arXiv:2305.01817v1 [stat.ME] 2 May 2023

形状异质性下计数过程的统计推断

Yifei Sun[1], ∗ **和 Ying Sheng**[2]

[1] 生物统计学系，Mailman公共卫生学院，哥伦比亚大学，

美国纽约州纽约市，邮编 10032。

[2] 数学与系统科学研究院，中国科学院，

中国北京，北京市 100190

*电子邮件： ys3072@cumc.columbia.edu

SUMMARY: 比例率模型是分析计数过程率函数最常用的方法之一。尽管该模型能直接对协变量效应作出率比解释，但比例率假设意味着协变量不会改变率函数的形状。当这一假设不成立时，我们提出通过两个指标来描述率函数与协变量之间的关系：形状指标和大小指数。形状指标允许协变量灵活地影响率函数的形状，而大小指数则保留了协变量效应在率函数幅度上的可解释性。为克服同时估计这两组参数所面临的挑战，我们提出一种条件伪似然方法，在形状估计中消除规模参数，并提出一种事件计数投影方法进行规模估计。所提出的估计量渐近正态，收敛速率为 root-n 。我们通过模拟研究以及利用 SEER-Medicare数据分析反复住院情况，展示所提出的方法。KEY WORDS

： 降维 ，核平滑 ，伪似然 ，反复的 e vent 过程 ，单个 inde x 模型

1. 引言

计数过程的统计推断通常基于其率函数进行。率函数定义为不以事件历史为条件的发生率（Lawless and Nadeau，1995；Lin 等，2000），与定义为以历史为条件的发生率的强度函数相对应（Gail 等人，1980；Prentice 等人，1981；Andersen and Gill, 1982）。率函数常用于评估治疗效应或识别风险因素。记 $N(t)$为在时间 t 或之前发生的事件数，记 $\boldsymbol{Z}$ 为一个 p维协变量向量。令 $\mu(t \mid \boldsymbol{Z})$表示给定 $\boldsymbol{Z}$时 $N(\cdot)$的条件发生率函数，即 $\mu(t \mid \boldsymbol{Z})dt = \mathrm{E}\{dN(t) \mid \boldsymbol{Z}\}$。文献中提出了多种模型来描述 $\boldsymbol{Z}$ 对率函数$\mu(t \mid \boldsymbol{Z})$的影响；常见的选择包括乘法模型（Pepe and Cai，1993；Lawless and Nadeau，1995；Lin 等，2000；Wang 等，2001）、加法模型（Schaubel 等，2006）、尺度变化模型（Lin 等，1998；Ghosh, 2004；Xu 等人，2017）和变换模型（Lin 等，2001）。这些模型的出现使研究者能够针对具体应用选择合适的工具进行推断，但要求事先指定模型。由于率函数是一条随时间变化且本质上具有无限维的曲线，正确设定 $\mu(t \mid \boldsymbol{Z})$的形式可能颇具挑战。尽管图形方法和假设检验已常用于模型检验，但对于模型选择和选择后推断程序，仍缺乏明确的指导。为避免错误设定模型导致误导性结论，一种可能的解决方案是考虑灵活模型。另一方面，由于可解释性有限，允许完全灵活的模型往往不太受青睐。

本文旨在开发一种用于对率函数建模的统一框架，在灵活性与可解释性之间取得平衡。我们的框架基于对率函数的分解（Wang and Huang，2014）。令 $[0, \tau]$ 为感兴趣的时间

段。根据 Wang and Huang（2014），率函数~可表示为大小 部分与形状 部分的乘积：大小定义为 $\mathrm{E}\{N(\tau) \mid \boldsymbol{Z}\} = \int_0^\tau \mu(t \mid \boldsymbol{Z})dt$，即整个研究期间内的预期事件数；~形状定义为 $\mu(t \mid \boldsymbol{Z})/\mathrm{E}\{N(\tau) \mid \boldsymbol{Z}\}$，用于描述按其幅度标准化后的事件率随时间变化的轮廓。图1展示了上述基于率的模型的形状-尺度分解。图中表明，在乘法模型下，形状与协变量无关；而在其他模型下，形状则以不同方式取决于协变量。此外，值得注意的是，现有方法通常假设大小随协变量的线性组合单调递增，从而能够解释协变量与事件总数之间的关联。

[图1置于此处。]

本文聚焦于形状异质性的情形，即率函数的形状会随协变量而变化。在作为研究动机的 SEER-Medicare 数据示例中（Warren等，2002年；Enewold等，2020年），我们关注的事件是乳腺癌诊断后反复住院。年轻患者往往康复得更快，住院也更可能发生在诊断后的早期阶段。另一方面，老年患者的住院率随时间变化则更加稳定。这表明住院率的形状可能取决于诊断年龄，因此在对率函数建模时应考虑形状异质性。在这种情况下，人们可能会想知道如何得出明确的结论，例如，较大的协变量是否与更高的事件风险相关。为解决这一问题，我们提出一种形状-规模模型。该模型使用线性预测变量对率函数的形状进行索引，以刻画形状与多个协变量之间的关系；率函数的大小则通过单独的索引建模。我们的模型将原始单指标模型（例如，Powell 等人，1989；H¨ardle 和 Stoker，1989；H¨ardle 等人，1993；

Ichimura，1993）从标量结局扩展到计数过程结局，并在参数建模与完全非参数建模之间提供了合理的折衷。

关于删失情况下单一事件发生时间的单指标模型，文献中已有广泛研究。研究者考察了比例风险回归，其中风险比取决于单一指标（Huang and Liu，2006；Wang 等，2009）。在不满足比例风险假设的情况下，研究者也考察了事件时间的密度函数（Bouaziz and Lopez，2010；Strzalkowska-Kominiak and Cao，2013，2014）、均值（Lopez，2009；Lopez 等，2013；Huang 等，2020）、风险函数（Ding 等，2013；Chiang 等，2018）和分位数函数（Kong and Xia，2017；Christou and Akritas，2019；B¨ucher 等，2021）的单指标模型。然而，针对复发事件计数过程的单指标模型研究较少。Zhao and Zhou（2014）研究了非平稳泊松过程速率的充分降维，并假设协变量不会改变率函数的形状。Bouaziz 等（2015）研究了一种单指标模型，其中率函数由协变量的线性组合索引，但没有区分协变量对形状和大小的影响。

我们的工作有两方面的贡献。首先，我们关注形状依赖于协变量的情形，因此，当常用的比例率模型（即乘法模型）不成立时，我们的方法可作为一种自然的替代方案。假设大小通过指数链接函数依赖于协变量时，我们对大小部分的解释与之相当。与其他形状依赖于协变量的速率模型相比，我们的模型更加灵活，允许协变量对形状和大小产生不同的影响。其次，我们的模型最多可包含两个未指定的链接函数，而现有的单指标模型通常只有一个链接函数。为应对方法上的挑战，我们提出了一个两步估计程序。第一步，通过条件伪似然方法估计形状参数，该方法可以消除规模参数。第二步，

我们使用估计得到的形状函数，将随访期内的事件计数投影到感兴趣的时间区间；随后对投影事件计数进行回归分析，以估计规模参数。

本文的组织结构如下。第2节介绍模型设定。第3节提出一种用于估计形状参数的条件伪似然方法；此外，还提出一种计算成本更低且具有相同渐近方差的简化估计量。第4节针对不同的链接函数假设，提出一种统一的规模估计方法。第5节通过模拟研究评估估计量的有限样本表现。第6节将所提出的方法应用于 SEER-Medicare 乳腺癌数据，以建立反复住院的模型。第7节通过讨论总结全文。

2. 模型设定

我们提出以下条件发生率函数模型，

$$\mu(t \mid \boldsymbol{Z}) = f(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}) g(\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{\beta}_0$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 是 p 维回归参数向量，$f(t, \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z})$ 是由 $\boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z}$ 索引的形状函数，而 $g(\cdot)$ 是由 $\boldsymbol{\gamma}_0\boldsymbol{Z}$ 索引的规模函数。我们假设形状函数 $f(\cdot, x)$ 是满足 $\int_0^\tau f(t, x)dt = 1$（对任意 $x \in \mathbb{R}$）的未知函数。为保证可识别性，我们假设 $\|\boldsymbol{\beta}_0\| = 1$ 且 $\boldsymbol{\beta}_0$ 的第 p 个元素为正，其中 $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数。规模函数 $g(\cdot)$ 可以预先指定，也可以不指定。

在实践中，规模参数 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 是关注的重点，而对 $g(\cdot)$ 作出假设有助于解释 $\boldsymbol{\gamma}_0$。例如，在评估某个风险因素的影响时，对 $g(\cdot)$ 施加单调性假设，有助于更好地理解该因素是否与较高的事件风险相关。再如，由于我们有 $\mathrm{E}\{N(\tau) \mid \boldsymbol{Z}\} = g(\boldsymbol{\gamma}_0\boldsymbol{Z})$，假设 $g(x) \propto \exp(x)$，便可得到类似于泊松回归模型的规模比解释

~，用于分析事件总数 $N(\tau)$。对 $\boldsymbol{\beta}_0$的解释不太重要；估计形状是为了确保准确估计规模上的协变量效应。假设 $g(\cdot)$ 单调递增时，图1中的模型2–4是模型（1）的特殊情形，并强制 $\boldsymbol{\beta}_0/\boldsymbol{\gamma}_0$ 为常数。换言之，模型2–4假设所有协变量对形状和规模的影响一致。然而，在实际应用中，这一假设往往不成立。我们注意到，Sun 等人（2022）考虑了一种限制更严格的形状-规模模型，其中对形状函数和规模函数施加单调约束。然而，在图1所示的模型中，关于形状的单调约束通常不成立，因此我们的模型不施加此类约束。此外，为了让更广泛的读者更容易理解相关解释，我们将乘法规模模型作为比例率模型的扩展纳入其中；我们还探讨了特殊情形：即使规模模型设定错误，归一化协变量效应的估计仍然一致。

~在实践中，由于随访期有限，过程 $N(\cdot)$ 可能无法被完全观测。将 $C = \min(C^*, \tau)$ 记为删失时间，其中 C^* 是随访~结束的时间。我们假设，在给定 $\boldsymbol{Z}$ 的条件下，C 与 $N(\cdot)$ 相互独立。观测到的~计数过程为 $N(t) = N(\min(t, C))$，且有 $dN(t) = I(C \geqslant t)dN(t)$。观测数据记为 $\{(N_i(t)\ \boldsymbol{Z}_i, C_i)\ t \in [0, \tau],\ i = 1, \ldots, n\}$，假设它们是 $\{(N(t)\ \boldsymbol{Z}, C)\ t \in [0, \tau]\}$ 的独立同分布（i.i.d.）重复样本。

3. 形状参数的估计

3.1 工作模型下的条件似然

形状参数的估计可通过条件伪似然方法推导得出，该方法消除了大小成分 $g(\boldsymbol{\gamma}_0\boldsymbol{Z})$。为说明估计方法的依据，我们首先~作出一个工作假设：$N(\cdot)$ 是一个非齐次泊松过程。稍后我们将证明，即使不作泊松过程假设，该估计量仍然有效。令

$\sim m_i = N_i(C_i)$ 表示在 $[0, C_i]$ 上观测到的事件数。给定 $(C_i,\ \boldsymbol{Z}_i,\ m_i)$ 后，事件时间 T_{i1}、T_{im_i} 是一组具有密度函数 $f(t,\ \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z}_i)/F(C_i,\ \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z}_i)$ 的独立同分布随机变量的次序统计量（Cox 和 Lewis，1966；Wang 等，2001），其中$F(t,\ x) = \int_0^t f(u,\ x)du$ 是累积形状函数。给定 $(C_i,^{\intercal}\ \boldsymbol{Z}_i,\ m_i)$ 和$^{\intercal}\ i = 1$、n 时，事件时间 $(T_{i1}$、$T_{im_i})$ 的条件似然正比于

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m_i}\frac{f(T_{ik}, \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)}{F(C_i, \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)}. \tag{2}$$

值得注意的是，式（2）中的表达式具有右截断数据似然的形式，其中 T_{ik}的截断时间为 C_i。定义 $r(t,\ x) = f(t,\ x)/F(t,\ x)$；则有 $F(t,\ x)$ =exp$\{-\int_t^\tau r(u,\ x)du\}$。忽略常数项后，对数条件似然可表示为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\left\{\log r(T_{ik}, \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i) - \int_{T_{ik}}^{C_i} r(u, \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)du\right\}. \tag{3}$$

为了估计 $\boldsymbol{\beta}_0$，一个自然的想法是在式（3）中将干扰函数 $r(t,\ x)$“剖面化消去”。

若已知 $\boldsymbol{\beta}$，我们可以构造局部条件似然来估计 $r(t,\ x)$及其积分。对于每个 x，定义 $R(t,\ x) = \int_t^\tau r(u,\ x)du$，它是关于 t的递减函数。我们考虑 $R(\cdot,\ x)$的离散形式，它是一个左连续阶梯函数，并在观测到的事件时间处向下跳跃。具体而言，令 $R\{t, x\}$ 表示 $R(t,\ x)$在 t处的下降量；则局部对数条件似然可写为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}K_h(\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i - x)\left(\log R\{T_{ik}, x\} - \sum_{(j,l):T_{ik}\leqslant T_{jl}\leqslant C_i} R\{T_{jl}, x\}\right), \tag{4}$$

其中 $K_h(\cdot) = K(\cdot/h)/h$ 是缩放后的核函数，其中 $K(\cdot)$ 是在 $[-1, 1]$ 上具有有界支集的核函数，而 h 是带宽参数。在 (4) 中，形状指标 $\boldsymbol{\beta}$ $\boldsymbol{Z}$ 位于 x 的小邻域内的受试者被用于估计 $R(t, x)$。初等微积分表明，(4) 由

$$\widehat{R}\{t, x\} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}K_h(\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i - x)I(T_{ik} = t)}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}K_h(\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i - x)I(T_{ik}\leqslant t\leqslant C_i)}.$$

给定 对于$N_i(t) = \sum_{k=1}^{m_i} I(T_{ik}\leqslant t)$，我们构造以下 $R(t\,x)$的估计量，

$$\widehat{R}_h(t, x, \boldsymbol{\beta}) = \int_t^\tau \frac{\sum_{i=1}^{n}K_h(x - \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)dN_i(u)}{\sum_{i=1}^{n}K_h(x - \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)N_i(u)I(C_i\geqslant u)}. \tag{5}$$

对数条件似然（3）还涉及 $r(t,\ x)$，可通过以下双变量核估计量进行估计，

$$\widehat{r}_h(t,x,\boldsymbol{\beta})=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}K_h(x-\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)K_h(t-T_{ik})}{\sum_{i=1}^{n}K_h(x-\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)N_i(t)I(C_i\geqslant t)}.$$

将 $\widehat{r}_h$ 和 R_h 代入（3），得到以下目标函数：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\tau}\left\{\log\widehat{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{\beta})-\widehat{R}_h(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{\beta})+\widehat{R}_h(C_i,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{\beta})\right\}dN_i(t). \tag{6}$$

Remark 1: 注意，我们在（3）中用 $\widehat{r}_h(t,\ x)$ 替换了 $r(t,\ x)$，而不是点质量 $R\{t,x\}$。这与 Cox 模型剖面似然的现有论证不同；在 Cox 模型中，似然具有类似结构，并且事件时间处的干扰基线风险会被点质量替代（例如，参见 Murphy 和 van der Vaart，2000）。在我们的设定中，在（3）中用 $R\{t,x\}$ 替换 $r(t,\ x)$，无法得到 $\boldsymbol{\beta}_0$ 的相合估计量。此外，对于每个 x，$r(t,\ x)$ 在数学上等价于一个反向时间风险函数，而我们的方法可以轻松调整，用于估计单一事件时间的单指标风险模型。值得注意的是，已有研究表明，现有的局部剖面似然方法应用于单指标风险模型时会失效（Ding 等，2013）。

Remark 2: 即使规模函数的形式设定有误，也可以采用伪条件似然方法，因为规模函数在（2）中被消去了。

3.2 简化的目标函数

目标函数 (6) 可以进一步简化，以降低计算成本。定义 $R(t,x,\boldsymbol{\beta})=\int_t^{\tau}\mathrm{E}\{N(u)I(C\geqslant u)\mid\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}=x\}^{-1}\mathrm{E}\{dN(u)\mid\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}=x\}$，则有 $R(t,x,\boldsymbol{\beta}_0)=R(t,x)$。量 $n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\tau}\{\widehat{R}_h(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{\beta})-\widehat{R}_h(C_i,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{\beta})\}dN_i(t)$ 依概率收敛到 $\mathrm{E}\left[\int_0^{\tau}\{R(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z},\boldsymbol{\beta})-R(C,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z},\boldsymbol{\beta})\}dN(t)\right]$。当 $n\to\infty$ 时，命题 1 表明其极限值不依赖于 $\boldsymbol{\beta}^{\intercal}$。此外，该结果成立

对于模型（1）下的一般计数过程，且不要求满足泊松过程假设。命题 1 的证明见补充信息。

PROPOSITION 1: 对于任意 $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$，我们都有

$$\mathrm{E}\left[\int_0^\tau \{R(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\beta}) - R(C, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\beta})\} dN(t)\right] = \mathrm{E}\{N(\tau)\}.$$

REMARK 3: 假设上述方程左侧不依赖于$\boldsymbol{\beta}$，我们可以通过考虑一个简单的特殊情形，得到表达式 $\mathrm{E}\{N(\tau)\}$。在工作假设为泊松过程，并以 $(C_i, \boldsymbol{Z}_i, m_i)$ 为条件时，变量$\{R(T_{ik}, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}_0) - R(C_i, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}_0)\ k = 1, \ldots, m_i\}$ 是服从均值为 1 的指数分布的一组独立同分布随机变量的顺序统计量。因此，$\int_0^\tau \{R(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}_0) - R(C_i, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}_0)\} dN_i(t)$服从形状参数为 $m_i - N_i(\tau)$ 、速率参数为 1 的伽马分布。

根据命题 1，另一种方法是最大化以下目标函数，

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_0^\tau \{\log \widehat{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta})\}\, dN_i(t). \tag{7}$$

由于式 (6) 中的量 $n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \int_0^\tau \{\widehat{R}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}) - \widehat{R}_h(C_i, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta})\} dN_i(t)$ 涉及二重积分，最大化式 (6) 的计算成本可能很高。采用自助法进行方差估计时，简化后的目标函数 (7) 可显著提高计算速度。

3.3 所提出的估计量

基于上述推导，可以最大化目标函数（6）或（7）来估计参数 $\boldsymbol{\beta}_0$。为确立所提出估计量的大样本性质，我们通过剔除数据稀疏区域对目标函数作了轻微修改。为此，我们将 $\mathcal{S}_Z$ 定义为 $\boldsymbol{Z}$ 支撑集的一个固定子集，并聚焦于满足 $\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z$的观测值； $\mathcal{S}_Z$ 的细节见正则条件。此外，我们将事件时间限制在预先设定的区间 $[\tau_0, \tau_1]$ $(0 < \tau_0 < \tau_1 < \tau)$内，以避免

核估计量 $\widehat{r}_h(t,\ x,\ \boldsymbol{\beta})$在 $t=0$和 $t=\tau$附近遇到的边界问题。随后，我们将目标函数（6）调整如下：

$$\ell(\boldsymbol{\beta})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\log\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{\beta})-\widetilde{R}_h(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{\beta})+\widetilde{R}_h(C_i,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{\beta})\right\}I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)dN_i(t),$$

其中，对于 $t\in(\tau_0,\ \tau_1)$，我们定义修剪核估计量，

$$\widetilde{r}_h(t,x,\boldsymbol{\beta})=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}K_h(x-\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)K_h(t-T_{ik})I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)}{\sum_{i=1}^{n}K_h(\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i-x)I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z,C_i\geqslant t)\{N_i(t)-N_i(\tau_0)\}},$$

$$\widetilde{R}_h(t,x,\boldsymbol{\beta})=\int_t^{\tau_1}\frac{\sum_{i=1}^{n}K_h(x-\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)dN_i(u)}{\sum_{i=1}^{n}K_h(x-\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z,C_i\geqslant u)\{N_i(u)-N_i(\tau_0)\}}.$$

注意，当 $\boldsymbol{\beta}_0$ 已知时，$\widetilde{r}_h(t,x,\boldsymbol{\beta}_0)$ 和 $\widetilde{R}_h(t,x,\boldsymbol{\beta}_0)$ 分别估计 $r^*(t,x)=f(t,x)/\int_{\tau_0}^{t}f(u,x)du$ 和 $R^*(t,x)=\int_t^{\tau_1}r^*(u,x)du$。用 $\widetilde{r}_h$ 和 $\widetilde{R}_h$ 代替 $\widehat{r}_h$ 和 $\widehat{R}_h$，可确保极限目标函数在 $\boldsymbol{\beta}_0$ 处达到最大值。定义 $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p)^{\intercal}:\|\boldsymbol{\beta}\|=1,\beta_p>0\}$。我们通过以下方式估计 $\boldsymbol{\beta}_0$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}=\arg\max_{\boldsymbol{\beta}\in\mathcal{B}}\ell(\boldsymbol{\beta}).\tag{8}$$

约束 $\boldsymbol{\beta}\in\mathcal{B}$ 可以通过在多球坐标系中对 $\boldsymbol{\beta}$ 进行重新参数化来实现，将其表示为一个 $(p-1)$ 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ldots,\ \alpha_{p-1})^{\intercal}\in\mathcal{A}$，其中 $\mathcal{A}=[0,\pi]^{(p-1)}$ 是 $[0,\pi]$ 的 $(p-1)$ 元笛卡尔幂。具体而言，设 $\boldsymbol{\beta}=\mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha})$，其中 $\mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha})=(\cos(\alpha_1),\ \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2)\ldots\ldots,\ \prod_{k=1}^{p-2}\sin(\alpha_k)\cos(\alpha_{p-1})\ \prod_{k=1}^{p-1}\sin(\alpha_k))^{\intercal}$ 将 $\mathcal{A}$ 映射到 $\mathcal{B}$（例如，参见 Balabdaoui 等，2019）。

与第 3.2 节类似，我们可以通过移除收敛到常数的项，进一步简化截尾目标函数。将 $\int_0^t I(\boldsymbol{Z}\in\mathcal{S}_Z,\tau_0\leqslant u\leqslant\sim\sim\tau_1)dN(u)$ 代入 $N(t)$，并采用命题 1 中的论证，可以证明 $n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{-\widetilde{R}_h(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{\beta})+\widetilde{R}_h(C_i,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{\beta})\right\}I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)dN_i(t)$ 收敛到一个不依赖于 $\boldsymbol{\beta}$ 的常数。更多细节见补充信息。由此得到目标函数 $\ell'(\boldsymbol{\beta})=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\{\log\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{\beta})\}I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)dN_i(t)$。接下来，$\boldsymbol{\beta}_0$ 的一个替代估计量为

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}=\arg\max_{\boldsymbol{\beta}\in\mathcal{B}}\ell'(\boldsymbol{\beta}).\tag{9}$$

尽管目标函数是在泊松过程假设下推导得到的，但我们在不作此假设的情况下推导 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的大样本性质。定义 $dM^*(t) = I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z)dN(t) - I(C \geqslant t, \boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z)N(t)r^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})dt$。那么，$dM^*(t)$ 的形式与生存分析中的鞅残差类似，并且我们有 $\mathrm{E}\{dM^*(t) \mid \boldsymbol{Z}\} = 0$。对于向量 $\boldsymbol{v}$，定义 $\boldsymbol{v}^{\otimes 0} = 1$、$\boldsymbol{v}^{\otimes 1} = \boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}^{\otimes 2} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^\intercal$。对于 $k = 0, 1$，定义 $q^{(k)*}(t, x) = \mathrm{E}\{\boldsymbol{Z}^{\otimes k} I(C \geqslant t, \boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z) g(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}) \mid \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z} = x\}$。我们用 $\dot{r}^*(t, x)$ 表示 $r^*(t, x)$ 关于 x 的偏导数，并用 $^-$ 表示矩阵的 Penrose-Moore 逆。定理1和定理2陈述了 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的渐近正态性，证明见补充信息。

~THEOREM 1: 在补充信息中的条件（*C1*）–（*C5*）下，$\sqrt{n}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)$依分布收敛于一个均值为零、方差-协方差矩阵为 $V^- \Sigma V^-$ 的正态随机向量，其中我们定义 $\Sigma = \mathrm{E}(\psi\psi^\intercal)$、$\psi = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \{r^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\}^{-1} \dot{r}^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}) \left\{ \boldsymbol{Z} - q^{(1)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}) / q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}) \right\} dM^*(t)$，并且

$$V = -\,\mathrm{E}\left[\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left\{ \frac{\dot{r}^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})}{r^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})} \right\}^2 \left\{ \boldsymbol{Z} - \frac{q^{(1)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})}{q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})} \right\}^{\otimes 2} I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z) dN(t) \right].$$

~REMARK 4: 请注意，$\boldsymbol{\beta}$ 的渐近方差与我们最大化以下函数时相同：$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \{\log r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}) - R^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}) + R^*(C_i, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta})\} I(\boldsymbol{Z}_i \in \mathcal{S}_Z) dN_i(t)$，在 $R^*(t, x, \boldsymbol{\beta}) = \int_t^{\tau_1} \mathrm{E}[\{N(u) - N(\tau_0)\} I(C \geqslant u, \boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z} = x]^{-1} \mathrm{E}\{I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z) dN(u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z} = x\}$ 和 $r^*(t, x, \boldsymbol{\beta}) = -\partial R^*(t, x, \boldsymbol{\beta}) / \partial t$ 已知的情况下。

~THEOREM 2: 在补充信息中的条件（*C1*）–（*C5*）下，$\sqrt{n}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)$依分布收敛于一个均值为零、方差-协方差矩阵为 $V^- \Sigma V^-$ 的正态随机向量，其中 $n \to \infty$。

根据定理1和定理2，$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 具有相同的渐近方差。实践中，$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 均可用于估计 $\boldsymbol{\beta}_0$，而计算 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 的速度更快。当使用自助法进行方差估计且计算资源有限时，

$\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 的自助法标准误可用作 $\boldsymbol{\beta}$的自助法标准$\hat{}$误的近似值，从而显著提高计算速度。

4. 规模参数的估计

$\tilde{}$由于我们有 $\mathrm{E}\{N(\tau) \mid \boldsymbol{Z}\} = g(\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})$，在不存在删失的情况下，估计 $\boldsymbol{\gamma}_0$是$\tilde{}$直接的。在存在删失时，过程 $N(\cdot)$ 只能观测到 C。为处理删失，我们将 $[0, C]$ 中观测到的事件计数“投影”到区间 $[0, \tau]$上，并将投影事件计数作为结果变量来估计 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 。在条件独立删失的假设下，我们推导出以下方程，证明见补充信息：

$$\mathrm{E}\left\{ \frac{N(C)}{F(C, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})} \,\middle|\, \boldsymbol{Z} \right\} = g(\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}) = \mathrm{E}\{\widetilde{N}(\tau) \mid \boldsymbol{Z}\}. \tag{10}$$

根据公式（10），$N(C)/F(C, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})$与$\sim N(\tau)$具有相同的条件期望。公式（10）扩展了 Wang 等人（2001）的结果，其中形状不依赖于协变量。在形状已知的理想情况下，可以使用 $N(C)/F(C, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})$作为回归建模的结果变量。由于 $F(\cdot, \cdot)$ 和 $\boldsymbol{\beta}_0$ 通常未知，我们用相应的估计值替代它们。函数 $F(t, x)$ 可以通过 $\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ $\tilde{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$以下任一方式进行估计：$F_h(t, x, \boldsymbol{\beta})$ 或 $F_h(t, x, \boldsymbol{\beta})$，其中 $F_h(t, x, \boldsymbol{\beta}) = \exp\{-R_h(t, x, \boldsymbol{\beta})\}$。$\boldsymbol{\beta}$、$\tilde{}$ $\hat{}$ $\sim\boldsymbol{\beta}$和 R_h 的公式分别见第3节中的公式（8）、（9）和（5）。然后，可以用投影事件计数 $N_i(C_i)\widehat{F}_h(C_i, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i, \widehat{\boldsymbol{\beta}})^{-1}$替代事件总数 $N_i(\tau)$。下文中，我们将考虑对规模函数 $g(\cdot)$施加不同假设的情景。

4.1 大小的乘法模型

分析复发事件的一种简单方法是统计$\tilde{}$区间 $[0, \tau]$ 内观察到的事件数量，并将事件计数 $N(\tau)$作为结果变量，应用泊松回归模型。按照标准泊松回归设定，我们假设 $g(a) \propto \exp(a)$。在第4.1节中，不对 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 的范数施加任何约束。因此，模型（1）可以

被视为比例率模型的一种扩展，因为协变量不仅会对率函数的大小产生乘法效应，还会改变其形状。在没有删失的情况下，可以求解估计方程，

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\boldsymbol{Z}}_i \{\widetilde{N}_i(\tau) - \exp(c + \boldsymbol{\gamma}^\intercal \boldsymbol{Z}_i)\} = \mathbf{0}, \tag{11}$$

~以估计规模参数，其中 $\boldsymbol{Z}_i = (1, \boldsymbol{Z}_i)$，且 c对应于回归模型中的截距。记 $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^0{}_{\exp}$ 为方程（11）关于 $\boldsymbol{\gamma}$的解。该估计量的有效性通常取决于连接函数 g的设定是否正确，而连接函数设定错误通常会导致有偏估计。然而，如果 $\boldsymbol{Z}$服从椭圆对称分布（例如多元正态分布），即使连接函数设定错误，相对协变量效应仍可得到一致估计。该结果总结于命题2。

Proposition 2: 如果 $\boldsymbol{Z}$ 服从椭圆对称分布，且规模函数 g 单调递增，则 $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^0{}_{\exp}$ $/\|\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^0{}_{\exp}\|$ 依概率收敛于 $\boldsymbol{\gamma}_0/\|\boldsymbol{\gamma}_0\|$，当 $n \to \infty$时。

Remark 5: 注意，$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^0{}_{\exp}$ 也可以通过使用完整数据 $\{\boldsymbol{Z}_i, N_i(t)\ 0 \leqslant t \leqslant \tau,\ i = 1, \ldots$ $\ldots, n\}$拟合比例率模型~得到。因此，在命题2的假设下，即使率函数的形状取决于协变量，和/或规模函数设定错误，比例率模型仍能正确识别协变量效应方向。然而，对于删失数据，在形状异质性的情况下，比例率模型得到的标准化系数通常是有偏的。

~存在删失时，我们建议在（11）中用投影事件计数 $N_i(C_i)\widehat{F}_h(C_i,\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}\ \boldsymbol{Z}_i,\ \widehat{\boldsymbol{\beta}})^{-1}$ 替换 $N_i(\tau)$，并求解以下估计方程：

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\boldsymbol{Z}}_i I(\boldsymbol{Z}_i \in \mathcal{S}_Z) \left\{ \frac{N_i(C_i)}{\widehat{F}_h(C_i, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \widehat{\boldsymbol{\beta}})} - \exp(c + \boldsymbol{\gamma}^\intercal \boldsymbol{Z}_i) \right\} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

上述估计方程的解记为 $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\exp}$。在方程（12）中，

加入指示函数 $I(\boldsymbol{Z}_i \in \mathcal{S}_Z)$，以确保 $\boldsymbol{\beta}_0^\top \boldsymbol{Z}$ 的密度有正的下界；而核估计量 F_h 则无需进行截尾。

REMARK 6: 当 $\boldsymbol{Z}$ 服从零均值正态分布，且 g 是递增函数（不一定是指数函数）时，我们考虑截尾指示函数 $I(|\boldsymbol{\beta}_{\|\tilde{\gamma}}^\top \boldsymbol{Z}_i| \leqslant a,\ |\boldsymbol{\beta}_{\perp\tilde{\gamma}}^\top \boldsymbol{Z}_i| \leqslant a)$，其中 a 是预先指定的正数，$\tilde{\gamma}$ 是 $\gamma_0/\|\gamma_0\|$ 的一致初始估计量（例如第4.2节中介绍的估计量），$\boldsymbol{\beta}_{\|\tilde{\gamma}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_{\perp\tilde{\gamma}}$ 分别表示 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $\tilde{\gamma}$ 上的投影及其对应的拒绝。根据命题2中的论证，可以证明，即使规模函数 g 设定错误，$\hat{\gamma}_{\exp}/\|\hat{\gamma}_{\exp}\|$ 仍能一致估计 $\gamma_0/\|\gamma_0\|$。在模拟研究中，我们观察到，即使规模函数设定错误，归一化估计量在估计 $\gamma_0/\|\gamma_0\|$ 时仍表现良好。

然后，在指数链接函数设定正确的假设下，我们建立了 $\hat{\gamma}_{\exp}$ 的大样本性质。定理3概述了 $\hat{\gamma}_{\exp}$ 的渐近正态性。

THEOREM 3: 假设 $(c_0, \gamma_0)^\top \in \Xi$，其中 Ξ 是 $\mathbb{R}^{p+1}$ 的紧子集。在补充信息中的条件 *(C1)-(C8)* 下，$\sqrt{n}((\hat{c}, \hat{\gamma}_{exp})^\top - (c_0, \gamma_0)^\top)$ 依分布收敛于一个方差-协方差矩阵为 $\Gamma_1^{-1}\Omega_1\Gamma_1^{-1}$ 的零均值正态随机向量，其中 Γ_1 和 Ω_1 的定义见补充信息。

定理3的证明见补充信息。另一种方法是使用 $\hat{F}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})$ 来估计 $F(t, \boldsymbol{\beta}_0^\top \boldsymbol{Z})$，并证明该估计量具有渐近正态性。证明过程采用类似的论证，因此省略。

4.2 未知规模函数

现在考虑 $g(\cdot)$ 未知但单调递增的情况。施加单调性约束是为了便于解释协变量效应的方向，而且大多数现有半参数速率模型都满足这一约束。为保证可识别性，我们假设 $\|\gamma_0\| = 1$。文献中已提出多种用于单调单指数模型的方法，

类似于 Sun 等人（2022），我们考虑最大秩估计（Cavanagh 和 Sherman，1998）；该方法无需核平滑，且具有出色的计算特性。应用公式（10），可得 $\mathrm{E}\left\{ {}_{F\ C_i}^{N_i}(C_i) \quad (\cdot\ \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z}_i) \middle| \boldsymbol{Z}_i,\ \boldsymbol{Z}_j \right\} \geqslant \mathrm{E}\left\{ {}_{F\ C_j}^{N_j}(C_j) \quad (\cdot\ \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z}_j) \middle| \boldsymbol{Z}_i,\ \boldsymbol{Z}_j \right\}$ 只要 $\boldsymbol{\gamma}_0\boldsymbol{Z}_i \geqslant \boldsymbol{\gamma}_0\boldsymbol{Z}_j$。在理想情况下，若已知 $F(t,\ \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z})$，则通过最大化 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} I(\boldsymbol{\gamma}\ \boldsymbol{Z}_i > \boldsymbol{\gamma}\ \boldsymbol{Z}_j) N_i(C_i)/F(C_i,\ \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)$ 来估计 $\boldsymbol{\gamma}_0$，并对 $\boldsymbol{\gamma}$ 施加单位范数约束。实际应用中，我们用估计值替换未知量，并在对 $\boldsymbol{\gamma}$ 施加单位范数约束的条件下，最大化以下目标函数：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} I(\boldsymbol{\gamma}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i > \boldsymbol{\gamma}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_j, \boldsymbol{Z}_i \in \mathcal{S}_Z, \boldsymbol{Z}_j \in \mathcal{S}_Z) \frac{N_i(C_i)}{\widehat{F}_h(C_i, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i, \widehat{\boldsymbol{\beta}})}.$$

将上述函数在集合 $\{\boldsymbol{\gamma}:\ \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^p,\ \|\boldsymbol{\gamma}\| = 1\}$ 上的最大值记为 $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathrm{mre}}$。所提出估计量的渐近正态性见定理4。

THEOREM 4: 在补充信息中的条件 *(C1)-(C10)* 下，$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{mre} - \boldsymbol{\gamma}_0)$依分布收敛于一个零均值正态随机向量，其方差-协方差矩阵为 $\Gamma_2^{-}\Omega_2\Gamma_2^{-}$，当 $n \to \infty$ 时成立，其中 Γ_2 和 Ω_2 的定义见补充信息。

5. 模拟研究

我们进行了模拟研究，以评估所提出估计量的有限样本性能。复发事件过程 $N(\cdot)$ 是由一个非齐次泊松过程生成的，其率函数取决于协变量 $\boldsymbol{Z} = (Z_1,\ Z_2)$。在每种设定下，两个协变量 Z_1 和 Z_2 均独立地从标准正态分布中生成。我们还允许率函数取决于一个个体特异的潜变量，记为 W。我们根据以下率函数生成复发事件：

(M1) $\mu(t|\boldsymbol{Z},\ W) = W f(t,\ \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z}) \exp(\boldsymbol{\gamma}_0\boldsymbol{Z})$, $t \in [0,1]$, 其中 $f(t,\ x) \propto t(1-t)^{\exp(x)}$ 是形状参数为 2 和 $\exp(x)$ 的 Beta 分布的概率密度函数；(M2) $\mu(t|\boldsymbol{Z},\ W) = 3W\exp\{-t\exp(\boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z})\}\exp(\boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z})$, $t \in [0,2]$；(M3) $\mu(t|\boldsymbol{Z},\ W) = W(t^3 + \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z})$, $t \in [0,2]$。

我们将形状参数设为 $\boldsymbol{\beta}_0 = (\beta_{01}, \beta_{02}) = (0.8, 0.6)^\intercal$。在 (M1) 中，我们将规模参数设为 $\boldsymbol{\gamma}_0 = (\gamma_{01}, \gamma_{02}) = (0.6, 0.8)^\intercal$。在 (M2) 和 (M3) 中，我们有 $\boldsymbol{\gamma}_0 = \boldsymbol{\beta}_0$。删失时间 C 由速率参数为 $0.1W$ 的指数分布生成。对于每个情景，我们考虑两种情况，$W = 1$，且 W 服从均值为 1、方差为 1/3 的伽马分布。在后一种情况下，C 通过 $\boldsymbol{Z}$ 和 W 与复发事件过程相关，因此删失具有信息性。虽然本文未讨论信息性删失，但第 3 节和第 4 节中的论证可轻松扩展，以说明同样的估计量也适用。在每次模拟中，我们生成了 1,000 个模拟数据集，样本量分别为 200 和 400。在条件独立删失（信息性删失）下，(M1)、(M2) 和 (M3) 的复发事件平均观测数分别为 1.6 (1.5)、2.2 (2.2) 和 3.5 (3.3)。

对于形状估计，我们在目标函数 $\ell(\boldsymbol{\beta})$ 和 $\ell'(\boldsymbol{\beta})$ 中使用了四阶核函数 $K(u) = 315(3 - 11u^2)(1 - u^2)^3 I(|u| \leqslant 1)/512$。带宽参数 h 设为 $h = n^{-2/15}$。当样本量相对较小时，由于核函数可能取负值，$\widetilde{r}_h$ 为负的概率较小。为解决这一问题，我们将原始核估计量 $\widetilde{r}_h(t, x, \boldsymbol{\beta})$ 替换为 $\max\{\widetilde{r}_h(t, x, \boldsymbol{\beta}),\ r_0\}$，其中在我们的模拟中，$r_0$ 设为 10^{-6}。对于规模估计，我们在 $\widehat{F}_h(t, x, \boldsymbol{\beta})$ 中使用了二阶 Epanechnikov 核函数 $K(u) = 3(1 - u^2) I(|u| \leqslant 1)/4$。带宽参数 h 设为 $h = n^{-2/7}$。对于单位范数约束，我们采用变换 $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))^\intercal$，$\alpha \in [0, 2\pi]$。随后，目标函数的最大化是针对 α 进行的。对于 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$，如果最优解的最后一个元素为负，则将最优解乘以 -1。由于实际应用中通常会省略修剪（Härdle 等，2004），我们考虑了未修剪估计量（即 $\mathcal{S}_Z = \mathbb{R}^p$、$\tau_0 = 0$ 和 $\tau_1 = \tau$）。我们使用进行了 200 次迭代的非参数自助法，获得所提出的 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ 估计量的标准误和 95% 置信区间。为缩短计算时间，我们对 $\boldsymbol{\beta}$ 使用自助法，并使用

~ ^ β 的自助法标准误，根据正态近似构造 β 的置信区间。最后，规模估计量 $\hat{\gamma}_{\exp}$ 在规模采用指数连接函数时有效，但当连接函数设定错误时（例如，情景 (M2) 和 (M3)），可能无法对真实参数进行一致估计。鉴于备注6以及协变量服从正态分布这一事实，我们评估了 $\hat{\gamma}_{\exp}/\|\hat{\gamma}_{\exp}\|$在估计 γ_0方面的表现。

形状和大小估计的结果分别汇总于表1和表2中。如两表所示，所提出的估计量产生的偏差较小。采用非参数自助法获得的平均标准误接近经验标准误，95%置信区间的覆盖概率接近名义水平。随着样本量增加，偏差和标准误的绝对值均减小。^ ~正如预期，β 和 β 的经验标准误很接近。因此，当需要较短的 ^ ~计算时间时，可以通过对 β进行自助法估计 β 的标准误。在错误设定模型下，标准化估计量 $\hat{\gamma}_{\exp}/\|\hat{\gamma}_{\exp}\|$表现良好，这证实了命题2。当连接函数设定正确时（即（M1）），$\hat{\gamma}_{\exp}/\|\hat{\gamma}_{\exp}\|$ 的经验标准误小于或相当于 $\hat{\gamma}_{\mathrm{mre}}$。当连接函数设定错误时，$\hat{\gamma}_{\mathrm{mre}}$ 的经验标准误小于 $\hat{\gamma}_{\exp}/\|\hat{\gamma}_{\exp}\|$。当进一步使用脆弱性变量刻画复发事件与删失时间之间的相关性时，所提出的估计量仍令人满意。总之，在不同的速率模型下，所提出的方法表现出良好的有限样本性能。

[表1见此处。]

[表2置于此处。]

6. 数据示例

所提出的方法应用于SEER-Medicare数据，以分析乳腺癌患者的反复住院情况（Warren等，2002年）。在我们的分析中，我们关注在2010年至2017年期间、诊断时年龄为65岁及以上且被诊断为0期乳腺癌的女性。结局是乳腺癌诊断后住院治疗的计数过程。对于每次住院治疗，其事件时间定义为从乳腺癌诊断到入院日期的时间。随访结束时间为2018年12月1日或死亡时间，以较早者为准。我们关注从诊断前12个月起至随访结束期间参加Medicare A部分的受试者。感兴趣的时间区间为从乳腺癌诊断到诊断后8年（即 $\tau = 8$ 年）。协变量包括诊断年龄、肿瘤大小、诊断年份和种族（白人相对于其他种族）。我们的分析基于一组符合上述纳入标准的5000名受试者随机子样本。随访时间中位数为4.67年，共观察到15,150个事件。在我们的研究样本中，4,330名受试者（86.6%）为白人。诊断时的平均年龄为75.8岁；平均肿瘤大小为1.4厘米。

我们应用所提出的形状-规模模型，估计协变量对住院率的影响。结果见表3。为便于比较，文中也列出了比例率模型的结果。所提出的两种形状估计方法得出的结果相似。诊断年龄和种族与过程的形状显著相关，这表明形状函数存在由年龄和种族导致的异质性。对于规模部分，我们考虑了未指定的单调连接函数和指数连接函数。对连接函数的不同假设不会改变关联方向。在未指定连接函数的情况下，年龄较大、肿瘤较大以及诊断年份较晚，均与率函数规模较大和总体事件率较高显著相关。在指数连接函数下，还可以进一步作出

关于大小比的解释。具体而言，年龄每增加一岁，过程大小增加6.7%（95%置信区间 [CI], 5.7%–7.7%）；肿瘤大小每增加一厘米，过程大小增加37.4%（95%置信区间，25.1%–51.0%）；诊断年份每增加一年，过程大小增加116.8%（95%置信区间，87.2%–151.2%）。采用比例率模型时，肿瘤大小、诊断年份和诊断年龄的影响均有所减弱。因此，忽略形状异质性会导致协变量效应的结果不同。

[Table 3 about here.]

7. 讨论

我们提出了一个基于灵活且易于解释的率函数的计数过程建模综合框架。率函数取决于两组回归参数，它们刻画协变量对率函数形状和大小的影响。当率函数的形状随协变量变化时，我们的模型尤为适用，并且包含许多常用模型作为特例。

在相关文献中，Sun和Su（2008）以及Xu 等人（2020）考虑了使用两种类型的协变量效应对率函数建模：一种是改变时间尺度的尺度变化协变量效应，另一种是对累积率函数产生额外乘法效应。从形状—大小视角来看，上述模型的形状函数仅取决于尺度变化参数，而所提出的方法能够对尺度变化效应进行一致估计，但只能估计到一个归一化常数。这些模型的规模函数通常同时取决于尺度变化效应和乘法效应。这与我们的模型不同；在我们的模型中，大小取决于大小指数，且协变量与大小之间的关联易于解释。

本文中，我们考虑了估计方程方法和最大秩估计——

用于规模估计。不过，值得注意的是，其他现有的单指标均值模型方法也可能适用。例如，当规模函数完全未指定且不施加单调性假设时，可以将投影事件计数作为结果变量，应用 Ichimura （ 1993 ）或 Xia （ 2006 ）中的方法。我们将在未来的研究中对这些估计量进行更深入的研究。

Acknowledgements

本研究使用了关联的SEER-Medicare数据库。这些数据的解释和报告完全由作者负责。作者感谢美国国家癌症研究所、CMS研究、开发与信息办公室、Information Management Services（IMS）公司以及监测、流行病学与最终结果（SEER）项目的肿瘤登记处为建立SEER-Medicare数据库所做的工作。本研究所用癌症发病数据的收集工作，依据《加利福尼亚州健康与安全法典》第103885条，由加利福尼亚州公共卫生部提供支持；同时还获得疾病控制与预防中心（CDC）国家癌症登记项目依据合作协议1NU58DP007156提供的支持，以及美国国家癌症研究所监测、流行病学与最终结果项目提供的支持：合同HHSN261201800032I授予加利福尼亚大学旧金山分校，合同HHSN261201800015I授予南加利福尼亚大学，合同HHSN261201800009I授予公共卫生研究所。本文所表达的观点和意见属于作者，不一定反映加利福尼亚州公共卫生部、美国国家癌症研究所、疾病控制与预防中心及其承包商和分包商的意见。

References

Andersen、P. K.和Gill、R. D.（1982）。计数过程的Cox回归模型：一项大样本研究。《统计年刊》**10,** 1100–1120。Balabdaoui、F.、Groeneboom、P.和Hendrickx、K.（2019）。单调单指标模型中的得分估计。斯堪的纳维亚统计学杂志**46,** 517–544。Bouaziz、O.、Geffray、S.和Lopez、O.（2015）。通过单指标模型对复发事件过程进行半参数推断。《统计学》**49,** 361–385。Bouaziz、O.和Lopez、O.（2010）。删失单指标回归模型中的条件密度估计。《伯努利》**16,** 514–542。

B¨ucher, A., El Ghouch, A., and Van Keilegom, I.（2021）。用于删失数据的单指标分位数回归模型。载于《当代统计学与计量经济学进展》，第177–196页。施普林格。

Cavanagh, C. and Sherman, R. P.（1998）。单调指标模型的秩估计量。《计量经济学》**84,** 351–381。

Chiang, C.-T., Wang, S.-H., and Huang, M.-Y.（2018）。删失单指标风险回归中的多用途估计。《统计数学研究所年刊》**70,** 523–551。

Christou, E. 和 Akritas, M. G. (2019). 删失数据的单指标分位数回归。《统计方法与应用》28, 655–678. Cox, D. R. 和 Lewis, P. A. (1966). 《事件序列的统计分析》. Methuen & Co., Ltd., 伦敦；John Wiley & Sons, Inc., 纽约。Ding, K., Kosorok, M. R. 和 Zeng, D. (2013). 单指标风险模型中的局部似然与分层似然方法。《数学与统计学通讯》1, 115–132. Einmahl, U. 和 Mason, D. M. (2005). 核型

函数估计量的带宽一致一致性。《统计年刊》**33**, 1380–1403. Enewold, L., Parsons, H., Zhao, L., Bott, D., Rivera, D. R., Barrett, M. J., Virnig, B. A. 和 Warren, J. L. (2020). SEER-Medicare数据的最新概述：内容与应用的扩展。《美国国家癌症研究所专刊》**2020**, 3–13. Gail, M., Santner, T. 和 Brown, C. (1980). 基于多次肿瘤发生时间的比较致癌实验分析。《生物统计学》**36**, 255–266.

Ghosh, D.（2004年）。用于复发失效时间数据的加速率回归模型。《寿命数据分析》10,247–261。

H¨ardle, W.、Hall, P. 和 Ichimura（1993）。单指标模型中的最优平滑。《统计年刊》**21,** 157–178。

H¨ardle，W.，M¨uller，M.，Sperlich，S. 和 Werwatz，A.（2004年）。非参数与半参数模型。《施普林格统计学丛书》。施普林格出版社，纽约。

H¨ardle, W. 和 Stoker, T.M. (1989). 通过平均导数法研究平滑多元回归。《美国统计学会会刊》**84,** 986–995。

Huang, H., Li, Y., Liang, H. 和 Tang, Y.（2020）。固定删失响应的单指标模型估计。《中华统计学志》**30**, 829–843。

Huang, J. Z. 和 Liu, L. (2006). 具有灵活相对风险形式的比例风险回归模型的多项式样条估计与推断。《生物统计学》62, 793–802.

Ichimura, H. (1993). 单指标模型的半参数最小二乘法（SLS）与加权 SLS 估计。《计量经济学杂志》58, 71–120.

Kong, E. 和 Xia, Y. (2017). 非参数删失分位数回归的一致巴哈杜尔表示：一种质量再分配方法。《计量经济学理论》33, 242– 261.

Lawless, J. F. 和 Nadeau, C.（1995）。复发事件分析的一些简单稳健方法。《技术计量学》37，158–168。

Lin, D.、Wei, L. 和 Ying, Z.（1998）。计数过程的加速失效时间模型。《Biometrika》85，605–618。Lin, D.、Wei, L. 和 Ying, Z.（2001）。点过程的半参数变换模型。《美国统计学会会刊》96，620–628。Lin, D. Y.、Wei, L.-J.、Yang, I. 和 Ying, Z.（2000）。复发事件均值和率函数的半参数回归。《Journal of the Royal Statistical Society: Series B》62，711–730。Lopez, O.（2009）。具有右删失响应的单指标回归模型。《Journal of Statistical Planning and Inference》139，1082–1097。Lopez, O.、Patilea, V. 和 Van Keilegom, I.（2013）。存在依赖于协变量的删失时的单指标回归模型。《伯努利》19，721–747。Murphy, S. A. 和 Van der Vaart, A. W.（2000）。关于剖面似然。《美国统计学会会刊》95，449–465。Pepe, M. S. 和 Cai, J.（1993）。复发失效时间和时变协变量的一些图形展示及边际回归分析。《美国统计学会会刊》88，811–820。Powell, J. L.、Stock, J. H. 和 Stoker, T. M.（1989）。指标系数的半参数估计。《Econometrica》57，1403–1430。Prentice, R. L.、Williams, B. J. 和 Peterson, A. V.（1981）。关于多变量失效时间数据的回归分析。《Biometrika》68，373–379。Schaubel, D. E.、Zeng, D. 和 Cai, J.（2006）。复发事件数据的半参数加性速率模型。《寿命数据分析》12，389–406。Sherman, R. P.（1993）。最大秩相关估计量的极限分布。《Econometrica》页码123–137。Strzalkowska-Kominiak, E. 和 Cao, R.（2013）。条件-

删失下部分分布单指标模型。《多元分析杂志》*Journal of Multivariate Analysis***114,** 74–98。Strzalkowska-Kominiak, E. 和 Cao, R.（2014）。删失下单指标模型的 Beran 方法。《计算统计学》*Computational Statistics* **29,** 1243–1261。Sun, L. 和 Su, B.（2008）。一类用于复发事件数据的加速均值回归模型。《寿命数据分析》*Lifetime Data Analysis* **14,** 357–375。Sun, Y., Chiou, S. H., Marr, K. A. 和 Huang, C.-Y.（2022）。计数过程形状指数和规模指数的统计推断。《生物统计学》*Biometrika* **109,** 195–208。van der Vaart, A. W.（2000）。《渐近统计学》*Asymptotic Statistics*。剑桥大学出版社。Wang, M.-C. 和 Huang, C.-Y.（2014）。带有形状参数和规模参数的复发事件过程的统计推断方法。《生物统计学》*Biometrika* **101,** 553–566。

Wang, M.-C., Qin, J. 和 Chiang, C.-T.（2001）。分析具有信息性删失的复发事件数据。《美国统计学会会刊》**96,** 1057–1065。

Wang, W., Wang, J.-L. 和 Wang, Q.（2009）。未知连接函数下的比例风险回归。*Lecture Notes-Monograph Series* **57,** 47–66。

Warren, J. L., Klabunde, C. N., Schrag, D., Bach, P. B. 和 Riley, G. F.（2002）。SEER-Medicare数据概述：内容、研究应用及其对美国老年人口的普遍适用性。*Medical Care* 第 IV3–IV18 页。

Xia, Y.（2006）。单指标模型两个估计量的渐近分布。《计量经济学理论》**22,** 1112–1137。Xu, G., Chiou, S. H., Huang, C.-Y., Wang, M.-C. 和 Yan, J.（2017）。复发事件和失效时间的联合尺度变化模型。《美国统计学会会刊》**112,** 794–805。Xu, G., Chiou, S. H., Yan, J., Marr, K. 和 Huang, C.-Y.（2020）。信息性删失下复发事件过程的广义尺度变化模型。《中华统计学志》**30,**

1773–1795。

Zhao, X. 和 Zhou, X.（2014）。复发事件均值和率函数的充分降维。《医学统计学》 **33,** 3693–3709。

Supporting Information

补充信息包含定理1–4和命题1–2的正则条件与证明。

Yifei Sun 和 Ying Sheng 的《形状异质性下计数过程的统计推断》补充信息

1. Regularity conditions and notations

1.1 定理*1*和定理*2*的正则条件与记号

用 $f_{\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}}(\cdot)$ 表示 $\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}$ 的密度函数。对于 $t \in [\tau_0, \tau_1]$，定义 $f_1^*(t, x, \boldsymbol{\beta})dt = \mathrm{E}\{I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z) dN(t) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z} = x\} f_{\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}}(x)$ 和 $f_2^*(t, x, \boldsymbol{\beta}) = \mathrm{E}[I(C \geqslant t, \boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z)\{N(t) - N(\tau_0)\} \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z} = x] f_{\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}}(x)$。用 ∇_2 表示关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的二阶偏导算子（将 $\boldsymbol{\beta} = \mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha})$ 视为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的函数），并用 $\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的弗罗贝尼乌斯范数。

我们对定理1和定理2作出以下正则条件假设：

(C1) $\mathcal{S}_Z$ 是 $\mathbb{R}^p$的一个紧子集。

(C2) 过程 $N(\cdot)$在 $[0, \tau]$上有界。

(C3) 在给定 $\boldsymbol{Z}$的条件下，删失时间 C与 $N(\cdot)$独立，并且满足 $\inf_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{S}_Z} P(C \geqslant \tau \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}) > 0$.

(C4) $K(\cdot)$是 $[-1, 1]$上的二阶可微四阶核函数。此外，$h = a_1 n^{-a_2}$，其中 a_1 和 a_2 是满足 $a_1 > 0$ 和 $1/8 < a_2 < 1/6$的常数。

(C5) 对于任意$\tau_0^* \in (\tau_0, \tau_1)$，假设 $\inf_{\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B},\ \boldsymbol{z} \in \mathcal{S}_Z,\ t \in [\tau_0^*, \tau_1]} f_2^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) > 0$。对于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in \mathcal{A}$，存在定义在 $\mathcal{S}_Z \times [\tau_0, \tau_1]$ 上的平方可积函数 $m_k^*(\boldsymbol{z}, t)$，使得

$$\|\nabla_2 f_k^*(t, \mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha}_1)^\intercal \boldsymbol{z}, \mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha}_1)) - \nabla_2 f_k^*(t, \mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha}_2)^\intercal \boldsymbol{z}, \mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha}_2))\|_F \leqslant m_k^*(\boldsymbol{z}, t)\|\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2\|, \quad k = 1, 2.$$

1.2 定理*3*的正则条件与符号约定

对于定理3，我们首先定义 $\boldsymbol{Z} = (1, \boldsymbol{Z}^\intercal)^\intercal$，$\mathcal{N} = N(C)/F(C, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})$，$dM(t) = dN(t) - I(C \geqslant t)N(t) r(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})dt$，以及 $q^{(k)}(t, x) = \mathrm{E}\{\boldsymbol{Z}^{\otimes k} I(C \geqslant t) g(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}) \mid \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z} = x\}$，其中 $k = 0, 1, 2$。然后我们

定义方差-协方差矩阵公式中的矩阵：

$$\Gamma_1 = -E\{\exp(c_0 + \boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\widetilde{\boldsymbol{Z}}\widetilde{\boldsymbol{Z}}^\intercal I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z)\},$$

$$\Omega_1 = E(\psi_1 \psi_1^\intercal),$$

$$\begin{aligned}\psi_1 =& \widetilde{\boldsymbol{Z}} I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z)\{\mathcal{N} - \exp(c_0 + \boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\} \\ &+ \int_0^\tau \mathrm{E}\{\widetilde{\boldsymbol{Z}}\mathcal{N} I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z, C \leqslant t) \mid \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}\}\{q^{(0)}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}) F(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\}^{-1} dM(t) f_{\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}}(\beta_0^\intercal \boldsymbol{Z}) \\ &- \mathrm{E}[\widetilde{\boldsymbol{Z}} I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z)\mathcal{N} \int_C^\tau \dot{r}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\{\boldsymbol{Z} - q^{(1)}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})/q^{(0)}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\}^\intercal] dt V^- \psi.\end{aligned}$$

此外，我们还施加以下正则条件。这里定义函数$f_1(t, x, \boldsymbol{\beta})dt = \mathrm{E}\{dN(t) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z} = x\} f_{\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}}(x)$ 和 $f_2(t, x, \boldsymbol{\beta}) = \mathrm{E}[I(C \geqslant t)N(t) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z} = x] f_{\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}}(x)$。记 $\dot{r}(t, x)$ 为 $r(t, x)$ 关于 x 的偏导数。值得注意的是，对于规模估计，核函数 K 和带宽参数 h 在 F_h 中的条件（C6）不同于形状估计中的条件（C4）。

(C6) $F_h(t, x, \boldsymbol{\beta})$ 中的核函数 $K(\cdot)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的二阶核函数。带宽参数的形式为 $h = b_1 n^{-b_2}$，其中 b_1 和 b_2 为满足$b_1 > 0$ 和 $1/4 < b_2 < 1/2$的常数。

(C7) 存在一个充分小的正常数 τ'，使得 $\inf_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{S}_Z} P(C \geqslant \tau' \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}) = 1$ 且 $\inf_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{S}_Z} F(\tau', \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{z}) > 0$。

(C8) 对于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in \mathcal{A}$，存在平方可积函数 $m_k(\boldsymbol{z}, t)$，使得

$$\|\nabla_2 f_k(t, \mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha}_1)^\intercal \boldsymbol{z}, \mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha}_1)) - \nabla_2 f_k(t, \mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha}_2)^\intercal \boldsymbol{z}, \mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha}_2))\|_F \leqslant m_k(\boldsymbol{z}, t)\|\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2\|, \quad k = 1, 2.$$

1.3 定理4的正则条件与符号

定理4中，方差-协方差公式所涉及矩阵的定义如下：

$$
\begin{aligned}
\Gamma_2 =& -\mathrm{E}[\{\phi^{(2)}(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\phi^{(0)}(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}) - \phi^{(1)}(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z})^{\otimes 2}\}\dot{g}(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}) f_{\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z})], \\
\Omega_2 =& \mathrm{E}(\psi_2 \psi_2^\intercal), \\
\psi_2 =& \delta(\boldsymbol{Z})\{\mathcal{N} - g(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\} \\
& - \mathrm{E}\left[\int_C^\tau \dot{r}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})dt \cdot \delta(\boldsymbol{Z})\mathcal{N}\{\boldsymbol{Z} - q^{(1)}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})/q^{(0)}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\}^\intercal\right] V^- \psi \\
& + \int_0^\tau \mathrm{E}\{\delta(\boldsymbol{Z})\mathcal{N} I(C \leqslant t) \mid \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}\}\{q^{(0)}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})F(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\}^{-1} dM(t) f_{\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}),
\end{aligned}
$$

其中 $\delta(\boldsymbol{Z}) = f_{\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\{\boldsymbol{Z}\phi^{(0)}(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}) - \phi^{(1)}(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\} I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z)$，且 $\phi^{(k)}(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}) = \mathrm{E}\{\boldsymbol{Z}^{\otimes k} I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z) \mid \boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}\}$ 对于 $k = 0, 1, 2$。

第 3.3 节中的变换 $\mathbb{S}$ 可用于将 $\boldsymbol{\gamma}$ 降至一个位于 $[0, \pi]^{(p-2)} \times [0, 2\pi]$ 内的（$p-1$）维向量 $\boldsymbol{\theta}$。令 $\boldsymbol{\theta}_0$ 表示对应于真实值的参数值，即 $\boldsymbol{\gamma}_0 = \mathbb{S}(\boldsymbol{\theta}_0)$。定义 $\eta(O, \boldsymbol{\theta}) = \int_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{S}_Z} I(\mathbb{S}(\boldsymbol{\theta})^\intercal \boldsymbol{z} < \mathbb{S}(\boldsymbol{\theta})^\intercal \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z)\{\mathcal{N} - g(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\} F_{\boldsymbol{Z}}(d\boldsymbol{z})$，其中 $F_{\boldsymbol{Z}}(\cdot)$ 是 $\boldsymbol{Z}$ 的累积分布函数，而 $O = \{(\boldsymbol{Z}, C, N(t)) \ 0 \leqslant t \leqslant \tau\}$ 表示观测数据。令 $f_{\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}}(\cdot)$ 为 $\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}$ 的密度，令 $\dot{g}^\intercal$ 为 g 的一阶导数。我们还施加以下正则条件：

(C9) 存在一个平方可积函数 $m(\cdot)$，使得

$$
\|\nabla_2 \eta(O, \boldsymbol{\theta}) - \nabla_2 \eta(O, \boldsymbol{\theta}_0)\|_F \leqslant m(O)\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0\|.
$$

(C10) 规模函数 $g(\cdot)$ 及其直到三阶的导数均有界。

2. Proof of Proposition 1

给定 $R(t,\ x,\ \boldsymbol{\beta}) = \int_t^\tau [\mathrm{E}\{N(u)I(C \geqslant u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z} = x\}]^{-1}\mathrm{E}\{dN(u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z} = x\}$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\int_0^\tau \{R(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\beta}) - R(C, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\beta})\} dN(t)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_0^\tau \int_0^\tau I(t \leqslant u \leqslant C) \frac{\mathrm{E}\{dN(u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}\} dN(t)}{\mathrm{E}\{N(u)I(C \geqslant u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}\}}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_0^\tau N(u)I(C \geqslant u) \frac{\mathrm{E}\{dN(u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}\}}{\mathrm{E}\{N(u)I(C \geqslant u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}\}}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_0^\tau E\{N(u)I(C \geqslant u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}\} \frac{\mathrm{E}\{dN(u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}\}}{\mathrm{E}\{N(u)I(C \geqslant u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}\}}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_0^\tau \mathrm{E}\{dN(u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}\}\right] \\
&= \mathrm{E}\{N(\tau)\}.
\end{aligned}
$$

因此，我们已经证明了该命题。

同样的论证也适用于修剪估计量。定义 $dN_{\mathrm{tr}}(t) = I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z,\ \tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1) dN(t)$。对于 $t \in (\tau_0,\ \tau_1)$，核估计量，

$$
\widetilde{R}_h(t, x, \boldsymbol{\beta}) = \int_t^{\tau_1} \frac{\sum_{i=1}^n K_h(x - \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i) I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z) dN_i(u)}{\sum_{i=1}^n K_h(x - \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i) I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z, C_i \geqslant u)\{N_i(u) - N_i(\tau_0)\}},
$$

估计了该量

$$
R^*(t, x, \boldsymbol{\beta}) = \int_t^{\tau_1} \frac{\mathrm{E}\{dN_{\mathrm{tr}}(u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z} = x\}}{\mathrm{E}\{I(C \geqslant u) N_{\mathrm{tr}}(u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z} = x\}}.
$$

然后我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\int_{\tau_0}^{\tau_1} \{R^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\beta}) - R^*(C, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\beta})\} I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z) dN(t)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{\tau_0}^{\tau_1} I(t \leqslant u \leqslant C, \boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z) \frac{\mathrm{E}\{I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z) dN(u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}\} dN(t)}{\mathrm{E}\{N_{\mathrm{tr}}(u) I(C \geqslant u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}\}}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_{\tau_0}^{\tau_1} N_{\mathrm{tr}}(u) I(C \geqslant u) \frac{\mathrm{E}\{I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z) dN(u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}\}}{\mathrm{E}\{N_{\mathrm{tr}}(u) I(C \geqslant u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}\}}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathrm{E}\{I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z) dN(u) \mid \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}\}\right] \\
&= \mathrm{E}\{N_{\mathrm{tr}}(\tau_1)\}.
\end{aligned}
$$

3. The large-sample property of $\widetilde{r}_h$

在本节中，我们研究 $\widetilde{r}_h(t,\ \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{\beta})$ 的大样本性质。结果总结于引理 1 中，并将在证明定理1和定理2时使用。约束 $\boldsymbol{\beta}\in\mathcal{B}$ 可通过在多球坐标系中对 $\boldsymbol{\beta}$ 重新参数化为一个 $(p-1)$ 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{p-1})^{\intercal}\in\mathcal{A}$，其中 $\mathcal{A}=[0,\pi]^{(p-1)}$，从而实现。具体而言，我们设

$$\boldsymbol{\beta}=\mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha})=\left(\cos(\alpha_1),\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2),\ldots,\prod_{k=1}^{p-2}\sin(\alpha_k)\cos(\alpha_{p-1}),\prod_{k=1}^{p-1}\sin(\alpha_k)\right)^{\intercal}. \tag{13}$$

定义 $p\times(p-1)$矩阵 $J(\boldsymbol{\alpha})=\partial\mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha})/\partial\boldsymbol{\alpha}$。定义 $r^*(t,\ \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{\beta})=f_1^*(t,\ \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{\beta})/f_2^*(t,\ \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{\beta})$，其中 $f_1^*(t,\ x,\ \boldsymbol{\beta})dt=\mathrm{E}\{I(\boldsymbol{Z}\in\mathcal{S}_Z)dN(t)\mid\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}=x\}f_{\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(x)$且

$$f_2^*(t,x,\boldsymbol{\beta})=\mathrm{E}[I(C\geqslant t,\boldsymbol{Z}\in\mathcal{S}_Z)\{N(t)-N(\tau_0)\}\mid\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}=x]f_{\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(x).$$

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p)^{\intercal}$是 $\mathbb{R}^p$中的一个向量。我们用符号 $\boldsymbol{a}<\infty$ 表示 $\boldsymbol{a}$是一个有限向量，且对 $j=1,\ \ldots,\ p,\ a_j<\infty$。类似地，对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}<\infty$ 表示所有元素均为有限值。令 $\mathcal{H}_1=\{h:\ h=a_1n^{-a_2},\ a_1>0,\ 1/8<a_2<1/6\}$。

在整个证明过程中，为便于表述，我们交替使用 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha})$。

Lemma 1: 在条件 *(C1)–(C5)* 下，以概率 *1*，有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[\tau_0^*,\tau_1],\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z,\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A},h\in\mathcal{H}_1}\frac{|\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})-r^*(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})|}{n^{-1/2}h^{-1}(\log n)^{1/2}}=M_1^*<\infty, \tag{14}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[\tau_0^*,\tau_1],\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z,\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A},h\in\mathcal{H}_1}\frac{\left|\partial\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha}-\partial r^*(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha}\right|}{n^{-1/2}h^{-2}(\log n)^{1/2}}=\boldsymbol{M}_2^*<\infty, \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[\tau_0^*,\tau_1],\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z,\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A},h\in\mathcal{H}_1}\frac{\left|\partial^2\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}^{\intercal}-\partial^2r^*(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}^{\intercal}\right|}{n^{-1/2}h^{-3}(\log n)^{1/2}}=\boldsymbol{M}_3^*<\infty, \tag{16}$$

对于任意常数 $\tau_0^*\in(\tau_0,\tau_1)$。

引理 1 的证明。定义 $F_1^*(\boldsymbol{z},t)=\mathrm{E}\{I(\boldsymbol{Z}\leqslant\boldsymbol{z},\boldsymbol{Z}\in\mathcal{S}_Z)\int_0^tI(C\geqslant u)dN(u)\}$ 以及 $F_2^*(\boldsymbol{z},t)=\mathrm{E}\{I(\boldsymbol{Z}\leqslant\boldsymbol{z},C\geqslant t)N_{\mathrm{tr}}(t)\}$，其中 $\boldsymbol{Z}\leqslant\boldsymbol{z}$表示对于 $j=1,\ \ldots\ldots,\ p$的 $Z_j\leqslant z_j$，以及 $N_{\mathrm{tr}}(t)=\int_0^tI(\boldsymbol{Z}\in\mathcal{S}_Z,\tau_0\leqslant u\leqslant\tau_1)dN(u)$。令 $\widehat{f}_1^*(t,x,\boldsymbol{\beta})=\int K_h(x-\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z}')K_h(t-t')d\widehat{F}_1^*(z',t')$，以及 $\widehat{f}_2^*(t,x,\boldsymbol{\beta})=\int K_h(x-\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z}')d\widehat{F}_2^*(\boldsymbol{z}',t)$，其中 $\widehat{F}_1^*$和 $\widehat{F}_2^*$是经验

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$估计值，分别对应于 F_1^*和 F_2^*。于是有 $\widetilde{r}_h(t,\ x,\ \boldsymbol{\beta}) = f_1^*(t,\ x,\ \boldsymbol{\beta})/f_2^*(t,\ x,\ \boldsymbol{\beta})$。不难看出

$$\begin{aligned} & |\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta}) - r^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})| \\ = & \left| \frac{\widehat{f}_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})} - \frac{f_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})} \right| \\ \leqslant & \frac{|\widehat{f}_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta}) - f_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})|}{|\widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})|} + \frac{|f_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})||\widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta}) - f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})|}{|f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})\widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})|}. \end{aligned} \tag{17}$$

在条件（C5）下，函数类 $\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{K}_2$ 满足括号覆盖数条件，其中 $\mathcal{K}_1 = \{\int_0^\tau K((\boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{z} - \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{Z})/h)K((t-t')/h)I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z)d\underset{\sim}{N}(t')\colon\ \ h \in \mathcal{H}_1, \boldsymbol{z} \in \mathcal{S}_Z, \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}, t \in [\tau_0^*, \tau_1]\}$和 $\mathcal{K}_2 = \{K((\boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{z} - \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{Z})/h)I(C \geqslant t)N_{\mathrm{tr}}(t)\colon\ \ h \in \mathcal{H}_1, \boldsymbol{z} \in \mathcal{S}_Z, \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}, t \in [\tau_0^*, \tau_1]\}$。这表明，对于 $k = 1,\ 2$，存在常数 $v_k^* > 0$和 $v_k > 0$，使得 $N_{\square}(\epsilon, \mathcal{K}_k, L_2(P)) \leqslant v_k^* \epsilon^{-v_k}$, $0 < \epsilon < 1$，其中 $N_{\square}(\epsilon, \mathcal{K}_k, L_2(P))$ 是括号覆盖数。根据 Einmahl 和 Mason（2005）的定理 1 和定理 3，以概率 1，我们可以推导出

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[\tau_0^*,\tau_1], \boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z, \boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}, h\in\mathcal{H}_1} \frac{|\widehat{f}_k^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta}) - \mathrm{E}\{\widehat{f}_k^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})\}|}{n^{-1/2}h^{-1}(\log n)^{1/2}} = m_k < \infty,\ \ k = 1, 2.$$

对于 $k = 1,\ 2$，由于 $K(\cdot)$ 是四阶核函数，应用经典核平滑论证可得 $\sup_{t\in[\tau_0^*,\tau_1],\ \boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z,\ \boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}} |\mathrm{E}\{\widehat{f}_k^*(t,\ \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{\beta})\} - f_k^*(t,\ \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{\beta})| = O(h^4) = o(n^{-1/2})$，这是由于 $nh^8 \to 0$。由此可得

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[\tau_0^*,\tau_1], \boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z, \boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}, h\in\mathcal{H}_1} \frac{|\widehat{f}_k^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta}) - f_k^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})|}{n^{-1/2}h^{-1}(\log n)^{1/2}} = m_k' < \infty,\ \ k = 1, 2.$$

此外，我们有 $\inf_{t\in[\tau_0^*,\tau_1], \boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z, \boldsymbol{\beta}\in\mathcal{B}} f_2^*(t, \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) > 0$根据条件（C5）。因此，根据（17）中的不等式，我们可以推导出

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[\tau_0^*,\tau_1], \boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z, \boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}, h\in\mathcal{H}_1} \frac{|\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta}) - r^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})|}{n^{-1/2}h^{-1}(\log n)^{1/2}} = M_1^* < \infty.$$

至此，方程（14）的证明完成。

随后，我们研究 $\partial\widetilde{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha}$ 的收敛速率。通过直接计算可得

$$\frac{\partial\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial\widehat{f}_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha} \cdot \widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta}) - \partial\widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha} \cdot \widehat{f}_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\{\widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})\}^2},$$

$$\frac{\partial r^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial f_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial \boldsymbol{\alpha} \cdot f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta}) - \partial f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial \boldsymbol{\alpha} \cdot f_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\{f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})\}^2}.$$

然后，我们有

$$\Big|\frac{\partial \widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} - \frac{\partial r^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big| \leqslant I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1 &= \Big|\frac{\partial f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial \boldsymbol{\alpha}}{\{\widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})\}^2}\Big| |\widehat{f}_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta}) - f_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})|,\\
I_2 &= \Big|\frac{f_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})\{f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta}) + \widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})\}\partial f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial \boldsymbol{\alpha}}{\{f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})\}^2\{\widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})\}^2} - \frac{\partial f_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial \boldsymbol{\alpha}}{f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})\widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}\Big|\\
&\quad \cdot|\widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta}) - f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})|,\\
I_3 &= \Big|\frac{1}{\widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}\Big|\Big|\frac{\partial \widehat{f}_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} - \frac{\partial f_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|,\\
I_4 &= \Big|\frac{\widehat{f}_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\{\widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})\}^2}\Big|\Big|\frac{\partial \widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} - \frac{\partial f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|.
\end{aligned}$$

对于 $k=1$，2，我们在方程 (14) 的证明中已经证明

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[\tau_0^*,\tau_1],\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z,\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A},h\in\mathcal{H}_1} \frac{|\widehat{f}_k^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta}) - f_k^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})|}{n^{-1/2}h^{-1}(\log n)^{1/2}} = m_k' < \infty,$$

因此我们有

$$I_1 + I_2 = O_p\left(n^{-1/2}h^{-1}(\log n)^{1/2}\right).$$

接下来，我们研究 I_3 和 I_4。定义 $\mathcal{K}_3 = \{\int_0^\tau \dot{K}_\intercal((\boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{z}_\intercal - \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{Z})/h)K((t-t')/h)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Z}_\intercal)\ J(\boldsymbol{\alpha})I(\boldsymbol{Z}\in\mathcal{S}_Z)dN(t'):\ h\in\mathcal{H}_1, \boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z, \boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}, t\in[\tau_0^*,\tau_1]\}$ 和 $\mathcal{K}_4 = \{K((\boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{z} - \boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{Z})/h)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Z})\ J(\boldsymbol{\alpha})I(C\geqslant t)N_{\mathrm{tr}}(t):\ h\in\mathcal{H}_1, \boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z, \boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}, t\in[\tau_0^*,\tau_1]\}$。对于 $k=3,4$，括号数 $N_{[]}(\epsilon,\mathcal{K}_k,L_2(P))$ 被 $1/\epsilon$ 的一个多项式所界。对于 $k=1$，2，应用 Einmahl 和 Mason (2005) 中的论证可得

$$\sup_{t\in[\tau_0^*,\tau_1],\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z,\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}} |\partial\widehat{f}_k^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha} - \mathrm{E}\{\partial\widehat{f}_k^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha}\}| = O_p\left(n^{-1/2}h^{-2}(\log n)^{1/2}\right).$$

此外，由于 $nh^8\to 0$，我们有 $\sup_{t\in[\tau_0^*,\tau_1],\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z,\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}}|\mathrm{E}\{\partial\widehat{f}_k(t,\boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha}\} - \partial f_k(t,\boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha}| = O_p(h^4) = o_p(n^{-1/2})$。因此，我们可以推出 $\sup_{t\in[\tau_0^*,\tau_1],\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z,\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}}|\partial\widehat{f}_k^*(t,\boldsymbol{\beta}\ \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha} -$

$\partial f_k^*(t,\ \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha}| = O_p\left(n^{-1/2}h^{-2}(\log\ n)^{1/2}\right)$，这导致

$$I_3 + I_4 = O_p\left(n^{-1/2}h^{-2}(\log n)^{1/2}\right).$$

由（18）可得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[\tau_0^*,\tau_1],\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z,\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A},h\in\mathcal{H}_1}\frac{\left|\partial\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha} - \partial r^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha}\right|}{n^{-1/2}h^{-2}(\log n)^{1/2}} = \boldsymbol{M}_2^* < \infty.$$

至此，方程（15）的证明完成。

沿用相同思路可得方程（16），因此省略其证明。

4. Lemmas for Theorems 1 and 2

$\widehat{\quad}$ $\widetilde{\quad}$在建立 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的渐近正态性时，以下引理用于推导目标函数关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的一阶导数。

Lemma 2: 定义 $q^{(k)*}(t,x) = \mathrm{E}\{\boldsymbol{Z}^{\otimes k}I(C\geqslant t,\boldsymbol{Z}\in\mathcal{S}_Z)g(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal\boldsymbol{Z})\mid\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}=x\}$，其中 $k=0,1$。在定理 *1* 指定的条件下，对于 $t\in[\tau_0^*,\tau_1]$，有

$$\left.\frac{\partial r^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\right|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} = \dot{r}^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{z})\left\{\boldsymbol{z} - \frac{q^{(1)*}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{z})}{q^{(0)*}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{z})}\right\}^\intercal J(\boldsymbol{\alpha}_0),$$

其中 $\tau_0^*\in(\tau_0,\tau_1)$ 为常数，$\dot{r}^*(t,x)$ 表示 $r^*(t,x)$ 关于 x 的偏导数。

引理 2 的证明。定义 $N_{\mathrm{tr}}(t) = \int_0^t I(\boldsymbol{Z}\in\mathcal{S}_Z,\tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1)dN(u)$，我们有$r^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})dt = \mathrm{E}\{dN_{\mathrm{tr}}(t)\mid\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}\}/\mathrm{E}\{N_{\mathrm{tr}}(t)I(C\geqslant t)\mid\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}\}$。首先计算 $\partial\mathrm{E}\{N_{\mathrm{tr}}(t)I(C\geqslant t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{Z}\leqslant\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}+\delta)\}/\partial\boldsymbol{\alpha}^\intercal$ 其中 δ为常数。在模型（1）下，我们有 $\mathrm{E}\{N_{\mathrm{tr}}(t)I(C\geqslant t)\mid\boldsymbol{Z}\} = S_C(t\mid\boldsymbol{Z})I(\boldsymbol{Z}\in\mathcal{S}_Z)S_C(t\mid\boldsymbol{Z})g(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal\boldsymbol{Z})F^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z})$，其中$F^*(t,x) = F(t,x) - F(\tau_0,x)$，且 $S_C(t\mid\boldsymbol{Z}) = P(C\geqslant t\mid\boldsymbol{Z})$。按照 Sherman（1993）的论证，可以证明

$$\left.\frac{\partial\,\mathrm{E}\{N_{\mathrm{tr}}(t)I(C\geqslant t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{Z}\leqslant\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}+\delta)\}}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\right|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}$$

<escape>$=\mathrm{E}\{(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Z})\ I(\boldsymbol{Z}\in\mathcal{S}_Z)S_C(t\mid\boldsymbol{Z})g(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal\boldsymbol{Z})F^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z})^\intercal\mid\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{z}+\delta\}f_{\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{z}+\delta)J(\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal).$</escape>

然后我们有

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial[E\{N_{\mathrm{tr}}(t)I(C \geqslant t) \mid \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z}\} f_{\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z})]}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} \qquad (19) \\
= & \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \frac{\partial[\mathrm{E}\{N_{\mathrm{tr}}(t)I(C \geqslant t, \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z} \leqslant \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z} + \delta)\} - \mathrm{E}\{N_{\mathrm{tr}}(t)I(C \geqslant t, \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z} \leqslant \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z})\}]}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} \\
= & \{\eta^{*\intercal}(t, \boldsymbol{z}) F^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) \dot{f}_{\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) + \dot{\eta}^{*\intercal}(t, \boldsymbol{z}) F^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) f_{\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})\} J(\boldsymbol{\alpha}_0) \\
& + \eta^{*\intercal}(t, \boldsymbol{z}) \dot{F}^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) f_{\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) J(\boldsymbol{\alpha}_0)
\end{aligned}
$$

其中，$\eta^*(t, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z} q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{z}) - q^{(1)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{z})$，$\dot{f}_{\boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z}}(x)$ 表示 $f_{\boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z}}(x)$ 的导数，$\dot{F}^*(t, x)$ 表示 $F^*(t, x)$ 关于 x 的偏导数，$\dot{\eta}^*(t, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}\dot{q}^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{z}) - \dot{q}^{(1)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{z})$，而 $\dot{q}^{(k)*}(t, x)$ 表示 $q^{(k)*}(t, x)$ 关于 x 的偏导数。类似地，我们也可以证明，当 $N_{\mathrm{tr}}(t)I(C \geqslant t)$ 被 $dN_{\mathrm{tr}}(t)$ 替换，且 $F^*(t, \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{z})$ 被 $f(t, \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{z})dt$ 替换时，结论仍然成立。

在模型（1）下，我们有

$$
\mathrm{E}\{N_{\mathrm{tr}}(t)I(C \geqslant t) \mid \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}\} = q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) F^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}), \qquad (20)
$$

$$
\mathrm{E}\{dN_{\mathrm{tr}}(t) \mid \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}\} = q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) f(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) dt. \qquad (21)
$$

应用（19）、（20）、（21）和链式法则，我们有

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial[\mathrm{E}\{dN_{\mathrm{tr}}(t) \mid \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z}\} / \mathrm{E}\{N_{\mathrm{tr}}(t)I(C \geqslant t) \mid \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z}\}]}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} \\
= & \frac{\dot{f}(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) \eta^{*\intercal}(t, \boldsymbol{z}) f_{\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) + f(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) \dot{\eta}^{*\intercal}(t, \boldsymbol{z}) f_{\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) + f(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) \eta^{*\intercal}(t, \boldsymbol{z}) \dot{f}_{\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})}{F^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) f_{\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})} dt J(\boldsymbol{\alpha}_0) \\
& - f(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) \frac{\dot{F}^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) \eta^{*\intercal}(t, \boldsymbol{z}) f_{\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) + F^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) \dot{\eta}^{*\intercal}(t, \boldsymbol{z}) f_{\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})}{F^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})^2 q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) f_{\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})} dt J(\boldsymbol{\alpha}_0) \\
& - f(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) \frac{F^*(t, \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{z}) \eta^{*\intercal}(t, \boldsymbol{z}) \dot{f}_{\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})}{F^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})^2 q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) f_{\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})} dt J(\boldsymbol{\alpha}_0) \\
= & \dot{r}^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z}) \left\{ \boldsymbol{z} - \frac{q^{(1)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})}{q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})} \right\}^{\intercal} J(\boldsymbol{\alpha}_0) dt.
\end{aligned}
$$

引理 2 的证明至此完成。

Lemma 3: 在定理 *1* 指定的条件下，我们有

$$
\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h, \widetilde{R}_h)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} = \frac{1}{\sqrt{n}} W_n^{\intercal} J(\boldsymbol{\alpha}_0) + o_p(n^{-1/2}),
$$

其中

$$\ell(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h, \widetilde{R}_h) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\log\widetilde{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}) - \widetilde{R}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}) + \widetilde{R}_h(C_i, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta})\right\} I(\boldsymbol{Z}_i \in \mathcal{S}_Z) dN_i(t),$$

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{\dot{r}^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}{r^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}\left\{\boldsymbol{Z}_i - \frac{q^{(1)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}{q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}\right\} dM_i^*(t),$$

与 $dM_i^*(t) = I(\boldsymbol{Z}_i \in \mathcal{S}_Z)dN_i(t) - I(C_i \geqslant t,\ \boldsymbol{Z}_i \in \mathcal{S}_Z)N_i(t)r^*(t,\ \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z}_i)dt$。

引理 3 的证明。定义

$$\ell(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\log r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}) - R^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}) + R^*(C_i, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta})\right\} I(\boldsymbol{Z}_i \in \mathcal{S}_Z) dN_i(t).$$

根据引理2，我们有 $\partial l(\boldsymbol{\beta},\ r^*,\ R^*)/\partial\boldsymbol{\alpha}|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} = n^{-1/2}W_n J(\boldsymbol{\alpha}_0)$。因此，只需证明 $\partial l(\boldsymbol{\beta},\ \widetilde{r}_h,\ \widetilde{R}_h)/\partial\boldsymbol{\alpha}|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} - \partial l(\boldsymbol{\beta},\ r^*,\ R^*)/\partial\boldsymbol{\alpha}|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} = o_p(n^{-1/2})$，即可证明引理 3。容易得到

see

$$\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h, \widetilde{R}_h)}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} = \frac{\partial\ell_1(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h)}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} + \frac{\partial\ell_2(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{R}_h)}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0},$$

其中

$$\ell_1(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\log\widetilde{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}) I(\boldsymbol{Z}_i \in \mathcal{S}_Z) dN_i(t),$$

$$\ell_2(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{R}_h) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{-\widetilde{R}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}) + \widetilde{R}_h(C_i, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta})\right\} I(\boldsymbol{Z}_i \in \mathcal{S}_Z) dN_i(t).$$

类似地，我们有

$$\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*)}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} = \frac{\partial\ell_1(\boldsymbol{\beta}, r^*)}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} + \frac{\partial\ell_2(\boldsymbol{\beta}, R^*)}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0},$$

其中，$\ell_1(\boldsymbol{\beta},\ r^*)$ 的定义是将 $\ell_1(\boldsymbol{\beta},\ \widetilde{r}_h)$ 中的 $\widetilde{r}_h$ 替换为 r^*，而 $\ell_2(\boldsymbol{\beta},\ R^*)$ 的定义是将 $\ell_2(\boldsymbol{\beta},\ R_h)$ 中的 R_h 替换为 R^*。我们首先研究 $\partial\ell_1(\boldsymbol{\beta},\ \widetilde{r}_h)/\partial\boldsymbol{\alpha}|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} - \partial\ell_1(\boldsymbol{\beta},\ r^*)/\partial\boldsymbol{\alpha}|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}$。注意到

$$\widetilde{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{\widehat{f}_1^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\beta})}{\widehat{f}_2^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\beta})},\ \ r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{f_1^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\beta})}{f_2^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\beta})},$$

$\widehat{\ }$其中，f_k^*和f_k^*、$k = 1,\ 2$ 在引理 1 的证明中定义。因此，我们有

$$\frac{\partial\ell_1(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h)}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} - \frac{\partial\ell_1(\boldsymbol{\beta}, r^*)}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} = \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4 + o_p(n^{-1/2}), \tag{22}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{\partial\widehat{f}_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha}|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}}{f_1^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)dN_i(t),\\
\Delta_2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{\partial f_1^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha}|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}\cdot\widehat{f}_1^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}{\{f_1^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)\}^2}I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)dN_i(t),\\
\Delta_3 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{\partial\widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha}|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}}{f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)dN_i(t),\\
\Delta_4 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{\partial f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha}|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}\widehat{f}_2^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}{\{f_2^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)\}^2}I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)dN_i(t).
\end{aligned}$$

定义

$$w_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\boldsymbol{Z}_i-\frac{q^{(1)*}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}{q^{(0)*}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}\right\}^\intercal\frac{\dot{f}_{\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}{f_{\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)dN_i(t)J(\boldsymbol{\alpha}_0),$$

$$w_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\boldsymbol{Z}_i-\frac{q^{(1)*}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}{q^{(0)*}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}\right\}^\intercal\frac{\dot{f}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}{f(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)dN_i(t)J(\boldsymbol{\alpha}_0),$$

$$w_3=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{\{\boldsymbol{Z}_i\dot{q}^{(0)*}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)-\dot{q}^{(1)*}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)\}^\intercal}{q^{(0)*}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)dN_i(t)J(\boldsymbol{\alpha}_0),$$

$$w_4=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\dot{\mathcal{E}}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)^\intercal I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)dN_i(t)J(\boldsymbol{\alpha}_0),$$

$$w_5=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\dot{\mathcal{E}}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)^\intercal r^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)I(C_i\geqslant t,\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)N_i(t)dtJ(\boldsymbol{\alpha}_0),$$

$$w_6=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\boldsymbol{Z}_i-\frac{q^{(1)*}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}{q^{(0)*}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}\right\}^\intercal\frac{\dot{F}^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}{F^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)dN_i(t)J(\boldsymbol{\alpha}_0),$$

$$w_7=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{\dot{r}^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}{r^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}\left\{\boldsymbol{Z}_i-\frac{q^{(1)*}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}{q^{(0)*}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)}\right\}^\intercal I(C_i\geqslant t,\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)N_i(t)r^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z}_i)dtJ(\boldsymbol{\alpha}_0),$$

其中，$\dot{\mathcal{E}}(t,x)$ 表示 $q^{(1)*}(t,x)/q^{(0)*}(t,x)$ 对 x 的偏导数。应用

Powell 等人（1989）的引理 3.1 得出

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + o_p(n^{-1/2}), \\
\Delta_2 &= w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + o_p(n^{-1/2}), \\
\Delta_3 &= w_1 - w_3 + w_5 + w_6 - w_7 + o_p(n^{-1/2}), \\
\Delta_4 &= w_1 - w_3 + w_5 + w_6 + o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

由式 (22) 可知

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \ell_1(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} - \frac{\partial \ell_1(\boldsymbol{\beta}, r^*)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} \\
&= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\dot{r}^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}{r^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)} \left\{ \boldsymbol{Z}_i - \frac{q^{(1)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}{q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)} \right\}^\intercal I(C_i \geqslant t, \boldsymbol{Z}_i \in \mathcal{S}_Z) N_i(t) r^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i) dt J(\boldsymbol{\alpha}_0) \\
&+ o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

类似地，我们可以证明

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \ell_2(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{R}_h)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} - \frac{\partial \ell_2(\boldsymbol{\beta}, R^*)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\dot{r}^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}{r^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)} \left\{ \boldsymbol{Z}_i - \frac{q^{(1)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}{q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)} \right\}^\intercal I(C_i \geqslant t, \boldsymbol{Z}_i \in \mathcal{S}_Z) N_i(t) r^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i) dt J(\boldsymbol{\alpha}_0) \\
&+ o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

因此，我们可以推导出

$$\frac{\ell(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h, \widetilde{R}_h)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} - \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} = o_p(n^{-1/2}).$$

引理 3 的证明至此完成。

5. Proof of Theorem 1

定义 $F_0(\boldsymbol{z}, c, t) = \mathrm{E}\{I(C \leqslant c) N(t) I(\boldsymbol{Z} \leqslant \boldsymbol{z})\}$，并令 $\widehat{F}_0(\boldsymbol{z}, c, t)$ 表示相应的经验估计量。定义

$$\ell_0(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*, u) = \int_u^{\tau_1}\int_0^{\tau}\int_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z} \left\{\log r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) - R^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) + R^*(c, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})\right\} dF_0(\boldsymbol{z}, c, t),$$

$$\ell(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h, \widetilde{R}_h, u) = \int_u^{\tau_1}\int_0^{\tau}\int_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z} \left\{\log \widetilde{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) - \widetilde{R}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) + \widetilde{R}_h(c, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})\right\} d\widehat{F}_0(\boldsymbol{z}, c, t). \quad (23)$$

令 $\ell(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h, R_h) = \ell(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h, R_h, \tau_0)$ 且 $\ell_0(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*) = \ell_0(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*, \tau_0)$。我们首先证明估计量 $\boldsymbol{\beta}$ 的相合性。这可以通过证明 $\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \arg\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}} \ell(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h, R_h)$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_0 = \arg\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}} \ell_0(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*)$ 的相合估计量来实现。定义 $dM^*(t) = I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z) dN(t) - I(C \geqslant t, \boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z) N(t) r^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}) dt$。容易看出 $\mathrm{E}\{dM^*(t) \mid \boldsymbol{Z}\} = 0$。因此，应用引理2可得

$$\frac{\ell_0(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} = \mathrm{E}\left[\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\dot{r}^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})}{r^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})} \left\{\boldsymbol{Z} - \frac{q^{(1)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})}{q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})}\right\}^\intercal dM^*(t)\right] J(\boldsymbol{\alpha}_0) = \mathbf{0}.$$

根据引理2，可以证明

$$\frac{\partial^2 \ell_0(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*)}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \boldsymbol{\alpha}^\intercal}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} = J(\boldsymbol{\alpha}_0)^\intercal V J(\boldsymbol{\alpha}_0),$$

其中

$$V = -\mathrm{E}\left[\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left\{\frac{\dot{r}^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})}{r^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})}\right\}^2 \left\{\boldsymbol{Z} - \frac{q^{(1)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})}{q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})}\right\}^{\otimes 2} I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z) dN(t)\right]. \tag{24}$$

因此，对于 $\epsilon > 0$，我们有 $\sup_{\boldsymbol{\alpha}:\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|\geqslant\epsilon} \ell_0(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*) < \ell_0(\boldsymbol{\beta}_0, r^*, R^*)$。此外，我们还需要证明，当$n \to \infty$时，$\sup_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}} |\ell(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h, R_h) - \ell_0(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*)|$ 依概率收敛到零。在条件（C5）下，根据 van der Vaart（2000）的例 19.7 和定理 19.4，可以证明函数类 $\{\int_{\tau_0}^{\tau_1} \log r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\beta}) dN(t) - \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_0^\tau I(t \leqslant u \leqslant C) r^*(u, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\beta}) du dN(t) : \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}\}$ 是格利文科–坎特利类。因此，当 $n \to \infty$时，$\sup_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}} |\ell(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*) - \ell_0(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*)|$ 依概率收敛到零，其中$\ell(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*)$由在式（23）中分别将 $\widetilde{r}_h$、R_h和 u 替换为 r^*、R^*和 τ_0 定义。根据引理 1，我们可以推出 $\sup_{t\in[\tau_0^*,\tau_1], \boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z, h\in\mathcal{H}_1, \boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}} |\widetilde{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) - r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})| = o_p(1)$。同理，我们有 $\sup_{t\in[\tau_0^*,\tau_1], \boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z, h\in\mathcal{H}_1, \boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}} |R_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) - R^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})| = o_p(1)$。应用连续映射定理可得 $\sup_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}} |\ell(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h, R_h, \tau_0^*) - \ell(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*, \tau_0^*)| = o_p(1)$。令 $\tau_0^* \to \tau_0$，可以证明 $\sup_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}} |\ell(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h, R_h) - \ell(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*)| = o_p(1)$。因此，我们有 $\sup_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}} |\ell(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h, R_h) - \ell_0(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*)| \leqslant \sup_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}} |\ell(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*) - \ell_0(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*)| + \sup_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}} |\ell(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h$

$, \widetilde{R}_h) -$

$\ell(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*)| = o_p(1)$。$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ 的相合性已得到证明。

接下来，我们证明 $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ 的渐近正态性，从而得到其渐近正态性

$\backsim\boldsymbol{\beta}$ 可以得到。若已知 r^* 和 R^*，则在 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地有

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*, \tau_0^*) - \ell(\boldsymbol{\beta}_0, r^*, R^*, \tau_0^*) &= \ell_0(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*, \tau_0^*) - \ell_0(\boldsymbol{\beta}_0, r^*, R^*, \tau_0^*) \\ &\quad + O_p\left(n^{-1/2}\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0\|\right) + o_p(\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0\|^2),\end{aligned} \tag{25}$$

$\widetilde{\ }$其中，$\ell(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*, \tau_0^*)$ 的定义是：在式（23）中分别用 r^*、R^* 和 τ_0^* 替换 $\widetilde{r}_h$、R_h 和 u。现在我们研究函数 $\ell(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h, R_h, \tau_0^*)$，其定义为在式（23）中令 $u = \tau_0^*$。我们的目标是证明

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h, \widetilde{R}_h, \tau_0^*) - \ell(\boldsymbol{\beta}_0, \widetilde{r}_h, \widetilde{R}_h, \tau_0^*) &= \ell(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*, \tau_0^*) + \ell(\boldsymbol{\beta}_0, r^*, R^*, \tau_0^*) \\ &\quad + O_p(n^{-1/2}\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0\|) + o_p(\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0\|^2).\end{aligned}$$

应用泰勒展开可得

$$\begin{aligned}\log\frac{\widetilde{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})}{r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})} &= \frac{\widetilde{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) - r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})}{r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})} - \frac{\{\widetilde{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) - r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})\}^2}{2\{r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})\}^2} \\ &\quad + \frac{\{\widetilde{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) - r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})\}^3}{3\bar{r}^3(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})},\end{aligned}$$

其中，$\bar{r}(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})$ 介于 $\widetilde{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})$ 和 $r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})$ 之间。因此可得

$$\ell(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h, \widetilde{R}_h, \tau_0^*) - \ell(\boldsymbol{\beta}, r^*, R^*, \tau_0^*) = A_1(\boldsymbol{\alpha}) - A_2(\boldsymbol{\alpha}) + A_3(\boldsymbol{\alpha}) - A_4(\boldsymbol{\alpha}), \tag{26}$$

其中

$$\begin{aligned}A_1(\boldsymbol{\alpha}) &= \int_{\tau_0^*}^{\tau_1}\int_0^{\tau}\int_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z} \frac{\widetilde{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) - r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})}{r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})} d\widehat{F}_0(\boldsymbol{z}, c, t), \\ A_2(\boldsymbol{\alpha}) &= \int_{\tau_0^*}^{\tau_1}\int_0^{\tau}\int_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z} \frac{\{\widetilde{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) - r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})\}^2}{2\{r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})\}^2} d\widehat{F}_0(\boldsymbol{z}, c, t), \\ A_3(\boldsymbol{\alpha}) &= \int_{\tau_0^*}^{\tau_1}\int_0^{\tau}\int_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z} \frac{\{\widetilde{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) - r^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})\}^3}{3\bar{r}^3(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})} d\widehat{F}_0(\boldsymbol{z}, c, t), \\ A_4(\boldsymbol{\alpha}) &= \int_{\tau_0^*}^{\tau_1}\int_0^{\tau}\int_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z} \{\widetilde{R}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) - R^*(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})\} d\widehat{F}_0(\boldsymbol{z}, c, t) \\ &\quad + \int_{\tau_0^*}^{\tau_1}\int_0^{\tau}\int_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z} \{\widetilde{R}_h(c, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta}) - R^*(c, \boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\beta})\} d\widehat{F}_0(\boldsymbol{z}, c, t).\end{aligned}$$

在 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 的 $o_p(1)$ 邻域内一致地应用泰勒展开，可得

$$\begin{aligned}\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})-r^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta}) &= \widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{z})-r^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{z})+B_1(\boldsymbol{\alpha}_0)(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0) \\ &\quad +(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0)^\intercal B_2(\boldsymbol{\alpha}_0)(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0)+o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|^2),\end{aligned} \tag{27}$$

其中

$$\begin{aligned}B_1(\boldsymbol{\alpha}_0) &= \frac{\partial\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}-\frac{\partial r^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}, \\ B_2(\boldsymbol{\alpha}_0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}^\intercal}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}-\frac{\partial^2 r^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}^\intercal}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}\right).\end{aligned}$$

我们首先研究 $A_1(\boldsymbol{\alpha})$。根据式 (27)，我们可以推导出

$$\begin{aligned}A_1(\boldsymbol{\alpha}) &= A_{10}(\boldsymbol{\alpha})+A_{11}(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0)+(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0)^\intercal A_{12}(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0) \\ &\quad +o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|^2),\end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$\begin{aligned}A_{10}(\boldsymbol{\alpha}) &= \int_{\tau_0^*}^{\tau_1}\int_0^{\tau}\int_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z}\frac{\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{z})-r^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{z})}{r^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}d\widehat{F}_0(\boldsymbol{z},c,t), \\ A_{11}(\boldsymbol{\alpha}) &= \int_{\tau_0^*}^{\tau_1}\int_0^{\tau}\int_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z}\frac{B_1(\boldsymbol{\alpha}_0)}{r^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}d\widehat{F}_0(\boldsymbol{z},c,t), \\ A_{12}(\boldsymbol{\alpha}) &= \int_{\tau_0^*}^{\tau_1}\int_0^{\tau}\int_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z}\frac{B_2(\boldsymbol{\alpha}_0)}{2r^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}d\widehat{F}_0(\boldsymbol{z},c,t).\end{aligned}$$

下面我们依次研究 $A_{10}(\boldsymbol{\alpha})$、$A_{11}(\boldsymbol{\alpha})$ 和 $A_{12}(\boldsymbol{\alpha})$。对于满足 $\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|=o_p(1)$ 的 $\boldsymbol{\alpha}$，在 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 处对 $A_{10}(\boldsymbol{\alpha})$ 进行泰勒展开，可得

$$\begin{aligned}A_{10}(\boldsymbol{\alpha}) &= A_{10}(\boldsymbol{\alpha}_0)+\frac{\partial A_{10}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0)^\intercal\frac{\partial^2 A_{10}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}^\intercal}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0) \\ &\quad +o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|^2).\end{aligned}$$

由引理 1 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A_{10}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} \\
= & -\int_{\tau_0^*}^{\tau_1}\int_0^{\tau}\int_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z} \frac{\frac{\partial r^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}\{\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{z})-r^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{z})\}}{\{r^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{z})\}^2} d(\widehat{F}_0-F_0)(\boldsymbol{z},c,t) \\
& -\int_{\tau_0^*}^{\tau_1}\int_0^{\tau}\int_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z} \frac{\frac{\partial r^*(t,\boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}\{\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{z})-r^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{z})\}}{\{r^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{z})\}^2} dF_0(\boldsymbol{z},c,t) \\
= & O_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

由此可得 $\partial A_{10}(\boldsymbol{\alpha})/\partial \boldsymbol{\alpha}|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0) = O_p(n^{-1/2}\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|)$。类似地，可以证明 $(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0)$ $\partial^2 A_{10}(\boldsymbol{\alpha})/\partial \boldsymbol{\alpha}\partial \boldsymbol{\alpha}\ \Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0) = o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|^2)$。因此，可以推导出

$$A_{10}(\boldsymbol{\alpha}) = A_{10}(\boldsymbol{\alpha}_0) + O_p(n^{-1/2}\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|) + o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|^2). \tag{29}$$

对 $A_{11}(\boldsymbol{\alpha})$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 处应用泰勒展开可得

$$A_{11}(\boldsymbol{\alpha}) = A_{11}(\boldsymbol{\alpha}_0) + \frac{\partial A_{11}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0) + o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|).$$

应用研究 $A_{10}(\boldsymbol{\alpha})$ 的技术可得 $A_{11}(\boldsymbol{\alpha}_0) = O_p(n^{-1/2})$ 和 $\|\partial A_{11}(\boldsymbol{\alpha})/\partial \boldsymbol{\alpha}|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0}\| = o_p(1)$。这就得到

$$A_{11}(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0) = O_p(n^{-1/2}\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|) + o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|^2). \tag{30}$$

此外，可以证明，对于满足 $\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\| = o_p(1)$ 的 $\boldsymbol{\alpha}$，由于引理 1 中的方程 (16)，有 $\|A_{12}(\boldsymbol{\alpha})\| = o_p(1)$。由 (28)、(29) 和 (30) 可得

$$A_1(\boldsymbol{\alpha}) = A_{10}(\boldsymbol{\alpha}_0) + O_p(n^{-1/2}\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|) + o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|^2). \tag{31}$$

接下来我们研究 $A_2(\boldsymbol{\alpha})$。由引理 1 可得 $B_1(\boldsymbol{\alpha}_0) = o_p(1)$ 和 $B_2(\boldsymbol{\alpha}_0) = o_p(1)$。因此，根据 (27)，我们有

$$A_2(\boldsymbol{\alpha}) = A_{20}(\boldsymbol{\alpha}) + A_{21}(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0) + o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|^2),$$

其中

$$
\begin{aligned}
A_{20}(\boldsymbol{\alpha}) &= \int_{\tau_0^*}^{\tau_1}\int_0^{\tau}\int_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z}\frac{\{\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})-r^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})\}^2}{2\{r^*(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})\}^2}d\widehat{F}_0(\boldsymbol{z},c,t),\\
A_{21}(\boldsymbol{\alpha}) &= \int_{\tau_0^*}^{\tau_1}\int_0^{\tau}\int_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z}\frac{\{\widetilde{r}_h(t,\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})-r^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})\}B_1(\boldsymbol{\alpha}_0)}{\{r^*(t,\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{z},\boldsymbol{\beta})\}^2}d\widehat{F}_0(\boldsymbol{z},c,t).
\end{aligned}
$$

对于满足 $\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|=o_p(1)$的 $\boldsymbol{\alpha}$，在研究 $A_1(\boldsymbol{\alpha})$时采用类似的方法，可得$A_{20}(\boldsymbol{\alpha})=A_{20}(\boldsymbol{\alpha}_0)+O_p(n^{-1/2}\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|)+o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|^2)$以及 $A_{21}(\boldsymbol{\alpha})=A_{21}(\boldsymbol{\alpha}_0)+o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|)=O_p(n^{-1/2})+o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|)$。因此，可以推导出

$$
A_2(\boldsymbol{\alpha})=A_{20}(\boldsymbol{\alpha}_0)+O_p(n^{-1/2}\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|)+o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|^2). \tag{32}
$$

最后，我们研究 $A_3(\boldsymbol{\alpha})$和 $A_4(\boldsymbol{\alpha})$。根据引理 1，在研究 $A_1(\boldsymbol{\alpha})$和 $A_2(\boldsymbol{\alpha})$时采用类似的方法，可推导出

$$
A_k(\boldsymbol{\alpha})=A_k(\boldsymbol{\alpha}_0)+O_p(n^{-1/2}\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|)+o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|^2),\ k=3,4. \tag{33}
$$

由(26)、(31)、(32)和(33)可得

$$
\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\beta},\widetilde{r}_h,\widetilde{R}_h,\tau_0^*)-\ell(\boldsymbol{\beta},r^*,R^*,\tau_0^*) &= A_{10}(\boldsymbol{\alpha}_0)-A_{20}(\boldsymbol{\alpha}_0)+A_3(\boldsymbol{\alpha}_0)-A_4(\boldsymbol{\alpha}_0)\\
&\quad +O_p(n^{-1/2}\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|)+o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|^2).
\end{aligned}
$$

~由于 $A_{10}(\boldsymbol{\alpha}_0)-A_{20}(\boldsymbol{\alpha}_0)+A_3(\boldsymbol{\alpha}_0)-A_4(\boldsymbol{\alpha}_0)=\ell(\boldsymbol{\beta}_0,\ \widetilde{r}_h,\ R_h,\ \tau_0^*)-\ell(\boldsymbol{\beta}_0,\ r^*,\ R^*,\ \tau_0^*)$，因此我们有

$$
\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\beta},\widetilde{r}_h,\widetilde{R}_h,\tau_0^*)-\ell(\boldsymbol{\beta},r^*,R^*,\tau_0^*) &= \ell(\boldsymbol{\beta}_0,\widetilde{r}_h,\widetilde{R}_h,\tau_0^*)-\ell(\boldsymbol{\beta}_0,r^*,R^*,\tau_0^*)\\
&\quad +O_p(n^{-1/2}\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|)+o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|^2).
\end{aligned} \tag{34}
$$

由 (25) 和 (34) 可知，在 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 的 $o_p(1)$ 邻域上一致地，有

$$
\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\beta},\widetilde{r}_h,\widetilde{R}_h,\tau_0^*) &= \ell_0(\boldsymbol{\beta},r^*,R^*,\tau_0^*)-\ell_0(\boldsymbol{\beta}_0,r^*,R^*,\tau_0^*)+\ell(\boldsymbol{\beta}_0,\widetilde{r}_h,\widetilde{R}_h,\tau_0^*)\\
&\quad +O_p\left(n^{-1/2}\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|\right)+o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|^2).
\end{aligned}
$$

令 $\tau_0^*\to\tau_0$，我们可以推导出

$$
\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\beta},\widetilde{r}_h,\widetilde{R}_h) &= \ell_0(\boldsymbol{\beta},r^*,R^*)-\ell_0(\boldsymbol{\beta}_0,r^*,R^*)+\ell(\boldsymbol{\beta}_0,\widetilde{r}_h,\widetilde{R}_h)\\
&\quad +O_p\left(n^{-1/2}\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|\right)+o_p(\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0\|^2).
\end{aligned} \tag{35}
$$

根据 Sherman（1993）中的定理 1，$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ 对于 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 是 $\sqrt{n}$–一致的。

现在我们证明 $\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha}_0)$ 的渐近正态性。根据引理 3，可推出$\partial\ell(\boldsymbol{\beta},\ \widetilde{r}_h,\ \widetilde{R}_h)/\partial\boldsymbol{\alpha}|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} = n^{-1/2}W_n J(\boldsymbol{\alpha}_0) + o_p(n^{-1/2})$，其中 W_n由引理 3 定义。此外，应用引理 1 和引理 2 可得

$$\frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\alpha},\widetilde{r}_h,\widetilde{R}_h)}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}^\intercal}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} = J(\boldsymbol{\alpha}_0)^\intercal V J(\boldsymbol{\alpha}_0) + o_p(1),$$

其中 V由式 (24) 定义。在 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 的 $O_p(n^{-1/2})$ 邻域内一致地应用泰勒展开，可得

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\beta},\widetilde{r}_h,\widetilde{R}_h) - \ell(\boldsymbol{\beta}_0,\widetilde{r}_h,\widetilde{R}_h) &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0)^\intercal J(\boldsymbol{\alpha}_0)^\intercal V J(\boldsymbol{\alpha}_0)(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0)\\ &\quad+\frac{1}{\sqrt{n}}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0)^\intercal J(\boldsymbol{\alpha})^\intercal W_n + o_p(n^{-1}).\end{aligned}$$

根据中心极限定理，随着 $n\to\infty$，W_n 依分布收敛于均值为零、方差-协方差矩阵为 $\Sigma = \mathrm{E}(\psi\psi^\intercal)$ 的正态分布，其中

$$\psi = \int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{\dot{r}^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z})}{r^*(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z})}\left\{\boldsymbol{Z}-\frac{q^{(1)*}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z})}{q^{(0)*}(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal\boldsymbol{Z})}\right\}dM^*(t).$$

根据 Sherman（1993）中的定理2，$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\alpha}_0)$ 依分布收敛于一个均值为零、方差-协方差矩阵为以下矩阵的正态随机变量

$$(J(\boldsymbol{\alpha}_0)^\intercal V J(\boldsymbol{\alpha}_0))^- J(\boldsymbol{\alpha}_0)^\intercal\Sigma J(\boldsymbol{\alpha}_0)(J(\boldsymbol{\alpha}_0)^\intercal V J(\boldsymbol{\alpha}_0))^-$$

如 $n\to\infty$，其中 $^-$ 表示矩阵的 Penrose-Moore 逆。根据式 (13) 所定义的变换$\boldsymbol{\beta}=\mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha})$，我们可以将 $\boldsymbol{\alpha}$ 重写为 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbb{S}^*(\boldsymbol{\beta})$。定义 $J(\boldsymbol{\beta}) = \partial\mathbb{S}^*(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\alpha}$，可以证明 $J(\boldsymbol{\alpha})J(\boldsymbol{\beta}) = \mathrm{I}$。应用广义逆的性质可得

$$(J(\boldsymbol{\alpha}_0)^\intercal V J(\boldsymbol{\alpha}_0))^- J(\boldsymbol{\alpha}_0)^\intercal\Sigma J(\boldsymbol{\alpha}_0)(J(\boldsymbol{\alpha}_0)^\intercal V J(\boldsymbol{\alpha}_0))^- = J(\boldsymbol{\beta}_0)V^-\Sigma V^- J(\boldsymbol{\beta}_0)^\intercal.$$

注意，$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbb{S}(\widehat{\boldsymbol{\alpha}})$ 和 $\boldsymbol{\beta}_0 = \mathbb{S}(\boldsymbol{\alpha}_0)$。应用德尔塔方法，可以证明$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}_0)$依分布收敛于一个方差-协方差矩阵为 $V^-\Sigma V^-$ 的零均值正态随机变量，其中 $n\to\infty$。

6. Proof of Theorem 2

$\widetilde{}$与定理 1 的证明类似，我们可以证明 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\beta}_0$的一致估计量。为建立 $\boldsymbol{\beta}$的渐近正态性，我们计算 $\partial\ell'(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h)$和 $\partial^2\ell'(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h)$，其中 $^\intercal$

$$\ell'(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\log \widetilde{r}_h(t, \boldsymbol{\beta}^\intercal \boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta})\right\} I(\boldsymbol{Z}_i \in \mathcal{S}_Z) dN_i(t)$$

是目标函数。根据引理2，我们有

$$\frac{\partial \ell'(\boldsymbol{\beta}, r^*)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{\dot{r}^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}{r^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}\left\{\boldsymbol{Z}_i - \frac{q^{(1)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}{q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}\right\}^\intercal I(\boldsymbol{Z}_i \in \mathcal{S}_Z) dN_i(t) J(\boldsymbol{\alpha}_0),$$

其中 $\ell'(\boldsymbol{\beta}, r^*)$ 的定义是将 $\ell'(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h)$ 中的 $\widetilde{r}_h$ 替换为 r^*。在引理 3 的证明中，我们已推导出

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \ell'(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} - \frac{\partial \ell'(\boldsymbol{\beta}, r^*)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} \\
&= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{\dot{r}^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}{r^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}\left\{\boldsymbol{Z}_i - \frac{q^{(1)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}{q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)}\right\}^\intercal I(C_i \geqslant t, \boldsymbol{Z}_i \in \mathcal{S}_Z) N_i(t) r^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i) dt J(\boldsymbol{\alpha}_0) \\
&\quad + o_p(n^{-1/2}).
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\frac{\partial \ell'(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h)}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} = \frac{1}{\sqrt{n}} W_n^\intercal J(\boldsymbol{\alpha}_0) + o_p(n^{-1/2}),$$

其中 W_n 在引理 3 中定义。此外，应用引理 1 和引理 2 可得

$$\frac{\partial^2 \ell'(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{r}_h)}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \boldsymbol{\alpha}^\intercal}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_0} = J(\boldsymbol{\alpha}_0)^\intercal V J(\boldsymbol{\alpha}_0) + o_p(1),$$

其中， V 由式 (24) 定义。采用与建立 $\boldsymbol{\beta}$ 的渐近正态性类似的方法，可以证明，当 $n \to \infty$ 时，$\sqrt{n}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)$ 依分布收敛于一个均值为零、方差-协方差矩阵为 $V^- \Sigma V^-$ 的正态随机向量，其中 Σ 在定理 1 的证明中定义。

7. Proof of Equation (10).

在所提出的模型下，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left\{\frac{N(C)}{F(C,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})}\Big|\boldsymbol{Z}\right\}\\
=&\mathrm{E}\left\{\frac{\mathrm{E}\{N(C)\mid \boldsymbol{Z},C\}}{F(C,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})}\Big|\boldsymbol{Z}\right\}\\
=&\mathrm{E}\left\{\frac{\int_0^\tau I(C\geqslant t)\,\mathrm{E}\{d\widetilde{N}(t)\mid \boldsymbol{Z},C\}}{F(C,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})}\Big|\boldsymbol{Z}\right\}\\
=&\mathrm{E}\left\{\frac{\int_0^\tau I(C\geqslant t) f(t,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})g(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z})dt}{F(C,\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})}\Big|\boldsymbol{Z}\right\}\\
=&g(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}).
\end{aligned}
$$

至此，我们完成了公式（10）的证明。

8. Proof of Proposition 2

为了证明 命题2，我们证明存在常数 c_0 和 $\mu>0$，使得

$$\mathrm{E}\{\widetilde{\boldsymbol{Z}}\mathcal{N}-\widetilde{\boldsymbol{Z}}\exp(\mu\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}+c_0)\}=\mathbf{0}, \tag{36}$$

其中 $\boldsymbol{Z}=(1,\ \boldsymbol{Z}^\intercal)^\intercal$ 且 $E(\mathcal{N}\mid \boldsymbol{Z})=g(\boldsymbol{\gamma}_0\boldsymbol{Z})$。不失一般性，假设 $E(\boldsymbol{Z})=\mathbf{0}$。定义 $W=\boldsymbol{\gamma}_0\boldsymbol{Z}$，因此我们有 $\mathrm{E}(W)=0$。利用椭圆对称随机变量的性质，我们有 $\mathrm{E}(\boldsymbol{Z}\mid W)=W\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{Z}}$，其中 $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{Z}}$是一个 $p\times 1$确定性向量，使得 $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{Z}}=\Sigma_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\gamma}_0(\boldsymbol{\gamma}_0\Sigma_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\gamma}_0)^{-1}$，且 $\Sigma_{\boldsymbol{Z}}=\mathrm{var}(\boldsymbol{Z})$。经过一些计算，我们得到以下方程：

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{Z}\exp(c_0+\mu\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\}=\mathrm{E}[\mathrm{E}\{\boldsymbol{Z}\exp(c_0+\mu W)\mid W\}]=\mathrm{E}\{\exp(c_0+\mu W)W\}\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{Z}},$$

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{Z}\mathcal{N})=\mathrm{E}\{\mathrm{E}(\boldsymbol{Z}\mathcal{N}\mid W)\}=\mathrm{E}\{Wg(W)\}\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{Z}}.$$

这就得到

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{Z}\mathcal{N}-\boldsymbol{Z}\exp(\mu\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}+c_0)\}=\mathrm{E}\{g(W)W-\exp(c_0+\mu W)W\}\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{Z}}.$$

类似地，我们有 $\mathrm{E}\{\mathcal{N} - \exp(\mu\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z} + c_0)\} = \mathrm{E}\{g(W) - \exp(c_0 + \mu W)\}$。设 (c_0, μ) 是 $\mathrm{E}[(1, W)\{g(W) - \exp(c_0 + \mu W)\}] = 0$ 的解。如果我们能够证明 $\mu > 0$，则解 (c_0, μ) 满足方程 (36)，从而可以证明该命题。

在下文中，我们将证明 $\mu > 0$。由于 (c_0, μ) 是 $\mathrm{E}[(1, W)\{g(W) - \exp(c_0 + \mu W)\}] = 0$ 的解，因此我们有

$$\mathrm{E}\{W g(W)\} = \exp(c_0)\,\mathrm{E}\{W \exp(\mu W)\}. \tag{37}$$

若 $\mu = 0$，根据式（37），我们有 $\mathrm{E}\{W g(W)\} = \exp(c_0)\,\mathrm{E}(W) = 0$。这与以下事实矛盾：当 W 为对称函数且 $g(W)$ 为正且单调递增时，$\mathrm{E}\{W g(W)\} > 0$。若 $\mu < 0$，由于 W 为对称函数且 $\exp(\mu W)$ 单调递减，可以证明 $\mathrm{E}\{W \exp(\mu W)\} < 0$。这与以下事实矛盾：由于 $\mathrm{E}\{W g(W)\} > 0$ 以及式（37），有 $\mathrm{E}\{W \exp(\mu W)\} = \mathrm{E}\{W g(W)\}/\exp(c_0) > 0$。至此，完成了对 $\mu > 0$ 的证明。

9. Lemmas for Theorems 3 and 4

定义 $\widehat{\mathcal{N}}_i = N_i(C_i)/\widehat{F}(C_i, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)$ 和 $\widehat{\mathcal{N}}_i(\boldsymbol{\beta}) = N_i(C_i)/\widehat{F}_h(C_i, \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta})$，其中

$$\widehat{F}_h(t, x, \boldsymbol{\beta}) = \exp\left\{-\int_t^{\tau} \frac{\sum_{i=1}^n K_h(x - \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i) dN_i(u)}{\sum_{i=1}^n K_h(x - \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i) N_i(u) I(C_i \geqslant u)}\right\},$$

其中 $K_h(\cdot)$ 满足条件（C6）。记 $O = \{(\boldsymbol{Z}, C, N(t))\ 0 \leqslant t \leqslant C\}$ 为观测数据。定义

$$d(O, \boldsymbol{\beta}_0) = \int_C^{\tau} \left\{\boldsymbol{Z} - \frac{q^{(1)}(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})}{q^{(0)}(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})}\right\} \dot{r}(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}) dt, \tag{38}$$

其中 $\dot{r}(t, x)$ 表示 $r(t, x)$ 关于 x 的偏导数，且 $q^{(k)}(t, x) = \mathrm{E}\{\boldsymbol{Z}^{\otimes k} I(C \geqslant t) g(\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}) \mid \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z} = x\}$ 对于 $k = 0, 1$。对于 $l = 1, \ldots, n$，定义 $\rho(O_l, t, x) = \int_t^{\tau} \{f_2(u, x)\}^{-1} \{dN_l(u) - I(C_l \geqslant u) N_l(u) r(u, x) du\}$，其中 $f_2(t, x) = \mathrm{E}\{I(C \geqslant t) N(t) \mid \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z} = x\} f_{\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(x)$。

Lemma 4: 令 $m(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{Z} I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z)$，其中 $\boldsymbol{Z}$ 定义见定理3；或者 $m(\boldsymbol{Z}) = \delta(\boldsymbol{Z})$

其中 $\delta(\boldsymbol{Z})$ 定义见定理*4*，则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{Z}_i)\{\widehat{\mathcal{N}}_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) - \mathcal{N}_i\} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} m(\boldsymbol{Z}_i)\mathcal{N}_i K_h(\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_l - \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)\rho(O_l, C_i, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i) \\ &\quad - \mathrm{E}\{m(\boldsymbol{Z})\mathcal{N}d(O, \boldsymbol{\beta}_0)^{\intercal}\}V^{-}\psi_i + o_p(n^{-1/2}).\end{aligned}$$

其中， V 由(24)定义，并

$$\psi_i = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\dot{r}^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)}{r^*(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)}\left\{\boldsymbol{Z}_i - \frac{q^{(1)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)}{q^{(0)*}(t, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)}\right\} dM_i^*(t). \tag{39}$$

引理4的证明。函数 $\mathcal{F}_1(t,x,\boldsymbol{\beta})dt = \mathrm{E}\{N(t) \mid \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z} = x\}f_{\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(x)$ 和 $f_2(t,x,\boldsymbol{\beta}) = \mathrm{E}\{I(C \geqslant t)N(t) \mid \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z} = x\}f_{\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(x)$ 分别可以通过核型估计量 $\widehat{\mathcal{F}}_{1h}(t,x,\boldsymbol{\beta})dt = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_h(x - \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)N_i(u)$ 和 $\widehat{f}_{2h}(t,x,\boldsymbol{\beta}) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_h(x - \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)N_i(u)I(C_i \geqslant u)$ 进行估计。形状函数的核估计量可以表示为

$$\widehat{F}_h(t,x,\boldsymbol{\beta}) = \exp\left[-\int_t^{\tau}\{\widehat{f}_{2h}(u,x,\boldsymbol{\beta})\}^{-1}\widehat{\mathcal{F}}_{1h}(du,x,\boldsymbol{\beta})\right].$$

定义函数 $\mathcal{F}_{1h}(t,x,\boldsymbol{\beta}) = \mathrm{E}\{K_h(x - \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z})N(t)\}$, $\mathcal{F}_{2h}(t,x,\boldsymbol{\beta}) = \mathrm{E}\{K_h(x - \boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{Z})I(C \geqslant t)N(t)\}$，以及 $F_h(t, x, \boldsymbol{\beta}) = \exp[-\int_t^{\tau}\{f_{2h}(u, x, \boldsymbol{\beta})\}^{-1}\mathcal{F}_{1h}(du, x, \boldsymbol{\beta})]$。容易看出，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{Z}_i)\{\widehat{\mathcal{N}}_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) - \mathcal{N}_i\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{Z}_i)(I_{1i} + I_{2i} + I_{3i}),$$

其中

$$\begin{aligned} I_{1i} &= \frac{N_i(C_i)}{\widehat{F}_h(C_i, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}_0)} - \frac{N_i(C_i)}{F_h(C_i, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}_0)}, \\ I_{2i} &= \frac{N_i(C_i)}{\widehat{F}_h(C_i, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i, \widehat{\boldsymbol{\beta}})} - \frac{N_i(C_i)}{\widehat{F}_h(C_i, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}_0)}, \\ I_{3i} &= \frac{N_i(C_i)}{F_h(C_i, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}_0)} - \frac{N_i(C_i)}{F(C_i, \boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{\beta}_0)}. \end{aligned}$$

对于 $l = 1$、.....、n，定义

$$\rho(O_l, t, x, \boldsymbol{\beta}) = \int_t^{\tau}\{f_2(u, x, \boldsymbol{\beta})\}^{-1} dM_l(u, x, \boldsymbol{\beta}), \tag{40}$$

其中 $dM_l(u, x, \boldsymbol{\beta}) = dN_l(u) - I(C_l \geqslant u)N_l(u)r(u, x, \boldsymbol{\beta})du$。遵循 Sun 等人（2022）的研究，

应用函数型德尔塔方法可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{Z}_i)I_{1i} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} m(\boldsymbol{Z}_i)\mathcal{N}_i K_h(\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_l - \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)\rho(O_l, C_i, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i) + R_n + O_p(h^2),\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{Z}_i)I_{2i} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{Z}_i)\mathcal{N}_i d(O_i, \boldsymbol{\beta}_0)^\intercal(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) + o_p(n^{-1/2}),\end{aligned}$$

其中 $\rho(O_l,\ C_i,\ ^\intercal\boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z}_i) = \rho(O_l,\ C_i,\ \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z}_i,\ \boldsymbol{\beta}_0)$，其中 $\rho(O_l,\ t,\ x,\ \boldsymbol{\beta})$ 由（40）定义。根据条件（C6），我们有 $O_p(h^2) = o_p(n^{-1/2})$。此外，按照 Sun 等人（2022）的结果，我们可以证明$n^{-1}\sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{Z}_i)I_{3i} + R_n = o_p(n^{-1/2})$。因此，应用定理 1 的结果可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{Z}_i)\{\widehat{\mathcal{N}}_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) - \mathcal{N}_i\} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} m(\boldsymbol{Z}_i)\mathcal{N}_i K_h(\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_l - \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)\rho(O_l, C_i, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)\\ &\quad + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(\boldsymbol{Z}_i)\mathcal{N}_i d(O_i, \boldsymbol{\beta}_0)^\intercal(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) + o_p(n^{-1/2})\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} m(\boldsymbol{Z}_i)\mathcal{N}_i K_h(\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_l - \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)\rho(O_l, C_i, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)\\ &\quad - \mathrm{E}\{m(\boldsymbol{Z})\mathcal{N} d(O, \boldsymbol{\beta}_0)^\intercal\} V^- \psi_i + o_p(n^{-1/2}).\end{aligned}$$

引理4的证明至此完成。

Lemma 5: 定义 $u_h(O_i, O_l) = \{m(\boldsymbol{Z}_i)\mathcal{N}_i K_h(\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i - \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_l)\rho(O_i, C_i, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_l) + m(\boldsymbol{Z}_l)\mathcal{N}_l K_h(\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_l - \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)\rho(O_l, C_l, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)\}/2$，其中 $m(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{Z}I(\boldsymbol{Z} \in \mathcal{S}_Z)$，其中 $\boldsymbol{Z}$ 在定理3中定义，或者$m(\boldsymbol{Z}) = \delta(\boldsymbol{Z})$，其中 $\delta(\boldsymbol{Z})$ 在定理4中定义。我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n(n-1)}\sum_{l\neq i} u_h(O_i, O_l) - \mathrm{E}\{u_h(O_1, O_2)\}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\rho}(O_i) f_{\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i) - 2\,\mathrm{E}\{u_h(O_1, O_2)\} + o_p(n^{-1/2}),\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{\rho}(o) = \mathrm{E}\{m(\boldsymbol{Z}_1)\mathcal{N}_1\rho(O_1^\intercal,\ C_2,\ \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z}_2,\ \boldsymbol{\beta}_0)^\intercal \mid \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z}_2 = \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{z},\ O_1 = o\}$ 其中 $\boldsymbol{z}$ 表示 o的协变量部分。

引理 5 的证明。在条件 (C2) 和 (C4) 下，我们可以证明 $\mathrm{E}\{\|u_h(O_1,\ O_2)\|^2\} = o(n)$。由于 $u_h(O_i,\ O_l)$ 是对称函数，应用 Powell 等人 (1989) 中的引理 3.1 可得

$$\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq l} u_h(O_i, O_l) - \mathrm{E}\{u_h(O_1, O_2)\} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{u}_h(O_i) - 2\,\mathrm{E}\{u_h(O_1, O_2)\} + o_p(n^{-1/2}),$$

其中，对于 i，$l=1$，……，n 和 $i\neq l$，有 $\widetilde{u}_h(O_i)=\mathrm{E}\{u_h(O_i,\ O_l)\mid O_i\}$。此外，我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{u}_h(O_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\{u_h(O_i,O_l)\mid O_i\}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\rho}(O_i)f_{\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)+o_p(n^{-1/2}).$$

其中 $\widetilde{\rho}(o)=\mathrm{E}\ \{m(\boldsymbol{Z}_1)\mathcal{N}_1\rho(O_1,\ C_2,\ \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z}_2,\ \boldsymbol{\beta}_0)\mid \boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{Z}_2=\boldsymbol{\beta}_0\boldsymbol{z},\ O_1=o\}$。由此可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq l}u_h(O_i,O_l)-\mathrm{E}\{u_h(O_1,O_2)\}\\ =\ &\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\rho}(O_i)f_{\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)-2\,\mathrm{E}\{u_h(O_1,O_2)\}+o_p(n^{-1/2}).\end{aligned}$$

为证明定理4，可将 $\boldsymbol{\gamma}$ 的约束通过在多球坐标系中对 $\boldsymbol{\gamma}$ 重新参数化为一个 $(p-1)$ 维向量 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots\ldots,\ \theta_{p-1})\ \in\Theta$来实现，其中 $\Theta=[0,\pi]^{(p-2)}\times[0,2\pi]$。具体而言，令

$$\boldsymbol{\gamma}=\mathbb{S}(\boldsymbol{\theta})=\left(\cos(\theta_1),\sin(\theta_1)\cos(\theta_2),\ldots,\prod_{k=1}^{p-2}\sin(\theta_k)\cos(\theta_{p-1}),\prod_{k=1}^{p-1}\sin(\theta_k)\right)^{\intercal}.$$

定义 $p\times(p-1)$ 矩阵 $J(\boldsymbol{\theta})=\partial\mathbb{S}(\boldsymbol{\theta})/\partial\boldsymbol{\theta}$。在建立 $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathrm{mre}}$ 的渐近正态性时，使用以下引理来推导目标函数关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的一阶和二阶导数。

LEMMA 6: 在定理4的条件下，给定 $\mathrm{E}(\mathcal{N}\mid\boldsymbol{Z})=g(\boldsymbol{\gamma}_0\boldsymbol{Z})$，有

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial^2\mathrm{E}\{(\mathcal{N}_1-\mathcal{N}_2)I(\boldsymbol{Z}_1\in\mathcal{S}_Z,\boldsymbol{Z}_2\in\mathcal{S}_Z,\boldsymbol{\gamma}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_1<\boldsymbol{\gamma}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_2)\}}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}^{\intercal}}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}\\ &=2J(\boldsymbol{\theta}_0)^{\intercal}\,\mathrm{E}\left[\left\{\phi^{(2)}(\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})\phi^{(0)}(\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})-\phi^{(1)}(\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})^{\otimes 2}\right\}\dot{g}(\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})f_{\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})\right]J(\boldsymbol{\theta}_0),\end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial\,\mathrm{E}\{(y-\mathcal{N})I(\boldsymbol{Z}\in\mathcal{S}_Z,\boldsymbol{z}\in\mathcal{S}_Z,\boldsymbol{\gamma}^{\intercal}\boldsymbol{Z}<\boldsymbol{\gamma}^{\intercal}\boldsymbol{z})\}}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}=\{y-g(\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{z})\}\delta(\boldsymbol{z})^{\intercal}J(\boldsymbol{\theta}_0),$$

其中 $\delta(\boldsymbol{Z})=f_{\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})\{\boldsymbol{Z}\phi^{(0)}(\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})-\phi^{(1)}(\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})\}I(\boldsymbol{Z}\in\mathcal{S}_Z)$ 以及 $\phi^{(k)}(\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})=E\{\boldsymbol{Z}^{\otimes k}I(\boldsymbol{Z}\in\mathcal{S}_Z)\mid\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}\}$ 当 $k=0,\ 1,\ 2$。

可以采用与引理 2 的证明中所使用的类似论证来证明引理6（例如，参见 Sherman，1993），因此省略证明。

10. Proof of Theorem 3

规模参数通过求解估计方程 $U(c,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})=0$ 进行估计，其中

$$U(c,\boldsymbol{\gamma},\widehat{\boldsymbol{\beta}})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\boldsymbol{Z}}_i I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)\{\widehat{\mathcal{N}}_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}})-\exp(c+\boldsymbol{\gamma}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)\} \tag{41}$$

与 $\boldsymbol{Z}_i=(1,\boldsymbol{Z}_i^{\intercal})^{\intercal}$。$U(c,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})=0$ 的解记为 $\widehat{c}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\exp}$。定义 $U_0(c,\boldsymbol{\gamma})=\mathrm{E}[\boldsymbol{Z}I(\boldsymbol{Z}\in\mathcal{S}_Z)\{\mathcal{N}-\exp(c+\boldsymbol{\gamma}^{\intercal}\boldsymbol{Z})\}]$，并令 $(c_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$ 为 $U_0(c,\boldsymbol{\gamma})=0$ 的解。令 $\boldsymbol{\xi}=(\widehat{c},\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\exp})$ 和 $\boldsymbol{\xi}_0=(c_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$。我们首先证明 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{\xi}_0$的相合估计量。为方便起见，将 $U(c,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})$ 和 $U_0(c,\boldsymbol{\gamma})$ 分别重写为 $U(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\beta})$ 和 $U_0(\boldsymbol{\xi})$。对于$\epsilon>0$，可推得 $\inf_{\boldsymbol{\xi}:\|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0\|\geqslant\epsilon}\|U_0(\boldsymbol{\xi})\|>0$，这是由于

$$\frac{\partial U_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial\boldsymbol{\xi}}\Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0}=\Gamma_1=-\mathrm{E}\{\exp(c_0+\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z})\widetilde{\boldsymbol{Z}}\widetilde{\boldsymbol{Z}}^{\intercal}I(\boldsymbol{Z}\in\mathcal{S}_Z)\}. \tag{42}$$

此外，我们需要证明，当$n\to\infty$时，$\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\Xi}\|U(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\beta})-U_0(\boldsymbol{\xi})\|$依概率收敛于零，其中 Ξ是 $\mathbb{R}^{p+1}$的一个紧子集。令 $U(\boldsymbol{\xi},\mathcal{N})=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Z}_i I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)\{\mathcal{N}_i-\exp(c+\boldsymbol{\gamma}^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)\}$。容易看出，$\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\Xi}\|U(\boldsymbol{\xi},\mathcal{N})-U_0(\boldsymbol{\xi})\|=o_p(1)$。此外，应用 $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}=(\widehat{\gamma}_1,\ldots,\widehat{\gamma}_p)^{\intercal}$引理4可得$\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\Xi}\|U(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\beta})-U(\boldsymbol{\xi},\mathcal{N})\|=o_p(1)$。因此，我们有$\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\Xi}\|U(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\beta})-U_0(\boldsymbol{\xi})\|\leqslant\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\Xi}\|U(\boldsymbol{\xi},\mathcal{N})-U_0(\boldsymbol{\xi})\|+\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\Xi}\|U(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\beta})-U(\boldsymbol{\xi},\mathcal{N})\|=o_p(1)$。$\boldsymbol{\xi}=(\widehat{c},\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\exp})$的相合性得证。

$\widetilde{\boldsymbol{Z}}=(1,\boldsymbol{Z}^{\intercal})^{\intercal}$

接下来，我们证明 $\boldsymbol{\xi}=(\widehat{c},\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\exp})$ 的渐近正态性。根据 $U(\widehat{c},\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\exp},\boldsymbol{\beta})$ 在真实值 $(c_0,\boldsymbol{\gamma}_0)$ 处的泰勒展开，可得

$$\mathbf{0}=U(c_0,\boldsymbol{\gamma}_0,\widehat{\boldsymbol{\beta}})-\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp(c_0+\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)\widetilde{\boldsymbol{Z}}_i\widetilde{\boldsymbol{Z}}_i^{\intercal}I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)\right\}\begin{pmatrix}\widehat{c}-c_0\\ \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\exp}-\boldsymbol{\gamma}_0\end{pmatrix}+\boldsymbol{R}_U,$$

其中，残差项 $\boldsymbol{R}_U$ 满足 $\|\boldsymbol{R}_U\|=O_p(\|\widehat{\boldsymbol{\xi}}-\boldsymbol{\xi}_0\|^2)$。由于 $\widehat{c}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\exp}$ 是一致的，我们有

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\begin{pmatrix}\widehat{c}-c_0\\ \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\exp}-\boldsymbol{\gamma}_0\end{pmatrix}&=\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp(c_0+\boldsymbol{\gamma}_0^{\intercal}\boldsymbol{Z}_i)\widetilde{\boldsymbol{Z}}_i\widetilde{\boldsymbol{Z}}_i^{\intercal}I(\boldsymbol{Z}_i\in\mathcal{S}_Z)\right\}^{-1}\sqrt{n}U(c_0,\boldsymbol{\gamma}_0,\widehat{\boldsymbol{\beta}})+o_p(1)\\&=-\Gamma_1^{-1}\sqrt{n}U(c_0,\boldsymbol{\gamma}_0,\widehat{\boldsymbol{\beta}})+o_p(1),\end{aligned}$$

其中，Γ_1 由式（42）定义。为了证明所提出的估计量$\widehat{c}$和 $\widehat{\gamma}_{\exp}$的渐近正态性，我们需要研究 $\sqrt{n}U(c_0, \gamma_0, \beta)$。应用引理4和引理5可得

$$\sqrt{n}U(c_0, \gamma_0, \widehat{\beta}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} U_i(c_0, \gamma_0) + o_p(1), \tag{43}$$

其中

$$\begin{aligned} U_i(c_0, \gamma_0) = & \widetilde{Z}_i I(Z_i \in \mathcal{S}_Z) \{\mathcal{N}_i - \exp(c_0 + \gamma_0^\intercal Z_i)\} \\ & + \int_0^\tau \frac{\mathrm{E}\{\widetilde{Z}\mathcal{N} I(Z \in \mathcal{S}_Z, C \leqslant t) \mid \beta_0^\intercal Z = \beta_0^\intercal Z_i\}}{q^{(0)}(t, \beta_0^\intercal Z_i) F(t, \beta_0^\intercal Z_i)} dM_i(t) f_{\beta_0^\intercal Z}(\beta_0^\intercal Z_i) \\ & - \mathrm{E}\left[\widetilde{Z} I(Z \in \mathcal{S}_Z)\mathcal{N} \int_C^\tau \dot{r}(t, \beta_0^\intercal Z) \left\{ Z - \frac{q^{(1)}(t, \beta_0^\intercal Z)}{q^{(0)}(t, \beta_0^\intercal Z)} \right\}^\intercal dt \right] V^- \psi_i \end{aligned}$$

其中 V 由（24）定义，ψ_i 由引理4定义。定义

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \widetilde{Z} I(Z \in \mathcal{S}_Z) \{\mathcal{N} - \exp(c_0 + \gamma_0^\intercal Z)\} \\ & + \int_0^\tau \mathrm{E}\{\widetilde{Z}\mathcal{N} I(Z \in \mathcal{S}_Z, C \leqslant t) \mid \beta_0^\intercal Z\} \{q^{(0)}(t, \beta_0^\intercal Z) F(t, \beta_0^\intercal Z)\}^{-1} dM(t) f_{\beta_0^\intercal Z}(\beta_0^\intercal Z) \\ & - \mathrm{E}[\widetilde{Z} I(Z \in \mathcal{S}_Z)\mathcal{N} \int_C^\tau \dot{r}(t, \beta_0^\intercal Z) \{Z - q^{(1)}(t, \beta_0^\intercal Z)/q^{(0)}(t, \beta_0^\intercal Z)\}^\intercal] dt V^- \psi, \end{aligned}$$

其中，ψ 在定理 1 中定义。可以证明，$\mathrm{var}\left\{n^{-1/2} \sum_{i=1}^n U_i(c_0, \gamma_0)\right\} = \Omega_1$，其中 $\Omega_1 = \mathrm{E}(\psi_1 \psi_1)$。因此，$\sqrt{n}((\widehat{c}, \widehat{\gamma}_{\exp}) - (c_0, \gamma_0))$ 收敛于一个均值为零、方差-协方差矩阵为 $\Gamma_1^{-1} \Omega_1 \Gamma_1^{-1}$ 的正态随机变量，其中 $n \to \infty$。

11. Proof of Theorem 4

定义 $\ell(\gamma, \mathcal{N}) = n^{-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I(\gamma^\intercal Z_i > \gamma^\intercal Z_j, Z_i \in \mathcal{S}_Z, Z_j \in \mathcal{S}_Z)\mathcal{N}_i$，并将目标函数重写为

$$\ell(\gamma, \widehat{\mathcal{N}}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I(\gamma^\intercal Z_i > \gamma^\intercal Z_j, Z_i \in \mathcal{S}_Z, Z_j \in \mathcal{S}_Z)\widehat{\mathcal{N}}_i(\widehat{\beta}).$$

应用引理6，我们有 $\partial \ell(\gamma, \mathcal{N})/\partial \theta|_{\theta=\theta_0} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \{\mathcal{N}_i - g(\gamma_0^\intercal Z_i)\} \delta(Z_i) J(\theta_0) + o_p(n^{-1/2})$，其中 $\delta(Z) = f_{\gamma_0^\intercal Z}(\gamma_0^\intercal Z)\{Z \phi^{(0)}(\gamma_0^\intercal Z) - \phi^{(1)}(\gamma_0^\intercal Z)\} I(Z \in \mathcal{S}_Z)$。然后根据引理4，我们可以证明

$$\frac{\partial \ell(\gamma, \widehat{\mathcal{N}})}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\theta_0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_{2i}^\intercal J(\theta_0) + o_p(n^{-1/2}),$$

其中

$$\begin{aligned}\psi_{2i} &= \delta(\boldsymbol{Z}_i)\left\{\mathcal{N}_i - g(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)\right\} \\ &\quad - \mathrm{E}\left[\int_C^\tau \dot{r}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}) dt \cdot \delta(\boldsymbol{Z}) \mathcal{N}\{\boldsymbol{Z} - q^{(1)}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})/q^{(0)}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\}^\intercal\right] V^- \psi_i \\ &\quad + \int_0^\tau \mathrm{E}\left\{\delta(\boldsymbol{Z}) \mathcal{N} I(C \leqslant t) \mid \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i\right\} \{q^{(0)}(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i) F(t, \boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i)\}^{-1} dM_i(t) f_{\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\beta}_0^\intercal \boldsymbol{Z}_i),\end{aligned}$$

其中 V 由(24)定义， ψ_i 由(39)定义。此外，由引理4和引理6可得

$$\left.\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\gamma}, \widehat{\mathcal{N}})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\intercal}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} = J(\boldsymbol{\theta}_0)^\intercal \Gamma_2 J(\boldsymbol{\theta}_0) + o_p(1),$$

其中 $\Gamma_2 = -\mathrm{E}[\{\phi^{(2)}(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\phi^{(0)}(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}) - \phi^{(1)}(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z})^{\otimes 2}\} \dot{g}(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}) f_{\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{\gamma}_0^\intercal \boldsymbol{Z})]$. 应用 Sun 等人（2022）中定理2证明所用的技巧，我们可以证明 $\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathrm{mre}} - \boldsymbol{\gamma}_0)$ 依分布收敛于一个方差-协方差矩阵为 $\Gamma_2^- \Omega_2 \Gamma_2^-$ 的零均值正态随机变量，其中 Ω_2 在定理4中定义。

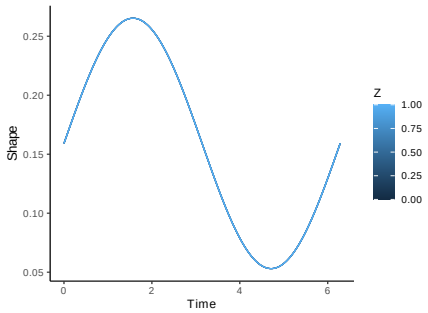
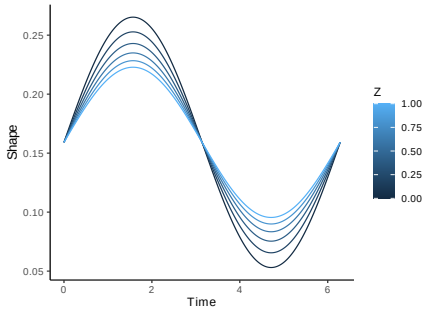
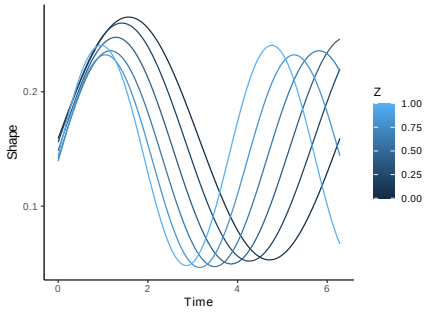
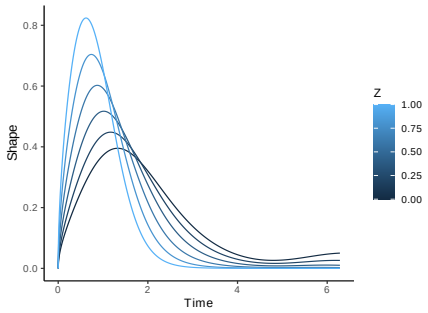
形状-尺度分解	不同协变量取值下的形状
1. 乘法模型 速率： $\mu_0(t)\exp(\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z})$ 形状： $\frac{\mu_0(t)}{m_0(\tau)}$ 大小： $m_0(\tau)\exp(\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z})$	
2. 加性模型 速率： $\mu_0(t)+\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z}$ 形状： $\frac{\mu_0(t)+\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z}}{m_0(\tau)+\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z}\tau}$ 大小： $m_0(\tau)+\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z}\tau$	
3. 尺度变化模型 速率： $\mu_0(t\exp(\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z}))\exp(\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z})$ 形状： $\frac{\mu_0(t\exp(\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z}))\exp(\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z})}{m_0(\tau\exp(\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z}))}$ 大小： $m_0(\tau\exp(\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z}))$	
4. 变换模型 速率： $\mu_0(t)\exp(\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\,\dot{H}(m_0(t)\exp(\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z}))$ 形状： $\frac{\mu_0(t)\exp(\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z})\,\dot{H}(m_0(t)\exp(\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z}))}{H(m_0(\tau)\exp(\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z}))}$ 大小： $H(m_0(\tau)\exp(\boldsymbol{\alpha}_0^\intercal \boldsymbol{Z}))$	

图1. 常见复发事件模型的形状与大小分解。 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 是回归参数向量； $\mu_0(t)$ 和 $m_0(t) = \int_0^t \mu_0(u)du$ 分别是基准率函数和累积率函数。对于变换模型， H 是一个递增函数， $\dot{H}$是其一阶导数。右侧列展示了在一个特殊情形下协变量如何影响形状函数，其中 $\boldsymbol{Z}$ 是一维的， $\mu_0(t) = \sin(t) + 1.5$, $\alpha_0 = 1$， 且 H 是形状参数为 1.5、尺度参数为 5 的威布尔分布的累积分布函数。

表1

Summary of simulation results for shape estimation

		$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$						$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$					
		$W=1$			$W\sim$伽马分布			$W=1$			$W\sim$伽马分布		
情景		偏差	经验标准误	平均自助法标准误 覆盖概率	偏差	经验标准误	平均自助法标准误 覆盖概率	偏差	经验标准误	平均自助法标准误 覆盖概率	偏差	经验标准误	覆盖概率
$n=200$													
M1	β_1	-11	84	88 96.3	-16	89	94 95.6	-11	84 95.8	-12	91 95.8		
	β_2	-2	112	118 95.0	3	121	126 95.6	-2	114 95.9	-8	143 95.7		
M2	β_1	-9	94	98 96.4	-15	99	105 95.9	-6	96 94.9	-14	102 96.3		
	β_2	-9	127	126 94.2	-6	144	139 95.9	-14	132 95.5	-11	156 95.9		
M3	β_1	-5	60	64 95.8	-6	68	72 96.4	-7	64 96.2	-9	73 96.1		
	β_2	-2	80	85 95.6	-3	90	96 95.7	-2	95 95.8	-4	103 95.7		
$n=400$													
M1	β_1	-6	57	61 95.3	-5	60	64 95.4	-2	61 95.3	-7	63 95.3		
	β_2	0	78	82 95.4	-2	82	85 95.2	-6	83 95.4	0	85 95.1		
M2	β_1	-1	66	70 95.7	1	69	72 96.1	-6	69 95.6	-3	72 95.1		
	β_2	-10	92	95 94.6	-12	94	95 95.4	-3	94 95.2	-9	97 95.2		
M3	β_1	-8	41	43 96.1	-5	42	44 95.0	-6	36 95.3	-7	45 95.3		
	β_2	6	55	58 96.2	3	56	58 95.1	5	53 94.9	5	63 95.3		

注：偏差为经验偏差（×1000）； ESE 为经验标准误（×1000）； ASE 为平均自助法标准误（×1000）； CP 为 95% 经验覆盖概率（%）。

表 2

Summary of simulation results for size estimation

		$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathrm{exp}}/\|\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathrm{exp}}\|$						$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathrm{mre}}$					
		$W=1$			$W\sim$伽马分布			$W=1$			$W\sim$伽马分布		
情景		偏差	经验标准误	平均自助法标准误 覆盖概率	偏差	经验标准误	平均自助法标准误 覆盖概率	偏差	经验标准误	平均自助法标准误 覆盖概率	偏差	经验标准误	平均自助法标准误 覆盖概率
$n=200$													
M1	γ_1	5	48	51 94.9	2	73	77 95.3	5	59	63 95.1	2	73	78 94.4
	γ_2	-6	37	41 93.8	-7	58	61 96.1	-7	44	48 94.4	-7	55	59 94.2
M2	γ_1	-12	122	126 95.4	-23	151	155 94.6	-11	115	120 95.2	-24	152	155 94.8
	γ_2	-16	153	158 95.0	-23	202	205 96.0	-17	153	157 94.5	-20	201	205 95.3
M3	γ_1	-10	84	87 96.2	-5	96	100 96.5	-8	78	81 95.3	-7	91	95 94.7
	γ_2	-3	114	110 96.8	-17	137	142 96.4	-5	110	107 96.5	-11	124	129 95.8
$n=400$													
M1	γ_1	5	34	36 95.5	0	51	54 96.2	4	41	43 95.2	2	51	53 95.2
	γ_2	-5	26	29 94.9	-2	38	40 95.0	-5	31	34 95.3	-4	39	42 94.2
M2	γ_1	-6	87	90 95.8	-16	108	110 94.8	-3	81	84 95.5	-15	110	112 95.0
	γ_2	-9	112	114 95.0	-6	142	145 95.0	-12	109	112 94.9	-6	142	145 94.8
M3	γ_1	-4	60	63 95.9	-3	72	75 95.6	-3	56	58 95.4	-2	69	72 95.7
	γ_2	-2	76	78 94.7	-8	93	95 94.2	-3	73	75 95.5	-7	90	92 94.8

注：Bias 表示经验偏差（×1000）；ESE 表示经验标准误（×1000）；ASE 表示平均自助法标准误（×1000）；CP 表示 95% 经验覆盖概率（%）。

表3

Shape and size estimation for SEER-Medicare data

	肿瘤大小	种族（非白人）	诊断年份	诊断年龄
		形状估计		
系数（$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$）	-0.064	-0.151	0.045	0.985
SE	0.038	0.063	0.031	0.037
系数（$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$）	-0.050	-0.134	0.052	0.988
SE	0.037	0.054	0.035	0.046
		规模估计		
		(i) 形状依赖协变量，未指定链接函数		
Coef	0.306	0.055	0.692	0.652
SE	0.062	0.105	0.044	0.062
		(ii) 形状依赖协变量，指数链接函数		
Coef	0.318	0.166	0.774	0.646
SE	0.048	0.121	0.075	0.047
		(iii) 形状依赖协变量，指数链接函数（比例率模型）		
Coef	0.126	0.028	0.221	0.208
SE	0.023	0.045	0.032	0.021

注：Coef 为估计的回归系数。SE 为基于 500 个自助法样本计算的自助法标准误。诊断年龄的单位为 10 年，肿瘤大小的单位为厘米。