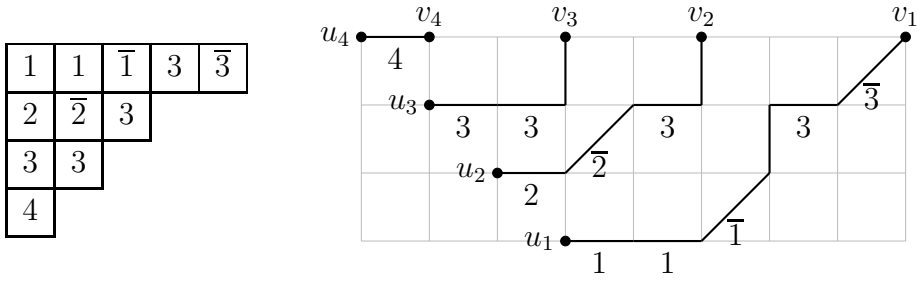


FIGURE 10. 从超辛半标准杨表到不相交路径的双射。

命题 3.7. 形状为 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ 的 2 型超辛半标准表与从点 $u_j = (-j, j)$ 出发并在点 $v_j = (\mu_j - j, n + 1)$ 结束的 $j = 1, \ldots, n$ 不相交 H-德拉诺路径之间存在一个双射。

证明。证明过程与上文命题 3.6 的证明完全相同，只是现在我们看到路径终止于直线 $y = n + 1$ 上。由于我们的 2 型超辛半标准杨表中的元素最大可到 $\overline{n}$ （而非 $n+1$），路径不能以东向步结束，因此确实是 H-德拉诺伊路径。□

3.4. 广义阿兹特克三角形的骨牌铺砌。本小节旨在构造区域 D，使得 D 的多米诺骨牌铺砌与定义 3.1 中定义的情形 1 和情形 2 的序列之间存在双射。这类双射此前已被多次研究，见 [BCC17、BK18], ；我们将采用许多相同的思路。

回顾一下，对于任意分拆 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$，$\ell = 2n$，情形 1 序列为$\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell-1)}$，满足：

(1) $\lambda^{(0)}$ 为空；(2) $\lambda^{(2n-1)} = \mu$；(3) $\lambda^{(2i+1)}/\lambda^{(2i)}$ 是水平条带；(4) $\lambda^{(2i)}/\lambda^{(2i-1)}$ 是垂直条带；(5) $\lambda^{(i)}$ 至多有 $\lceil \frac{i}{2} \rceil$ 个非零部分。

定理 3.8。其多米诺骨牌铺砌与给定的 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ 和 $\ell = 2n$ 所对应的情形 1序列构成双射的区域 D，可按如下方式由其对角线构造：

(i) 对角线 0 的长度为 μ_1。(ii) 每条奇数对角线 $2i+1$ 的长度都比前一条对角线 $2i$ 长一格。对角线 $2i+1$ 的第一个（即最左边的）方格位于对角线 $2i$第一个方格的正下方。(iii) 每条偶数对角线 $2i$ 的长度都等于前一条对角线$2i-1$的长度。对角线 $2i$ 的第一个方格位于对角线 $2i-1$ 第一个方格的正下方。(iv) 最后一条对角线 $2n-1$ 遵循上文 (ii)，但由 D 中的方格和不在 D 中的方格组成：将分拆 μ 转换为空穴与粒子的序列。然后，每个空穴对应 D 中的一个方格，每个粒子对应一个不在 D 中的方格。

图11展示了定理 3.8 中 (iv) 的示例，图12则展示了定理 3.8 对某个特定 μ 的情形。

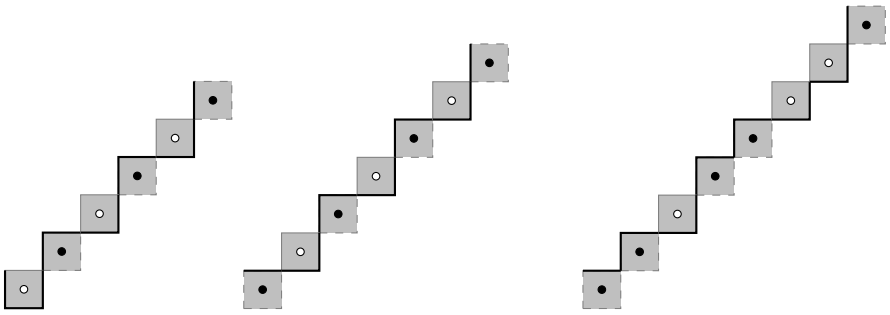


FIGURE 11. 左侧为分拆 $\mu = (3, 2, 1)$ 的最后一条对角线。中间为 $\mu = (3, 2, 1, 0)$，右侧为 $\mu = (4, 1, 1, 0, 0)$。图中还绘出了相应的东南边界。

证明。我们首先证明，按定义给出的区域 D 满足上述条件 (1)–(5)。由于对角线 0 仅包含多米诺骨牌的起始方格（即北侧或西侧方格），显然 (1) 成立。此外，根据条件 (iv)，并且由于对角线 $2n-1$ 上属于 D 的方格不是多米诺骨牌的起始方格（即仅为南侧或东侧方格），显然 (2) 也成立。通过归纳法还可以看出，每条对角线 i 上都有 n 个空位和 $\lceil \frac{i}{2} \rceil$ 个粒子，因此 (5) 成立。

现在考虑条件 (4)。给定对角线 $2i-1$ 上空穴与粒子的构型，对角线 $2i$ 上空穴与粒子的构型由前一条对角线上起始的多米诺骨牌是竖直还是水平决定。我们看到，任何这样的竖直多米诺骨牌都会使粒子从对角线$2i-1$ 到对角线 $2i$保持在原处，而任何水平多米诺骨牌都会使粒子在下一条对角线上向后移动一格

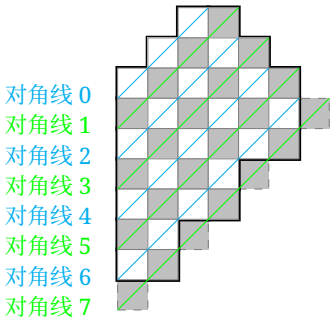


FIGURE 12. 分拆 $\mu = (3, 2, 1, 0)$ 的区域为 D $\ell = 6$。

。此外，多米诺骨牌铺砌的限制意味着，水平多米诺骨牌要求紧随其后的任何粒子也必须是水平多米诺骨牌的起始位置。用相应的分拆来表示，这意味着从 $\lambda^{(2i-1)}$ 到 $\lambda^{(2i)}$ 时，每个部分至多增加一；另外，对于大小相同的部分，如果其中一个部分增加一，那么排在它前面的同大小部分也必须增加一。这恰好就是$\lambda^{(2i)}/\lambda^{(2i-1)}$ 为垂直条带的条件。

对于条件 (3)，我们采用与条件 (4) 类似的方法。在这种情况下，我们看到，对角线 $2i+1$上的粒子构型取决于从对角线 $2i$ 开始的多米诺骨牌是竖直放置还是水平放置。然而，由于在证明条件 (4) 时，从对角线 $2i$ 开始的多米诺骨牌中包含的是空穴而非粒子，因此现在我们要求

$$\lambda'^{(2i+1)}/\lambda'^{(2i)} \text{ is a vertical strip } \implies \lambda^{(2i+1)}/\lambda^{(2i)} \text{ is a horizontal strip.}$$

注意，由于对角线 $2i+1$ 的长度大于对角线 $2i$的长度，因此我们可以增加 $\lambda_n^{(2i)}$ 的长度。

因此，我们已经证明，任意多米诺骨牌铺砌都会给出所需的分拆序列。事实上，同样的论证表明，任何满足条件 (1)–(5) 的分拆序列都必然给出 D 的多米诺骨牌铺砌。特别地，条件 (3) 和 (4) 保证我们得到某个区域 D'的多米诺骨牌铺砌。随后，条件 (5) 告诉我们，在该区域 D' 中每条对角线的长度都与我们的区域 D中的相同，而条件 (1) 和 (2) 保证 D' 的第一行和最后一行分别与 D一致。这完全确定了 D' 的形状。□

多米诺骨牌铺砌与情形 2 序列构成双射的区域，可以按照与情形 1 序列类似的方式构造。

定理 3.9。对于给定的 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$，其多米诺骨牌铺砌与情形 2 序列构成双射的区域 D ，以及 $\ell = 2n$，可以按如下方式通过其对角线构造：

(i) 对角线 0 的长度为 m。(ii) 每条奇数对角线 $2i+1$ 的长度比前一条对角线 $2i$多 1。该对角线的起始位置使得对角线 $2i+1$ 的第一个方格正好位于对角线的第一个方格下方。 $2i$

(iii) 每条偶数对角线 $2i$ 的长度等于前一条对角线$2i-1$的长度。对角线 $2i$ 的第一个方格正好位于对角线 $2i-1$的第一个方格下方。(iv) 最后一条对角线 $2n$ 由 D 中的方格和不在 D中的方格组成。将分拆 μ 转换为其空穴与粒子序列。然后，任意粒子对应于 D 中的一个方格，而一个空穴对应于不在 D中的一个方格。

我们在图 13 中通过一个例子说明定理 3.9。定理 3.9 与定理 3.8 的区别仅在于 (iv)，其证明过程也类似。

如前所述，[DF21] 中的 Aztec 三角形恰好是与分拆 $\mu=(n,n-1,\ldots,1)$ 和 $\ell=2n$ 对应的情形 1 区域。因此，我们将这些区域（包括情形 1 和情形 2 ）称为类型 1 和类型 2 的广义阿兹特克三角形。

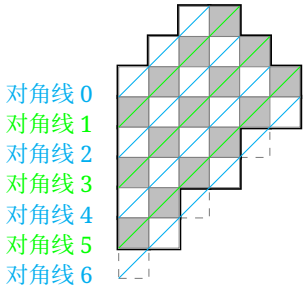


FIGURE 13. 分拆 $\mu=(3,2,1)$ 和 $\ell=7$ 的区域 D。

注 3.10。第 3.3 小节中的不相交路径也可以像 [DFG20]，那样从多米诺骨牌铺砌中得到：为每种类型的多米诺骨牌指定路径中的一个步。图14展示了根据多米诺骨牌的方向和奇偶性进行的指定。可以验证，这恰好给出了命题 3.6 和 3.7 中的不相交路径，只是经过了某些旋转和反射。广义阿兹特克三角形的多米诺骨牌铺砌所得到的不相交路径示例见图15。

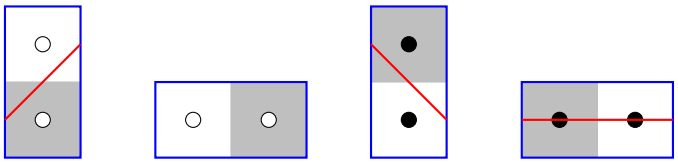


FIGURE 14. 对于每块多米诺骨牌，路径以红色标出。通过奇偶性论证可以解释为什么第二类多米诺骨牌不允许存在路径。

3.5. 枚举。现在我们可以将这些对象组合起来。

定理3.11. 给定一个分拆 $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$，以下对象之间存在双射：

1. 定义 3.1 中定义的最终分拆为 μ 和 $\ell=2n$ 的情形 1 的分拆序列。2. 形状为 μ 且条目小于 $\overline{n}$ 的超辛半标准杨表。3. 不相交德拉诺伊路径的组，其中起点对于 $1\le i\le n$ 为 $(-i,\ i)$，终点对于 $1\le i\le n$ 为 $(\mu_i-i,\ n)$。

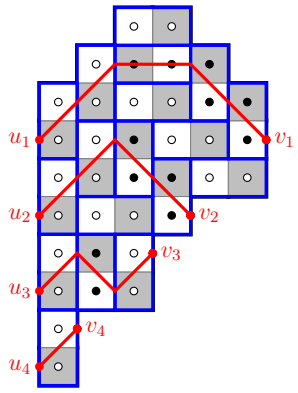


FIGURE 15. 情形1中，区域的一种特定多米诺骨牌铺砌，其中$\mu =$ (3,2,2,1)且 $\ell = 8$

4. 与定理 3.8 中定义的 μ 相对应的 1 型广义阿兹特克三角形的多米诺骨牌铺砌。

林德斯特伦¨–盖塞尔–维也纳引理 [GV85]有如下推论。

推论 3.12. 最终分拆为$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$的情形 1 分拆序列的数量，等于 $n \times n$ 矩阵 $A_1 = (A_{i,j})_{0 \le i,j \le n-1}$的行列式，其中第$(i, j)$项为

$$D(\mu_{i+1} - i + j, n - j).$$

类似地，我们得到以下结果。

给定一个分拆 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$，存在以下对象之间的双射：

1. 定义 3.1 中定义的最终分拆为 μ 和 $\ell = 2n + 1$ 的情形 2 分拆序列。2. 形状为 μ 且元素小于 $n + 1$ 的超辛半标准杨表。3. 不相交 H-德拉诺伊路径的元组，其中起点对于 $1 \le i \le n$ 为 $(-i, i)$，终点对于 $1 \le i \le n$ 为 $(\mu_i - i, n + 1)$。4. 与定理 3.9 中定义的 μ 相对应的 2 型广义阿兹特克三角形的多米诺骨牌铺砌。

推论 3.14。最终分拆为 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ 的情形 2 分拆序列的数量等于 $n \times n$ 矩阵 $A_2 = (A_{i,j})_{0 \le i,j \le n-1}$ 的行列式，其中 (i, j)-项为

$$H(\mu_{i+1} - i + j, n - j).$$

证明与 [DF21]第4节中的证明类似。

4. PRODUCT FORMULAS

本节中，我们给出用于枚举分拆 $\mu = (k, k-1, \ldots, 1, 0^{n-k})$ 的情形 1 和情形 2 的序列的乘积公式。等价地，这些公式计算了某些广义阿兹特克三角形的多米诺铺砌数，如图 16 所示。下面的定理以更明确的形式重述了引言中的定理 1.2 ˛c1in。

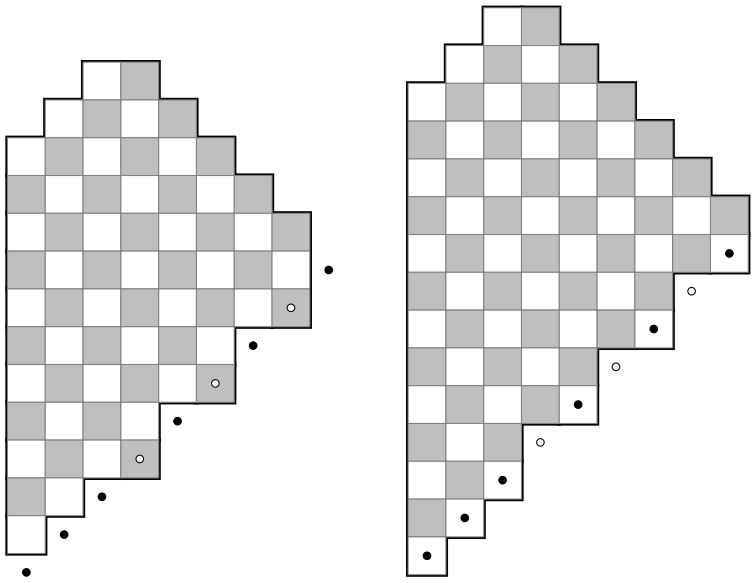


FIGURE 16.情形1（左）和情形2（右）的区域对应于 $\mu = (3, 2, 1, 0, 0, 0)$，这是第4节中发现的分拆类型。根据定理4.5，这两个广义阿兹特克三角形的多米诺铺砌数相同。

定理 4.1。对于 $\mu = (k, k-1, \ldots, 1, 0^{n-k})$ 和 $\ell = 2n$，情形 1 序列的数量为

$$\prod_{i\geq 0}\left(\prod_{s=-2k+4i+1}^{-k+2i}(2n+s)\prod_{s=k-2i}^{2k-4i-2}(2n+s)\right)\Bigg/\prod_{i=1}^{k-1}(2i+1)^{k-i}\,. \tag{4.1}$$

对于 $\mu = (k, k-1, \ldots, 1, 0^{n-k})$ 和 $\ell = 2n+1$，情形 2 序列的数量为

$$\prod_{i\geq 0}\left(\prod_{s=-2k+4i+1}^{-k+2i}(2n+s+1)\prod_{s=k-2i}^{2k-4i-2}(2n+s+1)\right)\Bigg/\prod_{i=1}^{k-1}(2i+1)^{k-i}\,. \tag{4.2}$$

需要证明两个公式，即 (4.1) 和 (4.2)。我们将在定理 5.1 中证明 (4.1)，但证明形式并非 (4.1) 所示。需要注意的是

$$\begin{aligned}
&\prod_{i\geq 0}\left(\prod_{s=-2k+4i+1}^{-k+2i}(2n+s)\prod_{s=k-2i}^{2k-4i-2}(2n+s)\right)\Bigg/\prod_{i=1}^{k-1}(2i+1)^{k-i}\\
&\quad=\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\prod_{s=-2k+4i+1}^{-k+2i}(2n+s)\cdot\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor}\prod_{s=k-2i}^{2k-4i-2}(2n+s)\cdot\prod_{i=1}^{k}\frac{(2(i-1))!!}{(2i-1)!}\\
&\quad=2^{\binom{k+1}{2}}\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\prod_{s=-2k+4i+3}^{-k+2i+2}\left(n+\tfrac{s}{2}-1\right)\cdot\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor}\prod_{s=k-2i+2}^{2k-4i}\left(n+\tfrac{s}{2}-1\right)\\
&\qquad\cdot 2^{\binom{k}{2}}\prod_{i=1}^{k}\frac{(i-1)!}{(2i-1)!}\\
&\quad=2^{k^2}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{(i)_i}\cdot\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\prod_{s=-2k+4i+3}^{-k+2i+2}\left(n+\tfrac{s}{2}-1\right)\cdot\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor}\prod_{s=k-2i+2}^{2k-4i}\left(n+\tfrac{s}{2}-1\right),
\end{aligned}\tag{4.3}$$

其中，$i!!$ 是从 1 到 i 中所有与 i 奇偶性相同的整数的乘积，而 $(x)_i$ 是移位阶乘 $(x)_i=\prod_{\alpha=0}^{i-1}(x+\alpha)$。对于偶数 k，我们进一步计算

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\prod_{s=-2k+4i+3}^{-k+2i+2}\left(n+\tfrac{s}{2}-1\right)\cdot\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor}\prod_{s=k-2i+2}^{2k-4i}\left(n+\tfrac{s}{2}-1\right)\\
&\qquad=\prod_{i=0}^{\frac{k-2}{2}}\prod_{s=-k+2i+2}^{-\frac{k}{2}+i+1}(n+s-1)\cdot\prod_{i=0}^{\frac{k-2}{2}}\prod_{s=-k+2i+1}^{-\frac{k}{2}+i}(n+s-\tfrac{1}{2})\\
&\qquad\quad\cdot\prod_{i=0}^{\frac{k-2}{2}}\prod_{s=\frac{k}{2}-i+1}^{k-2i}(n+s-1)\cdot\prod_{i=0}^{\frac{k-2}{2}}\prod_{s=\frac{k}{2}-i+1}^{k-2i-1}(n+s-\tfrac{1}{2})\\
&\qquad=\prod_{s=0}^{k-2}(n-s-1)^{\min\{\lfloor(k-s)/2\rfloor,\lfloor(s+2)/2\rfloor\}}\\
&\qquad\quad\cdot\prod_{s=0}^{k-1}(n-s-\tfrac{1}{2})^{\min\{\lfloor(k-s+1)/2\rfloor,\lfloor(s+1)/2\rfloor\}}\\
&\qquad\quad\cdot\prod_{s=0}^{k-2}(n+k-s-1)^{\min\{\lfloor(k-s)/2\rfloor,\lfloor(s+2)/2\rfloor\}}\\
&\qquad\quad\cdot\prod_{s=0}^{k-2}(n+k-s-\tfrac{1}{2})^{\min\{\lfloor(k-s-1)/2\rfloor,\lfloor(s+1)/2\rfloor\}}.
\end{aligned}\tag{4.4}$$

另一方面，对于奇数 k，我们有

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\prod_{s=-2k+4i+3}^{-k+2i+2}\left(n+\tfrac{s}{2}-1\right)\cdot\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor}\prod_{s=k-2i+2}^{2k-4i}\left(n+\tfrac{s}{2}-1\right)\\
&\qquad=\prod_{i=0}^{\frac{k-1}{2}}\prod_{s=-k+2i+2}^{-\frac{k}{2}+i+1}(n+s-1)\cdot\prod_{i=0}^{\frac{k-1}{2}}\prod_{s=-k+2i+1}^{-\frac{k}{2}+i}(n+s-\tfrac{1}{2})\\
&\qquad\quad\cdot\prod_{i=0}^{\frac{k-3}{2}}\prod_{s=\frac{k}{2}-i+1}^{k-2i}(n+s-1)\cdot\prod_{i=0}^{\frac{k-3}{2}}\prod_{s=\frac{k}{2}-i+1}^{k-2i-1}(n+s-\tfrac{1}{2})\\
&\qquad=\prod_{s=0}^{k-2}(n-s-1)^{\min\{\lfloor(k-s)/2\rfloor,\lfloor(s+1)/2\rfloor\}}\\
&\qquad\quad\cdot\prod_{s=0}^{k-1}(n-s-\tfrac{1}{2})^{\min\{\lfloor(k-s+1)/2\rfloor,\lfloor(s+2)/2\rfloor\}}\\
&\qquad\quad\cdot\prod_{s=0}^{k-2}(n+k-s-1)^{\min\{\lfloor(k-s-1)/2\rfloor,\lfloor(s+2)/2\rfloor\}}\\
&\qquad\quad\cdot\prod_{s=0}^{k-2}(n+k-s-\tfrac{1}{2})^{\min\{\lfloor(k-s)/2\rfloor,\lfloor(s+1)/2\rfloor\}}.
\end{aligned}\tag{4.5}$$

由 (4.3)–(4.5) 可知，(5.1) 右侧与 (4.1) 一致。

现在我们说明，只需证明 (4.1) 和 (4.2) 中的一个。为此，我们注意到，情形 2 序列的公式 (4.2) 可以由情形 1 序列的公式 (4.1) 将其中的 n 替换为 $n+\frac{1}{2}$ 得到。

为完成只需证明 (4.1) 和 (4.2) 中一个的论证，我们现在说明，在计算推论 3.12 和 3.14 中的行列式时也存在类似关系；这两个推论给出了定理 4.1 中情形 1 和情形 2 序列的公式。更确切地说，对于 $\mu=(k,\dots,1,0^{n-k})$ 的情形，推论 3.12 给出了矩阵 $n\times n$

$$A_1=\left(D(\mu_{n-j+1}+j-i,i-1)\right)_{1\le i,j\le n},$$

其行列式由右下角的 $k\times k$ 个元素决定

$$D_1=\left(D(2j-i,i+n-k-1)\right)_{1\le i,j\le k}.\tag{4.6}$$

类似地，对于相同的 μ 选择，推论 3.14 给出了 $n\times n$ 矩阵

$$A_2=\left(H(\mu_{n-j+1}+j-i,i-1)\right)_{1\le i,j\le n},$$

其行列式同样由右下角的 $k\times k$ 个元素决定

$$D_2=\left(H(2j-i,i+n-k-1)\right)_{1\le i,j\le k}.$$

特别地，D_1 和 D_2 仅取决于 k 和 n，因此我们可以将上述 $k\times k$ 矩阵定义为 $D_1(k;n)$ 和 $D_2(k;n)$。这两个行列式满足一种关系，类似于在 (4.1) 和 (4.2) 的乘积公式中观察到的关系。

定理 4.2. 对于 n、$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们有

$$\det(D_1(k; n+\tfrac{1}{2})) = \det(D_2(k; n)).$$

D_1 的各项具有 $D(i,j)$ 的形式，其中 i、$j \in \mathbb{Z}$。为了理解该定理，利用命题 2.6 中的恒等式 (2.2)，我们重新定义 $D(i,j)$：

$$D(i,j) = \sum_{m=0}^{i} \binom{i}{m}\binom{j}{m} 2^m.$$

然而，现在我们允许任意的 $j \in \mathbb{R}$。读者应回想一下，我们的二项式系数是按照 (2.4) 中的约定定义的。

定理 4.2 的证明。我们的断言由下述命题 4.4 推出，其中我们证明，对于 i、$j \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$，有

$$D(i, j+\tfrac{1}{2}) = \sum_{l=0}^{\lceil i/2 \rceil} (-1)^l \binom{-\frac{1}{2}}{l} H(i-2l, j).$$

于是，根据我们对 D_1 和 D_2 的定义可知，$D_1(k; n+\frac{1}{2})$ 可通过列运算由 $D_2(k; n)$ 得到，从而证明它们的行列式相等。□

引理 4.3。对于所有的 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $j \in \mathbb{R}$，我们有

$$D(i,j) = D(i-1,j) + D(i-1,j-1) + D(i,j-1),$$

其中 $D(i,j)$ 定义为

$$D(i,j) = \sum_{m=0}^{i} \binom{i}{m}\binom{j}{m} 2^m.$$

证明。这是注记 2.4 的一部分，但由于我们无法使用$D(i,j)$ 的组合定义，因此我们利用二项式系数的经典递推关系直接计算：

$$\begin{aligned}
D(i,j) &= \sum_{m=0}^{i} \binom{i}{m}\binom{j}{m} 2^m \\
&= \sum_{m=0}^{i-1} \binom{i-1}{m}\binom{j}{m} 2^m + \sum_{m=1}^{i} \binom{i-1}{m-1}\binom{j}{m} 2^m \\
&= D(i-1,j) + 2\sum_{m=1}^{i} \binom{i-1}{m-1}\binom{j-1}{m-1} 2^{m-1} \sum_{m=1}^{i} \binom{i-1}{m-1}\binom{j-1}{m} 2^m \\
&= D(i-1,j) + D(i-1,j-1) + \sum_{m=1}^{i} \binom{i-1}{m-1}\binom{j-1}{m} 2^m \\
&\quad + \sum_{m=0}^{i-1} \binom{i-1}{m}\binom{j-1}{m} 2^m \\
&= D(i-1,j) + D(i-1,j-1) + D(i,j-1),
\end{aligned}$$

注意到

$$\binom{i}{m} = \binom{i-1}{m-1} + \binom{i-1}{m}$$

对 $i \in \mathbb{R}$ 仍然成立。 □

命题 4.4. 对于 i、$j \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$，我们有

$$D(i, j+\tfrac{1}{2}) = \sum_{\ell=0}^{\lceil i/2 \rceil} (-1)^l \binom{-\frac{1}{2}}{\ell} H(i-2\ell, j),$$

其中 $D(i,j)$ 定义为

$$D(i,j) = \sum_{m=0}^{i} \binom{i}{m}\binom{j}{m} 2^m.$$

证明。我们对 i 和 j 使用归纳法。对于归纳步骤，我们利用引理 4.3 找到 i、$j \geq 0$，使得

$$\begin{aligned}
D(i, j+\tfrac{1}{2}) &= D(i-1, j+\tfrac{1}{2}) + D(i-1, j-\tfrac{1}{2}) + D(i, j-\tfrac{1}{2}) \\
&= \sum_{l=0}^{\lceil (i-1)/2 \rceil} (-1)^l \binom{-\frac{1}{2}}{l} H(i-1-2l, j) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{\lceil (i-1)/2 \rceil} (-1)^l \binom{-\frac{1}{2}}{l} H(i-1-2l, j-1) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{\lceil i/2 \rceil} (-1)^l \binom{-\frac{1}{2}}{l} H(i-2l, j-1) \\
&= \sum_{l=0}^{\lceil i/2 \rceil} (-1)^l \binom{-\frac{1}{2}}{l} H(i-2l, j),
\end{aligned}$$

注意到，对于 $i < 0$ 及所有 j，有 $H(i,j) = 0$。现在，对于基例，当 $i = -1$ 时，我们有

$$D(-1, j+\tfrac{1}{2}) = 0 = H(-1, j)$$

对所有 j 均成立，证毕。

还需证明 $j = -1$ 成立，即

$$D(i, -\tfrac{1}{2}) = \sum_{l=0}^{\lceil i/2 \rceil} (-1)^l \binom{-\frac{1}{2}}{l} H(i-2l, -1)$$

对所有 $i \geq 0$ 均成立。现在

$$H(i,-1) = \begin{cases} 1, & \text{if } i = 0, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

因此，我们希望证明

$$D(i, -\tfrac{1}{2}) = \sum_{m=0}^{i} \binom{i}{m}\binom{-\frac{1}{2}}{m} 2^m = \begin{cases} 0, & \text{if } i \text{ is odd,} \\ \left| \binom{-\frac{1}{2}}{\frac{i}{2}} \right|, & \text{if } i \text{ is even.} \end{cases} \tag{4.7}$$

采用超几何级数的记号（参见 [Sla66]），我们有

$$\sum_{m=0}^{i}\binom{i}{m}\binom{-\frac{1}{2}}{m}2^m\sum_{m=0}^{i}\binom{i}{i-m}\binom{-\frac{1}{2}}{i-m}2^{i-m}=\frac{\left(\frac{1}{2}-i\right)_i 2^i}{i!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-i,-i\\ \frac{1}{2}-i\end{matrix};\frac{1}{2}\right].$$

${}_FF_1$级数可利用高斯第二求和定理求值（见[Sla66，公式 (1.7.1.9)；附录 (III.6)]）

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}2a,2b\\ \frac{1}{2}+a+b\end{matrix};\frac{1}{2}\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a+b\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+b\right)}.$$

因此，利用以下众所周知的事实进行化简后：$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$以及 $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\pi/\sin(\pi x)$，我们得到

$$\sum_{m=0}^{i}\binom{i}{m}\binom{-\frac{1}{2}}{m}2^m=\frac{2^i\Gamma^2\left(\frac{i+1}{2}\right)\sin^2\left(\frac{1-i}{2}\right)}{\pi\cdot i!}.$$

这里我们看到，当 i为奇数时，正弦项为零。另一方面，如果 i 为偶数，则有

$$\begin{aligned}\frac{2^i\Gamma^2\left(\frac{i+1}{2}\right)\sin^2\left(\frac{1-i}{2}\right)}{\pi\, i!}&=\frac{2^i\left(\frac{i-1}{2}\right)^2\left(\frac{i-3}{2}\right)^2\cdots\left(\frac{1}{2}\right)^2\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi\, i!}\\&=\frac{\left(\frac{i-1}{2}\right)\left(\frac{i-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{i}{2}\right)!},\end{aligned}$$

这等于 (4.7) 右端的第二种情形。由此完成了关于 j 的归纳法基例，并得到我们的结果。□

接下来，我们重述引言中的定理 1.4，并在定理 1.2 成立的条件下给出证明。

定理4.5. 对于带有 $\ell=2k+2$ 的分拆 $\mu=(k+1,k,\ldots,1)$，情形 1 序列的数量等于对于带有 $\ell=2k+3$ 的分拆 $\mu=(k,k-1,\ldots,1,0)$，情形 2 序列的数量。

图16展示了两个广义阿兹特克三角形，根据定理4.5，它们的多米诺铺砌数量必定相等。

证明　定理 4.5。利用定理 4.1 中的公式，我们希望证明

$$\begin{aligned}&\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\prod_{s=-2k+4i-1}^{-k+2i-1}(2k+s+2)\cdot\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\prod_{s=k-2i+1}^{2k-4i}(2k+s+2)\Bigg/\prod_{i=1}^{k}(2i+1)^{k+1-i}\\&=\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\prod_{s=-2k+4i+1}^{-k+2i}(2k+s+3)\cdot\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor}\prod_{s=k-2i}^{2k-4i-2}(2k+s+3)\Bigg/\prod_{i=1}^{k-1}(2i+1)^{k-i}.\end{aligned}$$

这是两个分数相等的等式；我们将两个分子移到等式左边，将两个分母移到右边：

$$\frac{\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\prod_{s=-2k+4i-1}^{-k+2i-1}(2k+s+2)}{\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\prod_{s=-2k+4i+2}^{-k+2i+1}(2k+s+2)}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\prod_{s=k-2i+1}^{2k-4i}(2k+s+2)}{\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor}\prod_{s=k-2i+1}^{2k-4i-1}(2k+s+2)}=\prod_{i=1}^{k}(2i+1).$$

如果 k 是偶数，则可得

$$(2k+1)\prod_{i=0}^{\frac{k}{2}-1}\frac{(4i+1)(4i+2)(4i+3)(4k-4i+2)}{(k+2i+2)(k+2i+2)}=\prod_{i=1}^{k}(2i+1),$$

或者，约去公因子后，

$$\prod_{i=0}^{\frac{k}{2}-1}\frac{(4i+2)(4k-4i+2)}{(k+2i+2)(k+2i+3)}=1.$$

同样地，若 k 为奇数，则有

$$\frac{2k+4}{2k+4}\prod_{i=0}^{\frac{k-1}{2}}\frac{(4i+1)(4i+2)(4i+3)(4k-4i+2)}{(k+2i+2)(k+2i+3)}=\prod_{i=1}^{k}(2i+1),$$

或者，约去公因子后，

$$\prod_{i=0}^{\frac{k-1}{2}}\frac{(4i+2)(4k-4i+2)}{(k+2i+2)(k+2i+3)}=1.$$

我们可以验证这两个恒等式都成立。对于偶数 k，左边的乘积展开为

$$\begin{aligned}\frac{2\cdot 6\cdots(2k-2)\cdot(2k+6)(2k+10)\cdots(4k+2)}{(k+2)(k+3)\cdots(2k+1)}&=\frac{2^{k/2}(k-1)!!\,2^{k/2}\frac{(2k+1)!!}{(k+1)!!}}{\frac{(2k+1)!}{(k+1)!}}\\&=\frac{2^k(k-1)!!\,(k+1)!}{(k+1)!!}\cdot\frac{(2k+1)!!}{(2k+1)!}\\&=2^k k!\cdot\frac{1}{(2k)!!}=1,\end{aligned}$$

这里我们再次用双阶乘表示同奇偶性的整数的乘积。同样地，对于奇数 k，有

$$\begin{aligned}\frac{2\cdot 6\cdots(2k)\cdot(2k+4)(2k+8)\cdots(4k+2)}{(k+2)(k+3)\cdots(2k+2)}&=\frac{2^{(k+1)/2}k!!\,2^{(k+1)/2}\frac{(2k+1)!!}{k!!}}{\frac{(2k+2)!}{(k+1)!}}\\&=2^{k+1}(k+1)!\cdot\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!}=1.\end{aligned}\qquad\square$$

注 4.6. 最后，我们来验证定理 4.1 确实是 Di Francesco 猜想公式的推广（参见 [DF21, 猜想 8.1]）

$$F(n):=2^{n(n-1)/2}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{(4i+2)!}{(n+2i+1)!}.$$

事实上，若 $\mu=(n,n-1,\ldots,1)$，定理 4.1 给出情形 1 序列的数量等于

$$\begin{aligned}G(n)&:=\prod_{i\geq 0}\left(\prod_{s=-2n+4i+1}^{-n+2i}(2n+s)\prod_{s=n-2i}^{2n-4i-2}(2n+s)\right)\Bigg/\prod_{i=1}^{n-1}(2i+1)^{n-i}\\&=\prod_{i\geq 0}\left(\prod_{s=4i+1}^{n+2i}s\prod_{s=3n-2i}^{4n-4i-2}s\right)\Bigg/\prod_{i=1}^{n-1}(2i+1)^{n-i}.\end{aligned}$$

现在我们计算 $n\geq 1$

$$\begin{aligned}\frac{F(n+1)}{F(n)}&=2^n\cdot\frac{(4n+2)!}{(3n+2)!}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{(n+2i+1)!}{(n+2i+2)!}=2^n\cdot\frac{(4n+2)!}{(3n+2)!}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n+2i+2}\\&=\frac{2^n(4n+2)!n!!}{(3n+2)!(3n)!!}.\end{aligned}$$

现在我们计算 $\frac{G(n+1)}{G(n)}$ 对所有 $n\geq 1$。我们首先注意到，当 n 为偶数时，有

$$G(n)=\left(\prod_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}\prod_{s=4i+1}^{n+2i}s\cdot\prod_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}\prod_{s=3n-2i}^{4n-4i-2}s\right)\Bigg/\prod_{i=1}^{n-1}(2i+1)^{n-i},$$

而当 n 为奇数时，有

$$G(n)=\left(\prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\prod_{s=4i+1}^{n+2i}s\cdot\prod_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}\prod_{s=3n-2i}^{4n-4i-2}s\right)\Bigg/\prod_{i=1}^{n-1}(2i+1)^{n-i}.$$

那么，如果 n 是奇数，我们有

$$\begin{aligned}\frac{G(n+1)}{G(n)}&=\left(\frac{\prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\prod_{s=4i+1}^{n+2i+1}s\cdot\prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\prod_{s=3n-2i+3}^{4n-4i+2}s}{\prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\prod_{s=4i+1}^{n+2i}s\cdot\prod_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}\prod_{s=3n-2i}^{4n-4i-2}s}\right)\Bigg/\left(\frac{\prod_{i=0}^{n}(2i+1)^{n+1-i}}{\prod_{i=0}^{n-1}(2i+1)^{n-i}}\right)\\&=\prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}(n+2i+1)\cdot\frac{(2n+4)!}{(2n+3)!}\cdot\prod_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}\frac{(4n-4i-1)\cdots(4n-4i+2)}{(3n-2i)\cdots(3n-2i+2)}\Bigg/(2n+1)!!\\&=\frac{(2n)!!}{(n-1)!!}\cdot\frac{(2n+4)!}{(2n+3)!}\cdot\frac{\frac{(4n+2)!}{(2n+4)!}}{\frac{(3n+2)!}{(2n+3)!}\cdot\frac{(3n)!!}{(2n+1)!!}}\cdot\frac{1}{(2n+1)!!}\\&=\frac{2^n n!(4n+2)!}{(n-1)!!(3n+2)!(3n)!!}=\frac{2^n(4n+2)!n!!}{(3n+2)!(3n)!!}.\end{aligned}$$

另一方面，如果 n是偶数，我们有

$$\begin{aligned}\frac{G(n+1)}{G(n)} &= \left(\frac{\prod_{i=0}^{\frac{n}{2}}\prod_{s=4i+1}^{n+2i+1} s\cdot\prod_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}\prod_{s=3n-2i+3}^{4n-4i+2} s}{\prod_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}\prod_{s=4i+1}^{n+2i} s\cdot\prod_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}\prod_{s=3n-2i}^{4n-4i-2} s}\right)\Bigg/\left(\frac{\prod_{i=0}^{n}(2i+1)^{n+1-i}}{\prod_{i=0}^{n-1}(2i+1)^{n-i}}\right)\\ &= (2n+1)\cdot\prod_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}\left((n+2i+1)\frac{(4n-4i-1)\cdots(4n-4i+2)}{(3n-2i)\cdots(3n-2i+2)}\right)\Bigg/(2n+1)!!\\ &= (2n+1)\cdot\frac{(2n-1)!!}{(n-1)!!}\cdot\frac{\frac{(4n+2)!}{(2n+2)!}}{\frac{(3n+2)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(3n)!!}{(2n)!!}}\cdot\frac{1}{(2n+1)!!}\\ &= \frac{2^n(4n+2)!n!!}{(3n+2)!(3n)!!}.\end{aligned}$$

结合 $F(1)=G(1)=1$ 这一事实，我们得出，对于所有 $n\geq 1$，$F(n)=G(n)$。因此，Di Francesco 的猜想公式 [DF21, Conj. 8.1] 确实是定理 4.1 的一个特例。

5. Proof of Theorem 4.1

上一节已经证明，要证明定理 4.1，只需证明 (4.1) 和 (4.2) 中的一个。下面的定理中，我们证明 (4.1)。

定理 5.1. 对所有非负整数 k 及任意 n，有

$$\begin{aligned}D_1(k;n) &:= \det_{0\leq i,j\leq k-1}\big(D(k-2i+j,n-j-1)\big)\\ &= 2^{k^2}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{(i)_i}\prod_{s=0}^{k-2}(n-s-1)^{\min\{\lfloor(s+1+\chi(k\ even))/2\rfloor,\lfloor(k-s)/2\rfloor\}}\\ &\quad\cdot\prod_{s=0}^{k-1}(n-s-\tfrac{1}{2})^{\min\{\lfloor(s+1+\chi(k\ odd))/2\rfloor,\lfloor(k-s+1)/2\rfloor\}}\\ &\quad\cdot\prod_{s=0}^{k-2}(n+k-s-1)^{\min\{\lfloor(s+2)/2\rfloor,\lfloor(k-s-\chi(k\ odd))/2\rfloor\}}\\ &\quad\cdot\prod_{s=1}^{k-2}(n+k-s-\tfrac{1}{2})^{\min\{\lfloor(s+1)/2\rfloor,\lfloor(k-s-\chi(k\ even))/2\rfloor\}}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

这里，如果 $\mathcal{S}$ 成立，则 $\chi(\mathcal{S})=1$；否则，$\chi(\mathcal{S})=0$。

读者应注意，应用替换 $i\mapsto k-j$, $j\mapsto k-i$ 后，上述行列式与 (4.6) 中的行列式一致。此外，还应记得，根据 (4.3)–(4.5)，(5.1) 的右侧确实与 (4.1) 一致。

定理 5.1 的证明。我们采用 Kra99 第 2 节[所述的因子识别法4]。证明概要如下。在步骤 1–4 中，我们证明 (5.1) 中关于 s 的乘积确实是行列式 $D_1(k;n)$ 作为关于 n 的多项式的因子。在步骤 5 中，我们证明 $D_1(k;n)$ 作为关于 n 的多项式的次数至多为 $\binom{k+1}{2}$。由于 (5.1) 中关于 s 的乘积所给出的因子总数恰好为 $\binom{k+1}{2}$，

(5.1) 两边必相差一个乘法常数。随后通过确定 $D_1(k;n)$ 的首项系数来计算该常数。

Step 1: 术语 $(n-s-1)^{\min\{\lfloor (s+1+\chi(k\text{ 偶}))/2\rfloor,\ \lfloor (k-s)/2\rfloor\}}$ 是 $D_1(k;n)$ 作为关于 n 的多项式的一个因子。我们声称，对于 $0\le a\le s$、$k\ge 2s-a+2$ 和 $k\equiv a$（模 2），有

$$\sum_{j=a}^{2s-a+1}\binom{2s-2a+1}{j-a}\cdot\big(\text{column } j \text{ of } D_1(k;s+1)\big)=0. \tag{5.2}$$

这些线性关系确实成立，这意味着 $(n-s-1)$ 的上述幂次整除 $D_1(k,n)$，视其为关于 n 的多项式。因为随着 a 变化，这些线性关系彼此线性无关，因为它们各自都以不同的列开头。因此，这些线性关系的数量——也就是说，满足上述条件的不同 a 的数量——给出了 $(n-s-1)$ 指数的一个（下界）（参见 [Kra99，第 13] 页）。现在，一方面，条件 $0\le a\le s$ 与限制条件 $k\equiv a$（模 2）意味着这样的 a 至多有 $\lfloor (s+1+\chi(k\text{ even}))/2\rfloor$ 个。另一方面，条件 $k\ge 2s-a+2$ 和 $a\le s$ 与限制条件 $k\equiv a$（模 2）意味着这样的 a 至多有 $\lfloor (k-s)/2\rfloor$ 个。因此，两者中的较小值是指数的一个（下界）。

由于步骤2中还需要证明一个非常相似的结论，我们从比当前步骤所需更一般的层面开始进行所需的计算。具体而言，我们计算第 i 行中的元素

$$\sum_{j=a}^{a+b}\binom{b}{j-a}\cdot\big(\text{column } j \text{ of } D_1(k;n)\big), \tag{5.3}$$

这里我们需要考虑 $b=2s-2a+1$ 且 $n-1=s$的情形。事实上，利用 $D(k,n-1)$的表达式 (2.3)，(5.3)中的第 i 行元素等于

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=a}^{a+b}\binom{b}{j-a}\sum_{\ell=0}^{k-2i+j}\binom{n-1+k-2i-\ell}{n-1-j-\ell,k-2i+j-\ell,\ell}\\
&\qquad=\sum_{\ell=0}^{k-2i+a+b}\binom{n-1+k-2i-\ell}{\ell}\sum_{j=a}^{a+b}\binom{b}{a+b-j}\binom{n-1+k-2i-2\ell}{k-2i+j-\ell}\\
&\qquad=\sum_{\ell=0}^{k-2i+a+b}\binom{n-1+k-2i-\ell}{\ell}\binom{n-1+k+b-2i-2\ell}{k+a+b-2i-\ell}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

现在将（5.4）中的 $n-1=s$ 和 $b=2s+1-2a$ 替换为 $0\le a\le s$。可见，（5.2）中第 i 行的元素为

$$\sum_{\ell=0}^{k-2i+2s-a+1}\binom{s+k-2i-\ell}{\ell}\binom{k+3s-2a+1-2i-2\ell}{k+2s-a+1-2i-\ell}. \tag{5.5}$$

我们交换求和次序，得到该元素也可表示为

$$\sum_{\ell=0}^{k-2i+2s-a+1}\binom{-s+a-1+\ell}{k-2i+2s-a+1-\ell}\binom{-k-s-1+2i+2\ell}{\ell}$$
$$=\sum_{\ell=0}^{k-2i+2s-a+1}(-1)^{k-2i+2s-a+1-\ell}\binom{k+3s-2a-2i-2\ell+1}{k-2i+2s-a+1-\ell}(-1)^{\ell}\binom{k+s-2i-\ell}{\ell}.$$

由于我们假设 $k\equiv a$ (模 2)，(5.5) 中的和为零，从而证明了我们的断言。

Step 2: 项 $(n-s-\frac{1}{2})^{\min\{\lfloor(s+1+\chi(k\text{ odd}))/2\rfloor,\lfloor(k-s+1)/2\rfloor\}}$ 是 $D_1(k;\,n)$ 作为关于 n 的多项式的一个因子。我们断言，对于 $0\le a\le s$、$k\ge 2s-a+1$ 和 $k\not\equiv a$ (模 2)，有

$$\sum_{j=a}^{2s-a}\binom{2s-2a}{j-a}\cdot\big(\text{column } j \text{ of } D_1(k;s+1)\big)=0. \tag{5.6}$$

我们（重新）使用前面的计算，并令 $n-1=s-\frac{1}{2}$，$b=2s-2a$ 满足 (5.4) 中的 $0\le a\le s$。我们看到，(5.6) 中第 i 行的项为

$$\sum_{\ell=0}^{k-2i+2s-a}\binom{s-\frac{1}{2}+k-2i-\ell}{\ell}\binom{k+3s-2a-\frac{1}{2}-2i-2\ell}{k+2s-a-2i-\ell}. \tag{5.7}$$

我们将求和顺序反转，得到它也可表示为

$$\sum_{\ell=0}^{k-2i+2s-a}\binom{-s-\frac{1}{2}+a+\ell}{k-2i+2s-a-\ell}\binom{-k-s-\frac{1}{2}+2i+2\ell}{\ell}$$
$$=\sum_{\ell=0}^{k-2i+2s-a}(-1)^{k-2i+2s-a-\ell}\binom{k-2i+3s-2a-2\ell-\frac{1}{2}}{k-2i+2s-a-\ell}(-1)^{\ell}\binom{k+s-2i-\ell-\frac{1}{2}}{\ell}.$$

由于我们假设 $k\not\equiv a$ (模 2)，(5.7) 中的和为零，从而证明了我们的结论。

Step 3: 项 $(n+k-s-1)^{\min\{\lfloor(s+2)/2\rfloor,\lfloor(k-s-\chi(k\text{ 奇数}))/2\rfloor\}}$ 是 $D_1(k;\,n)$ 关于 n 的一个因子。我们断言，对于 $0\le 2a\le s$ 和 $k\ge 2s-2a+2$，有

$$\sum_{i=a}^{s+1-a}(-1)^i\binom{s+1-2a}{i-a}\cdot\big(\text{row } i \text{ of } D_1(k;-k+s+1)\big)$$
$$-\sum_{i=s+1-a}^{k-1}2^{2s+2-4a}\binom{i-a-1}{s-2a}\cdot\big(\text{row } i \text{ of } D_1(k;-k+s+1)\big)=0. \tag{5.8}$$

这里我们使用 $D(k,n-1)$ 的围道积分表达式。具体而言，由 (2.2) 可得

$$\begin{aligned}D(k,n-1)&=\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\binom{n-1}{\ell}2^{\ell}\\&=\frac{1}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\sum_{\ell\ge 0}2^{\ell}\frac{(1+x)^k(1+y)^{n-1}}{(xy)^{\ell+1}}\,dx\,dy\\&=\frac{1}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\frac{(1+x)^k(1+y)^{n-1}}{xy-2}\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{5.9}$$

为了使倒数第二行中的几何级数收敛，需要满足 $|xy| > 2$。此外，由于后面我们还要将此积分表达式用于 $n-1$ 的负值，此时被积函数在 $y=-1$ 处会出现奇点，因此围道 $\mathcal{C}_y$ 的内部不得包含 -1。所以，一个有效的选择是[1]

$$\mathcal{C}_x = \{5e^{\mathbf{i}t} : 0 \le t \le 2\pi\} \quad \text{and} \quad \mathcal{C}_y = \{0.5e^{\mathbf{i}w} : 0 \le w \le 2\pi\}. \tag{5.10}$$

接下来，我们计算 (5.8) 中第一个求和的第 j 列元素：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=a}^{s+1-a} (-1)^i \binom{s+1-2a}{i-a} D(k-2i+j, -k+s-j) \\
&\quad = \sum_{i=a}^{s+1-a} (-1)^i \binom{s+1-2a}{i-a} \frac{1}{(2\pi\mathbf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y} \frac{(1+x)^{k-2i+j}(1+y)^{-k+s-j}}{xy-2}\,dx\,dy \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi\mathbf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y} \frac{(1+x)^{k-2a+j}(1+y)^{-k+s-j}}{xy-2} \left(1-\frac{1}{(1+x)^2}\right)^{s+1-2a} dx\,dy \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi\mathbf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y} \frac{(x(2+x))^{s+1-2a}(1+x)^{k+2a+j-2s-2}(1+y)^{-k+s-j}}{xy-2}\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

我们对 y 应用留数定理。在围道 $\mathcal{C}_y$ 内只有一个奇点，即 $y = 2/x$。（回想一下，我们选择 $\mathcal{C}_y$，使其内部不包含 -1。）因此，上述积分等于

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\mathcal{C}_x} \frac{(x(2+x))^{s+1-2a}(1+x)^{k+2a+j-2s-2}(1+\frac{2}{x})^{-k+s-j}}{x}\,dx \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\mathcal{C}_x} x^{k-2a+j}(2+x)^{1-2a-k+2s-j}(1+x)^{k+2a+j-2s-2}\,dx.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

(5.8) 中第二个求和里第 j 列的项为

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=s+1-a}^{k-1} 2^{2s+2-4a} \binom{i-a-1}{s-2a} D(k-2i+j, -k+s-j) \\
&\quad = \sum_{i\ge s+1-a} 2^{2s+2-4a} \binom{i-a-1}{s-2a} \frac{1}{(2\pi\mathbf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y} \frac{(1+x)^{k-2i+j}(1+y)^{-k+s-j}}{xy-2}\,dx\,dy \\
&\quad = \frac{2^{2s+2-4a}}{(2\pi\mathbf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y} \frac{(1+x)^{k-2s-2+2a+j}(1+y)^{-k+s-j}}{xy-2} \left(1-\frac{1}{(1+x)^2}\right)^{-s+2a-1} dx\,dy \\
&\quad = \frac{2^{2s+2-4a}}{(2\pi\mathbf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y} \frac{(x(2+x))^{-s+2a-1}(1+x)^{k-2a+j}(1+y)^{-k+s-j}}{xy-2}\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

[1] 这种选择实际上具有两个理想的性质：（1）如前所述，它将 $D(k, n-1)$ 表示为关于 n 的多项式；（2）当 k 是负整数时，它为零。为证明后者，设 k 是负整数。那么，(5.9) 中被积函数的分子不含 x，而分母是关于 x 的次数至少为 2 的多项式。借助经典论证，我们现在将围道 $\mathcal{C}_x$ 扩张至 $\lambda\mathcal{C}_x$，其中 $\lambda \to \infty$。由于被积函数的阶为 $O(x^{-2})$，可知在极限下积分为零。然而，由于我们在 $\lambda = 1$ 处起始时取的是半径为 5 的圆，进行这一扩张时不会遇到任何奇点，这就表明原积分为零。

这里我们也对 y 应用留数定理。同样，值 $y=2/x$ 是围道 $\mathcal{C}_y$ 内唯一的奇点。因此，上述积分等于

$$\frac{2^{2s+2-4a}}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\mathcal{C}_x}\frac{(x(2+x))^{-s+2a-1}(1+x)^{k-2a+j}(1+\frac{2}{x})^{-k+s-j}}{x}\,dx$$
$$=\frac{2^{2s+2-4a}}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\mathcal{C}_x}x^{k-2s+j+2a-2}(2+x)^{-k-j+2a-1}(1+x)^{k-2a+j}\,dx.$$

我们作代换 $x\mapsto -\frac{2(1+x)}{2+x}$。这将上面的积分变为

$$-\frac{2^{2s+2-4a}}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\mathcal{C}'_x}2^{-2s+4a-2}(2+x)^{-k+2s-j-2a+1}(1+x)^{k-2s+j+2a-2}x^{k-2a+j}\,dx,$$

其中围道 $\mathcal{C}'_x$ 由下式给出

$$\mathcal{C}'_x=\left\{-\tfrac{2(1+5e^{\mathbf{i}t})}{2+5e^{\mathbf{i}t}}:0\le t\le 2\pi\right\}.$$

该围道沿负方向围住了 -2，即被积函数的唯一奇点（$x=-1$ 不是奇点，因为根据假设有 $k-2s+2a-2\ge 0$）。因此，我们看到上式等于（5.11）。这意味着（5.8）中的两个和彼此抵消，正如所要求的那样。

Step 4: 项 $(n+k-s-\frac{1}{2})^{\min\{\lfloor(s+1)/2\rfloor,\lfloor(k-s-\chi(k\text{ even}))/2\rfloor\}}$ 是 $D_1(k;\ n)$ 作为关于 n 的多项式的一个因子。我们声称，对于 $0\le a<s$ 和 $k\ge 4s-2a-1$，有

$$\sum_{i=a}^{k-1}c_1(s-a,i-a)\cdot\big(\text{row } i \text{ of } D_1(k;-k+2s-\tfrac{1}{2})\big)=0 \tag{5.12}$$

并且，对于 $0\le a<s$ 和 $k\ge 4s-2a+1$，我们有

$$\sum_{i=a}^{k-1}c_2(s-a,i-a)\cdot\big(\text{row } i \text{ of } D_1(k;-k+2s+\tfrac{1}{2})\big)=0, \tag{5.13}$$

其中

$$c_1(s,l)=-\frac{(4l-4s+1)\,(-1)^{s-1}(1-l)_{s-1}\,(\frac{1}{2})_s\,(\frac{1}{2})_{l-s}}{(2l-4s+1)\,l!\,(s-1)!}$$
$$-(4l-4s+1)\sum_{r=1}^{s}\frac{2^{4r-3}(2r-\frac{1}{2})_{s-r}\,(2r-\frac{1}{2})_{l-s-r}}{(s-r)!\,(l-s-r+1)!}$$

and

$$c_2(s,l)=\frac{(4l-4s-1)\,(-1)^{s-1}(1-l)_{s-1}\,(\frac{1}{2})_{s+1}\,(\frac{1}{2})_{l-s-1}}{(2l-4s-1)\,l!\,(s-1)!}$$
$$-(4l-4s-1)\sum_{r=1}^{s}\frac{2^{4r-1}(2r+\frac{1}{2})_{s-r}\,(2r+\frac{1}{2})_{l-s-r-1}}{(s-r)!\,(l-s-r)!}.$$

我们先证明（5.12）。我们必须证明，对于所有满足 $0 \le a < s$、 $k \ge 4s - 2a - 1$ 且 $j \ge 0$ 的整数 k、j、s、a，都有

$$\sum_{i=a}^{k-1} c_1(s-a, i-a) \cdot D(k-2i+j, -k+2s-\tfrac{3}{2}-j) = 0. \tag{5.14}$$

为简化证明，我们注意到，只需证明 $j = 0$ 的 (5.14)。此外，作出替换 $s \mapsto s+a$、$i \mapsto i+a$ 和 $k \mapsto k+2a$ 后可知，要证明 $j = 0$ 的 (5.14)，等价于证明：对于所有满足 $0 < s$ 和 $k \ge 4s-1$ 的整数 k 和 s，有

$$\sum_{i=0}^{k-1} c_1(s, i) \cdot D(k-2i, -k+2s-\tfrac{3}{2}) = 0. \tag{5.15}$$

具体而言，利用 $c_1(s,i)$ 的定义以及 $D(k, n-1)$ 的公式 (2.2)，这意味着要证明恒等式

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{\ell=0}^{k-2i} &\frac{(4i-4s+1)\,(-1)^{s-1}(1-i)_{s-1}\,(\frac{1}{2})_s\,(\frac{1}{2})_{i-s}}{(2i-4s+1)\,i!\,(s-1)!}\binom{k-2i}{\ell}\binom{-k+2s-\frac{3}{2}}{\ell}2^{\ell}\\ &+\sum_{i=0}^{k-1}(4i-4s+1)\sum_{r=1}^{s}\frac{2^{4r-3}(2r-\frac{1}{2})_{s-r}\,(2r-\frac{1}{2})_{i-s-r}}{(s-r)!\,(i-s-r+1)!}D(k-2i,-k+2s-\tfrac{3}{2}) = 0,\end{aligned} \tag{5.16}$$

对所有满足 $0 < s$ 和 $k \ge 4s-1$ 的整数 k 和 s。这里，给定 $D(k-2i, -k+2s-\frac{3}{2})$ 的公式 (2.2)，第二个求和是一个三重求和。我们将把这个求和化简为二重求和。具体而言，利用围道仍取为 (5.10) 中所述的围道的围道积分表示 (5.9)，可得

再次像在（5.10）中那样取围道，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k-1}(4i-4s+1)\frac{(2r-\frac{1}{2})_{i-s-r}}{(i-s-r+1)!}D(k-2i,-k+2s-\tfrac{3}{2})\\
&\quad=\sum_{i\geq s+r-1}(4i-4s+1)\frac{(2r-\frac{1}{2})_{i-s-r}}{(i-s-r+1)!}\frac{1}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\frac{(1+x)^{k-2i}(1+y)^{-k+2s-\frac{3}{2}}}{xy-2}\,dx\,dy\\
&\quad=\sum_{i\geq s+r}\frac{4\,(2r-\frac{1}{2})_{i-s-r}}{(i-s-r)!}\frac{1}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\frac{(1+x)^{k-2i}(1+y)^{-k+2s-\frac{3}{2}}}{xy-2}\,dx\,dy\\
&\qquad+\sum_{i\geq s+r-1}\frac{2\,(2r-\frac{3}{2})_{i-s-r+1}}{(i-s-r+1)!}\frac{1}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\frac{(1+x)^{k-2i}(1+y)^{-k+2s-\frac{3}{2}}}{xy-2}\,dx\,dy\\
&\quad=\frac{4}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\frac{(1+x)^{k-2s-2r}(1+y)^{-k+2s-\frac{3}{2}}}{xy-2}\left(1-\frac{1}{(1+x)^2}\right)^{-2r+\frac{1}{2}}dx\,dy\\
&\qquad+\frac{2}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\frac{(1+x)^{k-2s-2r+2}(1+y)^{-k+2s-\frac{3}{2}}}{xy-2}\left(1-\frac{1}{(1+x)^2}\right)^{-2r+\frac{3}{2}}dx\,dy\\
&\quad=\frac{4}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\frac{(1+x)^{k-2s+2r-1}\big(x(2+x)\big)^{-2r+\frac{1}{2}}(1+y)^{-k+2s-\frac{3}{2}}}{xy-2}\,dx\,dy\\
&\qquad+\frac{2}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\frac{(1+x)^{k-2s+2r-1}\big(x(2+x)\big)^{-2r+\frac{3}{2}}(1+y)^{-k+2s-\frac{3}{2}}}{xy-2}\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

这里我们使用脚注1中的性质（2），以便能够对所有 i 求和（而不是在 $i=k-1$ 处停止）。

现在我们关于 y 应用留数定理。根据我们对围道 $\mathcal{C}_y$ 的选择，值 -1 位于围道之外，因此 $y=2/x$ 是 $\mathcal{C}_y$ 内部唯一的奇点。于是，上述表达式等于

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\mathcal{C}_x}\frac{(1+x)^{k-2s+2r-1}\big(x(2+x)\big)^{-2r+\frac{1}{2}}(1+\frac{2}{x})^{-k+2s-\frac{3}{2}}}{x}\,dx\\
&\qquad+\frac{2}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\mathcal{C}_x}\frac{(1+x)^{k-2s+2r-1}\big(x(2+x)\big)^{-2r+\frac{3}{2}}(1+\frac{2}{x})^{-k+2s-\frac{3}{2}}}{x}\,dx\\
&\quad=\frac{4}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\mathcal{C}_x}x^{k-2r-2s+1}(1+x)^{k-2s+2r-1}(2+x)^{-k-2r+2s-1}\,dx\\
&\qquad+\frac{2}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\mathcal{C}_x}x^{k-2r-2s+2}(1+x)^{k-2s+2r-1}(2+x)^{-k-2r+2s}\,dx.
\end{aligned}$$

这里我们关于 x 应用留数定理。由于根据假设 $r\leq s$ 和 $k\geq 4s-1$，因此有 $k-2s-2r+1\geq k-4s+1\geq 0$。所以，唯一的奇点是

$x=-2$。因此，通过平移 $x\mapsto x-2$，我们得到

$$\begin{aligned}
&4\left\langle x^{k+2r-2s}\right\rangle (x-2)^{k-2r-2s+1}(x-1)^{k+2r-2s-1}\\
&\qquad+2\left\langle x^{k+2r-2s-1}\right\rangle (x-2)^{k-2r-2s+2}(x-1)^{k+2r-2s-1}\\
&=(-1)^k\sum_{\ell=0}^{k-2r-2s+1}2^{k-2r-2s+3-\ell}\binom{k-2r-2s+1}{\ell}\binom{k+2r-2s-1}{\ell-1}\\
&\qquad+(-1)^k\sum_{\ell=0}^{k-2r-2s+2}2^{k-2r-2s+3-\ell}\binom{k-2r-2s+2}{\ell}\binom{k+2r-2s-1}{\ell}\\
&=(-1)^k\sum_{\ell=0}^{k-2r-2s+2}2^{k-2r-2s+3-\ell}\frac{(k-2r-2s+1)!\,(k+2r-2s-1)!}{\ell!^2\,(k-2r-2s+2-\ell)!\,(k+2r-2s-\ell)!}\\
&\qquad\qquad\cdot(-\ell^2+2k+k^2+4r-4r^2-4s-4ks+4s^2).
\end{aligned}$$

将其代回（5.16）后，我们看到需要证明二重求和恒等式

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{\ell=0}^{k-2i}\frac{(4i-4s+1)\,(-1)^{s-1}(1-i)_{s-1}\,(\frac12)_s\,(\frac12)_{i-s}}{(2i-4s+1)\,i!\,(s-1)!}\binom{k-2i}{\ell}\binom{-k+2s-\frac32}{\ell}2^\ell\\
&\quad+\sum_{r=1}^{s}\sum_{\ell=0}^{k-2r-2s+2}(-1)^k2^{k-2r-2s+3-\ell}\frac{2^{4r-3}(2r-\frac12)_{s-r}}{(s-r)!}\\
&\qquad\cdot\frac{(k-2r-2s+1)!\,(k+2r-2s-1)!}{\ell!^2\,(k-2r-2s+2-\ell)!\,(k+2r-2s-\ell)!}\\
&\qquad\qquad\cdot(-\ell^2+2k+k^2+4r-4r^2-4s-4ks+4s^2)=0,\quad(5.17)
\end{aligned}$$

对所有满足 $0<s$ 和 $k\geq 4s-1$ 的整数 k 和 s。借助 Koutschan 的 *Mathematica* 软件包 `HolonomicFunctions` [Kou09], ，这是一项常规任务。简而言之，它允许我们找到关于 k 的一个六阶线性递推式（系数为多项式，且在相关区域内首项系数不为零），而两个二重和都满足该递推式。因此，只要我们能够确认六个初始值，即 $k=4s-1$、$4s$、$4s+1$、$4s+2$、$4s+3$、$4s+4$，就能证明该恒等式。对于 k 的这六个值中的每一个，都可以再次使用软件包 `HolonomicFunctions`，找到关于 s 的一个五阶线性递推式（系数为多项式），而两个（特化后的）二重和都满足该递推式。现在，我们只需验证所有满足下式的数对（k, s）中的恒等式

$$\{(4s+a,s):-1\leq a\leq 4\text{ and }1\leq s\leq 5\},$$

w这很容易做到。更多细节见附录 .

下面证明（5.13）。我们必须证明，对于所有满足$0\leq a<s$、 $k\geq 4s-2a+1$ 且 $j\geq 0$的整数 k、 j、 s、 a，都有

$$\sum_{i=a}^{k-1}c_2(s-a,i-a)\cdot D(k-2i+j,-k+2s-\tfrac12-j)=0.\qquad(5.18)$$

为简化证明，我们注意到只需证明 $j=0$ 的 (5.18)。此外，经过替换 $s\mapsto s+a$、 $i\mapsto i+a$ 和 $k\mapsto k+2a$ 后，我们得到

证明 $j=0$ 的 (5.18) 等价于证明：对于所有满足 $0<s$ 和 $k\geq 4s+1$ 的整数 k 和 s，都有

$$\sum_{i=0}^{k-1} c_2(s,i)\cdot D(k-2i,-k+2s-\tfrac{1}{2})=0. \tag{5.19}$$

具体而言，利用 $c_2(s,i)$ 的定义以及 $D(k,n-1)$ 的公式 (2.2)，这意味着要证明恒等式

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{\ell=0}^{k-2i}\frac{(4i-4s-1)\,(-1)^{s-1}(1-i)_{s-1}\,(\frac{1}{2})_{s+1}\,(\frac{1}{2})_{i-s-1}}{(2i-4s-1)\,i!\,(s-1)!}\binom{k-2i}{\ell}\binom{-k+2s-\frac{1}{2}}{\ell}2^{\ell}\\&-\sum_{i=0}^{k-1}(4i-4s-1)\sum_{r=1}^{s}\frac{2^{4r-1}(2r+\frac{1}{2})_{s-r}\,(2r+\frac{1}{2})_{i-s-r-1}}{(s-r)!\,(i-s-r)!}D(k-2i,-k+2s-\tfrac{1}{2})=0,\end{aligned} \tag{5.20}$$

对所有满足 $0<s$ 和 $k\geq 4s+1$ 的整数 k 和 s 均成立。这里，根据 $D(k-2i,-k+2s-\frac{1}{2})$ 的公式 (2.2)，第二个求和是一个三重求和。我们将把它化简为二重求和。具体来说，利用围道积分表示 (5.9)，其中围道仍如 (5.10) 所示，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{k-1}(4i-4s-1)\frac{(2r+\frac{1}{2})_{i-s-r-1}}{(i-s-r)!}D(k-2i,-k+2s-\tfrac{1}{2})\\&\quad=\sum_{i\geq s+r}(4i-4s-1)\frac{(2r+\frac{1}{2})_{i-s-r-1}}{(i-s-r)!}\frac{1}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\frac{(1+x)^{k-2i}(1+y)^{-k+2s-\frac{1}{2}}}{xy-2}\,dx\,dy\\&\quad=\sum_{i\geq s+r+1}\frac{4\,(2r+\frac{1}{2})_{i-s-r-1}}{(i-s-r-1)!}\frac{1}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\frac{(1+x)^{k-2i}(1+y)^{-k+2s-\frac{1}{2}}}{xy-2}\,dx\,dy\\&\qquad+\sum_{i\geq s+r}\frac{2\,(2r-\frac{1}{2})_{i-s-r}}{(i-s-r)!}\frac{1}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\frac{(1+x)^{k-2i}(1+y)^{-k+2s-\frac{1}{2}}}{xy-2}\,dx\,dy\\&\quad=\frac{4}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\frac{(1+x)^{k-2s-2r-2}(1+y)^{-k+2s-\frac{1}{2}}}{xy-2}\left(1-\frac{1}{(1+x)^2}\right)^{-2r-\frac{1}{2}}dx\,dy\\&\qquad+\frac{2}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\frac{(1+x)^{k-2s-2r}(1+y)^{-k+2s-\frac{1}{2}}}{xy-2}\left(1-\frac{1}{(1+x)^2}\right)^{-2r+\frac{1}{2}}dx\,dy\\&\quad=\frac{4}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\frac{(1+x)^{k-2s+2r-1}\big(x(2+x)\big)^{-2r-\frac{1}{2}}(1+y)^{-k+2s-\frac{1}{2}}}{xy-2}\,dx\,dy\\&\qquad+\frac{2}{(2\pi\mathbf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_x}\int_{\mathcal{C}_y}\frac{(1+x)^{k-2s+2r-1}\big(x(2+x)\big)^{-2r+\frac{1}{2}}(1+y)^{-k+2s-\frac{1}{2}}}{xy-2}\,dx\,dy.\end{aligned}$$

现在，我们对 y 应用留数定理。根据我们对围道 $\mathcal{C}_y$ 的选择，数值 -1 位于围道之外，因此 $y=2/x$ 是 $\mathcal{C}_y$ 内部唯一的奇点。

因此，上述表达式等于

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\mathcal{C}_x}\frac{(1+x)^{k-2s+2r-1}\big(x(2+x)\big)^{-2r-\frac{1}{2}}(1+\frac{2}{x})^{-k+2s-\frac{1}{2}}}{x}\,dx\\
&\qquad+\frac{2}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\mathcal{C}_x}\frac{(1+x)^{k-2s+2r-1}\big(x(2+x)\big)^{-2r+\frac{1}{2}}(1+\frac{2}{x})^{-k+2s-\frac{1}{2}}}{x}\,dx\\
&=\frac{4}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\mathcal{C}_x}x^{k-2r-2s-1}(1+x)^{k-2s+2r-1}(2+x)^{-k-2r+2s-1}\,dx\\
&\qquad+\frac{2}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\mathcal{C}_x}x^{k-2r-2s}(1+x)^{k-2s+2r-1}(2+x)^{-k-2r+2s}\,dx.
\end{aligned}$$

这里我们相对于 x应用留数定理。根据假设，由于 $r\le s$ 和 $k\ge 4s+1$，我们有 $k-2s-2r\ge k-4s>0$。因此，唯一的奇点是 $x=-2$。于是，通过平移 $x\mapsto x-2$，我们得到

$$\begin{aligned}
&4\left\langle x^{k+2r-2s}\right\rangle(x-2)^{k-2r-2s-1}(x-1)^{k+2r-2s-1}\\
&\qquad+2\left\langle x^{k+2r-2s-1}\right\rangle(x-2)^{k-2r-2s}(x-1)^{k+2r-2s-1}\\
&=(-1)^k\sum_{\ell=0}^{k-2r-2s-1}2^{k-2r-2s+1-\ell}\binom{k-2r-2s-1}{\ell}\binom{k+2r-2s-1}{\ell-1}\\
&\qquad+(-1)^k\sum_{\ell=0}^{k-2r-2s}2^{k-2r-2s+1-\ell}\binom{k-2r-2s}{\ell}\binom{k+2r-2s-1}{\ell}\\
&=(-1)^k\sum_{\ell=0}^{k-2r-2s}2^{k-2r-2s+1-\ell}\frac{(k-2r-2s-1)!\,(k+2r-2s-1)!}{\ell!^2\,(k-2r-2s-\ell)!\,(k+2r-2s-\ell)!}\\
&\qquad\qquad\cdot(-\ell^2+k^2-4r^2-4ks+4s^2).
\end{aligned}$$

将其代回（5.20）后，我们看到需要证明二重求和恒等式

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{\ell=0}^{k-2i}\frac{(4i-4s-1)\,(-1)^{s-1}(1-i)_{s-1}\,(\frac{1}{2})_{s+1}\,(\frac{1}{2})_{i-s-1}}{(2i-4s-1)\,i!\,(s-1)!}\binom{k-2i}{\ell}\binom{-k+2s-\frac{1}{2}}{\ell}2^\ell\\
&\quad+\sum_{r=1}^{s}\sum_{\ell=0}^{k-2r-2s}(-1)^{k-1}2^{k-2r-2s+1-\ell}\frac{2^{4r-1}(2r+\frac{1}{2})_{s-r}}{(s-r)!}\\
&\qquad\cdot\frac{(k-2r-2s-1)!\,(k+2r-2s-1)!}{\ell!^2\,(k-2r-2s-\ell)!\,(k+2r-2s-\ell)!}\\
&\qquad\qquad\cdot(-\ell^2+k^2-4r^2-4ks+4s^2)=0,\quad(5.21)
\end{aligned}$$

对于所有满足 $0<s$ 和 $k\ge 4s+1$的整数 k 和 s。该恒等式可以用与（5.17）相同的方法证明，再次使用 Koutschan 的 *Mathematica* 软件包 `HolonomicFunctions`。

Step 5: 行列式 $D_1(k;n)$ 是关于 n 的次数至多为 $\binom{k+1}{2}$ 的多项式。由 (2.2) 可知，$D(k,n-1)$ 是关于 n 的 k 次多项式。将

按照定义展开行列式可知， $D_1(k;n)$ 的次数至多为

$$\max_{\sigma\in S_k}\left(\sum_{i=0}^{k-1}(k-2i+\sigma(i))\right)=\max_{\sigma\in S_k}\left(k^2-\sum_{i=0}^{k-1}i\right)=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Step 6: $D_1(k;\ n)$ 中 $n^{k(k+1)/2}$ 的系数为 $2^{k^2}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{i\ ()_i}$。步骤 5 的论证表明，如果计算各项首项系数所组成的行列式，我们就能得到 $D_1(k;n)$ 的首项系数——即 $n^{k(k+1)/2}$ 的系数。也就是说，我们必须计算

$$\begin{aligned}
\det_{0\le i,j\le k-1}\left(\frac{2^{k-2i+j}}{(k-2i+j)!}\right)&=2^{\binom{k+1}{2}}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{(2k-2i-1)!}\det_{0\le i,j\le k-1}\left((k-2i+j+1)_{k-j-1}\right)\\
&=2^{\binom{k+1}{2}}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{(2k-2i-1)!}\det_{0\le i,j\le k-1}\left((-2i)^{k-j-1}\right)\\
&=2^{\binom{k+1}{2}}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{(2k-2i-1)!}\prod_{0\le i<j\le k-1}((-2i)-(-2j))\\
&=2^{\binom{k+1}{2}+\binom{k}{2}}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{i!}{(2k-2i-1)!}\\
&=2^{k^2}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{(i)_i},
\end{aligned}$$

在从第一行到第二行的步骤中，我们使用了初等列运算，随后的一步只是范德蒙德行列式的求值。□

6. Conclusion

在 [DF21], Di Francesco 最初将阿兹特克三角形引入为一种组合对象：它与 20V 模型的某个构型集合之间存在双射，尽管这一显式双射尚未被找到。现在，我们已经将阿兹特克三角形的这一构造推广开来，并建立了它与其他若干组合对象之间的双射。接下来一个自然的问题是，这些广义阿兹特克三角形如何与 20V 模型重新建立联系，以及能否找到那个显式双射。

尤其是，是否存在某个区域，使得 20V 模型构型与这些广义阿兹特克三角形的多米诺铺砌构成双射？值得注意的是，在 [DF21]Di Francesco 还提出了一个额外的猜想：去掉与 Di Francesco 的$\mathcal{T}_{n,n-k}$ 定义一致的阿兹特克三角形最初的 $k-1$ 行后，其多米诺铺砌数量等于特定五边形区域上的 20V 模型构型数量。事实上，他通过组合方法证明了该猜想对 $k=2$、3 成立（其中 $k=1$ 为整个阿兹特克三角形）。更大的 k 值仍有待解决，而这些情况下的组合证明似乎复杂得多。

我们可以将 $\mathcal{T}_{n,n-k}$——移除了 $k-1$ 行的阿兹特克三角形——视为一个阿兹特克三角形，其中前 $k-1$ 行被强制铺上水平多米诺骨牌。于是，就分拆序列而言，$\mathcal{T}_{n,n-k}$ 的多米诺铺砌对应于定义 3.1 中所述的分拆序列，其中 $\mu=(n,n-1,\dots,1)$，并满足附加条件

$\lambda_j^{(i)} \le n-(k-1)+\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ 对所有 i,j 均成立。因此，虽然我们也可以将 $\mathcal{T}_{n,n-k}$ 的多米诺铺砌解释为分拆序列，但本文并未直接讨论它们。

此外，我们还可以用杨表来重新表述这一结果：$\mathcal{T}_{n,n-k}$ 的多米诺骨牌铺砌与形状为（$n, n-1, \ldots, 1$）、条目为$1 < \overline{1} < 2 < \overline{2} < \cdots < n$的超辛半标准杨表之间存在双射，且需满足额外条件：条目 i 和$\overline{i-1}$ 不得出现在第（$n-k+i$）列之后。图17展示了这一双射的一个示例。

另一个值得探讨的问题，是其他类别的分拆序列、杨表、不相交路径和多米诺铺砌。若对分拆序列施加额外限制，例如上文对$\mathcal{T}_{n,n-k}$所做的限制，我们该如何建立相应的双射？或许更重要的是，我们能否仍然证明一个关于其枚举的公式？对于本文定义的分拆序列，我们未能找到其他能产生“优美”乘积公式的 μ 取值，但能否得到更加广义的公式仍是一个开放问题。

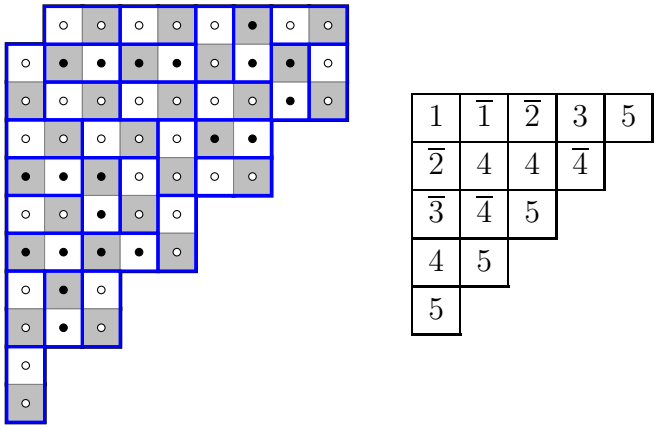


FIGURE 17. $\mathcal{T}_5$的多米诺骨牌铺砌，$_1$ 及其对应的超辛半标准表。

REFERENCES

[Bax89] Rodney J. Baxter. 统计力学中的精确可解模型。Academic Press, Inc. [Har- court Brace Jovanovich, Publishers], 伦敦，1989年。1982年原版的重印本。[BCC17] J´er´emie Bouttier、Guillaume Chapuy 和 Sylvie Corteel。从阿兹特克菱形到金字塔：陡峭铺砌。《美国数学会汇刊》，369(8):5921–5959，2017年。[BK18] Alexey Bufetov 和 Alisa Knizel。矩形阿兹特克菱形的随机多米诺铺砌的渐近性质。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》，54(3):1250–1290，2018年。[CL04] Sylvie Corteel 和 Jeremy Lovejoy。上分拆。《美国数学会汇刊》，356(4):1623–1635，2004年。[Com74] Louis Comtet。高级组合学。D. Reidel Publishing Co.，多德雷赫特，增订版，1974年。有限与无限展开的艺术。[CP06] Filippo Colomo 和 Andrei G. Pronko。正交多项式在六顶点模型中的作用及其组合应用。《物理学杂志A辑》，39(28):9015–9033，2006年。[DF21] Philippe Di Francesco。二十顶点模型与阿兹特克三角形的多米诺骨牌铺砌。《电子组合学杂志》，28(4):论文第4.38号，50页，2021年。[DFG20] Philippe Di Francesco 和 Emmanuel Guitter。具有域壁边界的二十顶点模型与多米诺骨牌铺砌。《电子组合学杂志》，27(2):论文第2.13号，63页，2020年。

[GV85] Ira Gessel 和 G´erard Viennot。二项式行列式、路径与钩长公式。《数学进展》，58(3):300–321，1985年。[Ham97]Ang`ele M. Hamel。辛 Schur 函数和正交 Schur 函数的行列式形式。《加拿大数学杂志》，49(2):263–282，1997年。[Kel74] Stewart B. Kelland。三角格上的二十顶点模型。《澳大利亚物理学杂志》，27:813，1974年12月。[Kin76] Ron C. King。经典群的权重重数。载于《物理学中的群论方法》（第四届国际研讨会，奈梅亨，1975年），《物理学讲义》，第50卷，第490–499页。Springer，柏林，1976年。[Kou09] Christoph Koutschan。整体系统方法的高级应用。博士论文，RISC，约翰·开普勒大学，林茨，2009年。[Kou21] Christoph Koutschan。公告。第九届格路径组合学与应用国际会议，CIRM Luminy，2021年6月。[Kra96] Christian Krattenthaler。超 Schur 函数钩内容公式的双射证明及修正版 jeu de taquin。《电子组合学杂志》，3(2):研究论文14，约24页，1996年。Foata 纪念文集。[Kra98] Christian Krattenthaler。近矩形形状的经典群特征标恒等式。《代数学杂志》，209(1):1–64，1998年。[Kra99] Christian Krattenthaler。高级行列式演算。《Lothar 组合学研讨会》，42:B42q号文章，67页，1999年。Andrews 纪念文集（马拉泰亚，1998年）。[Kup96] Greg Kuperberg。交错符号矩阵猜想的另一种证明。《国际数学研究通知》，(3):139–150，1996年。[Sla66] Lucy J. Slater。广义超几何函数。剑桥大学出版社，剑桥，1966年。[Zei96] Doron Zeilberger。交错符号矩阵猜想的证明。《电子组合学杂志》，3(2):研究论文13，约84页，1996年。Foata 纪念文集。[Zei07] Doron Zeilberger。整体方法，第二部分：自动发现（！）并证明（！！）整体行列式求值。《组合年刊》，11(2):241–247，2007年。

7. Appendix

7.1. 恒等式 (5.17) 的证明。我们将第一个求和中的求和项记为 $U(k,s,i,\ell)$，将第二个求和中的求和项记为 $V(k,s,r,\ell)$，因此，对于所有满足 $0<s$ 和 $k\geq 4s-1$ 的整数 k 和 s，我们需要证明

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{\ell=0}^{k-2i} U(k,s,i,\ell)+\sum_{r=1}^{s}\sum_{\ell=0}^{k-2r-2s+2} V(k,s,r,\ell)=0. \tag{A.1}$$

为此，我们使用 Koutschan 的 $Mathematica$ package`HolonomicFunctions` [Kou09]，找出这两个二重和都满足的递推关系。下文中，我们用 S_k 表示关于 k 的移位算子，也就是说，$S_k\big(g(k)\big):=g(k+1)$；类似地，我们将分别使用变量 i、r 和 ℓ 的移位算子 S_i、S_r 和 S_ℓ。

应用命令

`CreativeTelescoping[Annihilator[`$U(k,s,i,\ell)$`,{`S_k`,`S_i`,`S_ℓ`}],`$S_\ell-1$`,{`S_k`,`S_i`}]`

我们得到算子 $A_j(k,s,i,S_k,S_i)$ 和 $B_j(k,s,i,\ell,S_k,S_i,S_\ell)$，$j=1,2$，其中 A_j是给定项中的一个多项式，而 B_j属于 $\mathbb{Q}(k,s,i,\ell)[S_k,S_i,S_\ell]$，使得

$$A_j(k,s,i,S_k,S_i)U(k,s,i,\ell)+(S_\ell-1)B_j(k,s,i,\ell,S_k,S_i,S_\ell)U(k,s,i,\ell)=0,$$

对于 $j=1$，2。

随后对范围 $0 \le \ell \le k-2i$内的 ℓ 求和。由于这个范围具有自然边界——也就是说，我们同样可以对所有整数 ℓ求和，因为边界是由二项式系数 $\binom{k-2i}{\ell}$造成的——所以第二项对 ℓ的求和是一个望远镜求和，结果为零。因此我们得到

$$A_j(k,s,i,S_k,S_i)\sum_{\ell=0}^{k-2i} U(k,s,i,\ell)=0, \quad \text{for } j=1,2.$$

接下来，我们使用命令

$$\texttt{CreativeTelescoping}[\{A_1(k,s,i,S_k,S_i),A_2(k,s,i,S_k,S_i)\},S_i-1,\{S_k\}]$$

来求出算子 $C(k,s,S_k)$ 和 $D(k,s,i,S_k,S_i)$，其中 C 是给定项的多项式， D 属于 $\mathbb{Q}(k,s,i)[S_k,S_i]$，使得

$$C(k,s,S_k)+(S_i-1)D(k,s,i,S_k,S_i)$$

属于由 $A_1(k,s,i,S_k,S_i)$ 和 $A_2(k,s,i,S_k,S_i)$ 在$\mathbb{Q}(k,s,i)[S_k,S_i]$中生成的左理想。特别地，我们有

$$C(k,s,S_k)\sum_{\ell=0}^{k-2i} U(k,s,i,\ell)+(S_i-1)D(k,s,i,S_k,S_i)\sum_{\ell=0}^{k-2i} U(k,s,i,\ell)=0.$$

如果我们对范围 $0 \le i \le k-1$ 内的所有 i 求和——该范围按照上述含义同样具有自然边界——那么得到

$$C(k,s,S_k)\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{\ell=0}^{k-2i} U(k,s,i,\ell)=0, \tag{A.2}$$

其中算子 $C(k,s,S_k)$ 的形式为

$$C(k,s,S_k)=\sum_{l=0}^{6}\gamma_l(k,s)S_k^l,$$

首项系数为

$$\begin{aligned}\gamma_6(k,s) &= (k+6)(k-4s+7)(2k-4s+7)(2k-4s+11)(2k-4s+13)\\ &\quad\times(k-2s+3)(k-2s+4)(k-2s+6)(425613+518672k+230896k^2\\ &\quad+44800k^3+3200k^4-1084280s-946880ks-272128k^2s\\ &\quad-25600k^3s+1048112s^2+590336ks^2+82432k^2s^2-387328s^3\\ &\quad-96256ks^3+4096k^2s^3-44288s^4-45056ks^4\\ &\quad-4096k^2s^4+67584s^5+16384ks^5-12288s^6).\end{aligned} \tag{A.3}$$

我们注意到，对于 $k \ge 4s-1$， $\gamma_6(k,s)$ 非零，因为较大的不可约因子显然是奇整数，因此不为零。

现在我们转向 (A.1) 中的第二个二重求和。这里的论证会更加复杂，因为对 r 的求和没有自然的下界。不过，我们仍以相同的方式开始。我们应用命令

$$\texttt{CreativeTelescoping[Annihilator[}V(k,s,r,\ell)\ \{S_k,S_r,S_\ell\}\texttt{],}S_\ell-1,\{S_k,S_r\}\texttt{]}$$

求算子 $E_j(k,s,r,S_k,S_r)$ 和 $F_j(k,s,r,\ell,S_k,S_r,S_\ell)$、$j=1$、2，其中 E_j 是给定项中的一个多项式，而 F_j 属于 $\mathbb{Q}(k,s,r,\ell)[S_k,S_r,S_\ell]$，使得

$$E_j(k,s,r,S_k,S_r)V(k,s,r,\ell)+(S_\ell-1)F_j(k,s,r,\ell,S_k,S_r,S_\ell)V(k,s,i,\ell)=0,$$

对于 $j=1$，2。

随后，我们对 ℓ 求和。由于 $V(k,s,r,\ell)$ 的分母中含有 $\ell!$ 和 $(k-2r-2s+2-\ell)!$，因此对 ℓ 求和具有自然的边界。于是，我们得到

$$E_j(k,s,r,S_k,S_r)\sum_{\ell=0}^{k-2r-2s+2}V(k,s,r,\ell)=0,\quad \text{for } j=1,2.$$

接下来，我们使用命令

$$\texttt{CreativeTelescoping}[E(k,s,r,S_k,S_r)\,,S_r-1\,,\{S_k\}]$$

以求得算子 $G(k,s,S_k)$ 和 $H(k,s,r,S_k,S_r)$，其中 G 是由给定项构成的多项式，且 H 属于 $\mathbb{Q}(k,s,r)[S_k,S_r]$，使得

$$G(k,s,S_k)+(S_r-1)H(k,s,r,S_k,S_r)$$

属于由 $E_1(k,s,r,S_k,S_r)$ 和 $E_2(k,s,i,S_k,S_i)$ 在 $\mathbb{Q}(k,s,r)[S_k,S_r]$ 中生成的左理想。特别地，我们有

$$G(k,s,S_k)\sum_{\ell=0}^{k-2r-2s+2}V(k,s,r,\ell)+(S_r-1)H(k,s,r,S_k,S_r)\sum_{\ell=0}^{k-2r-2s+2}V(k,s,r,\ell)=0. \tag{A.4}$$

若对范围 $1\le r\le s$ 内所有 r 将此关系求和，那么由于 $V(k,s,r,\ell)$ 分母中的项 $(s-r)!$，只有上边界是自然的。另一方面，(A.4) 中第二项对 r 求和仍是一个望远镜求和。即使它不完全消失，最终也只有关于 $r=1$ 的一项（带负号）保留下来。更准确地说，我们得到

$$G(k,s,S_k)\sum_{r=1}^{s}\sum_{\ell=0}^{k-2r-2s+2}V(k,s,r,\ell)-\sum_{\ell=0}^{k-2s}H(k,s,1,S_k,S_r)V(k,s,1,\ell)=0. \tag{A.5}$$

将 $H(k,s,1,S_k,S_r)V(k,s,1,\ell)$ 化简为

$$\begin{aligned}H(k,s,1,S_k,S_r)V(k,s,1,\ell)=&\frac{(-1)^k2^{2-\ell+k-2s}(k-2s+3)^2(4s-1)^2\mathrm{Pol}(k,s,\ell)}{(2k-4s+1)(2k-4s+3)(k-2s+1)^2}\\&\times\frac{(k-2s-1)!\,(k-2s+1)!\,(\frac{3}{2})_{s-1}}{\ell!^2\,(k-2s-\ell)!\,(k-2s-\ell+4)!(s-1)!},\end{aligned} \tag{A.6}$$

其中，$\mathrm{Pol}(k,s,\ell)$ 是关于 k,s,ℓ 的一个巨大多项式。原则上，可以利用 Chu–Vandermonde 求和计算此表达式对 ℓ 的求和。然而，再次使用 Koutschan 的 `HolonomicFunctions`，并将其写成如下形式，效率更高

$$\texttt{CreativeTelescoping[Annihilator[}W(k,s,\ell)\ \{S_k\,,S_\ell\}\texttt{],}S_\ell-1,\{S_k\}\texttt{]}$$

其中，$W(k,s,\ell)$ 是 (A.6) 右端的表达式，求算子 $I(k,s,S_k)$ 和 $J(k,s,\ell,S_k,S_\ell)$，使得

$$I(k,s,S_k)W(k,s,\ell)+(S_\ell-1)J(k,s,\ell,S_k,S_\ell)W(k,s,\ell)=0.$$

对 ℓ 求和，得到

$$I(k,s,S_k)\sum_{\ell=0}^{k-2s} W(k,s,\ell)=0.$$

因此，如果我们在（A.5）的两边都应用算子 $I(k,s,S_k)$，便得到（A.1）中第二个二重和所需的递推关系，

$$I(k,s,S_k)G(k,s,S_k)\sum_{r=1}^{s}\sum_{\ell=0}^{k-2r-2s+2} V(k,s,r,\ell)=0. \tag{A.7}$$

利用程序包 `HolonomicFunctions` 的命令 `OreTimes`，最终可得

$$\begin{aligned}
I(k,s,S_k)G(k,s,S_k) &= (18237+21392k+9328k^2+1792k^3+128k^4-45944s\\
&\quad -39104ks-11008k^2s-1024k^3s+34352s^2+18944ks^2+2560k^2s^2\\
&\quad +42752s^3+26624ks^3+4096k^2s^3-105728s^4-45056ks^4\\
&\quad -4096k^2s^4+67584s^5+16384ks^5-12288s^6)\\
&\quad \times(50877+45936k+15472k^2+2304k^3+128k^4-97080s-64192ks\\
&\quad -14080k^2s-1024k^3s+55856s^2+24064ks^2+2560k^2s^2\\
&\quad +73472s^3+34816ks^3+4096k^2s^3-154880s^4-53248ks^4\\
&\quad -4096k^2s^4+83968s^5+16384ks^5-12288s^6)\times C(k,s,S_k),
\end{aligned}$$

因此，$I(k,s,S_k)G(k,s,S_k)$ 是（A.1）中第一个二重和的递推算子的倍数。然而，这个乘法因子显然是一个奇整数，因此可以在（A.7）中约去。由此我们证明了（A.1）中的两个二重和关于 $k>4s-1$ 满足相同的 k 中的递推关系（阶数为 6），即

$$\sum_{l=0}^{6}\gamma_l(k,s)F(k+l,s)=0,$$

其中系数 $\gamma_l(k,s)$ 定义于（5.19）中。

为验证 $k=4s-1,4s,4s+1,4s+2,4s+3,4s+4$ 时的（5.17），可完全按照相同的方法进行。唯一的区别在于，现在要寻找关于 s 的递推关系。因此，在紧接着前面几段所述过程进行的相应计算中，处处都必须将 S_k 换成 S_s，此外还需做一些其他小的修改。事实证明，对于上述 k 的每一种特殊化，（5.17）中的两个二重和都满足一个 5 阶线性递推关系（显然，每种情形中的递推关系各不相同）。

CNRS, Laboratoire IRIF, Université Paris Cité, F-75205 Paris cedex 13, France. WWW: https://www.irif.fr/~corteel/.

Department of Mathematics, University of California Berkeley, Evans Hall, Berke-ley, CA 94720, USA

Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, A-1090 Vienna, Austria. WWW: http://www.mat.univie.ac.at/~kratt.