arXiv:2305.01779v1 [math.MG] 2 May 2023

高斯像测度的唯一性

VADIM SEMENOV

Abstract. 我们证明，若次测度 λ 经由凸体 K得到的高斯像测度与次测度 λ 经由凸体 L 得到的高斯像测度一致，则它们的对偶体 $\boldsymbol{\alpha}_{K^*}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_{L^*}$的径向高斯像映射作为多值映射，相对于 λ几乎处处相等。作为该结果的一个应用，我们证明，在这种情况下，对偶体 K^* 和 L^*在 λ的支集的每个可求长道路连通分支上均相差一个伸缩。此外，我们还给出了径向高斯像映射许多此前未知的性质，其中最值得注意的是其变分利普希茨性质；建立了关于多值映射的一些测度论概念；并且作为补充，说明了在对K 和 L作出额外光滑性假设的情况下，主要的唯一性结论如何由霍普夫定理简洁地推出。

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识 5 3. 径向高斯像映射的性质 8 4. 多值映射及相关测度论 13 5. 主定理的证明 15 6. 应用 22 参考文献 28

日期：2023年5月4日。2010年数学主题分类：52A20，52A38，52A40，35J20，35J96，28A20，28A99。关键词和短语：凸几何、高斯像问题、亚历山德罗夫条件、Monge-Amp`ere 方程、亚历山德罗夫问题。

1. Introduction

高斯像问题的历史始于 Aleksandrov 的论文，他最初提出了这样的问题：是否存在一个具有指定亚历山德罗夫积分曲率（或指定外角值）的凸体（或多面体）。Aleksandrov 通过给出亚历山德罗夫积分曲率（或外角值）存在的充要条件，并证明解在缩放意义下唯一，彻底解决了这一问题。此后，K. J. B¨or¨oczky、E. 卢特瓦克、D. 杨、G. Y. Zhang 和 Y. M. 赵在 [8]中引入了涉及高斯像测度的亚历山德罗夫问题的测度论推广。形式上说，给定任意次测度 λ和一个凸体K，高斯像测度 $\lambda(K, \cdot)$ 是次测度 λ 在径向高斯像映射 $\boldsymbol{\alpha}_K$下的拉回；该映射由凸体 K 的通常高斯映射与 K的径向映射复合而成。事实上，与凸体相关的许多测度都可视为对应不同次测度 λ的高斯像测度。Aleksandrov 定义的积分曲率 [3], 面测度、Aleksandrov-Fenchel-Jessen 测度，以及近年来的对偶曲率测度 [15], 均属于高斯像测度。为对这类测度进行分类，文献 [8]提出了以下问题：

高斯像问题 设 λ 是定义在 S^{n-1} 的勒贝格可测子集上的次测度，且 μ 是 S^{n-1}上的博雷尔测度。对于 λ 和 μ，存在什么必要且充分的条件，使得存在一个原点位于其内部的凸体 K ，满足

$$\mu = \lambda(K, \cdot)? \tag{1.1}$$

如果这样的凸体存在，那么它在多大程度上是唯一的?

许多人针对这一问题建立了相关结果。我们首先提及亚历山德罗夫的一系列论文，他解决了均匀勒贝格测度λ下的问题，见[1] 和 [3]。Oliker [22] 和 Bertrand [7]给出了不同的证明。亚历山德罗夫问题的 L_p 类比问题（具有 λ 均匀勒贝格测度的 L_p 高斯像问题）由 Huang、Lutwak、Yang 和 Zhang 于 [14], 研究，由 Mui 于 [18], 研究，并由 Zhao 于[30]研究。高斯像问题的 L^p 类比问题由 C. 吴、D. 吴和 N. 向在 [29] 中研究，并由 L. 陈、D. 吴和 N. 向在[5] 中研究。

尽管关于将高斯像问题（或其限制性更强的情形，即亚历山德罗夫问题）推广到 L_p 情形已有许多研究成果，但高斯像问题的原始版本仍未得到完全解决。该问题的绝对连续情形在[8]中得到研究。在那里，K.J. B¨or¨oczky、E. 卢特瓦克、D. 杨、G. Y. Zhang 和 Y. M. 赵引入了关于测度 μ 和 λ的一个简单几何条件，称为 μ 和 λ 的亚历山德罗夫关系；研究表明，在 λ满足绝对连续性假设的情况下，该关系是体K 存在的充分条件。此外，他们证明了：如果假设 λ在开集上绝对连续且严格为正，则亚历山德罗夫关系是必要条件，并且解在伸缩意义下唯一。

另一方面，V. Semenov 在 [26], 中研究了高斯像问题的完全离散版本，并引入了弱亚历山德罗夫关系，这是高斯像问题的一项必要假设。研究发现，体的存在对应于这样一个事实：在有限集合上，使指派泛函达到最大值的函数是唯一的；该有限集合由所谓的指派函数构成，这些函数参数化了离散测度 μ 和 λ中权重 λ 到权重 μ 的所有可能指派。随后，对于满足几何边法向无环条件的 μ 和 λ ，证明了解的存在性。结果

表明，对于离散测度，只要解存在，其解体就总是不唯一的；然而，固定μ 和 λ后，若 K 和 L 是解，则它们对应的指派函数相同。事实证明，这恰当地重述了离散高斯像问题的唯一性问题。

为将 [8] 的结果推广到弱亚历山德罗夫关系，V. Semenov 在 μ 离散且λ 绝对连续的情形下，得到了弱亚历山德罗夫关系下高斯像问题解的存在性[25]。是否存在一个体 K，满足 $\mu = \lambda(K, \cdot)$，其中 λ 是绝对连续的，且 μ 与 λ 之间满足弱亚历山德罗夫关系，这个问题仍未解决，可以说是高斯像问题中最重要的未解问题。

在介绍本文的主要结论之前，我们也简要提及一些与高斯像问题正则性相关的工作。P. 关和 Y. 李 在[13] 中，以及 V. Oliker 在 [20] 和 [21]中，研究了原始的亚历山德罗夫问题的正则性。Q. Li、W. Sheng 和 X. Wang 的近期成果也可视为与高斯像问题相关 [17]。最后，关于正则性的更一般观点，可参阅 L. 卡法雷利[4]；S.-Y. 程和 S.-T. 丘 [6]；以及 N. S. Trudinger 和 X.-J. Wang[27] 的相关著作。

在这项工作中，我们希望在最一般的情形下探讨高斯像问题的唯一性问题。正如 [26] 所示，当测度 μ 和 λ 是离散测度时，解体并不唯一。不过，我们发现，可以对其逆径向高斯像映射得到唯一性结论。以下是本文的主要结果。这里， $\mathcal{K}_o^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中包含 0 于内部的凸集的集合。 K^* 是 K的对偶体。用 $\boldsymbol{\alpha}_{K^*}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_{L^*}$ 分别表示体 K^* 和L^*的径向高斯像映射。请注意，次测度是一种将可列可加性放宽为可列次可加性的测度，参见定义4.1。

定理 1.1. 设 $K, L \in \mathcal{K}_o^n$。假设 $\lambda(K, \cdot)$ 和 $\lambda(L, \cdot)$ 是定义在 S^{n-1} 的勒贝格可测子集上的有限博雷尔测度，且对应于球面子测度 λ。那么， $\lambda(K, \cdot) = \lambda(L, \cdot)$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_{K^*}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_{L^*}$ 作为关于次测度 λ的多值映射几乎处处相等。

由于 $\boldsymbol{\alpha}_{K^*}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_{L^*}$ 都是多值映射，因此必须谨慎处理几乎处处相等的多值映射的定义。我们将在第 4节讨论这个问题。定理 1.1 的恰当改述是：当且仅当 $\lambda(K, \cdot) = \lambda(L, \cdot$对于所有 $\forall \omega \subset S^{n-1}$博雷尔集 $\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega) \triangle \boldsymbol{\alpha}_L(\omega)) = 0$，其中 $\triangle$ 表示两个集合的对称差。定理 1.1 还可以表述如下：

$$\begin{gathered} \forall \omega \text{ Borel sets } \lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega)) = \lambda(\boldsymbol{\alpha}_L(\omega)). \\ \Leftrightarrow \\ \forall \omega \text{ Borel sets } \boldsymbol{\alpha}_K(\omega) = \boldsymbol{\alpha}_L(\omega) \text{ up to a } \lambda \text{ measure zero set.} \end{gathered} \tag{1.2}$$

容易看出，这是径向高斯像映射的一种相当特殊的性质。例如，若考虑球面的不同旋转而非 $\boldsymbol{\alpha}_K$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_L$，则对于均匀测度 λ，等式（1.2）并不成立。

在陈述接下来的结果之前，为了采用一种更为熟悉的几何解释，让我们先讨论定理 1.1 背后证明的重要性。我们对定理 1.1的处理方法是，首先在关于的附加光滑性假设下分析唯一性问题

K 和 L。通过一个非平凡的论证，我们成功地将高斯像问题唯一性的研究归结为考察体 K 和 L 的调和平均变分的径向高斯像映射对博雷尔集的像，见定义 3.3 和引理 5.6。结果表明，若 K 和 L是 C^1 严格凸体，则这一研究实质上可归结为恰当地应用霍普夫定理，从而得出定理1.1。

然而，放弃 C^1 严格凸性假设后，径向高斯像映射会突然变成多值映射，这使得将微分拓扑工具应用于该问题变得复杂得多。不过，我们通过证明上述调和平均变分关于球面上集合之间的豪斯多夫距离具有利普希茨性质，成功地仿照了霍普夫定理的应用，见命题3.7。所建立的技术和思想似乎十分重要，因为它们提供了一种将微分拓扑结果应用于正则性极低情形的方法。当研究正则性低于 C^1 的曲面法向量时，研究对象未必具有通常意义下的连续性，且映射可能是多值的；这类情形时常出现，因此这些方法尤其重要。

还要指出，定理1.1 结合径向高斯像映射的连续性以及命题3.1，可得出关于体 K 和 L 的同时法向量的如下连续性结果。这里，u_δ 和$\boldsymbol{\alpha}_{K^*,\,L^*}(u)_\varepsilon$ 分别表示 u 和$\boldsymbol{\alpha}_{K^*}$的外平行集，$L^*$($u$)，即分别将它们加厚 δ 和 ε。形式化定义见（2.14）。sptλ 表示子测度 λ的支撑，见定义6.1。

定理 1.2. 设 $K, L \in \mathcal{K}^n_o$。假设 $\lambda(K,\cdot)$ 和 $= \lambda(L,\cdot)$ 是关于球面勒贝格次测度 λ 的有限博雷尔测度。那么，给定 $u \in \mathrm{spt}\lambda$,

$$\boldsymbol{\alpha}_{K^*,L^*}(u) := \boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u) \cap \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u) \neq \varnothing \tag{1.3}$$

特别地，$\boldsymbol{\alpha}_{K^*,\,L^*}$ 定义在 sptλ 上，是一个连续映射。也就是说，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得对于任意 $u \in \mathrm{spt}\lambda$

$$\boldsymbol{\alpha}_{K^*,L^*}(u_\delta) \subset \boldsymbol{\alpha}_{K^*,L^*}(u)_\varepsilon. \tag{1.4}$$

特别地，可以将此视为与 $\boldsymbol{\alpha}_{K^*}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_{L^*}$ 相等这一结论非常相似的陈述。为此，考虑实数轴上的两个凸函数 f 和 g。设 ∂f 和 ∂g 是它们的次微分映射（次导数），并假设对于任意 $x \in \mathbb{R}$，都有 $\partial f(x) \cap \partial g(x) \neq \varnothing$。那么，$f$ 与 g 相差一个常数。本质上，这就是说，凸函数右导数的积分必须与凸函数左导数的积分相等。虽然没有关于这一结果的参考文献，但可以参见 [23] 中的推论 24.2.1。特别地，这意味着对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$\partial f(x) = \partial g(x)$。要看出其中的相似之处，应将体 K 和 L 的逆高斯像映射视为凸体 K 和 L 的支撑函数的梯度。

注意，对于任意凸体 K 和 L，$\boldsymbol{\alpha}_K$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_L$ 在勒贝格零测集之外均为奇异值。因此，若 spt$\lambda = S^{n-1}$，则在勒贝格零测集 $\boldsymbol{\alpha}_{K^*}$ 之外，$u(\cap \boldsymbol{\alpha}_{L^*})\, u(\neq \varnothing)$ 意味着 $\boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u) = \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u)$，这立即证明了 K 与 L 除缩放外相等。这正是 [8] 以及 Aleksandrov [1], [2], [3] 的相关工作中确立的唯一性结果。

以不太正式的语言来说，定理 1.1 和定理 1.3 声称，如果 $\lambda(K,\ \cdot) = \lambda(L,\ \cdot)$，那么在法向量集合具有正测度的部分，体在缩放意义下“相等”；而在法向量测度为零的边界处，我们可以对体作任意变形。对此直观理解的正式表述见下一个定理。这里，sptλ 我们

表示子测度 λ的通常支集，见定义 6.1。可求长路径连通集的正式定义见定义 6.3。

定理 1.3. 设 $K, L \in \mathcal{K}_o^n$. 假设 $\lambda(K,\cdot) = \lambda(L,\cdot)$ 是关于球面子测度 λ 的有限博雷尔测度，定义在 S^{n-1} 的勒贝格可测子集上。那么，在每个可求长道路连通分支 $D \subset \mathrm{spt}\lambda$ 上，K^* 和 L^* 相差一个伸缩因子。或者，对于每个 $v_1, v_2 \in D$，我们有

$$\frac{h_K(v_1)}{h_L(v_1)} = \frac{h_K(v_2)}{h_L(v_2)}, \tag{1.5}$$

其中，h_K 和 h_L 分别表示 K 和 L的支撑函数。

备注。特别地，可以从切体的角度来理解这一点。我们还注意到，S^{n-1} 上的任意连通开集自动是可求长道路连通的。△

如前所述，若 λ 在开集上为正，则定理 1.3 表明，在 [8] 中得到的高斯像问题的解唯一（相差一个伸缩因子），亚历山德罗夫问题的解也唯一（相差一个伸缩因子）。这也印证了关于分别缩放 [25], 中各部分的直观说法，见第 1 节；并且意味着指派泛函唯一，见 [26]中的命题 5.3。

定理1.3 自然引出一个问题：同样的结论能否适用于任意连通集 $D \subset \mathrm{spt}\lambda$，而不必要求其可求长道路连通？问题在于，$\lambda$的支集可能表现出病态行为，具有分形性质。作为类似行为的例证，可以看一下惠特尼精妙的例子：一个 C^1函数 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足 $\nabla f = 0$，定义在路径连通集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上，并且 f 在 D上不是常数。详见 [28] 。我们将在第6节开头讨论这一问题及其他复杂情况。径向高斯像映射是否也会出现类似现象，将是一个很有意思的问题。也就是说，能否构造一个测度 λ，其支集为连通集 D，且 K^* 不是 L^* 在 D上的数乘变换?

最后，为结束引言，我们简要介绍后续章节。第3 节的主要结果是径向高斯像的变分利普希茨连续性，即命题3.7，这是前文所述霍普夫定理仿效证明中的关键环节。第4节建立了多值映射的测度论概念，特别讨论了多值映射几乎处处等价的不同可能定义。我们在第1.1 节证明定理5。一般体与 C^1 严格凸体的证明有所不同：前者使用引理5.7 而非引理5.6。引理5.6 使用霍普夫定理，而引理5.7 则依赖第3.7节中的变分利普希茨连续性结果——命题3。特别是，只关心 C^1 严格凸情形的读者可以跳过第3 节和第4 节，需要时再查阅。第6节将转向定理1.1 的应用，并推出定理1.2 和定理1.3。

2. Preliminaries

用 S^{n-1} 表示 $\mathbb{R}^n$中以 0 为中心的单位球面。用 $\mathcal{K}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体集合（即 $\mathbb{R}^n$ 中具有非空内部的紧凸子集）。用 $\mathcal{K}_o^n \subset \mathcal{K}^n$ 表示内部包含原点的凸体。如果 ∂ 紧邻集合（如 ∂K），则表示该集合的拓扑边界。如果 ∂ 紧邻凸函数（如 ∂f），则表示次微分。给定两个集合 A、B，用 $A \triangle B$ 表示其

对称差:

$$A\triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A. \tag{2.1}$$

给定 $K \in \mathcal{K}_o^n$，设 $x \in \partial K$ 为一个边界点。x 处的法锥定义为

$$N(K,x) = \{v \in S^{n-1} : (y-x)\cdot v \le 0 \text{ for all } y \in K\} \tag{2.2}$$

K 的径向映射 $r_K : S^{n-1} \to \partial K$ 定义在 $u \in S^{n-1}$ 上，其定义为 $r_K(u) = ru \in \partial K$，其中 $r > 0$。对于 $\omega \subset S^{n-1}$，ω 的径向高斯像定义为

$$\boldsymbol{\alpha}_K(\omega) = \bigcup_{x \in r_K(\omega)} N(K,x) \subset S^{n-1}. \tag{2.3}$$

径向高斯像 $\boldsymbol{\alpha}_K$ 将 S^{n-1} 中的集合映射为 S^{n-1}中的集合。除去一个球面勒贝格零测集，多值映射 $\boldsymbol{\alpha}_K$ 是单值的。众所周知，$\boldsymbol{\alpha}_K$ 将博雷尔可测集映射为勒贝格可测集，并将闭集映射为闭集。关于这两个结果，参见[24]。我们将 $\boldsymbol{\alpha}_K$ 限制为相应单值映射后的映射记作 α_K。更多细节，参见[8]。

设 λ 是定义在球面勒贝格可测集上的次测度 S^{n-1} （见定义4.1），且 $K \in \mathcal{K}_o^n$。那么 $\lambda(K, \cdot)$，经 K得到的高斯像测度，是通过映射 λ $\boldsymbol{\alpha}_K$将 $\omega \subset S^{n-1}$拉回而定义的次测度。也就是说，对每个博雷尔集

$$\lambda(K,\omega) := \lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega)). \tag{2.4}$$

若 μ 是定义在 S^{n-1}的博雷尔（勒贝格）集上的测度（或次测度），我们就称其为博雷尔（勒贝格）测度（或次测度）。一般而言，给定一个勒贝格测度λ 和 $K \in \mathcal{K}_o^n$，可能会出现 $\lambda(K, \cdot)$ 不是测度的情况。例如，参见 [26]。若 λ 绝对连续，$\lambda(K, \cdot)$ 总是博雷尔测度 [8]。

径向函数 $\rho_K : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ 定义如下:

$$\rho_K(u) = \max\{a : au \in K\}. \tag{2.5}$$

在这种情况下，$r_K(u) = \rho_K(u)u$。支撑函数定义为

$$h_K(x) = \max\{x \cdot y : y \in K\}. \tag{2.6}$$

对于 $K \in \mathcal{K}_o^n$，我们将其极体 K^* 定义为支撑函数为 $h_{K^*} := \frac{1}{\rho_K}$的凸体。我们用 r_K 表示以 o 为中心且包含于 K 中的最大球的半径。同样地，记 R_K 为以 o为中心且包含 K 的最小球的半径。显然，$r_K \le R_K$。以 K 为支集、外单位法向量为 $v \in S^{n-1}$ 的支撑超平面定义为

$$H_K(v) = \{x : x \cdot v = h_K(v)\}. \tag{2.7}$$

我们将使用以下关于超平面和半空间的记号

$$\begin{aligned} H^-(\alpha, v) &:= \{x : x \cdot v \le \alpha\} \\ H^+(\alpha, v) &:= \{x : x \cdot v \ge \alpha\} \\ H(\alpha, v) &:= \{x : x \cdot v = \alpha\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

我们用 $F(K, v)$表示 K 沿 v方向的面。也就是说,

$$F(K,v) := H_K(v) \cap K. \tag{2.9}$$

我们将 $\omega \subset S^{n-1}$ 的反向径向高斯像映射定义为

$$\boldsymbol{\alpha}_K^*(\omega) = \{r_K^{-1}(x) \mid x \in \partial K \text{ and } x \in H_K(v) \text{ for some } v \in \omega\}. \tag{2.10}$$

文献 [15], 证明了，若$K \in \mathcal{K}_o^n$ 则对于任意 $\omega \subset S^{n-1}$， $\boldsymbol{\alpha}_K^*$（ω）$= \boldsymbol{\alpha}_{K^*}$（$\omega$）。此后我们将直接使用这一事实，不再特别说明。

对于 $\omega \subset S^{n-1}$，将 coneω 定义为由 ω 生成的锥，即

$$\operatorname{cone}\omega = \{tu : t \geq 0 \text{ and } u \in \omega\}, \tag{2.11}$$

并将 $\hat{}\omega$ 定义为由 ω 生成的受限锥，即

$$\hat{\omega} = \{tu : 0 \leq t \leq 1 \text{ and } u \in \omega\}. \tag{2.12}$$

若由 ω 生成的锥是 $\mathbb{R}^n$的一个非空、真凸子集，则称 $\omega \subset S^{n-1}$ 为球面凸集。因此，S^{n-1} 中的球面凸集非空，且总包含于 S^{n-1}的某个闭半球内。若 $\omega \subset S^{n-1}$ 是具有非空内部的球面凸集，则称其为球面凸体。给定包含于某个闭半球内的 $\omega \subset S^{n-1}$，其极集 ω^* 定义为:

$$\omega^* = \bigcap_{u \in \omega} \{v \in S^{n-1} : u \cdot v \leq 0\}. \tag{2.13}$$

注意，极集总是凸的。若 $\omega \subset S^{n-1}$ 是闭集，则将其外平行集 ω_α 定义为

$$\omega_\alpha = \bigcup_{u \in \omega} \{v \in S^{n-1} : u \cdot v > \cos\alpha\}. \tag{2.14}$$

用 $\bar{\omega}$ 表示 ω 的闭包，用 $\mathring{\omega}$ 表示其内部。

我们定义距离球面 d 上的 S^{n-1} 为弧长距离。也就是说，给定 u、$v \in S^{n-1}$:

$$d(u,v) = \|u - v\|_{S^{n-1}} := \arccos(uv) \tag{2.15}$$

类似地，我们将集合 $\omega \subset S^{n-1}$ 与点 $u \in S^{n-1}$ 之间的距离定义为:

$$d(u,\omega) := \inf\{d(u,v) \mid v \in \omega\} \tag{2.16}$$

我们将 ω_1与 $\omega_2 \subset S^{n-1}$ 之间的豪斯多夫距离定义为

$$d_H(\omega_1,\omega_2) := \max(\sup_{u \in \omega_1} d(u,\omega_2), \sup_{u \in \omega_2} d(\omega_1,u)) \tag{2.17}$$

球面 S^{n-1} 上的任意球面勒贝格次测度 μ 都会在该球面上的博雷尔集族上定义一个对称差伪度量d_μ。集合 A 到 B 的距离为 $\mu(A\triangle B)$。我们将此度量记为:

$$d_\mu(A,B) := \mu(A,B). \tag{2.18}$$

接下来的两个定义将在第3节中出现。不过，为方便读者，我们在此重述。给定 $t \in [0,1]$，我们将 K、$L \in \mathcal{K}_o^n$的调和平均定义为

$$K \hat{+}_t L := ((1-t)K^* + tL^*)^*. \tag{2.19}$$

用 P： $\mathbb{R}^n \to S^{n-1}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 在 S^{n-1}上的投影。给定 $t \in [0,1]$，我们将包含在同一开半球内的球面凸集 ω_1、$\omega_2 \in S^{n-1}$ 的均值定义为:

$$\omega_1 \tilde{+}_t \omega_2 := \{P((1-t)u + tv) \mid u \in \omega_1, v \in \omega_2\}. \tag{2.20}$$

我们参考 Schneider 的著作 [24], Gruber [12] 和 Gardner [11] 作为凸几何经典结果的参考资料。

3. Properties of the Radial Gauss Image Map

如第 1 节所述，给定体 $K \in \mathcal{K}_o^n$，径向高斯像 $\boldsymbol{\alpha}_K$将 S^{n-1} 的集合映射为 S^{n-1} 的集合，且可能不是单值的。因此，我们需要对这类映射的连续性给出某种替代表述。回顾凸函数的次微分的连续性：若 f 是一个正常的凸函数，$x_i \to x$ 且对于 $x_i' \in \partial f(x_i)$，$x_i' \to x'$则 $x' \in \partial f(x)$。（参见 [23]）。我们为径向高斯像映射建立类似的连续性性质。

命题 3.1（径向高斯像映射的连续性）。给定体 $K \in \mathcal{K}_o^n$，设 u_i是 S^{n-1} 上的一列点，且收敛于 $u \in S^{n-1}$。设 n_i 是S^{n-1} 上的一列点，使得 $n_i \in \boldsymbol{\alpha}_K(u_i)$。那么

$$d(n_i, \boldsymbol{\alpha}_K(u)) \to 0 \tag{3.1}$$

此外，

$$d_H(\boldsymbol{\alpha}_K(u_\varepsilon), \boldsymbol{\alpha}_K(u)) \to 0 \ \ as\ \varepsilon \to 0. \tag{3.2}$$

备注。若用豪斯多夫距离替代 d，则此结论不成立。 △

证明。假设（3.1）不成立。那么，存在一个 $\varepsilon > 0$ 以及一个子序列 n_{i_j} 使得d（n_{i_j}，$\boldsymbol{\alpha}_K$（u））$> \varepsilon$。为简化记号，我们假设这就是原序列n_i。我们将通过构造 n_i 的一个子序列，使其收敛到$\boldsymbol{\alpha}_K$（u），从而得到矛盾。

首先，我们注意到，由于 $n_i \in \boldsymbol{\alpha}_K(u_i)$，我们有 $u_i \in \boldsymbol{\alpha}_{K^*}(n_i)$。因此，$r_{K^*}(n_i) \in F(K^*, u_i) = \partial h(K^*, u_i)$，其中 $\partial h(K^*, u_i)$ 是 h_{K^*} 在点 u_i 处的次微分。关于最后一个等式，参见 [24], 定理 1.7.4。令 $x_i := r_{K^*}(n_i) \in \partial K^*$。我们有 $x_i \in \partial h(K^*, u_i)$。

由于 ∂K^* 是紧的，对于 $x_i \in \partial K^*$，存在收敛到某个 $x \in \partial K^*$ 的子序列 x_{i_j}。由于次微分的连续性，$x_i \in \partial h(K^*, u_i)$，我们得到 $x \in \partial h(K^*, u) = F(K^*, u)$，因此，$u \in \boldsymbol{\alpha}_{K^*}(r_{K^*}^{-1}(x))$。所以，$r_{K^*}^{-1}(x) \in \boldsymbol{\alpha}_K(u)$。现在，对于子序列$n_{i_j} = r_{K^*}^{-1}(x_{i_j})$，由于 $x_{i_j} \to x$，我们得到 $n_{i_j} \to r_{K^*}^{-1}(x)$；由于径向映射是双 Lipschitz 的，因此有 $d(n_{i_j}, \boldsymbol{\alpha}_K(u)) \to 0$。由于对所有 i，$d(n_i, \boldsymbol{\alpha}_K(u)) > \varepsilon$，我们得到矛盾。

我们已经证明了 (3.1)。现在进行最后一部分，假设结论不成立。由于 $u \in u_\varepsilon$ there exist$\delta > 0$and a sequence of $\varepsilon_i$such that there exist $n_i \in \boldsymbol{\alpha}_K(u_{\varepsilon_i})$ for which $d(n_i, \boldsymbol{\alpha}_K(u)) > \delta$。令 $u_i \in u_{\varepsilon_i}$be such that $n_i \in \boldsymbol{\alpha}_K(u_i)$。由于 $u_i \to u$，由 (3.1) 我们得到 $d(n_i, \boldsymbol{\alpha}_K(u)) \to 0$，这就产生了矛盾。

□

注意，对于 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和博雷尔集 $\omega \subset S^{n-1}$，我们不一定有 $\partial \boldsymbol{\alpha}_K(\omega) = \boldsymbol{\alpha}_K(\partial\omega)$。例如，令 K 为一个正方体，$\omega = \{v\}$ 为一个指向该正方体顶点的向量 v。那么 $\partial \boldsymbol{\alpha}_K(\omega) = \partial \boldsymbol{\alpha}_K(v)$ $\boldsymbol{\alpha}_K(v) = \boldsymbol{\alpha}_K(\partial\omega)$。我们得到以下命题：

命题 3.2. 对于任意凸体 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和任意博雷尔集 $\omega \subset S^{n-1}$ $\partial \boldsymbol{\alpha}_K(\omega) \subset \boldsymbol{\alpha}_K(\partial\omega)$。

证明。假设 $\partial \boldsymbol{\alpha}_K(\omega)$ 非空。令 $n \in \partial \boldsymbol{\alpha}_K(\omega)$。那么，存在一个向量序列 $n_i \in S^{n-1}$，使得 $n_i \notin \boldsymbol{\alpha}_K(\omega)$ 收敛到 n。令 u_i 为任意满足下述条件的序列

$u_i \in \boldsymbol{\alpha}_K^{-1}(n_i)$。注意 $u_i \notin \omega$。由紧致性，u_i 的某个子序列 u_{i_j} 收敛到某个$u \in S^{n-1}$。那么，由 $\boldsymbol{\alpha}_K$ 的连续性和命题 3.1，可得 $n \in \boldsymbol{\alpha}_K(u)$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_K(u)$ 是闭集。由于 $u_i \notin \omega$，我们有 $u \notin \mathring{\omega}$。

假设 $u \notin \partial\omega$，否则结论已得。类似地，我们得到序列 $u'_{i_j} \to u'$，其中$u'_{i_j} \in \omega$ 且 $n \in \boldsymbol{\alpha}_K(u')$。也假设 $u' \notin \partial\omega$，否则结论已得。现在有两个点 u、u'，它们具有相同的法向量 n，且满足 $u \in S^{n-1} \setminus \bar{\omega}$ 和 $u' \in \mathring{\omega}$。由于 $F(K,n)$ 是一个凸子集，我们得到 $r_K^{-1}(F(K,n))$ 是一个包含向量 u、u' 的球面凸集。因此，n 垂直于 u 和 u' 的任意球面凸组合。由于 $u \in S^{n-1} \setminus \bar{\omega}$ 和 $u' \in \mathring{\omega}$，从 u 到 u' 的弧经过 $\partial\omega$，因此 $n \in \boldsymbol{\alpha}_K(\partial\omega)$。□

我们回顾两个体的调和平均的定义。该定义可见于[10]，或较近期见于 [14]。我们还注意到，给定向量 u，$\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(u)$ 对于所有 t均包含于同一个开半球中。

定义 3.3。给定 $t \in [0,1]$，我们将 K、$L \in \mathcal{K}_o^n$ 的调和平均定义为

$$K\hat{+}_t L := ((1-t)K^* + tL^*)^*. \tag{3.3}$$

事实证明，径向高斯像映射在调和平均变分下表现得尤其良好。在命题 3.7 中，我们将建立这种变分的利普希茨性质。不过，需要指出的是，如果愿意将定理 1.1 限制于 C^1 具有严格凸对偶体的凸体，那么这些性质对于定理的证明并非必要。如果读者只关心这一情形，可以直接阅读下一节。

我们将包含于同一个开半球中的凸集的平均定义如下：

定义 3.4。给定 $t \in [0,1]$，我们将包含于同一个开半球中的球面凸集 ω_1、$\omega_2 \in S^{n-1}$ 的平均定义为：

$$\omega_1 \tilde{+}_t \omega_2 := \{P((1-t)u + tv) \mid u \in \omega_1, v \in \omega_2\}, \tag{3.4}$$

其中 $P\colon \mathbb{R}^n \to S^{n-1}$ 是一个投影。

一般而言，对于开半球内的两点 u_1、$u_2 \in S^{n-1}$，$u_1 \tilde{+}_t u_2$ 是经过 u_1 和 u_2 的测地线段的参数化。请注意，这不是弧长参数化。

接下来，我们建立若干恒等式，表明可以将 $\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(\omega)$ 看作沿测地线段从 $\boldsymbol{\alpha}_K(\omega)$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_L(\omega)$ 的一种变化。

命题 3.5. 设 K、$L \in \mathcal{K}_o^n$。令 $\omega \subset S^{n-1}$ 为包含在某个开半球内的球面凸集，并令 u 为一个单位向量。则以下恒等式成立：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(u) = \{P\big((1-t)v_1 + tv_2\big) \mid v_1 \in F(K^*,u), v_2 \in F(L^*,u)\}$
(2) $\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_0 L}(\omega) = \boldsymbol{\alpha}_K(\omega)\tilde{+}_0\boldsymbol{\alpha}_L(\omega) = \boldsymbol{\alpha}_K(\omega)$
(3) $\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_1 L}(\omega) = \boldsymbol{\alpha}_K(\omega)\tilde{+}_1\boldsymbol{\alpha}_L(\omega) = \boldsymbol{\alpha}_L(\omega)$
(4) $\bigcup_{t\in(0,1)} \boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(\omega) = \bigcup_{u\in\omega}\bigcup_{t\in(0,1)} \boldsymbol{\alpha}_K(u)\tilde{+}_t\boldsymbol{\alpha}_L(u)$

备注。虽然很容易想到 $\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(u) = \boldsymbol{\alpha}_K(u)\tilde{+}_t\boldsymbol{\alpha}_L(u)$ 对任意 $t \in [0,1]$ 都成立，但一般情况下并非如此。见（3.7）。 △

证明。第二个和第三个恒等式可直接由定义得出。由于对于任意凸体 C, D: $F(C+D,u) = F(C,u) + F(D,u)$，我们得到第一个恒等式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(u) = \boldsymbol{\alpha}^*_{(K\hat{+}_t L)^*}(u) &= \boldsymbol{\alpha}^*_{(1-t)K^*+tL^*}(u)\\ &= P\circ F((1-t)K^*+tL^*,u)\\ &= P((1-t)F(K^*,u)+tF(L^*,u))\\ &= \{P\big((1-t)v_1+tv_2\big) \mid v_1\in F(K^*,u), v_2\in F(L^*,u)\}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

对于最后一种情况，我们注意到 $\tilde{+}$ 和 $\hat{+}$ 只是定义了不同的弧长参数化，因此对于某些 t，对应的像可能不一致，但对所有$t\in(0,1)$ 的并集而言，它们是一致的。更正式地说，由（3.5）可得：

$$\begin{aligned}\bigcup_{t\in(0,1)} \boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(\omega) &= \bigcup_{u\in\omega}\bigcup_{t\in(0,1)} \{P\big((1-t)v_1+tv_2\big) \mid v_1\in F(K^*,u), v_2\in F(L^*,u)\}\\ &= \bigcup_{u\in\omega}\bigcup_{\substack{v_1\in F(K^*,u)\\ v_2\in F(L^*,u)}}\bigcup_{t\in(0,1)} P((1-t)v_1+tv_2)\end{aligned} \tag{3.6}$$

然而，由于 $\frac{v_1}{\|v_1\|}$ 和 $\frac{v_1}{\|v_1\|}$ 包含在同一个开半球内，我们有：

$$\bigcup_{t\in(0,1)} P((1-t)v_1+tv_2) = \bigcup_{t\in(0,1)} P((1-t)\frac{v_1}{\|v_1\|}+t\frac{v_2}{\|v_2\|}) \tag{3.7}$$

同样，我们注意到，上述结论对于特定的 t 未必成立，但对于 $t\in(0,1)$ 的并集则成立。因此，（3.6）意味着

$$\bigcup_{t\in(0,1)} \boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(\omega) = \bigcup_{u\in\omega}\bigcup_{\substack{v_1'\in\boldsymbol{\alpha}^*_{K^*}(u)\\ v_2'\in\boldsymbol{\alpha}^*_{L^*}(u)}}\bigcup_{t\in(0,1)} P((1-t)v_1'+tv_2') \tag{3.8}$$

其中 $v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ 和 $v_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|}$。回顾 $\tilde{+}$ 的定义，由最后一个等式可得第三个结论。□

现在我们将建立 $\tilde{+}$ 和 $\hat{+}$的利普希茨性质。

引理 3.6. 给定 $v\in S^{n-1}$ 和 $\alpha>0$，设给定非零的 u_1, u_2，满足 $\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}\in v_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$。那么 $g(t): [0,1]\to P((1-t)u_1+tu_2)$ 关于球面上的距离是 Lipschitz 连续的，其常数为 $L = \frac{2}{\sin(\alpha)}\max(\frac{\|u_1\|}{\|u_2\|}, \frac{\|u_2\|}{\|u_1\|})$。也就是说，

$$d(g(t_1), g(t_2)) \le L\|t_1-t_2\| \tag{3.9}$$

证明. 若 $\frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_2}{\|u_2\|}$，则命题显然成立，因为 $g(t)$ 是常数。否则，不失一般性，设 $\|u_1\|\le\|u_2\|$。令 O 为坐标原点，并令$v(t) := (1-t)u_1+tu_2$。注意，$g(t) = P(v(t))$。考虑 $\mathbb{R}^n$中的三角形，其顶点为 O、u_1 和 $v(t)$。令 θ 为与边 $[O\ v(t)]$ 相对的角，an $\gamma(t)$ 是该三角形中与边 $[u_1, v(t)]$相对的角。

由于 $u_1, u_2\in v_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$，我们有：当 t 从 0 增至 1 时，γ 从 0 增至某个小于 $\pi-2\alpha$ 的角 $\gamma(1)$。由于 $\|u_1\|\le\|u_2\|$ 且 $\gamma(1)<\pi-2\alpha$，我们得到 $\theta>\alpha$。显然，$\theta<\pi$。注意到 $\gamma(t) = d(g(0)\ g(t))$。我们还注意到 $\|u_1-v(t)\| = t\|u_1-u_2\|$。

现在，来自 由三角形 $[O, u_1, v(t)]$ 的正弦定理，结合 $0 < t \leq 1$，我们得到：

$$\begin{aligned} \frac{\|u_1 - v(t)\|}{\sin(\gamma(t))} &= \frac{\|u_1\|}{\sin(\pi - \theta - \gamma(t))} \Leftrightarrow \\ t\|u_1 - u_2\| &= \|u_1\| \frac{\sin(\gamma(t))}{\sin(\pi - \theta - \gamma(t))} \Leftrightarrow \\ t\|u_1 - u_2\| &= \|u_1\| \frac{\sin(\gamma(t))}{\sin(\theta + \gamma(t))} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Note 最后一个方程对 $t = 0$ 显然成立，因此它对所有 $t \in [0, 1]$ 都成立 .

令 $f(t, \gamma) := t\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{R}^n} - \|u_1\| \sin(\gamma) \sin(\theta + \gamma)$。由于 θ 和 $\gamma(1)$ 是非退化三角形中的两个角，$0 < \gamma(t) + \theta < \pi$ 对 $t \in [0, 1]$ 成立，因此对于任意 $t \in [0, 1]$，$f(t, \gamma)$ 在 $(t, \gamma(t))$ 附近连续可微。此外，对于满足 $t \in [0, 1]$ 的 $(t, \gamma(t))$：

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \gamma} &= -\|u_1\| \frac{\cos(\gamma)\sin(\theta + \gamma) + \sin(\gamma)\cos(\theta + \gamma)}{\sin^2(\theta + \gamma)} \\ &= -\|u_1\| \frac{\sin(\theta + \gamma - \gamma)}{\sin^2(\theta + \gamma)} \\ &= -\|u_1\| \frac{\sin(\theta)}{\sin^2(\theta + \gamma)} \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned} \tag{3.11}$$

因此，利用隐函数定理和 $\|u_1\| \leq \|u_2\|$，我们得到：

$$\begin{aligned} \gamma'(t) = \frac{\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{R}^n}}{\|u_1\|} \frac{\sin^2(\theta + \gamma(t))}{\sin(\theta)} &\leq \frac{2\|u_2\|}{\|u_1\|} \frac{\sin^2(\theta + \gamma(t))}{\sin(\theta)} \Leftrightarrow \\ \gamma'(t) \leq \frac{2\sin^2(\theta + \gamma(t))}{\sin(\theta)} \max\left(\frac{\|u_1\|}{\|u_2\|}, \frac{\|u_2\|}{\|u_1\|}\right) & \end{aligned} \tag{3.12}$$

注意，最后一个方程同样对 $\|u_1\| \geq \|u_2\|$ 成立。

我们回顾一下，$\alpha < \theta < \pi$ 和 $0 \leq \gamma < \pi - 2\alpha$。现在分析两种情况。首先，假设 $\theta \leq \pi - \alpha$。于是我们得到

$$\frac{2\sin^2(\theta + \gamma(t))}{\sin(\theta)} \leq \frac{2}{\sin(\alpha)} \tag{3.13}$$

结合（3.12）和（3.13），结论便得证。现在假设 $\theta > \pi - \alpha$。特别地，$\theta > \frac{\pi}{2}$。结合 $0 < \gamma(t) + \theta < \pi$ 可得

$$\frac{\sin(\theta + \gamma)}{\sin(\theta)} \leq 1 \tag{3.14}$$

因此，对于这种情况，（3.12）意味着以下结论：

$$\gamma' = \frac{2\sin^2(\theta + \gamma(t))}{\sin(\theta)} \max\left(\frac{\|u_1\|}{\|u_2\|}, \frac{\|u_2\|}{\|u_1\|}\right) \leq 2\max\left(\frac{\|u_1\|}{\|u_2\|}, \frac{\|u_2\|}{\|u_1\|}\right) < \frac{2}{\sin(\alpha)} \max\left(\frac{\|u_1\|}{\|u_2\|}, \frac{\|u_2\|}{\|u_1\|}\right) \tag{3.15}$$

□

下一个命题至关重要。

命题 3.7。给定任意 $\omega \subset S^{n-1}$、$\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(\omega) : [0,1] \to S^{n-1}$ 是从 t 到赋予豪斯多夫距离 d_H 的球面上集合的 Lipschitz 连续映射：

$$d_H(\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_{t_1}L}(\omega), \boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_{t_2}L}(\omega)) \leq 2\max(\frac{R_K}{r_K}, \frac{R_L}{r_L})\max(\frac{R_K}{r_L}, \frac{R_L}{r_K})|t_1 - t_2|. \tag{3.16}$$

证明。假设 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$。令 b 为满足以下条件的常数：

$$0 < b < \min\{\frac{r_K}{R_K}, \frac{r_L}{R_L}\} \tag{3.17}$$

根据豪斯多夫距离的性质：

$$\begin{aligned} &d_H(\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_{t_1}L}(\omega), \boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_{t_2}L}(\omega)) \leq \\ &d_H(\bigcup_{u\in\omega} \boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_{t_1}L}(u), \bigcup_{u\in\omega} \boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_{t_2}L}(u)) \leq \\ &\sup_{u\in\omega} d_H(\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_{t_1}L}(u), \boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_{t_2}L}(u)) \end{aligned} \tag{3.18}$$

固定 $u \in S^{n-1}$ 我们将证明 $\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(u)$ 是 Lipschitz 的，其常数与方程 (3.16) 中的相同。于是，上述方程 (3.18) 将推出所要证明的结论。由命题 3.5可得：

$$\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(u) = \bigcup_{\substack{v_1\in F(K^*,u)\\ v_2\in F(L^*,u)}} P\big((1-t)v_1 + tv_2\big) \tag{3.19}$$

在 [26] 中对 $u \in \omega$ 使用引理 3.5：

$$\boldsymbol{\alpha}_K(u) \subset u_{\arccos b} = u_{\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-\arccos b)} \tag{3.20}$$

因此，对于所有 $v_1 \in F(K^*,\ u)$都有 $v_1 \in u_{\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-\text{反余弦 } b)}$。类似地，对于所有 $v_2 \in u_{\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-\text{反余弦 } b)}$，$v_2 \in F(L^*,\ u)$。因此，我们可以调用命题 3.6，并将其与（3.19）结合，得到方程（3.18）满足以下结论：

$$\begin{aligned} &\sup_{u\in\omega} \quad d_H(\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_{t_1}L}(u), \boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_{t_2}L}(u)) \leq \\ &\sup_{\substack{u\in\omega\\ v_1\in F(K^*,u)\\ v_2\in F(L^*,u)}} \quad d_H(P\big((1-t_1)v_1 + t_1v_2\big), P\big((1-t_2)v_1 + t_2v_2\big)) \leq \\ &\sup_{\substack{u\in\omega\\ v_1\in F(K^*,u)\\ v_2\in F(L^*,u)}} \quad \frac{2}{\sin(\frac{\pi}{2} - \arccos b)}\max(\frac{\|v_1\|}{\|v_2\|}, \frac{\|v_2\|}{\|v_1\|})|t_2 - t_1| \leq \\ &\frac{2}{b}\max(\frac{R_K}{r_L}, \frac{R_L}{r_K})|t_2 - t_1| \leq \\ &2\max(\frac{R_K}{r_K}, \frac{R_L}{r_L})\max(\frac{R_K}{r_L}, \frac{R_L}{r_K})|t_2 - t_1| \end{aligned} \tag{3.21}$$

□

4. Multivalued Maps and Related Measure Theory

在本节中，我们将详细阐述关于定理 1.1 的测度论表述。首先，我们讨论多值映射几乎处处相等的条件。若给定两个可测函数 f，g： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，那么通常定义 f 相对于（例如）勒贝格测度 g 几乎处处等于 λ为

$$\lambda(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0 \tag{4.1}$$

我们声称这等价于如下说法

$$\forall \omega \text{ Borel } \lambda(f^{-1}(\omega) \triangle g^{-1}(\omega)) = 0, \tag{4.2}$$

其中 $\triangle$ 表示两个集合的对称差。显然，(4.1) 推出 (4.2)，因为

$$f^{-1}(\omega) \triangle g^{-1}(\omega) \subset \{x \mid f(x) \neq g(x)\} \tag{4.3}$$

对于反向的方 向，给定 $\varepsilon > 0$，将 $\mathbb{R}$ 写成由长度为 ε 的区间 I_j 的并。于是

$$\begin{aligned} &\lambda(\{x \mid |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) = \\ &\lambda\Big(\bigcup_j \big(\{x \mid |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} \cap f^{-1}(I_j)\big)\Big) = \\ &\lambda\Big(\bigcup_j \{x \mid |f(x) - g(x)| > \varepsilon, f(x) \in I_j\}\Big) \leq \\ &\lambda\Big(\bigcup_j \{x \mid f(x) \in I_j, g(x) \notin I_j\}\Big) \leq \\ &\sum_i \lambda(f^{-1}(I_j) \triangle g^{-1}(I_j)) = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

由于这对任意的 ε 都成立，我们得到（4.1）。

然而，当 f 和 g 是多值函数时，例如径向高斯像映射，方程（4.1）事实证明比（4.2）强得多。为说明这一点，考虑两个函数

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1, x+1) \\ g(x) &= [x-1, x+1] \end{aligned} \tag{4.5}$$

于是，$\{x \mid f(x) \neq g(x)\} = \mathbb{R}$，因此（4.1）显然不成立。下面证明这两个函数满足（4.2）。给定集合 ω:

$$f^{-1}(\omega) \triangle g^{-1}(\omega) = \Big(\bigcup_{x \in \omega} [x-1, x+1]\Big) \setminus \Big(\bigcup_{x \in \omega} (x-1, x+1)\Big) \tag{4.6}$$

定义一个集合

$$I = \bigcup_{x \in \omega} [x-1, x+1] \tag{4.7}$$

令 $n \in \mathbb{Z}$，则 $I \cap [n, n+1] = [n, n+1]$ 或 $I \cap [n, n+1] = I_1 \cup I_2$，其中 I_1 是一个或者为空、或者包含 n 的区间，而 I_2 是一个或者为空、或者包含 $n+1$的区间。这两个区间都可以分别是半开区间或闭区间。在上述任一种情况下，都很容易看出，可以从 ω 中选取至多可数的子集 ω_n，使得

$$I \cap [n, n+1] \subset \bigcup_{x \in \omega_n} [x-1, x+1]. \tag{4.8}$$

令 $\omega_c = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \omega_n$。我们得到

$$I = \bigcup_{x \in \omega_c} [x-1, x+1]. \tag{4.9}$$

因此，回到（4.6），我们得到：

$$\begin{aligned} f^{-1}(\omega) \triangle g^{-1}(\omega) = \\ \Big(\bigcup_{x \in \omega_c} [x-1, x+1] \Big) \setminus \Big(\bigcup_{x \in \omega} (x-1, x+1) \Big) \subset \\ \bigcup_{x \in \omega_c} \{x-1, x+1\} \end{aligned} \tag{4.10}$$

这是一个至多可数的集合。因此，对于任意集合 ω,

$$\lambda(f^{-1}(\omega) \triangle g^{-1}(\omega)) = 0, \tag{4.11}$$

从而对任意博雷尔集 ω 满足（4.2）。

受这个例子的启发，我们将引入定义 ??；当我们考虑多值函数而非单值函数时，这似乎是对几乎处处等价这一概念的恰当推广。首先，我们从一些基本定义开始。

定义 4.1。定义在 σ-代数 $\mathcal{B}$ of S^{n-1} 的子集上的球面次测度 $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty)$ 是一个满足以下条件的函数：

- $\mu(\varnothing) = 0$
- 若 $A, B \in \mathcal{B}$ 且 $A \subset B$，则 $\mu(A) \leq \mu(B)$
- 若 $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$，则 $\mu(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i)$。

我们称多值映射 $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ 关于定义在 $\mathcal{B}$ 上的球面子测度 λ 可测，如果对于任意博雷尔 $\omega \subset S^{n-1}$，集合 $f^{-1}(\omega) := \{x \mid f(x) \cap \omega \neq \varnothing\} \in \mathcal{B}$。在给定此设定 $K \in \mathcal{K}^n_o$ 的情况下，映射 $\boldsymbol{\alpha}_{K^*}$ 关于定义在勒贝格可测集上的任意 λ 都是可测的，因为 $\boldsymbol{\alpha}^{-1}_{K^*}(\cdot) = \boldsymbol{\alpha}_K(\cdot)$ 将博雷尔可测集映射为勒贝格可测集。

定义 4.2. 给定定义在 σ-代数 $\mathcal{B}$ 上的球面子测度 λ，从 S^{n-1} 到 S^{n-1} 的多值可测映射 f 和 g 几乎处处相等，如果对于任意博雷尔 ω，

$$\lambda(f^{-1}(\omega) \triangle g^{-1}(\omega)) = 0, \tag{4.12}$$

方程（4.12）正是我们将要证明的定理 1.1的内容：

定理 4.3。设 $K, L \in \mathcal{K}^n_o$。假设 $\lambda(K, \cdot) = \lambda(L, \cdot)$ 是关于球面勒贝格次测度 λ 的有限博雷尔测度。那么对于任意博雷尔集 $\omega \subset S^{n-1}$,

$$\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega) \triangle \boldsymbol{\alpha}_L(\omega)) = 0. \tag{4.13}$$

事实证明，结合径向高斯像映射的连续性，可以得到（4.13）的其他版本，参见命题 3.1。详情请见引理 6.5 和命题 6.8。

最后，为结束关于测度的讨论，我们来考察定理 1.1 中关于测度论的假设。给定一个定义在勒贝格可测集上的球面次测度 λ以及体 $K \in \mathcal{K}_o^n$，通过 λ得到的 K 的径向高斯像测度 $\lambda(K, \cdot)$ 是一个球面博雷尔次测度，见 [8]。如果假设 λ 是测度而非次测度，那么$\lambda(K, \cdot)$ 也将成为博雷尔测度。这可由 λ 的可列可加性以及以下等式推出，其中 ω_i 是任意可列的博雷尔集族：

$$\bigcup_i \boldsymbol{\alpha}_K(\omega_i) = \boldsymbol{\alpha}_K(\bigcup_i \omega_i). \tag{4.14}$$

正如我们很快将在定理 1.1 的证明中看到的，我们会在若干处用到 λ 和 $\lambda(K, \cdot)$ 的不同性质。例如，引理 5.1 中用到了测度 $\lambda(K, \cdot)$ 的正则性，而引理 5.3 中用到了测度 $\lambda(K, \cdot)$ 的连续性。我们也可以追问，定理 1.1 对次测度 $\lambda(K, \cdot)$ 是否成立。我们在引用 [8] 中的引理 6.3 时，会用到 $\lambda(K, \cdot)$ 是测度这一假设。除实数集 S^{n-1} 上的有限博雷尔测度自动具有正则性这一点外，我们从未用到测度 $\lambda(K, \cdot)$ 的有限性。

一般而言，我们没有试图使定理 1.1中的假设尽可能弱，而是保留了目前的表述，因为与高斯像问题相关的所有凸几何测度或次测度（亚历山德罗夫积分曲率 [3], 亚历山德罗夫-芬切尔-延森曲面面积测度 [2], 对偶曲率测度 [15]）都适用定理 1.1的假设。

5. Proof of the Main Theorem

任意球面勒贝格次测度 μ都在球面上的一族博雷尔集上定义对称差伪度量 d_μ，其中集合 A 到 B 的距离为 $\mu(A \triangle B)$。采用这一记号，定理 1.1 现在可表述为关于映射 $\boldsymbol{\alpha}_K$, $\boldsymbol{\alpha}_L$ 作为到对称差伪度量空间的映射相等的命题。我们得到以下结果：

引理 5.1. 设 $K, L \in \mathcal{K}_o^n$。假设 $\lambda(K, \cdot) = \lambda(L, \cdot)$ 是球面勒贝格次测度 λ 下的有限博雷尔测度。若对某个 ω 博雷尔 $\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega) \triangle \boldsymbol{\alpha}_L(\omega)) > 0$，则存在一个开集 ω' 使得 $\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega') \triangle \boldsymbol{\alpha}_L(\omega')) > 0$

证明。假设对于某个 ω博雷尔 $d_\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega)\ \boldsymbol{\alpha}_L(\omega)) = \lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega) \triangle \boldsymbol{\alpha}_L(\omega)) = \varepsilon > 0$。注意，球面上的任何有限博雷尔测度都是正则博雷尔测度，因为例如，球面是局部紧的可分度量空间。由于 $\lambda(K, \cdot)$ 是正则博雷尔测度，因此存在 ω'_K 开集，使得 $\omega \subset \omega'_K$ 且 $\lambda(K, \omega'_K \setminus \omega)$ 小于 $\varepsilon/4$。类似地，定义 ω'_L。令 $\omega' = \omega'_K \cap \omega'_L$。因此，

$$\begin{aligned} d_\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega'), \boldsymbol{\alpha}_K(\omega)) = \\ \lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega') \triangle \boldsymbol{\alpha}_K(\omega)) = \\ \lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega') \setminus \boldsymbol{\alpha}_K(\omega)) \leq \\ \lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega' \setminus \omega)) \leq \\ \lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega'_K \setminus \omega)) < \\ \varepsilon/4. \end{aligned} \tag{5.1}$$

类似地， $d_\lambda(\boldsymbol{\alpha}_L(\omega')\ \boldsymbol{\alpha}_L(\omega)) < \varepsilon/4$。然后，根据三角不等式，我们得到 $d_\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega')\ \boldsymbol{\alpha}_L(\omega')) > \varepsilon/4$, 其中 ω' 是某个开博雷尔集。□

引理 6.3 中[8] 基本指出，对于定义在球面上的任意测度 μ ，几乎所有球面矩形（按 Haar 意义）都具有 μ 零测度边界。因此，特别地，应当存在一个边界测度为零的矩形半环，其环闭包为博雷尔集。我们不打算证明这一点，也不对此作更精确的说明，而是采用[8]中的引理 6.3 的表述。注意到 [8] 中引理 6.3 的证明在同时考虑两个测度时仍然成立，因此我们得到如下结论。

引理 5.2. 设 $K, L \in \mathcal{K}^n_o$。假设 $\lambda(K,\cdot) = \lambda(L,\cdot)$ 是有限博雷尔测度。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在常数 $m(\lambda(K,\cdot)\ \lambda(L,\cdot)\ \varepsilon)$ 以及一族紧球面凸体 $\Omega_\varepsilon := \{\omega_1^\varepsilon, \dots, \omega_m^\varepsilon\}$， 满足:

(1) 它们的并集为 S^{n-1}(2) 每个集合的直径小于 ε，也就是说，对于任意 x, $y \in \omega_j^\varepsilon$， 都有 $d(x,y) < \varepsilon$。(3) 它们任意两两交集的 $\lambda(K,\cdot)$ 测度和 $\lambda(L,\cdot)$ 测度均为零。(4) $\lambda(K, \partial\omega_j^\varepsilon) = \lambda(L, \partial\omega_j^\varepsilon) = 0$。

根据引理 5.2，我们得到以下命题:

引理 5.3. 设 $K, L \in \mathcal{K}^n_o$。假设 $\lambda(K,\cdot) = \lambda(L,\cdot)$ 是关于球面勒贝格次测度 λ 的有限博雷尔测度。若对某个博雷尔集 ω， $\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega)\triangle\boldsymbol{\alpha}_L(\omega)) > 0$，则存在一个紧球面凸体 γ，使得

(1) 集合 $\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma) \cup \boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)$ 包含于某个开半球中。(2) $\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma)\triangle\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)) > 0$(3) $\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)) = \lambda(\boldsymbol{\alpha}_L(\partial\gamma)) = 0$
(4) $\lambda\Big(\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma)\triangle\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma) \setminus \big(\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma) \cup \boldsymbol{\alpha}_L(\partial\gamma)\big)\Big) > 0$

证明。根据引理 5.1，我们可以假设 ω是一个开集。假设 $d_\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega)\ \boldsymbol{\alpha}_L(\omega)) = \lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega)\triangle\boldsymbol{\alpha}_L(\omega)) = \varepsilon > 0$。给定 $\delta > 0$，令 ω_δ 为 Ω_δ 中所有包含于 ω的集合的并。显然， ω_δ 是闭集，且 $\omega_\delta \subset \omega$。定义，

$$\gamma_n := \bigcup_{k=1}^{n} \omega_{\frac{1}{k}}. \tag{5.2}$$

注意到 γ_n 是一个闭集。构造一个集合序列 $\theta_n = \omega \setminus \gamma_n$，它是一个嵌套开集序列。首先，我们断言 θ_n 是一个嵌套集合序列，满足

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \theta_n = \varnothing. \tag{5.3}$$

否则，假设存在某个 $u \in \bigcap_{n=1}^\infty \theta_n$。由于 ω 是一个开集，因此存在一个 $r > 0$使得 $u \in B_r(u) \subset \omega$。但是，对于任意自然数 $k > \frac{2}{r}$，存在 $\Omega_{\frac{1}{k}}$ 中的一个集合覆盖点 u 且包含于 $B_r(u$，这是由引理 5.2 的前两个性质得出的。这与 $B_r(u) \subset \omega$ 结合可推出 $u \in \omega_{\frac{1}{k}} \in \gamma_k$。因此， $u \notin \theta_k$，与 $u \in \bigcap_{n=1}^\infty \theta_n$矛盾。

由于 $\theta_n = \omega \setminus \gamma_n$ 是一列嵌套集合，且根据测度的连续性收敛于零

$$\begin{aligned} \lambda(K, \omega \setminus \gamma_n) &\longrightarrow 0 \\ \lambda(L, \omega \setminus \gamma_n) &\longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

根据论证 与方程（5.1）完全相同。我们得到存在 n 使得

$$d_\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega),\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma_n))<\frac{\varepsilon}{4}$$
$$d_\lambda(\boldsymbol{\alpha}_L(\omega),\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma_n))<\frac{\varepsilon}{4} \tag{5.5}$$

因此，结合 并将其与 $d_\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega)\ \boldsymbol{\alpha}_L(\omega))=\varepsilon$结合，利用三角不等式可得 :

$$d_\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma_n),\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma_n))>\varepsilon/4. \tag{5.6}$$

注意，对于任意 $\mathcal{I}$（一个任意的非空指标集），以及以该指标集为指标的任意集合族 A_α, B_α，我们有:

$$(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}}A_\alpha)\triangle(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}}B_\alpha)\subseteq\bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}}(A_\alpha\triangle B_\alpha)\,. \tag{5.7}$$

我们还注意到，对于 $C=K$ 或 $C=L$,

$$\boldsymbol{\alpha}_C(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}}\boldsymbol{\alpha}_C(A_\alpha) \tag{5.8}$$

因此，结合方程（5.6）、（5.7）、（5.8），并回顾 γ_n 的定义，我们得到存在某个 ω_j^δ，使得 $d_\lambda\left(\boldsymbol{\alpha}_K\left(\omega_j^\delta\right)\ \boldsymbol{\alpha}_L\left(\omega_j^\delta\right)\right.>0$。

令 $\gamma:=\omega_j^\delta$。由于 $d_\lambda\left(\boldsymbol{\alpha}_K\left(\omega_j^\delta\right)\ \boldsymbol{\alpha}_L\left(\omega_j^\delta\right)\right.>0$，我们得到 γ 满足所要求的第二个性质。由于 $\gamma=\omega_j^\delta$，第三个性质由引理 5.2得出。最后一个性质由第二和第三条陈述得出。我们只需证明第一条陈述。注意，如果我们重新定义 γ_n 在 5.2 中的起点为任意一个$k=v\in\mathbb{N}$,

$$\gamma_n:=\bigcup_{k=v}^{n}\omega_{\frac{1}{k}}. \tag{5.9}$$

因此，我们可以确保 γ 的直径小于任意给定的 ε。结合 [26] 中的引理 3.5，不难看出可以找到 ε，使得 $\boldsymbol{\alpha}_K\left(\gamma\right)\cup\boldsymbol{\alpha}_L\left(\gamma\right)$包含在某个开半球内，从而完成证明。□

我们现在想 说明，对于引理 γ 中5.3 的集合，下面的等式成立 ds:

$$\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma)\triangle\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)\setminus\left(\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)\cup\boldsymbol{\alpha}_L(\partial\gamma)\right)\subset\bigcup_{0<t<1}\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}(\partial\gamma) \tag{5.10}$$

这个等式是定理 1.1证明的核心。尽管在记号上可能较为复杂，但其本质含义是，当我们通过 K 将 L 变为 $K\hat{}+_tL$时， $\partial\gamma$ 处的法锥连续变化，并扫过 $\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma)$ 与$\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)$ 的对称差。

我们为方程（5.10）给出两种不同的证明。第一种证明适用于 C^1 严格凸体，它巧妙地由霍普夫定理推出，且不需要使用关于 3.7 Lipschitz 连续性的命题 $\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}(\omega)$。遗憾的是，由于径向高斯像映射的结构复杂，我们无法将这一证明自然地推广到 $\mathcal{K}_o^n$ 。当 K，L是 C^1严格凸体时，$\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}:\ S^{n-1}\to S^{n-1}$定义了同胚 $\boldsymbol{\alpha}_K$和 $\boldsymbol{\alpha}_L$的同伦。这对于更一般的 K， L则不成立，因为映射 $\boldsymbol{\alpha}_K$和 $\boldsymbol{\alpha}_L$会变成多值映射，而且不一定是单射，因此在最一般的情形下，标准的拓扑工具无法适用。我们为最一般的情形找到了另一种证明

仿照霍普夫定理并使用命题 3.7。不过，我们仍然保留 C^1 严格凸情形的证明，因为其中包含了主要思想、直觉和动机。值得一提的是，如果有人能够仅凭拓扑学思想而不借助距离的概念，就像这里针对 C^1 严格凸体所做的那样，推出（5.10），那将会非常有意思。

我们先给出一个关于 C^1 严格凸体的预备命题。

命题 5.4。设 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 是一个 C^1 严格凸体。那么， $\boldsymbol{\alpha}_K :\ S^{n-1} \to S^{n-1}$ 是一个同胚。

证明。由于 K 是一个 C^1 严格凸体， $\boldsymbol{\alpha}_K$ 是一个连续双射。因此，根据区域不变性定理， $\boldsymbol{\alpha}_K$ 是一个同胚。□

当 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 是 C^1 严格凸体时，我们对命题3.2有一个改进。

命题 5.5。设 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 是一个 C^1 严格凸体。那么，对于任意 $\omega \subset S^{n-1}$,

$$\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma) \setminus \boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma) = \boldsymbol{\alpha}_K(\mathring{\gamma}) \tag{5.11}$$

证明。 这立即由命题 5.4 得出。 □

我们现在可以证明 5.10 式对于 C^1 严格凸体成立。

命题 5.6. 设 K、$L \in \mathcal{K}_o^n$ 为 C^1 严格凸体。假设 $\gamma \in S^{n-1}$ 是一个紧球面凸体，且集合 $\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma) \cup \boldsymbol{\alpha}_K(\gamma)$ 包含于开半球 Ω 中。则,

$$\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma) \triangle \boldsymbol{\alpha}_L(\gamma) \subset \bigcup_{0\le t\le 1} \boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(\partial\gamma). \tag{5.12}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma) \triangle \boldsymbol{\alpha}_L(\gamma) \setminus \big(\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma) \cup \boldsymbol{\alpha}_L(\partial\gamma)\big) \subset \bigcup_{0<t<1} \boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(\partial\gamma) \tag{5.13}$$

证明。 将（5.12）两边分别减去 $\big(\boldsymbol{\alpha}_K\ (\partial\gamma)\ \cup \boldsymbol{\alpha}_L\ (\partial\gamma)\ \big)$，得到（5.13）。我们需要证明（5.12）。

由于 $\boldsymbol{\alpha}_K$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_L$ 是同胚，由命题 3.5 可得

$$\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(u) = P((1-t)\boldsymbol{\alpha}_K(u) + t\boldsymbol{\alpha}_L(u)). \tag{5.14}$$

由 [26] 中的引理 3.5 存在 $\beta > 0$，使得对于任意 $u \in S^{n-1}$,

$$\boldsymbol{\alpha}_K(u), \boldsymbol{\alpha}_L(u) \subset u_{\frac{\pi}{2}-\beta}. \tag{5.15}$$

因此，给定任意 $u \in S^{n-1}$，存在一个 $\delta > 0$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_K(u_\delta)\ \boldsymbol{\alpha}_K(u_\delta) \subset u_{\frac{\pi}{2}-\beta+\delta}$，且 $\frac{\pi}{2} - \beta + \delta < \frac{\pi}{2}$。设 Ω 为同时包含 $\boldsymbol{\alpha}_K(u_\delta)\ \boldsymbol{\alpha}_K(u_\delta)$ 的一个开半球。因此，对任意 $t \in [0,1]$ 和 $v \in u_\delta$，我们有 $(1-t)\boldsymbol{\alpha}_K(v)\ + t\boldsymbol{\alpha}_L(v)$ 到中心的距离有一个下界，这使得 $P((1-t)\boldsymbol{\alpha}_K(v) + t\boldsymbol{\alpha}_L(v))$ 在区域 $[0,1] \times u_\delta$ 上成为变量 (t,u) 的连续映射。因此，$\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}\cdot L}(\cdot)$ 在 $[0,1] \times S^{n-1}$ 上关于 (t,u) 连续。于是，$\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}\cdot L}(\cdot)$ 定义了映射 $\boldsymbol{\alpha}_K(\cdot)\ \boldsymbol{\alpha}_L(\cdot) :\ S^{n-1} \to S^{n-1}.$ 的一个同伦。注意，由于γ 是紧球面凸体，它与 D^{n-1} 同胚。现在，假设 (5.12) 不成立。那么不失一般性，存在一个 $x \in S^{n-1}$，使得

$$x \in \boldsymbol{\alpha}_K(\gamma) \setminus (\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma) \cup \bigcup_{0\le t\le 1} \boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(\partial\gamma)) \tag{5.16}$$

因此，由命题 5.5，$x \in \boldsymbol{\alpha}_K(\mathring{\gamma})$。设 p 是从 Ω 到 $\setminus\{x\} \to \partial\Omega$ 的连续映射。那么 $p\circ\boldsymbol{\alpha}_K\hat{+}_{\cdot L}(\cdot): [0,1]\times\partial\gamma \to \partial\Omega$ 是映射 $p\circ\boldsymbol{\alpha}_K$ 和 $p\circ\boldsymbol{\alpha}_L$ 从 $\partial\gamma \cong \mathbb{S}^{n-2}$ 到 $\partial\Omega \cong \mathbb{S}^{n-2}$ 的一个同伦。由于 $x \in \boldsymbol{\alpha}_K(\gamma)$，集合 $p\circ\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma) = \partial\Omega$，因此 $\deg(p\circ\boldsymbol{\alpha}_K) \neq 0$。现在，$p\circ\boldsymbol{\alpha}_L: \partial\gamma \to \partial\Omega$ 是从 $\mathbb{S}^{n-2}$ 到 $\mathbb{S}^{n-2}$ 的连续映射，并且可延拓为连续映射 $p\circ\boldsymbol{\alpha}_L: \gamma \cong D^{n-1} \to \partial\Omega \cong \mathbb{S}^{n-1}$，因为 $x \notin \boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)$，这迫使 $\deg(p\circ\boldsymbol{\alpha}_L) = 0$。这与霍普夫定理矛盾，因为同伦映射 $p\circ\boldsymbol{\alpha}_K$ 和 $p\circ\boldsymbol{\alpha}_L$ 的度不同。至此，(5.12) 的证明完成。

□

现在，我们将利用 $\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}$ 的利普希茨性质，在不作 C^1 严格凸性假设的情况下证明相同的结论。

引理 5.7. 设 K、$L \in \mathcal{K}_o^n$。假设 $\gamma \in S^{n-1}$ 是一个紧球面凸体，则有以下结论：

$$\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma)\triangle\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma) \setminus \big(\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)\cup\boldsymbol{\alpha}_L(\partial\gamma)\big) \subset \bigcup_{0<t<1}\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}(\partial\gamma) \tag{5.17}$$

证明。注意到由对称性，只需证明

$$\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma) \setminus \big(\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)\cup\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)\big) \subset \bigcup_{0<t<1}\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}(\partial\gamma). \tag{5.18}$$

假设该等式左侧的集合非空。

首先，假设存在 $x_\varepsilon \subset \boldsymbol{\alpha}_K(\gamma) \setminus \big(\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)\bigcup\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)\big)$，对于某个不与 $\bigcup_{0<t<1}\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}(\partial\gamma)$ 相交的 $\varepsilon > 0$。任意两个集合 A 和 B 满足 $x_\varepsilon \subset A$ 和 $x_\varepsilon \subset B^c$，则二者之间至少相距 ε 个豪斯多夫距离。注意，$\boldsymbol{\alpha}_K\hat{+}_{0L}(\gamma) = \boldsymbol{\alpha}_K(\gamma)$ 包含x_ε，而 $\boldsymbol{\alpha}_K\hat{+}_{1L}(\gamma) = \boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)$ 不包含。根据命题 3.2，注意 $\partial\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}(\gamma) \subset \boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}(\partial\gamma)$。由于对于所有 t，$\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}(\partial\gamma)$ 都不与一个球相交，因此对于所有 t，$\boldsymbol{\alpha}_K\hat{+}_{tL}(\gamma)$ 要么包含该球，要么不包含该球。由命题 3.7，我们知道 $\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}(\gamma)$ 是连续的，但上述论证表明 $\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}(\gamma)$ 至少具有一个 ε-跳跃间断。矛盾。

注意，根据命题 3.2，$\partial\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma) \subset \boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)$。因此，

$$\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma) \setminus \big(\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)\cup\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)\big) = \overset{\circ}{\boldsymbol{\alpha}_K}(\gamma) \setminus \big(\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)\cup\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)\big) \tag{5.19}$$

由于 γ和 $\partial\gamma$是闭集，由前面的等式可得，$\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma)\setminus\big(\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)\bigcup\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)\big)$是一个开集。现在，令 $x \in \boldsymbol{\alpha}_K(\gamma)\setminus\big(\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)\bigcup\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)\big)$。我们可以在紧集 $[0,1]$上定义 $f(t) := d(x, \boldsymbol{\alpha}_K\hat{+}_{tL}(\partial\gamma))$。命题 3.7 保证了 f 是连续的。注意，由于 $\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma) \setminus \big(\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)\bigcup\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)\big)$ 是一个开集且 $\boldsymbol{\alpha}_K\hat{+}_{0L}(\partial\gamma) = \boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)$，$f(0) > 1$。类似地，由于 $\boldsymbol{\alpha}_K\hat{+}_{1L}(\partial\gamma) = \boldsymbol{\alpha}_L(\partial\gamma) \subset \boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)$，$f(1) > 0$。设 c 是 f在 $[0,1]$上的最小值。如果 $c > 0$，则令 $r = \frac{c}{2}$，由前面的论证可得矛盾。如果 $c = 0$，这意味着对于某个 t'，有 $d(x, \boldsymbol{\alpha}_K\hat{+}_{t'L}(\partial\gamma)) = 0$，因此 $x \in \boldsymbol{\alpha}_K\hat{+}_{t'L}(\partial\gamma)$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_K\hat{+}_{t'L}(\partial\gamma)$ 是一个闭集。

□

下一个引理的证明与[8] 中的引理 3.8 的证明非常相似，可以视为其自然推广。

引理 5.8。设有 K、$L \in \mathcal{K}_o^n$，并给定 $u \in S^{n-1}$。定义：

$$\eta(u) := \bigcup_{0<t<1}\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}(u) \setminus \big(\boldsymbol{\alpha}_K(u)\cup\boldsymbol{\alpha}_L(u)\big). \tag{5.20}$$

如果 $\eta(u) \neq \varnothing$，那么存在一个包含 $\eta(u)$ 的开集 $\eta_o(u)$，使得如果 $\lambda(\eta_o(u)) > 0$，那么 $\lambda(K,\cdot) \neq \lambda(L,\cdot)$。

证明。设 K' 是 K 的重新缩放，使得 $r_{K'}(u) = r_L(u)$。首先注意到 $\boldsymbol{\alpha}_K = \boldsymbol{\alpha}_{K'}$。此外，由于对于任意 v_1、$v_2 \in S^{n-1}$（它们包含在同一个开半球中）以及任意常数 $c > 0$:

$$\bigcup_{0<t<1} P((1-t)v_1 + tv_2) = \bigcup_{0<t<1} P((1-t)cv_1 + tv_2), \tag{5.21}$$

利用命题 3.5，我们得到:

$$\bigcup_{0<t<1} \boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_t L}(u) = \bigcup_{0<t<1} \boldsymbol{\alpha}_{K'\hat{+}_t L}(u). \tag{5.22}$$

因此，我们可以在（K处用 K'替换5.20）。此外，$\lambda(K,\cdot) = \lambda(K',\cdot)$。因此，为了证明这个命题，我们可以不失一般性地假设 $K = K'$，以简化记号。换言之，我们可以假设 $r_K(u) = r_L(u)$。

定义 ω'、ω、ω_0、$\eta_o(u)$ 为以下集合:

$$\begin{aligned} \omega' &:= \{\rho_K > \rho_L\} := \{v \in S^{n-1} \mid \rho_K(v) > \rho_L(v)\} \\ \omega &:= \{\rho_K < \rho_L\} := \{v \in S^{n-1} \mid \rho_K(v) < \rho_L(v)\} \\ \omega_o &:= \{\rho_K = \rho_L\} := \{v \in S^{n-1} \mid \rho_K(v) = \rho_L(v)\} \\ \eta_o(u) &:= (S^{n-1} \setminus \boldsymbol{\alpha}_K(\omega \cup \omega_0)) \cap (S^{n-1} \setminus \boldsymbol{\alpha}_L(\omega' \cup \omega_0)) \end{aligned} \tag{5.23}$$

显然，ω'、ω、ω_0 是博雷尔集。下面证明 $\eta_0(u)$ 是开集。由于径向函数连续，集合 $\omega \cup \omega_0$ 和 $\omega' \cup \omega_0$ 是闭集。由于径向高斯像映射将闭集映射为闭集，$\boldsymbol{\alpha}_K(\omega \cup \omega_0)$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_L(\omega' \cup \omega_0)$ 是闭集。现在，根据 $\eta_o(u)$ 的定义，我们立即得到 $\eta_0(u)$ 是开集。

现在，我们将证明以下三个陈述，它们与 $\lambda(\eta_o(u)) > 0$ 一起保证 $\lambda(K,\omega') \neq \lambda(L,\omega')$，进而推出所需的 $\lambda(K,\cdot) \neq \lambda(L,\cdot)$。这三个陈述如下:

$$\boldsymbol{\alpha}_L(\omega') \subset \boldsymbol{\alpha}_K(\omega') \tag{5.24}$$

$$\eta_o(u) \subset \boldsymbol{\alpha}_K(\omega') \tag{5.25}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_L(\omega') \subset \boldsymbol{\alpha}_K(\omega') \setminus \eta_o(u) \tag{5.26}$$

我们先从 (5.24) 开始。任取 $v \in \boldsymbol{\alpha}_L(\omega'$。令 $w \in \omega'$ 满足 $v \in \boldsymbol{\alpha}_L(w)$。由于$\rho_K(w) > \rho_L(w)$，我们得到:

$$h_K(v) \geq v r_K(w) > v r_L(w) = h_L(v). \tag{5.27}$$

因此，$H_K(v)$ 比 $H_L(v)$ 离中心更远。令 $x \in \boldsymbol{\alpha}_K^*(v)$。由于 $r_K(x) \in H_K(v)$，我们得到 $x \in \omega'$，从而得到 $v \in \boldsymbol{\alpha}_K(\omega')$，这就证明了 (5.24)。由定义 (5.23) 可立即得到等式 (5.25)，因为 $\{\omega', \omega, \omega_0\}$ 是 S^{n-1} 的一个划分。注意，(5.25) 还表明 $\eta_o(u) \cap \boldsymbol{\alpha}_L(\omega') = \varnothing$。将其与 (5.24) 结合，便得到 (5.26)，从而完成了全部三个等式的证明。现在，若 $\lambda(\eta_o(u)) > 0$，则由 (5.24)、(5.25) 和 (5.26) 可得 $\lambda(K,\omega') \neq \lambda(L,\omega')$，进而得到 $\lambda(K,\cdot) \neq \lambda(L,\cdot)$。

还需证明 $\eta(u) \subset \eta_o(u)$。任取 $v \in \eta(u)$。根据 $\eta(u)$ 的定义和命题 3.5，我们得到，对于某个 $t \in (0,1)$ $v_1 \in F(K^*,u)$ $v_2 \in F(L^*,u)$，有 $v = P((1-t)v_1 + tv_2)$，且 $v \notin (\boldsymbol{\alpha}_K(u) \cup \boldsymbol{\alpha}_L(u))$。令 $x_0 := r_K(u) = r_L(u)$ 和 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid xv = x_0 v\}$。

我们要证明，如果对于某个 $w \in S^{n-1}$， $r_K(w) \in H_K(v)$，那么 $w \in \omega'$。令 x' 为将 $r_K(w)$ 投影到 P 上的正交投影。令

$$r_K(w) = x' + cv \tag{5.28}$$

对于某个常数 c。由于 $v \notin \boldsymbol{\alpha}_K(u)$，我们有

$$\begin{aligned} x'v + c = (x' + cv)v = r_K(w)v = h_K(v) > r_K(u)v = x_0 v \Leftrightarrow \\ c > x'v - x_0 v = 0 \end{aligned} \tag{5.29}$$

其中最后一个等号成立是因为 $x' \in P$。现在，由于 $v_1 \in F(K^*, u)$ 且 $x_0 = r_K(u)$，我们写出

$$x_0 v_1 = h_K(v_1) \geq r_K(w)v_1 = x'v_1 + cvv_1 = x'v_1 + c\frac{(1-t)v_1 + tv_2}{\|(1-t)v_1 + tv_2\|}v_1 > x'v_1 \tag{5.30}$$

在最后一步中，我们用到了 $c > 0$ 以及这一事实：v， v_1， v_2 都包含在某个 $u_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}$ 中；根据 [26], 中的引理 3.8，取某个 epsilon，这迫使 vv_1 和 vv_2 均为正。

我们得到

$$x_0 v_1 > x'v_1. \tag{5.31}$$

Now,

$$\begin{aligned} x'v = x_0 v \Leftrightarrow \\ x'\frac{(1-t)v_1 + tv_2}{\|(1-t)v_1 + tv_2\|} = x_0\frac{(1-t)v_1 + tv_2}{\|(1-t)v_1 + tv_2\|} \end{aligned} \tag{5.32}$$

利用（5.31），并回忆 $0 < t < 1$，我们得到（5.32）意味着

$$x_0 v_2 < x'v_2. \tag{5.33}$$

因此，利用前一个命题以及 $v_2 \in F(L^*, u)$ 和 $x_0 = r_L(u)$ 这一事实，我们得到

$$r_K(w)v_2 = x'v_2 + cvv_2 > x_0 v_2 = h_L(v_2). \tag{5.34}$$

因此， $r_K(w) \notin L$，进而 $r_K(w) > r_L(w)$，这意味着 $w \in \omega'$，这正是我们要证明的。

现在，由于我们在上一段中证明了不存在 $w \in \omega \cup \omega_0$ 使得 $r_K(w) \in H_K(v)$，因此有 $v \notin \boldsymbol{\alpha}_K(\omega \cup \omega_0)$。同理，我们得到 $v \notin \boldsymbol{\alpha}_L(\omega' \cup \omega_0)$，进而有 $v \in \eta_o(u)$。我们已经证明 $\eta(u) \subset \eta_o(u)$，至此证明完成。□

我们现在可以证明定理 1.1。

定理 5.9。设 $K, L \in \mathcal{K}_o^n$。假设 $\lambda(K, \cdot) = \lambda(L, \cdot)$ 是关于球面勒贝格次测度 λ 的有限博雷尔测度。那么 $\forall \omega \subset S^{n-1}$ 博雷尔集 $\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega) \triangle \boldsymbol{\alpha}_L(\omega)) = 0$，其中$\triangle$ 表示两个集合的对称差。

证明。假设存在 ω 博雷尔，使得 $\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega) \triangle \boldsymbol{\alpha}_L(\omega)) > 0$。那么，利用引理5.3，存在一个紧球面凸体 γ 使得

$$\lambda\Big(\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma) \triangle \boldsymbol{\alpha}_L(\gamma) \setminus \big(\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma) \cup \boldsymbol{\alpha}_L(\partial\gamma)\big)\Big) > 0 \tag{5.35}$$

回顾一下，我们在引理5.7 （或者在假设 K、 L 为 C^1 严格凸体时改用引理5.6 ）中证明了，对于 γ 紧球面凸体：

$$\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma)\triangle\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)\setminus\big(\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)\cup\boldsymbol{\alpha}_L(\partial\gamma)\big)\subset\bigcup_{0<t<1}\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}(\partial\gamma) \tag{5.36}$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}_K(\gamma)\triangle\boldsymbol{\alpha}_L(\gamma)\setminus\big(\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)\cup\boldsymbol{\alpha}_L(\partial\gamma)\big)\subset\bigcup_{0<t<1}\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}(\partial\gamma)\setminus\big(\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)\cup\boldsymbol{\alpha}_L(\partial\gamma)\big)\subset\\&\bigcup_{u\in\partial\gamma}\bigcup_{0<t<1}\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}(u)\setminus\big(\boldsymbol{\alpha}_K(\partial\gamma)\cup\boldsymbol{\alpha}_L(\partial\gamma)\big)\subset\\&\bigcup_{u\in\partial\gamma}\Big(\bigcup_{0<t<1}\boldsymbol{\alpha}_{K\hat{+}_tL}(u)\setminus\big(\boldsymbol{\alpha}_K(u)\cup\boldsymbol{\alpha}_L(u)\big)\Big)=\\&\bigcup_{u\in\partial\gamma}\eta(u)\subset\\&\bigcup_{\substack{u\in\partial\gamma\\ \eta(u)\neq\varnothing}}\eta_o(u)\end{aligned} \tag{5.37}$$

其中在最后一行，我们使用了引理 5.8 中的记号。由于 S^{n-1} 是一个第二可数空间，它的每个子空间也是第二可数的，因而特别是林德洛夫¨空间。由（5.37），集合 $\{\eta_o（u）\mid u\in\partial\gamma$ 和 $\eta（u）\neq\varnothing\}$ 构成了（5.35）中集合的一个开覆盖，因此存在一个可数（但不一定有限）的子覆盖 $\{\eta_0（u_i）\mid u_i\in\partial\gamma$ 和 $i\in\mathbb{N}\}$，覆盖（5.35）中的集合。因此，由方程（5.35）可得

$$\lambda(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\eta_o(u_i))>0. \tag{5.38}$$

因此，由于 λ 具有次可加性，集合 $\eta_o（u_i）$ 中至少有一个具有正测度。对该集合应用引理 5.8，可得 $\lambda（K，\cdot）\neq\lambda（L，\cdot）$ 。□

6. Applications

现在我们转向主定理及已建立的理论工具的应用。我们将证明， $\boldsymbol{\alpha}_K$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_L$ 之间的测度论关系蕴含体 K^* 与 L^*之间的几何关系。若考虑支集位于一个非常小集合上的次测度 λ，显然，对于那些满足$\lambda(K,\omega)=\lambda(L,\omega)=0$的径向方向 ω ，体 K 与 L 可能截然不同。不过，我们将证明，将注意力限制在子测度 λ的支集上时，这些体互为缩放。

回顾一下，次测度 λ的支集定义为

$$\mathrm{spt}\lambda=\{v\in S^{n-1}\mid\text{for every open neighborhood } N_v \text{ of v, } \lambda(N_v)>0\} \tag{6.1}$$

众所周知，子测度的支集是一个闭集。考虑以下引理：

引理 6.1. 给定 K、 $L\in\mathcal{K}_o^n$和 $u\in S^{n-1}$。假设 $\boldsymbol{\alpha}_K^*(u)=\boldsymbol{\alpha}_L^*(u)=v$。那么

$$\nabla\frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u)=0. \tag{6.2}$$

证明。我们省略此结果的证明。该结果可由体 K 和 L 的径向函数求导自然得到，且本工作中的其他结果均不需要它。□

引理 6.1 在 [8] 中用于证明，若 λ 绝对连续、在开集上严格为正，且 $\lambda(K,\cdot)=\lambda(L,\cdot)$，则 K 是 L的缩放。运用类似思路，一种可能的放宽方式是在 spt6.2 上证明 λ 定理 1.1中的结论。然后利用方程（6.2）证明 K^* 和 L^* 在 spt D 的任意连通分支 λ上互为伸缩变换。然而，这种方法无法适用于该问题的全部一般情形。

首先，如果次测度 λ的支集位于一个小集合上，那么可能不存在使 $\boldsymbol{\alpha}_K(u)$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_L(u)$ 为向量的 $u\in\mathrm{spt}\lambda$。但即便如此，我们仍可构造一个 K、$L\in\mathcal{K}_o^n$ 的例子，使得 $\lambda(K,\cdot)=\lambda(L,\cdot)$，并且对于所有 $u\in\mathrm{spt}\lambda$，都有 $\boldsymbol{\alpha}_K^*(u)\neq\boldsymbol{\alpha}_L^*(u)$；这意味着 (6.2) 在 spt$\lambda$ 上的任何位置都不成立。

更有意思的是，让我们来讨论一个非常奇特的例子。Hassler Whitney 于 1935年 构造了这个例子，见 [28]。他构造了一个定义在平面上的 C^1 函数 f，使得 $\nabla f=0$ 在一条弧上$D\subset\mathbb{R}^2$，然而 f 并非在 D上为常数。显然，这种情况不可能出现在实数轴上，也不可能出现在 D 是某种 C^1 曲线的情形。惠特尼例子中的弧 D 是一条分形曲线，任意两点之间的长度都是无限的。特别是，仅知道道路连通分支 6.2 中某点处的性质，可能不足以确保 $D\subset$支集λ 是 K^* 在 L^* 上的一个伸缩变换 D。

受这些想法的启发，我们将证明，如果 $\lambda(K,\cdot)=\lambda(L,\cdot)$，那么在每个可求长道路连通分支上，$K^*$是 L^* 的一个伸缩。我们先从可求长性的定义开始。

Defi义 6.2. 设 Π 为 $[0,1]$ 的所有划分组成的集合，使得如果 $\pi\in\Pi$，则 n

$$\pi=(t_0,t_1,\ldots,t_k) \tag{6.3}$$

其中 $t_0=0$ 和 $t_k=1$。给定 $\pi\in\Pi$ 和一个映射 $\gamma\colon[0,1]\to S^{n-1}$，定义

$$l(\pi,\gamma)=\sum_{i=1}^{k}d\big(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1})\big). \tag{6.4}$$

称连续映射 $\gamma\colon[0,1]\to S^{n-1}$ 为可求长曲线，如果

$$L(\gamma)=\sup_{\pi\in\Pi}l(\pi,\gamma)<+\infty \tag{6.5}$$

现在我们定义一种更强的道路连通集概念，以便在讨论中排除惠特尼例子。

定义 6.3. 称集合 $D\subset S^{n-1}$ 为可求长道路连通的，如果对任意 x、$y\in D$，都存在一条可求长路径 $\gamma\colon[0,1]\to D$，使得 $\gamma(0)=x$ 且 $\gamma(0)=y$。

有了这个定义，我们本节的主要结果是定理 1.3：

定理 6.4。设 $K,L\in\mathcal{K}_o^n$ 满足 $\lambda(K,\cdot)=\lambda(L,\cdot)$ 是球面勒贝格和测度 λ 的有限博雷尔测度。那么在每个可求长道路连通分支上，$D\subset\mathrm{spt}\lambda$, K^* 是 L^* 的伸缩像。或者，对于每个 $v_1,v_2\in D$，我们有

$$\frac{h_K(v_1)}{h_L(v_1)}=\frac{h_K(v_2)}{h_L(v_2)} \tag{6.6}$$

备注。特别是，可以从切体的角度来思考这个问题。 △

请注意，除分形例子外，可求长这一条件并不算很强的假设。例如，sptλ 的任意开连通子集都是可求长路径连通的。在

这一点尤其说明，与需要全局信息才能得到的存在性结果相比，高斯像问题的唯一性是一种局部性质。这个结果立即推出了 [8] 和 [3]中确立的唯一性结果。唯一可能出问题的情况是，测度 λ 支撑在某种分形上，类似于 [28]中的例子里的弧。

我们先给出一些预备引理。

引理 6.5. 设 K、$L \in \mathcal{K}^n_o$。假设 $\lambda(K,\cdot) = \lambda(L,\cdot)$ 是关于球面勒贝格次测度 λ 的有限博雷尔测度。那么对于任意 $u \in \mathrm{spt}\lambda$

$$\boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u) \cap \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u) \neq \varnothing. \tag{6.7}$$

证明. 假设结论不成立。由于 $\boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u)$ $\boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u)$ 是不相交的紧集，因此存在 and $\varepsilon > 0$，使得

$$\varepsilon = 2 \inf_{\substack{x \in \boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u) \\ y \in \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u)}} d(x,y). \tag{6.8}$$

根据径向高斯像映射的连续性，命题 3.1，我们得到存在 $\delta > 0$使得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u_\delta) &\subset \boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u)_\varepsilon \\ \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u_\delta) &\subset \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u)_\varepsilon \end{aligned} \tag{6.9}$$

我们将（6.8）改写为如下形式

$$\boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u)_\varepsilon \cap \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u)_\varepsilon = \varnothing. \tag{6.10}$$

设 $\omega = \boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u)_\varepsilon$。则 (6.9) 蕴含

$$u_\delta \subset \boldsymbol{\alpha}_K(\boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u_\delta)) \subset \boldsymbol{\alpha}_K(\boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u)_\varepsilon) = \boldsymbol{\alpha}_K(\omega). \tag{6.11}$$

假设 $u_\delta \cap \boldsymbol{\alpha}_L(\omega)$ 非空。设 $v \in u_\delta \cap \boldsymbol{\alpha}_L(\omega)$。由 (6.9) 可得

$$\boldsymbol{\alpha}_{L^*}(v) \subset \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u_\delta) \subset \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u)_\varepsilon \tag{6.12}$$

因此，由 (6.10)，$\boldsymbol{\alpha}_{L^*}(v) \cap \omega = \varnothing$ 这与 $v \in \boldsymbol{\alpha}_L(\omega)$ 矛盾。由此可证

$$u_\delta \cap \boldsymbol{\alpha}_L(\omega) = \varnothing. \tag{6.13}$$

结合 (6.11) 和 (6.13) 可得

$$u_\delta \subset \boldsymbol{\alpha}_K(\omega) \triangle \boldsymbol{\alpha}_L(\omega). \tag{6.14}$$

由于 $u_\delta \cap \mathrm{spt}\lambda \neq \varnothing$ 且 u_δ 是开集，这意味着

$$\lambda(\boldsymbol{\alpha}_K(\omega) \triangle \boldsymbol{\alpha}_L(\omega)) > 0 \tag{6.15}$$

这与定理 1.1 矛盾。 □

引理 6.6. 设 $K, L \in \mathcal{K}^n_o$. 假设 $\lambda(K,\cdot) = \lambda(L,\cdot)$ 是关于球面勒贝格次测度 λ 的有限博雷尔测度。令 $u \in \mathrm{spt}\lambda$。那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u_\delta) \cap \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u_\delta) \subset (\boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u) \cap \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u))_\varepsilon \tag{6.16}$$

证明. 由 连续性，命题 3.1，给定任意 $\delta > 0$，存在 $\delta_1 > 0$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u_{\delta_1}) \cap \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u_{\delta_1}) \subset \boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u)_\delta \cap \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u)_\delta. \tag{6.17}$$

因此，只需证明：给定 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

$$\boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u)_\delta \cap \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u)_\delta \subset (\boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u) \cap \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u))_\varepsilon \tag{6.18}$$

设 $\omega = \boldsymbol{\alpha}_{K^*}(u)$ 和 $\gamma = \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(u)$。回顾一下，$\omega$ 和 γ 是紧球面凸集。假设对于某个 ε，(6.18) 不成立，则存在一个序列 $x_n \in \omega_\delta \cap \gamma_\delta \setminus (\omega \cap \gamma)_\varepsilon$，其中 $\delta = \frac{1}{n}$。由紧致性，存在一个 $x \in S^{n-1}$，使得沿某个子序列有 $x_n \to x$。由于 $x_n \in \omega_\delta$，且 ω 是闭集，所以 $x \in \omega$。同理，$x \in \gamma$，因此 $x \in \omega \cap \gamma$。于是，对于充分大的 n，有 $x_n \in (\omega \cap \gamma)_\varepsilon$，这就产生了矛盾。□

这两个引理刻画了 sptλ 上法锥的连续性。 .

定义 6.7. 我们将$\boldsymbol{\alpha}_{K^*,\ L^*}(\omega)$记为体$K^*$ 和 L^* 的同时径向高斯像映射，定义如下：

$$\boldsymbol{\alpha}_{K^*,L^*}(\omega) = \boldsymbol{\alpha}_{K^*}(\omega) \cap \boldsymbol{\alpha}_{L^*}(\omega). \tag{6.19}$$

由此定义，我们得到定理 1.2：

命题 6.8。设 $K, L \in \mathcal{K}_o^n$。假设 $\lambda(K, \cdot) = \lambda(L, \cdot)$ 是球面勒贝格次测度 λ 的有限博雷尔测度。那么，$\boldsymbol{\alpha}_{K^*,\ L^*}$ 定义在 sptλ 上，是一个连续映射。也就是说，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于任意 $u \in$ sptλ

$$\boldsymbol{\alpha}_{K^*,L^*}(u_\delta) \subset \boldsymbol{\alpha}_{K^*,L^*}(u)_\varepsilon. \tag{6.20}$$

证明。 这由引理 6.5 和引理 6.6得出。 □

下一个引理是引理 6.1 关于一般径向高斯像映射的一个类似结果。这大致意味着，如果 $u \in$ 支集λ 如果我们将注意力限制在支集λ上，那么径向函数的行为大致类似于 $\nabla \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u) = 0$。由于支集$\lambda$ 可能不具有可微结构，因此我们采用等价的表述形式：

引理 6.9. 设 $K, L \in \mathcal{K}_o^n$. 假设 $\lambda(K, \cdot) = \lambda(L, \cdot)$ 是关于球面勒贝格次测度 λ 的有限博雷尔测度。那么，对于每个 $u \in$ sptλ 以及任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对于所有 $u' \in u_\delta \cap$sptλ:

$$\left|\frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u') - \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u)\right| \leq \varepsilon |u' - u|. \tag{6.21}$$

证明。在求出 δ 之前，先建立一些先验估计 δ''，这些估计将在证明的后续部分用到。如果 u 是 sptλ 的一个孤立点，则无需证明。取 $\delta' > 0$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_{K^*,\ L^*}(u)_{\delta'}$包含在某个 $u_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon'}$ 中。利用命题 6.8，考虑邻域 $u_{\delta''}$，使得若 $u' \in u_{\delta''} \cap$sptλ，则 $\boldsymbol{\alpha}_{K^*,\ L^*}(u') \subset \boldsymbol{\alpha}_{K^*,\ L^*}(u)_{\delta'} \subset u_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon'}$。这保证了对于任意 $v \in \boldsymbol{\alpha}_{K^*,\ L^*}(u)$ 和 $v' \in \boldsymbol{\alpha}_{K^*,\ L^*}(u')$，都有 v、v'、u、$u' \subset u_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon'}$，因此它们的内积存在一个统一的正下界。此外，我们可以选取 δ''，使得：

$$u' \in u_{\delta''} \cap \text{spt}\lambda \Rightarrow \|u'\lambda + (1-\lambda)u\| > \frac{1}{2} \tag{6.22}$$

有了 δ''，我们开始证明。任取 $u' \in u_{\delta''} \cap \mathrm{spt}\lambda$ 和任意 $v \in \boldsymbol{\alpha}_{K^*,L^*}(u)$ 以及 $v' \in \boldsymbol{\alpha}_{K^*,L^*}(u')$。那么，

$$\begin{aligned}
&\rho_{K^*}(u')u'v \le h(K^*, v) = \rho_{K^*}(u)uv \\
&\rho_{L^*}(u')u'v \le h(L^*, v) = \rho_{L^*}(u)uv \\
&\rho_{K^*}(u')u'v' = h(K^*, v') \ge \rho_{K^*}(u)uv' \\
&\rho_{L^*}(u')u'v' = h(L^*, v') \ge \rho_{L^*}(u)uv'.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

结合这些方程，我们得到：

$$\frac{\rho_{K^*}}{r_{L^*}}(u)\frac{uv'}{u'v'}\frac{u'v}{uv} \le \frac{\rho_{K^*}}{r_{L^*}}(u') \le \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u)\frac{uv}{u'v}\frac{u'v'}{uv'}. \tag{6.24}$$

定义 $f\colon\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 使得

$$f(x, y) = \frac{uv}{xv}\frac{xy}{uy} \tag{6.25}$$

特别注意，对于任意 x, x', y, y' 属于 $u_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon'}$：

$$\begin{aligned}
f(x, v) &= f(x', v) \\
f(u, y) &= f(u, y')
\end{aligned} \tag{6.26}$$

由于 $f(u,\ v) = 1$ 利用（6.24）和 f 的定义，我们得到，

$$\frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u)\left(\frac{1}{f(u', v')} - 1\right) \le \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u') - \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u) \le \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u)(f(u', v') - 1) \tag{6.27}$$

特别地，这表明 $f(u', v') - 1 \ge 0$ 与 $\mathrm{sign}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = -\mathrm{sign}(x - 1)$ 同号。

注意，f 在 (u, v) 的某个邻域内是 C^∞ 函数。固定向量 y，$f(x, y)$ 在点 (x', y') 处的梯度 $\nabla_x f$ 为：

$$\nabla_x f(x', y') = \frac{u \cdot v}{u \cdot y'}\frac{(x' \cdot v)y' - (x' \cdot y')v}{(x' \cdot v)^2} \tag{6.28}$$

因此，对于某个 $t \in [0, 1]$，利用（6.26）和中值定理，我们得到

$$f(u', v') - 1 = f(u', v') - f(u, v') = \nabla_x f(u + t(u' - u), v')(u' - u) \tag{6.29}$$

记为 $x' = u + t(u' - u)$，我们计算如下：

$$\begin{aligned}
\|(x' \cdot v)v' - (x' \cdot v')v\| = \\
\|(x' \cdot v)(v' - v + v) - (x' \cdot (v' - v + v))v\| = \\
\|(x' \cdot v)(v' - v) - (x' \cdot (v' - v))v\| \le \\
2\|x'\|\|v\|\|v' - v\|. = \\
2\|x'\|\|v' - v\|.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

结合式（6.28）、式（6.29）和式（6.30），我们得到

$$|f(u', v') - 1| \le 2\frac{u \cdot v}{(u \cdot v')(x' \cdot v)^2}\|x'\|\|v' - v\|\|u' - u\| \tag{6.31}$$

由于我们预先假设是在 v、 v'、 u、 $u' \subset u_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon'}$中进行讨论，且所有内积都大于某个统一常数，再利用式（6.22），我们得到存在一个常数$C_{\varepsilon'}$，它仅依赖于 ε'

$$|f(u',v')-1| \leq C_{\varepsilon'}\|v'-v\|\|u'-u\| \tag{6.32}$$

Co综合上述结果，并回顾 $f(u',v')-1 \geq 0$，我们得到

$$\frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u') - \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u) \leq \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u) C_{\varepsilon'}\|v'-v\|\|u'-u\| \tag{6.33}$$

根据连续性，对于命题 6.8，对任意 ε''，存在一个 $\delta < \delta''$，使得对于所有 $u' \in u_\delta \cap \mathrm{spt}\lambda$ 以及任意 $v' \in \boldsymbol{\alpha}_{K^*,L^*}(u')$，都有 $v' \in \boldsymbol{\alpha}_{K^*,L^*}(u)_{\varepsilon''}$。因此，我们可以将 ε'' 取得足够小，使得对于所有 $u' \in u_\delta \cap \mathrm{spt}\lambda$ 以及所有 $v' \in \boldsymbol{\alpha}_{K^*,L^*}(u')$，存在 $v \in \boldsymbol{\alpha}_{K^*,L^*}(u)$，满足

$$\frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u) C_{\varepsilon'}\|v'-v\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.34}$$

将其与（6.33）结合可得，对于所有 $u' \in u_\delta \cap \mathrm{spt}\lambda$,

$$\frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u') - \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u) \leq \frac{\varepsilon}{2}\|u'-u\| \tag{6.35}$$

现在，注意到

$$\frac{1}{f(u',v')} - 1 = -\frac{f(u',v')-1}{f(u',v')} \tag{6.36}$$

由于 $f(x,y)$ 在 (u,v) 处连续，且 $f(u,v) = 1$我们可以确保邻域足够小，从而由 (6.27)、(6.32) 和 (6.34) 得出

$$-\varepsilon\|u'-u\| \leq \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u') - \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u) \tag{6.37}$$

这就完成了证明。 □

现在我们可以证明本节的主要结果了

定理*6.4*的证明。由于 D 是 $\mathrm{spt}\lambda$ 的可求长路径连通分支， u_0任取 $u_1 \in D$，存在一条可求长路径 $\gamma(t)$，其从某个区间映入 $\mathrm{spt}\lambda$。由于 γ 是可求长的，我们可以假设它在区间 $[0,L]$上按弧长参数化，见 [9]。取$\varepsilon > 0$。由引理 6.9，对每个 $u \in \gamma$，存在 δ_u，使得对所有 $u' \in u_{\delta_u} \cap \mathrm{spt}\lambda$:

$$|\frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u') - \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u)| \leq \varepsilon|u'-u|. \tag{6.38}$$

由连续性可知，对每个 $t \in [0,L]$，存在 δ'_t，使得对于 $|t-t'| < \delta'_t$，我们有 $\gamma(t') \in \gamma(t)_{\delta_{\gamma(t)}} \cap \mathrm{spt}\lambda$，因此，

$$|\frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(\gamma(t')) - \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(\gamma(t))| \leq \varepsilon|\gamma(t')-\gamma(t)| = \varepsilon|t'-t|. \tag{6.39}$$

其中最后一个等式由弧参数化得出。注意， $\{I_t = (t-\frac{\delta'_t}{2}, t+\frac{\delta'_t}{2}) \mid t \in [0,L]\}$ 是 $[0,L]$的一个开覆盖。令 $\mathcal{C} = \{I_{t_i} \mid 1 \leq i \leq k$为其有限子覆盖，其中 $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = L\}$。注意，根据 I_t 的构造，对每个 $1 \leq i < k$,

$$t_{i+1} - t_i < \frac{\delta'_{t_{i+1}}}{2} + \frac{\delta'_{t_i}}{2} \leq \max(\delta'_{t_i}, \delta'_{t_{i+1}}) \tag{6.40}$$

因此，我们可以应用（6.39）得出，对于每个 $1 \leq i < k$,

$$|\frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(\gamma(t_{i+1})) - \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(\gamma(t_i))| \leq \varepsilon|\gamma(t') - \gamma(t)| = \varepsilon|t_{i+1} - t_i|. \tag{6.41}$$

由此我们得到,

$$|\frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u_1) - \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}(u_0)| = |\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}\big(\gamma(t_{i+1})\big) - \frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}\big(\gamma(t_i)\big)| \leq \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon|t_{i+1} - t_i| = \varepsilon \tag{6.42}$$

由于 ε 是任意的，我们得到 $\frac{\rho_{K^*}}{\rho_{L^*}}$ 在 D 上为常数，这就证明了所需结论。 □

References

[1] A. 亚历山德罗夫，将区域不变性定理应用于存在性证明，《苏联科学院学报数学辑》3卷第3期（1939年），243–256页。[2] A. 亚历山德罗夫，论混合体积理论。III. 将闵可夫斯基关于凸多面体的两个定理推广到任意凸体。数学文集（新系列）3（1938年），27-46页。[3] A. 亚历山德罗夫，具有给定积分曲率的凸曲面的存在性与唯一性。《苏联科学院院报》（新系列）35（1942年），131-134页。[4] L. 卡法雷利，Monge-Amp $W^{2,\ p}$-ère 方程解的内部估计，《数学年刊》131（1990年），135-150页。[5] L. 陈、D. 吴和 N. 向，高斯像问题的光滑解，《太平洋数学杂志》317（2022年）[6] S.-Y. 程和 S.-T. 丘，关于 n维闵可夫斯基问题解的正则性，《纯粹与应用数学通讯》29（1976年），495–516页。[7] J. 贝特朗，利用最优质量输运指定高斯曲率。《奉献几何》183（2016年），81–99页。[8] K. J. B¨or¨oczky、E. 卢特瓦克、D. 杨、G. 张和 Y. M. 赵，高斯像问题，《纯粹与应用数学通讯》第LXXIII卷（2020年），1046–1452页。[9] K. J. 法尔科纳，《分形集的几何》。剑桥数学丛书，第85卷。剑桥大学出版社，剑桥，1986年。[10] W. J. Firey，凸体调和平均的平均截面测度，《太平洋数学杂志》11（1961年），1263–1266页。[11] R.J. Gardner，《几何断层成像》，第二版，《数学及其应用百科全书》，剑桥大学出版社，剑桥，2006年。[12] P.M. Gruber，《凸几何与离散几何》，《数学科学基础丛书》第336卷，施普林格，柏林，2007年。[13] P. 关和 Y. 李，$C^{1,\ 1}$ 亚历山德罗夫问题解的估计，《纯粹与应用数学通讯》50（1997年），189–811页。[14] Y. 黄、E. 卢特瓦克、D. 杨和 G. 张，L_p-亚历山德罗夫问题与 L_p-积分曲率，《微分几何杂志》110（2018年），第1期，1–29页。[15] Y. 黄、E. 卢特瓦克、D. 杨和 G. 张，布伦-闵可夫斯基理论中的几何测度及其相关的闵可夫斯基问题，《数学学报》216（2016年），325–388页。[16] E. 卢特瓦克、D. 杨和 G. 张，对偶曲率测度，《数学进展》329（2018年），85–132页。[17] 李其睿、盛为民、王绪嘉，通过高斯曲率流求解亚历山德罗夫问题和对偶闵可夫斯基问题，《欧洲数学会杂志》22（2020年），第3期，893–923页[18] S. Mui，负p的亚历山德罗夫问题，《数学进展》408（2022年）。[19] L. 尼伦伯格，微分几何中的 Weyl 问题与闵可夫斯基问题，《纯粹与应用数学通讯》6（1953年），337–394页。

[20] V. Oliker，常曲率空间中具有指定高斯曲率的凸超曲面的存在性与唯一性，《乔瓦尼·桑索内数学应用研究所研讨会》（1983年），1–64页。[21] V. Oliker， $\mathbb{R}^{n+1}$ 中具有指定高斯曲率的超曲面及相关的 Monge-Amp`ère 型方程，《偏微分方程通讯》9（1984年），807–838页。[22] V. Oliker，将 S^{n-1} 嵌入 $\mathbb{R}^{n+1}$，使其具有给定积分高斯曲率，以及 S^{n-1}上的最优质量输运。《数学进展》213卷第2期（2007年），600-620页。[23] R. T. Rockafellar，《凸分析》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，第二次印刷，1972年。[24] R. Schneider，《凸体：布伦-闵可夫斯基理论》，第二版，《数学及其应用百科全书》，剑桥大学出版社，剑桥（2014年）。[25] V. Semenov，满足弱亚历山德罗夫条件的高斯像问题，预印本：arXiv:2210.16778（2022年）。[26] V. Semenov，离散高斯像问题，预印本：arXiv:2210.16974（2022年）。[27] N. S. Trudinger 和 X.-J. Wang，Monge-Amp`ère 方程及其几何应用。《几何分析手册》（2008年），467–524页。[28] H. Whitney，一个在临界点连通集上不为常数的函数。《杜克数学杂志》1卷第4期（1935年），514–517页[29] C. Wu、D. Wu 和 N. Xiang， L^p 高斯像问题，《奉献几何》216，62（2022年）。[30] Y. M. 赵，原点对称多面体的 L^p 亚历山德罗夫问题，《美国数学会会刊》147（2019年），4477-4492页。

Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 251 Mercer St., NewYork, NY 10012电子邮箱地址：vs1292@nyu.edu