自由落体中圆盘磁铁感应电压的建模

诺兰·桑博伊西新英格兰大学物理与生物科学系，*1215 Wilbraham Road*，马萨诸塞州斯普林菲尔德市，邮编 *01119*（日期：2023年5月4日）

arXiv:2305.01813v1 [physics.class-ph] 2 May 2023

摘要

我们让一个圆盘磁铁穿过细导线线圈自由下落，记录感应电压，并将结果与基于偶极近似和法拉第定律的解析模型进行比较。该模型预测，磁铁进入和离开线圈时对应的电压峰值之差应与 $z_0^{-1/2}$ 成正比，其中 z_0 是磁铁高于线圈中心的初始高度。模型与实验数据非常吻合。这个易于复现的实验为不同水平的学生提供了定量探究电磁感应效应的机会。

I. 引言

法拉第电磁感应定律是任何基础物理学课程体系的基础。虽然定性演示很简单，但要为学生提供定量实验则更具挑战性。常见的方法是让磁铁穿过导电环，并测量这种相对运动产生的效应。这些实-验通常分为两类：（i）通过涡流产生磁阻力，[1–5] 以及（ii）产生电压信号，并利用计算机采集软件实时显示。[6–10]本文采用第二种方法，介绍一项实验：学生让圆盘磁铁穿过感应线圈，并将产生的电压峰值与磁铁的下落高度联系起来。这种方法很好地结合了基础力学带来的直觉与电磁现象。Gadre 等人近期发表的论文介绍了一项与本文所述实验类似的实验，但我们的分析更为全面，并明确比较了实验结果与理论预测。[10] 这里提供的部分细节虽然超出了基础课程的范围，但高年级学生能够理解，而且对于本文的讨论至关重要。

II. 自由落体磁铁

本节将给出一个解析模型，用于描述半径为 R_c 、厚度可忽略的开路线圈中，圆盘磁铁自由下落时产生的感应电压信号。如图1所示，磁铁的初始高度 z_0 定义为线圈中点到

磁铁中点的距离。假设磁铁沿 z 轴自由下落，穿过线圈中心。我们忽略空气阻力，以及线圈对磁铁施加的任何磁阻力。

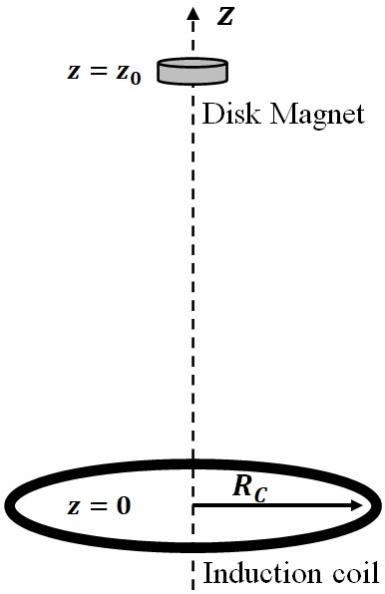


图1. 磁铁—线圈几何结构。磁铁和线圈共用一条 z 轴； $z = 0$ 对应感应线圈的中心， $z = z_0$ 是磁铁的起始高度。

A. 圆盘磁铁的建模

我们假设，圆盘磁铁可以建模为一个理想的 N 匝圆形电流环 I，其尺寸与磁铁相同，但厚度除外；我们假设厚度可以忽略不计。当磁铁沿 z 轴穿过感应线圈下落时，只有磁场的 z 分量会对磁通量产生贡献，进而影响感应电压。因此，我们只需考虑磁场的 z 分量，该分量可通过毕奥-萨伐尔定律和标准偶极近似求得： [11]

$$\boldsymbol{B_z}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{kR^2}{4} \frac{(2z^2 - \rho^2)}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \hat{\boldsymbol{z}} \ . \tag{1}$$

这里， R 是磁铁的半径， $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是场点的柱坐标，并且我们设定 $k = N\mu_0 I$，其中 k 是一个待确定的经验常数。此类磁场穿过感应线圈开口面积的总磁通量（磁通链）为

半径 R_c 和匝数 N_c 通过直接积分可得：

$$\Phi_{\mathrm{tot}}(z) = \frac{N_c\, k\pi R^2}{2} \frac{R_c^2}{(R_c^2 + z^2)^{3/2}} \ . \tag{2}$$

公式（1）和公式（2）的完整推导见补充材料。 [12]

B. 电压信号建模

对于运动的磁铁， $z \equiv z(t)$，因此公式（2）变为时间函数：随着磁铁接近线圈，磁通量逐渐增大；磁铁位于线圈中心时，磁通量达到最大值；随后磁铁离开线圈，磁通量逐渐减小。根据法拉第电磁感应定律和链式法则，可求得线圈中产生的电压信号：

$$V = -\frac{d\Phi_{\mathrm{tot}}(z)}{dt} = -\frac{d\Phi_{\mathrm{tot}}(z)}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{3N_c\, k\pi R^2 R_c^2\, z}{2(R_c^2 + z^2)^{5/2}}\, v \ , \tag{3}$$

其中 v 是运动磁铁的速度。当速度恒定时，公式（3）是一个反对称函数：两个电压峰值分别出现在$z_{p,\,1} = +R_c/2$ 和$z_{p,\,2} = -R_c/2$（$z = 0$ 位于线圈中心时），两峰值大小相等，但极性相反。这一点已在 Kingman 等人的研究中得到广泛验证。 [7]

对于加速运动的磁铁，公式（3）不再完全反对称。由于磁铁离开线圈时的速度高于进入线圈时的速度，我们可以预期，后出现的电压峰值$|V_{p,\,2}|$ 会高于先出现的电压峰值$|V_{p,\,1}|$。此外，电压峰值并不恰好出现在$z_{p,\,i} = \pm R_c/2$；不过，偏离这些位置的幅度很小，可以忽略不计（见附录 A）。

由于难以测量加速运动（自由落体）的磁铁的瞬时速度，我们转而寻找磁铁的初始高度 z_0 与信号测得的电压峰值$V_{p,\,i}$ 之间的关系。对于自由落体的磁铁，其在任意位置z 的速度可通过运动学与下落高度 z_0 联系起来： $v = \sqrt{2g}$（$z_0 - z$）。将其代入公式（3），并假设电压峰值$V_{p,\,i}$ 出现在特定位置$z_{p,\,i}$，可得电压峰值为：

$$V_{p,i} = \frac{3N_c\, k\pi R^2 R_c^2\, z_{p,i}}{2(R_c^2 + z_{p,i}^2)^{5/2}} \sqrt{2g(z_0 - z_{p,i})} \ . \tag{4}$$

如果我们进一步假设峰值位置大约出现在 $z_{p、\,1} = +R_c/2$ 和$z_{p、\,2} = -R_c/2$，并且下落高度远大于这些位置（即 $z_0 >> R_c/2$），

我们可以展开平方根并得到：

$$|V_{p,1}(z_0)| = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{5/2}\frac{kN_c\pi R^2 g}{R_c^2}\left(\sqrt{\frac{2z_0}{g}} - \frac{R_c}{2\sqrt{2gz_0}}\right) \tag{5}$$

$$|V_{p,2}(z_0)| = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{5/2}\frac{kN_c\pi R^2 g}{R_c^2}\left(\sqrt{\frac{2z_0}{g}} + \frac{R_c}{2\sqrt{2gz_0}}\right) \ . \tag{6}$$

此处，$V_{p,\ 1}(z_0)$ 是第一个（较早出现的）峰值电压，而 $V_{p,\ 2}(z_0)$ 是第二个（较晚出现的）峰值电压。由于极性取决于实验装置的设置，我们将结果表示为幅值。我们注意到，随着下落高度增加，两个峰值幅值之差渐近趋近于零：

$$|V_{p,2}(z_0)| - |V_{p,1}(z_0)| = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{5/2}\frac{kN_c\pi R^2}{R_c}\sqrt{\frac{g}{2}}\ \frac{1}{\sqrt{z_0}} \ . \tag{7}$$

虽然高年级电磁学学生应该能够应用二项式展开，但对于入门课程的学生，可以通过注意到峰值电压值之差与相应速度值之差成正比，即 $\Delta V_p \propto \Delta v$，来对 $z_0^{-1/2}$ 的依赖关系作出更定性的解释。此处，$\Delta v = g\Delta t$，其中 Δt 是两个峰值之间的时间。如果下落高度足够大，那么 Δt 将远小于总下落时间，因此磁铁在这段 Δt时间内的速度变化很小。将这段时间内的速度近似为平均值，可得 $\Delta v = g\dfrac{\Delta y}{v_{\rm ave}}$，其中 Δy 是 Δt 期间移动的垂直距离，而 $v_{\rm ave} \approx \sqrt{2gz_0}$是磁铁在线圈中心处的速度。因此，我们得到 $\Delta V \propto z_0^{-1/2}$，这一结果很容易通过实验验证。

III. 实验

半径为 $R = 0.953$ cm、厚度为 $t = 0.318$ cm 的圆盘磁铁用胶带固定在塑料尺上，以便稳定地穿过一个由铜线绕在一段 ABS 塑料管上制成的 $N_c = 500$ 匝线圈。该线圈的平均半径为 $R_c = 4.83$ cm，厚度为 $h = 2.42$ cm，架设在两块木块上，并由两个千斤顶支架抬高；线圈下方铺有泡棉垫，以保护下落的磁铁；线圈内放置了一把米尺，用于测量下落高度；参见图 2。鉴于磁铁与线圈的相对尺寸，这里是否适用偶极近似或许并不明显，但我们将在下文看到，该近似确实能很好地拟合实验数据。

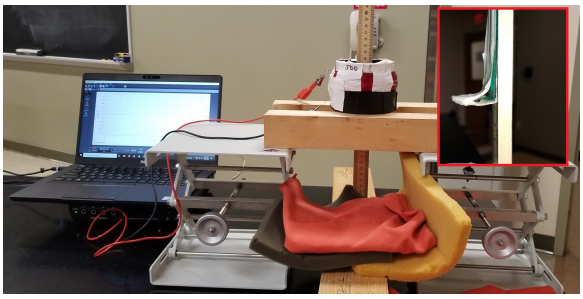


图 2. 实验装置：一个 500 匝感应线圈由两个千斤顶支架抬高，同时将一把米尺放在线圈内，用于测量磁铁的下落高度；感应电压信号由 Pasco 750 计算机接口与 Capstone 软件配合测量。插图：将圆盘磁铁粘贴在塑料尺上，使其在下落过程中偶极矩始终与线圈的对称轴对齐。

为确定圆盘磁铁的 k值，我们使用 FW Bell 4048 型高斯／特斯拉计（公差为 $\pm 2\%$）测量了距磁铁主轴 4.0 cm 至 10.5 cm 范围内的磁场 B_z，测量间隔为 0.5 cm。我们绘制了 B_z 与 $(R^2 + z^2)^{-3/2}$ 的关系图，并根据线性拟合的斜率得出 $k = 0.00425$ T·m。 [12] 这对应的磁偶极矩为$m = 0.965$ A·m^2。

A. 数据采集

电压测量使用 Pasco 750 计算机接口配合 Pasco Capstone 软件完成。磁铁沿线圈主轴下落时，软件会显示感应电压信号随时间变化的曲线；每次实验的采样率均为 2,000 Hz。磁铁的起始高度从 1.0 cm 到 5.0 cm，以 1.0 cm 为间隔变化；随后从 5.0 cm 到 45 cm，以 2.5 cm 为间隔变化。所有数值均从线圈中心测量 $z = 0$。每个起始高度下，磁铁均下落五次，并记录每次实验的两个峰值电压；因此，所有结果均以平均值（数据点）和不确定度（误差棒）表示。

B. 结果

图3绘出了实验电压峰值随下落高度的变化，并同时给出了由方程（5）和方程（6）得到的理论预测。不确定度由测量值均值的样本标准差表示；理论曲线则根据方程（5）和方程（6），结合前文定义的实验参数直接得到。对于大于 $R_c/2 \sim 2.4$ cm 的下落高度，实验数据与理论模型吻合得非常好；这一条件是推导方程（5）和方程（6）时所作的假设。我们在图3和图4中明确标出了位置 $z_0 = R_c/2$，并指出，当下落高度低于该值时，模型开始失效。

数据集的上限主要是出于实际考虑：当下落高度大于 ~ 45 cm 时，要始终让磁铁穿过感应线圈的中心变得过于困难。虽然在更大的下落高度下，阻力效应也可能开始显现，但我们将在后文说明，对于本实验所使用的磁铁，这些效应微乎其微。

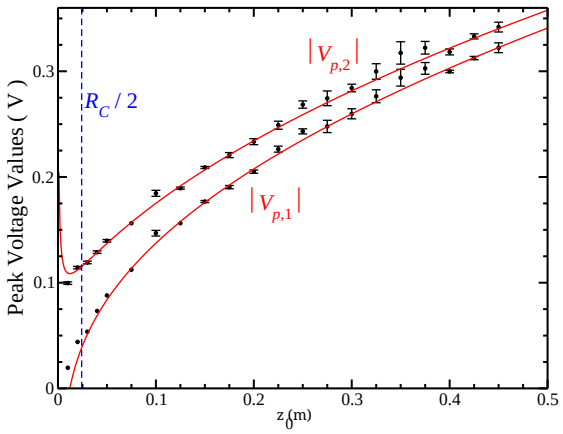


图3。（在线彩色版）磁铁下落高度与峰值电压幅值的关系图；两幅图均显示实验数据（黑色数据点/误差棒）及相应的解析模型（红色实线）。理论曲线通过将实验参数直接代入公式（5）（下方曲线）和公式（6）（上方曲线）计算得到。该模型适用于下落高度大于感应线圈半径一半的情况 $R_c/2$，此界限以蓝色虚线标示。我们注意到，对于 $z_0 > R_c/2$，预测曲线与经验数据吻合。

如前所述，$z_0^{-1/2}$ 依赖关系对于准确模拟峰值电压的大小至关重要。我们在图4中通过绘制两者之差明确展示了这一点，其中

两者之差是指峰值电压与下落高度之间的差值。不确定度通过传播图3中给出的误差值获得。我们再次将相关实验参数直接代入公式（7），得到理论曲线；对于所有大于2.4 cm的下落高度，理论曲线与实验结果都非常吻合。

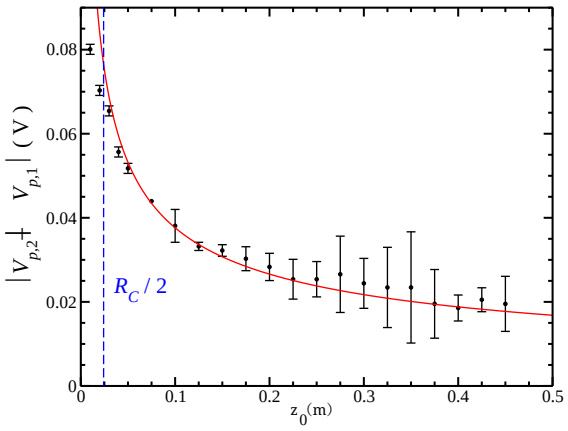


图4。（在线彩色）两个电压峰值之差与下落高度的关系图。数据点和误差棒对应于实验结果，而红色实线对应于公式（7），其中应用了所有相关实验参数。对于大于感应线圈半径一半的下落高度，该模型有效 $R_c/2$，其位置由蓝色虚线标出。鉴于理论与数据在 $z_0 > R_c/2$上的一致性，预测的$z_0^{-1/2}$ 依赖关系得到了证实。

最后，如果通过令 $z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$以及 $v(t) = -gt$，将公式（3）明确定义为时间函数，我们得到以下可进行数值计算的表达式：

$$V(t) = \frac{3gtN_c\, k\pi R^2 R_c^2\,(z_0 - \frac{1}{2}gt^2)}{2(R_c^2 + (z_0 - \frac{1}{2}gt^2)^2)^{5/2}}\ . \tag{8}$$

在图5中，我们将公式（8）预测的完整理论线形与一次代表性样本实验（$z_0 = 30$ cm）中的感应电压信号进行匹配；实验信号与理论模型之间的一致性近乎完美。这进一步验证了第二节所采用的解析方法。

C. 误差与局限性

对于此处所述的实验，最大的实验误差来源是手动将磁铁从相同高度穿过感应线圈中心放下

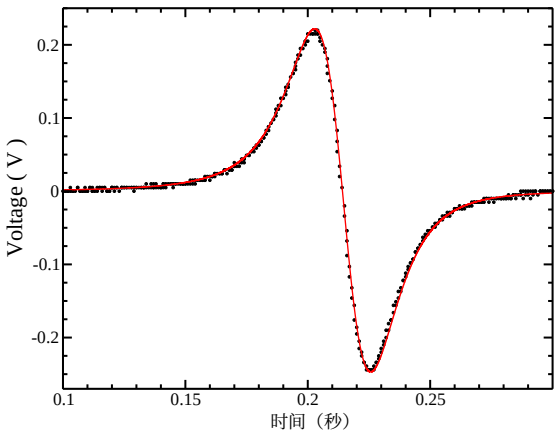


图5。（在线彩色）实验电压数据（黑色点）和理论线形（红色实线）随时间变化的代表性试验（$z_0 = 30$ 厘米）。数据集在水平方向上进行了平移，以便与理论计算所定义的时间尺度（释放时为$t = 0$ ）对齐，使其与理论曲线在同一时间 $t \approx 0.21$秒处穿过 $V = 0$ 轴。我们注意到数据与模型之间具有极佳的一致性。

进行任意五次重复试验。根据观察，如果磁铁下落时偏离对称轴，其运动会影响电压峰值。数据表明，在较大的下落高度下，这一问题更为明显：平均电压峰值往往高于理论线形，尤其是后一个峰值。虽然数值建模似乎表明，带有非零水平运动的下落磁铁可能会导致更大的磁通量变化（从而产生更高的电压峰值），但我们目前还无法对此作出确切验证。总体而言，这些影响似乎具有随机性，而且幅度很小：数据点与预测曲线之间的差异在毫伏量级，已接近仪器设备的容差。

对于较大的下落高度，也有理由怀疑空气阻力会开始影响磁铁的速度，进而影响电压测量。我们针对固定磁铁与尺子的遮蔽胶带的正方形2.30厘米 $\times$ 2.30厘米横截面建立了二次阻力模型（总质量为0.02千克），结果发现，在本实验所使用的最大下落高度下，空气阻力仅使速度降低了0.6%。

同样，线圈中感应电流产生的电阻阻力效应也很小。由于空气阻力并非重要因素，磁铁在线圈中心处的动能应等于释放时的势能 mgz_0，对于本

实验中使用的最大下落高度，该势能为 88 mJ。通过对电功率随时间积分，可以求得因在线圈中产生电流而损失的能量：

$$U = \int P(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{V^2(t)}{r}\,dt \tag{9}$$

其中， $V(t)$由公式（8）定义， r 是线圈的电阻，测得为 21.7 Ω。计算得出，最大下落高度对应的能量损失为 0.123 mJ，约占初始能量的 0.1%。对最小下落高度重复计算，得到初始能量值为 1.96 mJ，能量损失为 0.0188 mJ，约为 1%。

理论模型基于两个主要假设。其一，磁铁的下落高度远大于线圈半径的一半。这使我们能够将电压极值的位置定义为 $z_{p,\,i} = \pm R_c/2$ ，并在峰值电压定义中的速度项上使用二项式展开。该假设也符合偶极近似的有效范围。

第二个假设是将磁铁和感应线圈都视为厚度可忽略的“薄环”。对于圆柱形物体，可用圆柱体长度 L 与其直径 D之比来衡量这一近似是否成立；只要该比值“足够小”，近似便有效。要精确确定这一近似在何处失效，取决于具体实验的细节；但对于本文使用的物体，磁铁的 $L:\ D$ 比值约为 1 : 6，而感应线圈的比值约为 1 : 4。根据实验结果，我们认为这些比值确实“足够小”，因此这些模型是有效的。另行进行的数值建模（未显示）表明，当 $L = D/2,$ 时，感应线圈的薄环模型开始明显偏离螺线管模型；这对应于线圈边缘位于假定的电压峰值位置 $z_{p,\,i} = \pm R_c/2$。虽然不应将此视为模型失效的确切临界点，但在设计实验时，它可以作为一个粗略的上限。

IV. 结论

本文建立了一个解析模型，用于描述圆盘磁铁自由下落穿过细感应线圈时产生的感应电压信号。这项工作的最初动机是设计一个定量实验来检验法拉第定律；然而，我们

惊喜地发现，这项研究为不同课程级别的学生提供了丰富的参与机会。所有测量值都能在入门课程中轻松获取，所需材料和设备通常都能找到，或者很容易获得。

虽然也可以在时间坐标中对电压峰值进行类似但稍为严谨的推导，但这里在 z-坐标中 प्रस्तुत的论证使学生能够在入门运动学与观测到的电压信号之间建立直观联系。教师可以通过一系列问题引导学生，和/或要求他们根据对自由落体的认识，对预期观测结果自行进行推测。在入门层次，学生随后只需测量磁铁的下落高度 z_0、由此产生的两个电压峰值 $|V_{p,\,1}|$、 $|V_{p,\,2}|$，并检验他们的预测。此时，验证 $z_0^{-1/2}$ 对 $|V_{p,\,2}| - |V_{p,\,1}|$ 的依赖关系（如图 4 所示）也很容易实现。根据对实验严谨程度的预期，学生还可以测量绘制理论曲线所需的实验参数，以便与数据集直接比较。

在高年级课程中，可以要求学生复现本文中包含的部分或全部推导 [12], ，从而更深入地理解模型，并能够探究改变不同参数对所得电压信号的影响。例如，可以使用半径或偶极矩不同的磁铁，以及半径或匝数不同的感应线圈。为了与实验电压信号进行比较，使用任意绘图软件或数值编程平台都可以轻松生成理论线形。虽然采用偶极近似使完整模型能够被高年级学生理解，但也可以考虑不采用这种近似，转而使用完全椭圆积分方法，并将其作为高级项目的一部分加以研究；在此过程中，可以使用尺寸与磁铁相近的感应线圈进行实验。

最后，本文的研究还可以扩展到考察圆盘磁铁穿过螺线管感应线圈（而非薄环线圈）的情形，或考察条形磁铁穿过各种线圈几何形状的情形。还可以研究通过阿特伍德机控制圆盘磁铁以不同加速度运动时产生的电压信号。

附录 A：近似求出电压峰值位置

从公式（3）出发，并应用 $v(z)$的自由落体条件，我们得到电压信号关于位置 z 的一般表达式：

$$V(z) = \frac{3N_c\, k\pi R^2 R_c^2\, z}{2(R_c^2 + z^2)^{5/2}} \sqrt{2g(z_0 - z)}\ . \tag{A1}$$

该信号的电压峰值出现在峰值位置 $z = z_p$ （假设 $z = 0$ 位于线圈中心），此处方程 **(A1)** 的导数等于零。对 z求导，将结果设为零并化简，可得：

$$\left.\frac{dV(z)}{dz}\right|_{z=z_p} = 7z_p^3 - 8z_0 z_p^2 - 3R_c^2 z_p + 2R_c^2 z_0 = 0\ . \tag{A2}$$

虽然可以通过数值方法求解这些 z_p 值，但结果并没有特别明显的指导意义。相反，我们可以假设下落高度z_0 远大于 z_p，从而合理地近似求出 z_p 的值。提取一个 z_0^3 后可得

$$z_0^3 \left[7\left(\frac{z_p}{z_0}\right)^3 - 8\left(\frac{z_p}{z_0}\right)^2 - 3\,\frac{R_c^2 z_p}{z_0^3} + 2\,\frac{R_c^2}{z_0^2} \right] = 0\ , \tag{A3}$$

忽略三次项后，可以求解剩余的二次方程，得到 z_p:

$$z_p = -\frac{3R_c^2 \pm \sqrt{9R_c^4 + 64R_c^2 z_0^2}}{16 z_0}\ , \tag{A4}$$

进一步利用条件 $z_0 >> R_c/2$，可以将其化简为：

$$z_p \approx -\frac{3R_c^2}{16 z_0} \pm \frac{R_c}{2} \approx \pm\frac{R_c}{2}\ . \tag{A5}$$

因此，如果下落高度远大于感应线圈半径的一半，电压峰值将近似出现在 $\pm R_c/2$，这也是恒速情形下峰值出现的位置。

致谢

作者衷心感谢 Joseph Gallant 仔细校阅本手稿的早期版本，感谢 Karl Martini 和 Sam Emery 就不确定性分析进行讨论，并感谢审稿人提出深思熟虑的评论、有益的建议和总体见解。

作者没有需要披露的利益冲突。

---

[1] N. Derby 和 S. Olbert, 《圆柱形磁体与理想螺线管》, 《美国物理学杂志》**78**, 229 (2010), https://doi.org/10.1119/1.3256157.[2]K. D. Hahn、E. M. Johnson、A. Brokken 和 S. Baldwin, 《磁铁在管道中运动时的涡流阻尼》, 《美国物理学杂志》**66**, 1066 (1998), https://doi.org/10.1119/1.19060.[3] Y. Levin、F. L. da Silveira 和 F. B. Rizzato, 《电磁制动：一个简单的定量模型》, 《美国物理学杂志》**74**, 815 (2006), https://doi.org/10.1119/1.2203645.[4] M. K. Roy、M. K. Harbola 和 H. C. Verma, 《楞次定律演示：磁铁穿过导电管下落的分析》, 《美国物理学杂志》**75**, 728 (2007), https://doi.org/10.1119/1.2744047.[5] B. Irvine、M. Kemnetz、A. Gangopadhyaya 和 T. Ruubel, 《磁铁穿过导电管道：解析方法的一种变体》, 《美国物理学杂志》**82**, 273 (2014), https://doi.org/10.1119/1.4864278.[6] R. C. Nicklin, 《法拉第定律——定量实验》, 《美国物理学杂志》**54**, 422 (1986), https://doi.org/10.1119/1.14606.[7] R. Kingman、S. Rowland 和 S. Popescu, 《对法拉第电磁感应定律的实验观测》, 《美国物理学杂志》**70**, 595 (2002).[8] D. Amrani 和 P. Paradis, 《电动势：法拉第电磁感应定律与自由落体磁铁的研究》, Physics Education **40**, 313 (2005).[9] S. Reeder、K. Wilkie、T. Kelly 和 J. Bouillard, 《对磁铁下落实验的见解》, Physics Education **54**, 055017 (2019).[10] D. V. Gadre、H. Sharma、S. D. Gadre 和 S. Srivastava, 《棒上科学：用于学习多种物理原理的实验与演示平台》, 《美国物理学杂志》**91**, 116 (2023).[11] J. D. Jackson, 《经典电动力学，第三版》 (John Wiley & Sons, 霍博肯, 新泽西州, 1999).[12] 补充材料见 [AIPP 将插入的 URL]