arXiv:2305.01819v1 [math.NA] 2 May 2023

通过围道积分计算自由卷积

Alice Cortinovis* Lexing Ying†

摘要

本文提出了用于计算给定两个测度的加法和乘法自由卷积的算法。我们考虑具有紧支撑的测度，其自由卷积所得的测度具有密度函数，且该函数在边界处呈平方根衰减（例如半圆分布或 Marchenko-Pastur 分布）。我们方法的一个关键组成部分是利用柯西积分公式重写自由卷积的中间量，然后使用梯形求积公式对这些积分进行离散化；在被积函数满足适当解析性条件时，该公式具有指数快速收敛性。

1 引言

给定两个相互独立的可交换随机变量 X 和 Y，可以通过计算 X 和 Y的密度的卷积来得到它们求和的密度。当X 和 Y 不满足交换律时，这一结论便不再成立。举例来说，考虑两个大小为$n \times n$的对称矩阵 X 和 Y，它们的特征值为 ± 1，各以$_1{}_2$的概率取值；它们的特征向量矩阵则分别是独立随机选取的随机正交矩阵（即来自 Haar 分布）。当大小 n趋于无穷时，$X+Y$的特征值趋于服从反正弦分布——这是一种连续分布，并不等同于决定 X 和 Y特征值的随机变量的卷积分布。Voiculescu 于 20 世纪 80 年代引入的自由概率，是一种强大的工具，可以通过自由加法卷积这一概念来解释随机矩阵求和的特征值分布的行为；关于这一主题及其与随机矩阵理论的联系，请参阅书籍 [7] 。

自由概率的另一个应用如下。当 Z 是一个大小为$n \times p$ 的随机矩阵，其行是均值为零、方差为 $\Sigma_p \in \mathbb{R}^{p\times p}$的随机向量时，可以考虑样本协方差 $\widehat{\Sigma}_p := \frac{1}{n} Z^T Z$。如果我们考虑不断增大的 n和 p，且满足 $\frac{p}{n} \to \gamma$，并且$\widehat{\ }$ Σ_p 的特征值具有极限分布，那么在温和条件 [10, 11]下，Σ_p 的特征值分布也有一个确定性的极限。同样，这样的极限可以用自由乘法卷积的工具来表示。

相关文献。 测度的自由加法卷积和自由乘法卷积在理论上通过柯西变换、R 变换、T 变换和 S 变换来定义，我们将在第 2 节回顾这些变换。只有在一些非常特殊的情况下，才能解析地计算自由卷积；对于其他所有测度，都必须采用数值技术。一种数值计算自由卷积的方法是使用不动点迭代，例如，

*斯坦福大学数学系，加利福尼亚州，美国。邮箱：alicecor@stanford.edu
†斯坦福大学数学系和计算与数学工程研究所，加利福尼亚州，美国。邮箱：lexing@stanford.edu

基于定理 6.5] 中的结果 [5, 。文献 [3] 提出了一种算法，用于计算点测度之和与 Marchenko-Pastur 分布的自由乘法卷积（这符合上述提及的自由乘法卷积的应用场景）。文献 [9] 研究了柯西变换为代数函数的测度的自由加法卷积。文献 [8] 提出了一种自由卷积算法，适用于以下两类测度：一类是在整个实数轴上具有支撑集且平滑衰减的测度；另一类是在紧区间上具有支撑集且在边界处表现出平方根行为的测度。有关该方法与我们方法的比较，请参见注 3.6。

贡献。 本文提出了一种新算法，用于计算两个测度 μ_1 和 μ_2的自由（加法和乘法）卷积。我们假设 μ_1 和 μ_2 具有紧支撑，且它们的自由卷积在边界处呈现平方根行为，具体定义见定义 2.1。我们的方法基于沿适当定义的曲线应用柯西积分定理，近似计算自由卷积所需的解析变换。积分的数值计算采用梯形求积公式；由于被积函数是解析的，随着求积点数量的增加，计算结果能够快速收敛。

概要。 本文其余部分安排如下。第 2 节回顾测度自由卷积的相关定义和结果。第 3 节概述所提出的自由加法卷积算法。第 4 节总结一种类似的自由乘法卷积算法。第 5 节讨论自由卷积算法中的近似误差。第 6 节报告若干数值示例，并在第 7 节给出结论。

2 自由卷积预备知识

本文研究具有紧支撑且密度连续、无原子的测度。

记号。 我们用 μ 表示支撑集位于 $[a,b]$ 且密度为 $f(x)$ 的测度。输入测度为 μ_1（支撑集为 $[a_1,b_1]$）和 μ_2（支撑集为 $[a_2,b_2]$）。我们用 $\mu_1 \boxplus \mu_2$表示它们的自由加法卷积，用 $\mu_1 \boxtimes \mu_2$ 表示它们的自由乘法卷积。我们用 $\mathbb{D}$ 表示 $\mathbb{C}$ 中的开单位圆盘，用 $\partial\mathbb{D}$ 表示 $\mathbb{C}$中的单位圆（单位圆盘的边界）。在 $\partial\mathbb{D}$ 或复平面中的任何其他曲线上计算积分时，积分方向均为逆时针方向。 $\mathbb{C}^+$ 和 $\mathbb{C}^-$ 分别表示复平面中虚部严格为正和严格为负的半平面。

2.1 边界处具有平方根行为的测度与 Jacobi测度

本文考虑的最规则的分布，是在边界处具有如下意义的平方根行为的分布。

定义 2.1. 如果测度 μ 的密度具有以下形式，则称其在边界处具有平方根行为（平方根行为）。

$$\mathrm{d}\mu(x) = f(x)\mathrm{d}x = \psi(x)\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}\mathrm{d}x$$

对某些 $\psi \in C^1([a,b])$，其 $\psi'(x)$ 具有有界变差。

我们回顾两个自然源自随机矩阵理论的此类测度的例子。

例 2.2 (半圆分布**)**。 半圆分布的支撑集为 $[a,b] = [-2,2]$，其密度为

$$\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x.$$

它在边界处具有平方根行为，$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}$。

半圆分布是随机对称矩阵的特征值分布的极限（当 $n \to \infty$ 时）。该矩阵的大小为 $n \times n$，其对角线上方的条目是均值为 0、方差为 $\frac{1}{n}$ 的独立同分布条目，对角线上的条目是均值为 0、方差为 $\frac{C}{n}$ 的独立同分布条目，其中 $C \geq 0$ 为某个常数。

例 2.3 (马尔琴科-帕斯图尔分布**)**。 参数为 **(0**,1) 的马尔琴科-帕斯图尔分布的支撑集为 $[\lambda_-, \lambda_+]$，其中 $\lambda_\pm := (1 \pm \sqrt{\lambda})^2,$，其密度为

$$\mathrm{d}\mu(x) = \frac{\sqrt{(\lambda_+ - x)(x-\lambda_-)}}{2\pi\lambda x}\mathrm{d}x.$$

它在边界处具有平方根行为，其中 $\psi(x) = \frac{1}{2\pi\lambda x}$。

Marchenko-Pastur 分布是由均值为零、方差为 $\frac{1}{n}$ 的独立同分布条目构成的矩阵 $B_n \in \mathbb{R}^{\lfloor \lambda n \rfloor \times n}$ 所形成的随机矩阵 $B_n B_n^T$ 的特征值分布在 $n \to \infty$ 时的极限。

更一般的一类测度如下。

定义 2.4。 μ 是 *Jacobi*测度，如果其密度具有如下形式。

$$\mathrm{d}\mu(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta \psi(x)\mathrm{d}x$$

对于某些 $\alpha, \beta > -1$ 和 $\psi \in C^1([a,b])$.

示例 2.5 (均匀分布**)**。 作为一个在边界处不具有 平方根行为的 *Jacobi*测度（我们将在数值实验中使用）的例子，我们来考虑支撑集位于区间 $[a,b]$ 上的均匀分布，其中 $a, b \in \mathbb{R}$。其密度为 $\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x$。

2.2 柯西变换与 Stieltjes反演

定义 2.6. 点 $z \in \mathbb{C}\backslash[a,b]$ 的柯西变换定义为

$$G(z) = \int_a^b \frac{1}{z-x}\mathrm{d}\mu(x).$$

如有歧义，我们会用下标注明测度，例如 $G_\mu(z)$。

定理 2.7. 柯西变换 G 在 $\mathbb{C}\backslash[a,b]$ 上解析，并且在无穷远处 $y.$

这是 [8] 中命题 A.7 的一个版本，假设有所不同；它略优于 [7] 中第 3 章的引理 2，因为我们的情形具有更强的假设（即紧支撑）。证明沿用 [7, 第 3 章引理 2]；为完整起见，我们在附录 A 中给出证明。

为了将柯西变换视为从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$中单位圆盘的映射，我们使用儒可夫斯基映射。

定义 2.8。 相对于线段 $[a,b]$ 的儒可夫斯基映射为

$$J_{[a,b]}(v)=\frac{1}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{b+a}{2},\qquad v\in\mathbb{C}.$$

这是一个从单位圆盘映射到 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}\backslash[a,b]$ 的保角映射。单位圆被映射到线段 $[a,b]$（“两次”），而圆被映射为椭圆。对于 $z\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}\backslash[a,b]$，我们用 $J^{-}_{[a,b]}$ 和 $J^{+}_{[a,b]}$ 表示若尔当逆函数，它们分别位于单位圆盘内和外。儒可夫斯基映射使我们能够定义

$$\mathcal{G}(v):=G\left(J_{[a,b]}(v)\right),$$

这是一个将单位圆盘映射到 $\mathbb{C}$ 的全纯函数，并且 $\mathcal{G}(0)=0$。因此，我们可以将其写成幂级数

$$\mathcal{G}(v)=\sum_{n\geq 1}g_n v^n \tag{1}$$

该级数在 $\mathbb{D}$ 内处处收敛。

注 2.9。 如果测度 μ 在边界处具有平方根行为，级数 (1) 在单位圆上也收敛。事实上，正如 *[8,* 第 *3.0.1],* 节所讨论的，系数为 $g_n=\frac{(b-a)^2}{4}\pi\psi_{n-1}$，其中 ψ_n 是 $\psi(x)$ 关于第二类切比雪夫多项式的级数展开中的第 n 个系数。当 $\psi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的某个（复）邻域内解析时，系数 ψ_n 指数快速衰减；例如参见 *[12,* 定理 *8.1]*。要使 (1) 在单位圆上收敛，只需假设 $\psi(x)$ 是利普希茨连续的，例如参见 *[12,*定理 *3.1]*。

例 2.10。 对于半圆分布和 *Marchenko-Pastur* 分布，我们可以显式写出柯西变换（及其逆变换和 $\mathcal{G}(z)$）。对于半圆分布，我们有

$$G(z)=\frac{z-\sqrt{z^2-4}}{2},\qquad G^{-1}(w)=w+\frac{1}{w},\qquad \mathcal{G}(v)=v.$$

对于参数为 λ 的 *Marchenko-Pastur* 分布，我们有

$$G(z)=\frac{z+\lambda-1-\sqrt{(z-\lambda-1)^2-4\lambda}}{2\lambda z},\qquad G^{-1}(w)=\frac{1}{1-\lambda w}+\frac{1}{w},\qquad \mathcal{G}(v)=\frac{v}{\lambda(1-v\sqrt{\lambda})}.$$

特别注意，$\mathcal{G}$ 在半径为 $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}>1$ 的圆盘内可解析延拓。而对于区间 $[-m,m]$ 上的均匀分布，则有。

$$G(z)=\frac{1}{2m}\log\frac{z+m}{z-m},\qquad G^{-1}(w)=-m+\frac{2m}{1-\exp(-2mw)}.$$

我们有

$$\mathcal{G}(v)=\frac{1}{m}\log\left(1+\frac{2}{1-v}\right)=\frac{2}{m}\sum_{n\geq 0}\frac{v^{2n+1}}{2n+1},$$

这意味着 $\mathcal{G}$ 在单位圆盘的边界上不可解析延拓。

Stiltjies 反演公式使我们能够从分布的柯西变换中恢复其密度。

定理 2.11 ([7, 定理 6])。 假设 $\mathrm{d}\mu(x) = f(x)\mathrm{d}x$ 对于连续函数 f。对于任意 $c < d \in (a, b)$，我们有

$$-\frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0^+}\int_c^d \mathrm{Im}\left(G(x+iy)\right)\mathrm{d}x = \mu([c,d]).$$

在我们的算法中，我们将使用以下推论。为求完整起见，我们在附录 A 中给出其证明。

推论 2.12。 令 $\mathrm{d}\mu(x) = f(x)\mathrm{d}x$，其中 f 为连续函数。那么对于所有 $\theta \in (0,\pi)$，我们有

$$f\left(\frac{b-a}{2}\cos\theta + \frac{b+a}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\lim_{r\to 1^-}\mathrm{Im}\left(\mathcal{G}(re^{i\theta})\right).$$

2.3 自由加法卷积

定义测度的自由加法卷积所需的关键函数是 R 变换，其定义如下。

定义 2.13. 测度 μ 的 *R* 变换是一个函数 R，定义在0 的一个邻域中，使得 $G\left(R(w) + \frac{1}{w}\right) = w$。

当柯西变换 G 可逆时，我们有 $R(w) = G^{-1}(w) - \frac{1}{w}$。为避免混淆，我们将测度 μ 的 R 变换记为 $R_\mu(w)$。

定理 2.14。 设 μ 是在 $[a,b]$ 中具有紧支撑的测度。则其 *R* 变换在 $G\left(\mathbb{R}\backslash[a,b]\right)$ 上解析，并且在以原点为中心、半径为 $1\,6\min\{|a|,|b|\}$ 的圆盘上解析。

如果对于所有 $z \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}\backslash[a,b]$ 都有 $G'(z) \neq 0$，那么 R 在 $G(\mathbb{C}\cup\{\infty\}\backslash[a,b])$ 上可逆，并且在整个 $G(\mathbb{C}\cup\{\infty\}\backslash[a,b])$ 上解析。对于 μ_1 和 μ_2 的自由加法卷积，我们有如下结果。

定理 2.15 （[7, 第 2 章，定理 18]）。 给定两个测度 μ_1 和 μ_2 ，

$$R_{\mu_1\boxplus\mu_2}(w) = R_{\mu_1}(w) + R_{\mu_2}(w).$$

2.4 自由乘法卷积

对于具有紧支撑的两个测度 μ_1 和 μ_2，与加法情形类似，适当的变换（S变换）使我们能够计算自由乘法卷积。

定义 2.16。 测度 μ 的 *T*变换和 *S*变换分别为

$$T(z) = \int_a^b \frac{t}{z-t}\mathrm{d}\mu(t) \quad and \quad S(w) = \frac{1+w}{wT^{-1}(w)},$$

分别。

T变换将 $\mathbb{C}^+$ 映射到 $\mathbb{C}^-$ ，并将 $\mathbb{C}^-$ 映射到 $\mathbb{C}^+$，且它是一个从 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}\backslash[a,b]$ 到 $\mathbb{C}$的全纯函数。因此，映射 $\mathcal{T}(v) := T(J(v))$具有幂级数展开 $\mathcal{T}(v) = \sum_{n\geq 1} t_n v^n$ ，该展开在单位圆盘内收敛。S变换在0的某个邻域内解析。由于这与加法情形类似，我们省略细节。

定理2.17 （[7, 第4章，定理 23]）。 给定两个测度 μ_1 和 μ_2 ，

$$S_{\mu_1\boxtimes\mu_2}(w) = S_{\mu_1}(w)\cdot S_{\mu_2}(w).$$

3 自由加法卷积算法

本节提出一种高效算法，用于计算满足以下一组假设的两个测度 μ_1 和 μ_2 的自由加法卷积。

假设 3.1。 我们假设 μ_1 和 μ_2 满足以下性质 .

- 它们具有紧支撑 $[a_1,b_1]$ 和 $[a_2,b_2]$。
- 不妨设其中一个测度 μ_1在边界处具有平方根行为。
- 另一个则是*Jacobi*测度，不失一般性地， μ_2。
- 柯西变换 G_{μ_1} 和 G_{μ_2} 在其定义域上可逆 .

我们回顾一下柯西积分公式：对于解析函数 f 和围道 Γ，对于内部的任意点 z Γ

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w.$$

这是我们将在算法中频繁使用的工具，用于计算柯西变换和 R 变换（它们都是解析函数）。

我们算法的另一个核心理论结果是以下定理，它使我们能够刻画 $\mu_1\boxplus\mu_2$ 的支撑集以及 $G_{\mu_1\boxplus\mu_2}$ 的像。

定理 3.2 （ [8]中的定理 2.2 和定理 5.2）。 在假设 *3.1* 下，令

$$g(w) := G^{-1}_{\mu_1}(w) + G^{-1}_{\mu_2}(w) - \frac{1}{w}, \tag{2}$$

其中 在($G^{-1}_{\mu}w$) 的某个邻域内一致。我们有以下性质 .

- $\mu :=\mu_1\boxplus\mu_2$ 在边界处具有平方根行为。
- μ 的支撑集包含在该区间内

$$[a,b] := [g(\xi_a), g(\xi_b)],$$

其中， ξ_a 和 ξ_b 是导数 g' 在区间内的唯一零点。

$$(\max(G_{\mu_1}(a_1), G_{\mu_2}(a_2)), 0) \quad and \quad (0, \min(G_{\mu_1}(b_1), G_{\mu_2}(b_2))),$$

分别。

- 要检查点 w 是否位于 $G_{\mu_1 \boxplus \mu_2}$ 的像中，我们可以使用以下判据：

$$w \in G_{\mu_1 \boxplus \mu_2}(\mathbb{C} \backslash [a,b]) \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(g(w))) = -\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(w)).$$

我们提出的算法由四个主要步骤组成：

1. 设置 μ_1 和 μ_2 的 R 变换计算。
2. 计算 μ 的支撑集
3. 计算 μ 在一组合适的点上的柯西变换。
4. 根据 μ 的柯西变换恢复其密度。

3.1 步骤 1：设置 R 变换的计算方法

本节将说明如何为支撑集位于 $[a,b]$ 中的测度 μ 设置 R 变换的计算方法。我们将此过程应用于 μ_1 和 μ_2。考虑曲线 $\Gamma := \mathcal{G}(r_A \partial \mathbb{D})$，其中 $r_A \in \in (0,1)$。由于 R 变换是解析的，给定 Γ 内部的一点 w，根据柯西积分公式，我们可以写成 $R(w)$：

$$R(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(s)}{w-s} \mathrm{d}s.$$

由于 Γ 对于单位圆上的 v 可参数化为 $s = \mathcal{G}(r_A v)$，因此有 $\mathrm{d}s = r_A \mathcal{G}'(r_A v)\mathrm{d}v$，并且 $G^{-1}(s) = J_{[a,b]}(r_A v)$，于是积分变为

$$R(w) = \frac{r_A}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{J_{[a,b]}(r_A v) - 1/\mathcal{G}(r_A v)}{\mathcal{G}(r_A v) - w} G'(J_{[a,b]}(r_A v)) J'_{[a,b]}(r_A v) \mathrm{d}v =: \int_{\partial \mathbb{D}} u(v) \mathrm{d}v. \tag{3}$$

我们进一步进行变量替换 $v = \exp(2\pi i \theta)$，其中 $\theta \in [0,1]$，并旨在使用梯形求积公式对式 (3) 进行离散化，其形式为

$$R(w) \approx \frac{r_A}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \xi_N^j \cdot G'(J_{[a,b]}(\xi_N^j)) \cdot J'_{[a,b]}(\xi_N^j) \cdot \frac{J_{[a,b]}(\xi_N^j) - \frac{1}{G(J_{[a,b]}(\xi_N^j))}}{G(J_{[a,b]}(\xi_N^j)) - w}, \qquad \xi_N = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right).$$

注意，量 $G(J_{[a,b]}(\xi_N^j))$ 和 $G'(J_{[a,b]}(\xi_N^j))$ 不依赖于点 w，可以提前计算。为计算这些量，我们再次使用梯形求积公式。更具体地说，为了计算点 $z \in \mathbb{C} \backslash [a,b]$ 处的柯西变换 $G(z)$，我们将其定义积分改写为

$$G(z) = \int_{\gamma} \frac{1}{2} \frac{b-a}{2} \left(1 - \frac{1}{v^2}\right) \frac{f(J_{[a,b]}(v))}{z - J_{[a,b]}(v)} \mathrm{d}v,$$

其中 γ 是复平面上的上半单位圆，方向为顺时针；这里我们进行了变量替换 $x = J_{[a,b]}(v)$。再对 $\theta \in [0,1]$ 作变量替换 $v = \exp(2\pi i \theta)$，可得

$$G(z) = \pi \frac{b-a}{2} \int_1^0 \sin(2\pi\theta) \frac{f\left(\frac{b-a}{2}\cos(2\pi\theta) + \frac{b+a}{2}\right)}{z - \left(\frac{b-a}{2}\cos(2\pi\theta) + \frac{b+a}{2}\right)} \mathrm{d}\theta. \tag{4}$$

使用梯形求积公式对 N 个求积点进行离散化，得到：

$$G(z) \approx -\frac{\pi}{N} \sum_{k=0}^{N}{}'' \frac{b-a}{2} \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \frac{f\left(\frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)+\frac{b+a}{2}\right)}{z-\left(\frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)+\frac{b+a}{2}\right)}, \tag{5}$$

其中，$''$ 表示首项和末项各取一半。此方法适用于任意测度μ；但当 μ 在边界处具有平方根行为时，可以证明其具有指数收敛性（见下文推论 5.2）。现在注意，柯西变换的导数可写为

$$G'(z) = -\int_a^b \frac{1}{(z-x)^2} \mathrm{d}\mu(x)$$

and 该积分可以用与柯西变换本身相同的方式离散化 .

具体而言，我们提出的算法的第一步是选取一个半径$r_A < 1$ （例如，{v2）和求积点的数量 N （例如， $N = 1000$），并对其进行近似

$$c_j^{(k)} \approx G_{\mu_k}(J_{[a_k,b_k]}(\xi_N^j)), \qquad d_j^{(k)} \approx G'_{\mu_k}(J_{[a_k,b_k]}(\xi_N^j))$$

对于 $j = 0$，取 1，...， N；对于 $k = 1$，取 2，并通过式（5）计算。我们将 Γ_1 和 Γ_2 分别称为半径为 r_A 的圆在 $\mathcal{G}_{\mu_1}$ 和 $\mathcal{G}_{\mu_2}$下的像。这样，在需要时，我们便可以通过以下表达式计算 μ_1 和 μ_2的 R 变换

$$R_{\mu_k}(w) \approx \frac{r_A}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \xi_N^j \cdot d_j^{(k)} \cdot J'_{[a_k,b_k]}(\xi_N^j) \cdot \frac{J_{[a_k,b_k]}(\xi_N^j) - 1/c_j^{(k)}}{c_j^{(k)} - w}, \quad k \in \{1,2\}. \tag{6}$$

例 3.3. 在本节中，我们将通过一个具体示例来展示所提出算法的表现：我们考虑 μ_1 为参数 $\lambda = 0.5$ 的马尔琴科-帕斯图尔分布， μ_2 为半圆分布。在图 *1* 中，左侧图块展示半径为 $r_A = 0.95$的蓝色圆，中央图块展示该圆经与 μ_1相关的 *Joukowski* 变换所得的像，右侧图块则展示这条曲线（椭圆）经柯西变换 G_{μ_1}所得的像。左侧图中的红色圆是单位圆。在图 *2* 中，我们对 μ_2也进行了相同的处理。这些示例中，表达式 (5) 所用的离散化点数为 $N = 400$ 。

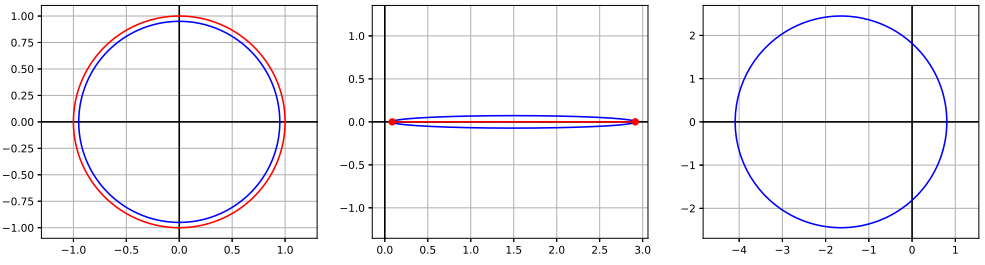

图 1：计算与马尔琴科-帕斯图尔分布中参数为 $\lambda = 0.5$ 、半径为$r_A = 0.95$ 的圆相对应的椭圆的柯西变换（见例 3.3）。

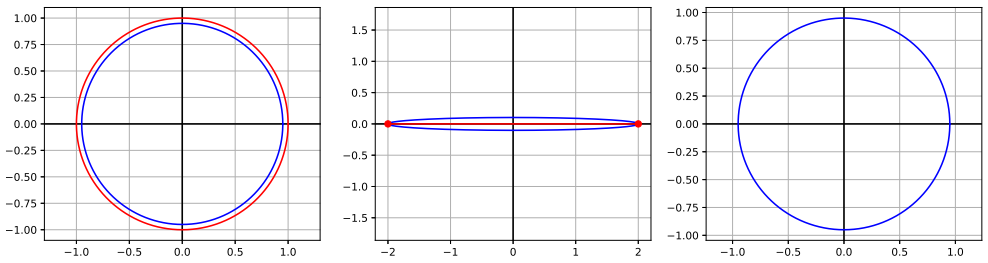

图 2：半圆分布对应的、半径为$r_A = 0.95$ 的圆所关联椭圆的柯西变换计算（见例 3.3）。

3.2 步骤 2：计算自由和的支撑集

定理 3.2 的第二点清楚地刻画了 $\mu = \mu_1 \boxplus \mu_2$ 的支撑集；我们使用了来自 [8] 的一个结果。注意，

$$g'(w) = \frac{1}{G'_{\mu_1}(G^{-1}_{\mu_1}(w))} + \frac{1}{G'_{\mu_2}(G^{-1}_{\mu_2}(w))} + \frac{1}{w^2}$$

因此，当 w 同时位于 Γ_1 和 Γ_2内部时，可以利用 (6) 和 (5) 对其进行数值近似。在我们的算法中，我们使用二分法，在区间 $((1-\varepsilon)\max\{c^{(1)}_{N/2}, c^{(2)}_{N/2}\}, 0)$ 内数值求出 $g'(w)$的一个零点，并在区间 $(0, (1-\varepsilon)\min\{c^{(1)}_0, c^{(2)}_0\})$ 内求出另一个零点。这里需要参数 ε，因为当 w非常接近 Γ_1 或 Γ_2时，计算会变得不稳定；关于这一问题的进一步说明，请参见第 5 节。当区间长度小于固定容差时，我们便停止二分搜索。我们将数值求得的零点记为 ξ_a 和 ξ_b 。接着，我们计算 $a \approx g(\xi_a)$和 $b \approx g(\xi_b)$，它们（除数值误差外）即为 $\mu = \mu_1 \boxplus \mu_2$支撑集的极值。

3.3 步骤 3：计算 μ 的柯西变换

我们算法的下一步是寻找一个半径为 r_B 的圆，使其完全包含在 $G_\mu(\mathbb{C} \cup \{\infty\} \backslash [a,b])$ 中。我们希望 r_B 尽可能大，原因将在第 5 节中说明。r_B 的上界是包含在 Γ_1 与 Γ_2 的交集内的最大圆的半径。给定该交集内的一个点 w，定理 3.2 中的判据可以让我们检查 w 是否属于 G_μ 的像。因此，我们可以对半径执行二分搜索，找到合适的 r_B 值。

考虑曲线 $\Gamma := g(r_B\partial\mathbb{D}) = G^{-1}_\mu(r_B\partial\mathbb{D})$。利用 G_μ 的解析性，对于位于 Γ 内部的点 z，我们可以根据柯西积分公式写出 $G_\mu(z)$。

$$G_\mu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{G_\mu(s)}{s-z}\mathrm{d}s = \frac{r_B^2}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{g'(r_B v)v}{g(r_B v) - z}\mathrm{d}v.$$

其中第二个等式是由 Γ 在 $v \in \partial\mathbb{D}$下以 $s = G^{-1}_\mu(r_B v)$ 参数化得到的。该积分的梯形求积公式为

$$G_\mu(z) \approx \frac{r_B^2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \frac{g'(r_B\xi_N^j)\xi_N^{2j}}{g(r_B\xi_N^j) - z}. \tag{7}$$

现在，我们选取一个半径为 r_C 且包含在 $J^-_{[a,b]}(\Gamma)$ 内部的圆，并在点 $r_C\xi_M^j$（$j=0$，1，...，M）上对 $\mathcal{G}(v) = G(J_{[a,b]}(v))$ 进行数值计算。我们将通过求积公式 (7) 得到的值记为 h_0、h_1、...、h_M。下一节将利用这些值来恢复测度 μ 的近似值。

例 *3.4*。在图 *3* 中，我们在中间图块中展示了数值计算得到的 a 和 b 的极值（红点），即 $\mu = \mu_1 \boxplus \mu_2$ 的支撑集的极值，其中 μ_1 和 μ_2 分别是参数为 $\lambda = 0.5$ 的 *Marchenko-Pastur* 分布和例 *3.3* 中的半圆分布。右侧图块中以橙色绘出了半径为 r_B 的圆。Γ 是中间图块中的橙色曲线，左侧图块中的橙色曲线是 $J^-_{[a,b]}(\Gamma)$。半径为 r_C 的圆在左侧图块中以绿色绘出，其经由 $J_{[a,b]}$ 的像是中间图块中的绿色椭圆，经由 $\mathcal{G}_\mu$ 的像是右侧图块中的绿色曲线。

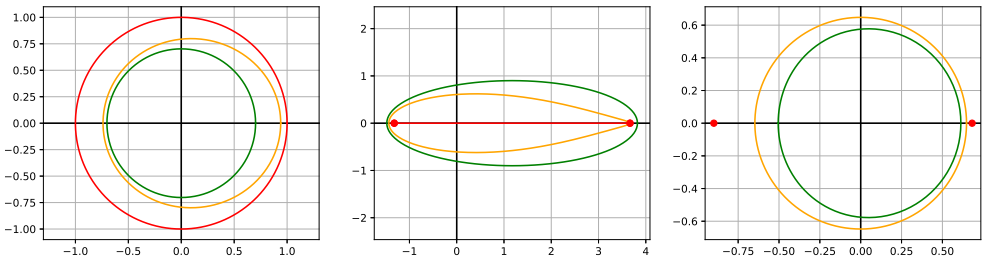

图 3：所提出的自由加法卷积算法的步骤 3 示意图，见例 3.4。

3.4 步骤 4：从 μ 的柯西变换恢复其密度

根据算法的上一步，我们得到了在半径为 $r_C < 1$ 的圆上 M 个等间距点处的 $\mathcal{G}_\mu$ 的（近似）值。如果将幂级数 (1) 截断为前 M 项，我们可以得到关系式

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_\mu(r_C\xi_M^0) \\ \mathcal{G}_\mu(r_C\xi_M^1) \\ \vdots \\ \mathcal{G}_\mu(r_C\xi_M^{M-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_M^0 & & & \\ & \xi_M^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_M^{M-1} \end{bmatrix} \cdot F \cdot \begin{bmatrix} g_1 r_C \\ g_2 r_C^2 \\ \vdots \\ g_M r_C^M \end{bmatrix}, \tag{8}$$

其中 F 是大小为 $M \times M$ 的傅里叶矩阵。因此，我们可以对近似左侧的向量 $[h_0, h_1, \ldots, h_{M-1}]^T$ 执行快速傅里叶逆变换，然后将第 j 个元素除以 r_C^j，从而恢复（近似的）系数 $g_1, \ldots, g_M$，其中 $j = 1, \ldots, M$。请注意，当 r_C^j 非常小时，我们无法期望幂级数中对应的系数在数值上准确。因此，我们将级数截断为前 m 项，其中 $m < M$。现在，利用定理 A.1，我们对密度 $\mathrm{d}\mu(x) = f(x)\mathrm{d}x$ 作如下近似：

$$f\left(J_{[a,b]}(\exp(i\theta))\right) \approx -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left(\sum_{j=1}^{m} g_j \exp(ij\theta)\right),$$

它可以简洁地写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} f\left(J_{[a,b]}(\xi_m^0)\right) \\ f\left(J_{[a,b]}(\xi_m^1)\right) \\ \vdots \\ f\left(J_{[a,b]}(\xi_m^{m-1})\right) \end{bmatrix} \approx -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} \xi_m^0 & & & \\ & \xi_m^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_m^{m-1} \end{bmatrix} \cdot F \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}\right). \tag{9}$$

通过在向量 $\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_m \end{bmatrix}^T$ 中补零，我们可以得到 μ 在任意点数下的离散化。

我们指出，从理论上讲，只有当对应于$\mathcal{G}_\mu$ 的幂级数也在单位圆上收敛时，(9)才有意义。当 μ在边界处具有平方根行为，且其密度在非零处为解析函数时，这一条件便成立。虽然定理 3.2 仅指出 $\mu = \mu_1 \boxplus \mu_2$ 在边界处具有平方根行为，但根据 [1, 定理 2.2 和引理 2.7] ，在温和的假设条件下， μ 也具有解析性。

例 3.5。 在图 *4* 中，我们在右侧区域绘制了根据例 *3.3* 和例 *3.4* 中的输入测度得到的$\mu_1 \boxplus \mu_2$ 的密度近似值，并将其与输入测度的密度进行了比较。在左侧区域，我们将得到的 $\mathrm{d}\mu(x)$ 近似值与一个 5000×5000 矩阵的经验特征值分布进行了比较，该矩阵由两个按照例 *2.2* 和例 *2.3* 采样的随机矩阵求和得到。

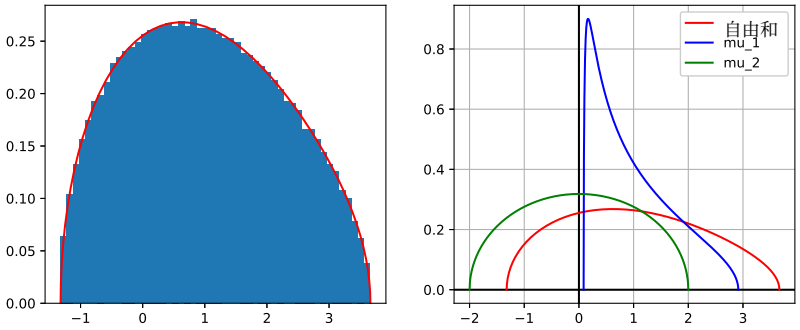

图 4：所提出的自由加法卷积算法步骤 4 示意图，参见例 3.5。

注 3.6 (与 [8]的比较)。 *</style}* *[8]* 这项工作也提出了一种计算测度自由卷积的算法。对于 *[8],* 中的平方根行为情形，该算法会显式计算柯西变换的逆。然而，我们通过柯西积分定理的方法，可以计算任意紧支撑测度的 *R* 变换，而不仅限于边界处具有平方根行为的测度。考虑这一点是合理的，因为测度 μ_2 在边界处可能不具有平方根行为。此外，我们在步骤 *3* 中沿$\mathcal{G}_\mu$ 圆周进行计算的方法，简化了 *[8]* 中从柯西变换的逆求出所得测度的方法。

算法 1 两个测度的自由和计算要求：测度 μ_1 和 μ_2、求积点数量 N、傅里叶系数数量 m、容差 ε、半径 r_A、容差 tol。可选：柯西变换、逆柯西变换、柯西变换的导数，可针对一个或两个测度提供。确保：测度 μ 的密度的离散化：$= \mu_1 \boxplus \mu_2$。1: % 步骤 1：为两个输入测度设置 R 变换的计算2: for $k = 1$, 2 do3: if μ_k 的（逆）柯西变换未知 then4: 使用 (5) 计算方程 (6) 中出现的 $d_j^{(k)}$, $J'_{[a_k,b_k]}(\xi_N^j)$ $c_j^{(k)}$ 的值。5: end if6: end for7: % 步骤 2：寻找 μ的支撑集8: 找到 $\xi_a \in (\max\{\mathcal{G}_{\mu_1}(-r_A+\varepsilon)\ \mathcal{G}_{\mu_2}(-r_A+\varepsilon)\}, 0)$, 使得 $g'(\xi_a) = 0$ ($g(z)$，根据 (2))。9: 找到 $\xi_b \in (0, \min\{\mathcal{G}_{\mu_1}(r_A-\varepsilon)\ \mathcal{G}_{\mu_2}(r_A-\varepsilon)\})$，使得 $g'(\xi_b) = 0$ ($g(z)$，根据 (2))。10: μ的支撑集为 $[a,b] := [g(\xi_a)\ g(\xi_b)]$。11: % 步骤 3：计算 μ的柯西变换12: 通过对半径进行二分搜索，找到 $G_\mu(\mathbb{C}\cup\{\infty\}\backslash[a,b])$内部一个尽可能大的圆，并使用定理 3.2 检查该圆是否位于所需区域内。将其半径记为 r_B，并令 $\Gamma := g(r_B\partial\mathbb{D})$。13: 令 r_C 略小于内接于 $J^-_{[a,b]}(\Gamma)$的最大圆的半径。14: 使用柯西积分定理和梯形求积公式 (7)，在半径为 r_C的圆上均匀分布的 $M = \max\{100, \left\lceil 16 \log_{1/r_C} 10 \right\rceil\}$ 个点处计算 $\mathcal{G}_\mu$。15: % 步骤 4：恢复 μ的密度16: 通过快速傅里叶逆变换 (8)，近似计算 $\mathcal{G}_\mu(z)$的幂级数的前 m 个系数。17: 根据 (9) 返回 μ 的密度近似值。

4 自由乘法卷积算法

自由乘法卷积的情形与加法情形非常相似，因此我们将略去细节。我们针对满足以下一组假设的两个输入测度 μ_1 和 μ_2 提出一种算法。

假设 4.1。我们假设 μ_1 和 μ_2 满足以下性质 .

- 它们具有紧支撑 $[a_1,b_1]$ 和 $[a_2,b_2]$，其中 a_1，b_1，a_2，$b_2 > 0$。
- μ_1 和 μ_2 在边界处具有平方根行为。
- *T* 变换 T_{μ_1} 和 T_{μ_2} 在其定义域上是可逆的。

在这些假设下（其限制比假设 3.1 更严格），一个类似于定理 3.2 的定理成立。证明见附录 B。

定理 4.2. 在假设 *4.1* 下，定义

$$t(w) := \frac{w}{1+w} T_1^{-1}(w) T_2^{-1}(w), \tag{10}$$

它在零的邻域内与 $T_\mu^{-1}(w)$ 一致。则以下性质成立。

- $\mu := \mu_1 \boxtimes \mu_2$ 在边界处具有平方根行为。

- μ 的支撑集包含在区间中

$$[a,b] := [t(\xi_a), t(\xi_b)],$$

其中 ξ_a 和 ξ_b 分别是导数 t' 在区间 $(\max(T_1(a_1)\ T_2(a_2)),0)$ 和 $(0,\min(T_1(b_1)\ T_2(b_2)))$ 内的唯一零点。

- 检查一下 w 点是否在 $T_{\mu_1 \boxtimes \mu_2}$ 的像中，我们可以使用以下判据 :

$$w \in T_{\mu_1 \boxplus \mu_2}(\mathbb{C} \backslash [a,b]) \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(t(w))) = -\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(w)).$$

总之，该算法仍然分为四个步骤:

1. 设置对 μ_1 和 μ_2 计算 S变换。
2. 计算 μ 的支撑集
3. 在一组合适的点上计算 μ 的 T变换。
4. 根据 μ 的 T变换恢复其密度。

步骤 1. 按照第 3.1 节中的相同步骤，我们可以通过将定义 T 的积分改写为沿单位圆的积分，再使用梯形求积法则对其离散化，从而求得 $T(z)$ 的近似值:

$$T(z) \approx \frac{\pi}{N} \sum_{k=0}^{N}{}'' \frac{b-a}{2} \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \frac{f\left(\frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)+\frac{b+a}{2}\right)}{z-\left(\frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)+\frac{b+a}{2}\right)}.$$

为了能够计算 S变换（或 T变换的逆变换），我们需要一条可应用柯西积分定理的围道。在我们的算法中，我们在半径为 $r_A < 1$（接近 1）的圆上，以等间距的 N 个点计算 $\mathcal{T}_{\mu_1}$ 和 $\mathcal{T}_{\mu_2}$。同样，我们也可以在这些相同的点计算 T变换的导数。将这些近似值记为

$$c_j^{(k)} \approx T_k(J_{[a_k,b_k]}(\xi_N^j)), \qquad d_j^{(k)} \approx T_k'(J_{[a_k,b_k]}(\xi_N^j)) \tag{11}$$

对于 $j = 0,\ 1,\ .....,\ N$，以及对于 $k = 1,\ 2$。

由于 S变换在零的邻域内解析，对于曲线 $\Gamma_1 = \mathcal{T}_{\mu_1}(r_A \partial\mathbb{D})$ 内部的任意 z，我们都可以写出柯西积分公式（对 Γ_2 的处理过程类似）：

$$S_{\mu_1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{S_{\mu_1}(s)}{w-s} \mathrm{d}s.$$

使用 Γ_1 的参数化，将半径为 r_A 的圆以 N 个等距点离散化，并采用梯形求积公式，我们得到一个公式，用于近似任意位于 Γ_1 内部的 $S_{\mu_1}(w)$（因此也可近似 $T_{\mu_1}^{-1}(w)$）：

$$S_{\mu_1}(w) \approx \frac{r_A}{N} \sum_{j=1}^{N}{}'' \frac{\xi_N^j d_j^{(1)} J'_{[a_1,b_1]}(r_A \xi_N^j)(1+c_j^{(1)})}{c_j^{(1)} J_{[a_1,b_1]}(r_A \xi_N^j)(w-c_j^{(1)})}, \qquad T_{\mu_1}^{-1}(w) = \frac{1+w}{w \cdot S_{\mu_1}(w)}.$$

算法 2 两个测度的自由积的计算

要求： 测度 μ_1 和 μ_2，求积点数量 N，傅里叶系数数量 m，容差-ance ε，半径 r_A，容差 tol。可选：T 变换、S变换、T-变换的导数，for 一个或两个测度。

确保： 测度 μ 的密度离散化：$= \mu_1 \boxtimes \mu_2$。

1: %步骤 *1*：设置两个测度的 *S*变换计算。
2: **对于** $k = 1, 2$ **do**
3: **如果** μ_k 的（逆）S变换未知，**则**
4: 计算 $d_j^{(k)}$ 、J' 的值 $_{[a_k,b_k]}(\xi_N^j)$ $c_j^{(k)}$ 出现在方程 (11) 中。
5: **结束 if**
6: **结束循环**
7: %步骤 *2*：计算 μ 的支撑集
8: 求满足 $t'(\xi_a) = 0$ ($t(z)$（根据公式 (10)）的 $\xi_a \in (\max\{\mathcal{T}_{\mu_1}(-r_A + \varepsilon)\ \mathcal{T}_{\mu_2}(-r_A + \varepsilon)\}, 0)$。
9: 求满足 $t'(\xi_b) = 0$ ($t(z)$（根据公式 (10)）的 $\xi_b \in (0, \min\{\mathcal{T}_{\mu_1}(r_A - \varepsilon)\ \mathcal{T}_{\mu_2}(r_A - \varepsilon)\})$
10: μ 的支撑集为 $[a, b] := [t(\xi_a)\ t(\xi_b)]$。
11: %步骤 *3*：计算 μ 的 *T*变换
12: 通过对半径进行二分搜索，在 $T_\mu(\mathbb{C} \cup \{\infty\} \backslash [a, b])$ 内寻找一个圆（尽可能大），使用定理 4.2 中的判据来检查该圆是否位于所需区域内。令 r_B 为所选圆的半径，并令 $\Gamma := t(r_B \partial\mathbb{D})$ 为所选圆经 t 映射得到的像。
13: 令 r_C 略小于内接于 J^- 的最大圆的半径 $_{[a,b]}(\Gamma)$
14: 在 $M = \max\{100, $ 上计算 $\mathcal{T}_\mu$ $|16\log_{1/r_C} 10|\}$ 个圆上的等距点，该圆的半径为 r_C，它略小于内接于 Γ 的最大圆，使用柯西积分公式 $+$ 梯形求积公式（12）。
15: %步骤 *4*：根据 μ 的 *T*变换恢复其密度。
16: 通过快速傅里叶逆变换（8）近似计算 $\mathcal{T}(z)$ 的幂级数的前 m 个系数。
17: 根据（13）返回 μ 的密度近似值。

步骤 2。能够计算 $T_{\mu_1}^{-1}$和 $T_{\mu_2}^{-1}$，我们可以使用定理 4.2（通过二分法）找到 μ 的支撑集 $[a, b]$: $= \mu_1 \boxtimes \mu_2$

步骤 3. 定理 4.2 还给出了一个判据，可用于找到一个半径为 r_B 、且位于 T_μ 的像内的圆。与第 3.3 节类似，现在我们可以使用柯西积分公式，在 $T_\mu^{-1}(r_B \partial\mathbb{D})$ 内的任意一点计算 T_μ 。通过梯形求积公式进行离散化后，得到

$$T_\mu(z) \approx \frac{r_B^2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(J_{[a,b]}^-)'(t(r_B \xi_N^j)) t'(r_B \xi_N^j) \xi_N^{2j}}{J_{[a,b]}^-(t(r_B \xi_N^j)) - z}. \tag{12}$$

我们使用该公 式来近似计算包含在 $\mathcal{T}_\mu^{-1}(r_B \partial\mathbb{D}$ 内、半径为 r_C 的圆上的 $\mathcal{T}_\mu(z)$).

步骤 4. 根据 T_μ 的近似值，我们利用 (8) 得到 $\mathcal{T}_\mu(v) \approx \sum_{j=1}^m t_j v^j$ 的截断级数表示（将 $\mathcal{G}$ 替换为 $\mathcal{T}$ 时，该式同样成立）。最后，我们根据以下关系恢复测度μ ：

$$\begin{bmatrix} f\left(J_{[a,b]}(\xi_m^0)\right) J_{[a,b]}(\xi_m^0) \\ f\left(J_{[a,b]}(\xi_m^1)\right) J_{[a,b]}(\xi_m^1) \\ \vdots \\ f\left(J_{[a,b]}(\xi_m^{m-1}) J_{[a,b]}(\xi_m^{m-1})\right) \end{bmatrix} \approx -\frac{1}{\pi} \mathrm{Im} \left(\begin{bmatrix} \xi_m^0 & & & \\ & \xi_m^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_m^{m-1} \end{bmatrix} \cdot F \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} \right). \tag{13}$$

自由乘法卷积的所提出方法总结于算法 2 中。

5 自由卷积的误差分析

本节的讨论重点是自由加法卷积；自由乘法卷积的证明完全相同。我们的目标是解释所提出的算法中每个步骤存在的误差来源，以及在对测度 μ_1 和 μ_2 以及算法 1 中涉及的其他参数作出适当假设的情况下，如何对这些误差进行界定。

对于我们的分析而言，一个众所周知的重要事实是：当被积函数在复平面的某个适当区域内是解析函数时，梯形求积公式具有指数收敛速度 [2]。我们回顾一下 [13] 中给出的这一结果的一个版本。

定理 5.1（解析函数梯形求积公式的指数收敛性）。 假设 u 在复平面的某个环域 $\rho^{-1} < |s| < \rho$ 内是解析的，并满足 $|u(s)| \le C$，其中某个$\rho > 1$。令 $N > 1$，并考虑积分 $I := \int_{\partial\mathbb{D}} u(s)\,\mathrm{d}s$ 的近似值 I_N，该近似值使用单位圆上的 N 个等距求积点和梯形求积公式计算。那么

$$|I_N - I| \le \frac{4\pi C}{\rho^N - 1}.$$

这立即推出了关于具有边界处平方根行为的测度的柯西变换计算误差的以下结论。

推论 5.2。 设 μ 为一个在边界处具有平方根衰减行为的测度，并进一步假设函数 $\psi(J_{[a,b]}(v))$（来自定义 *2.1*）在单位圆周围的环域 $\mathcal{A}_{\rho_0} = \{\rho_0^{-1} < |v| < \rho_0\}$ 内是解析的。设 $z \in \mathbb{C}\backslash[a,b]$，并令 c 为通过具有 N 个节点的梯形求积公式 (5) 得到的 $G(z)$ 的近似值。那么，对于任意 $\rho < \min(\rho_0, |J^+_{[a,b]}(z)|)$，我们有

$$|G(z) - c| \le \frac{4\pi}{\rho^N - 1} \cdot \|\psi \circ J_{[a,b]}\|_{\mathcal{A}_\rho} \frac{(b-a)^2}{8} \rho \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{dist}(z, J_{[a,b]}(\mathcal{A}_\rho))},$$

其中 $\|\psi \circ J_{[a,b]}\|_{\mathcal{A}_\rho}$ 表示函数 $\psi \circ J_{[a,b]}$ 在集合 $\mathcal{A}$上的最大模。 ρ.

证明。 如果 μ 在边界处具有平方根行为，我们可以进一步变换表达式 (4)，得到

$$\begin{aligned} G(z) &= -\frac{i(b-a)^2}{4} \int_0^\pi \sin^2(\theta) \frac{\psi\left(\frac{b-a}{2}\cos(\theta) + \frac{b+a}{2}\right)}{z - \left(\frac{b-a}{2}\cos(\theta) + \frac{b+a}{2}\right)} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\frac{i(b-a)^2}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \frac{\psi\left(\frac{b-a}{2}\cos(\theta) + \frac{b+a}{2}\right)}{z - \left(\frac{b-a}{2}\cos(\theta) + \frac{b+a}{2}\right)} \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

这里，第二个等号利用了 $\sin^2\theta$ 和 $\cos\theta$ 的对称性。将变量换回 $v = \exp(i\theta)$，我们得到

$$G(z) = -\frac{1}{2} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{(b-a)^2}{4} \frac{1}{v} \left(v - \frac{1}{v}\right)^2 \frac{\psi(J_{[a,b]}(v))}{z - J_{[a,b]}(v)} \mathrm{d}v, \tag{14}$$

沿逆时针方向与 $\partial\mathbb{D}$ 一起。使用具有 $2N$ 个等距点的梯形求积公式对积分 (14) 进行离散化，等价于在 $[-\pi, 0]$ 中使用梯形求积公式，在 $N+1$ 个等距求积点处对 (4) 进行离散化。考虑函数

$$u(v) := -\frac{1}{2} \frac{(b-a)^2}{4} \frac{1}{v} \left(v - \frac{1}{v}\right)^2 \frac{\psi(J_{[a,b]}(v))}{z - J_{[a,b]}(v)}$$

该函数在计算柯西变换时出现。注意，$\frac{1}{v}\left(v-\frac{1}{v}\right)^2$ 在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 中是解析的，而 $\frac{1}{z-J_{a,b}(v)}$ 在环域 $|J^-_{[a,b]}(z)| < |v| < |J^+_{[a,b]}(z)|$ 中是解析的。因此，该推论的陈述由定理 5.1 得出。

□

导数 $G'(z)$ 的结果可以用类似的方法得到。

在我们的算法中，对于半径为 $r_A < 1$ 的圆经 Joukowski 变换所得曲线上的点，我们使用近似值 (5)，因此在这种情况下 $\rho = \min(\rho_0, r_A^{-1})$。这意味着，$r_A$ 越接近 1，收敛速度就越慢。请注意，式 (5) 也可用于在边界处不具有平方根行为的测度。不过，我们无法保证梯形求积公式能够快速收敛。

定理 *5.3*（*R* 变换计算中的误差）。设 μ 是一个支撑集位于 $[a,b]$ 上的测度，并设 w 是曲线 $\Gamma = G(r\partial\mathbb{D})$ 内部的一个点，其中某个 $r \in$ 满足 *(0, 1)*，且 G 在半径为 r 的圆盘内可逆。令 $\rho < \min\{r^{-1}, \mathrm{dist}(\mathcal{G}^{-1}(w)\ r\partial\mathbb{D})\}$。令 $\xi_N = \exp(2\pi i/N)$。假设我们已计算出近似值 $c_j \approx \mathcal{G}(r\xi_N^j)$ 和 $d_j \approx G'(J(r\xi_N^j))$，使得 $|\mathcal{G}(r\xi_N^j) - c_j| \le \varepsilon$ 且 $|G'(J(r\xi_N^j)) - d_j| \le \varepsilon$。令 $m_1 = \min\{\|\mathcal{G}\|_\Gamma, c_0, \ldots, c_{N-1}\}$。令 m_2 为 w 到 Γ 的距离。我们用梯形求积公式 *(6)* 对积分 *(3)* 进行离散化

$$R(w) \approx \frac{r}{N}\sum_{j=1}^{N} \xi_N^j \cdot d_j \cdot J'(\xi_N^j) \cdot \frac{J(\xi_N^j) - 1/c_j}{c_j - w} =: R_N(w).$$

Then

$$\begin{aligned} |R_N(w) - R(w)| \le{}& \frac{4\pi}{\rho^N - 1} \max_{\rho^{-1}\le|v|\le\rho} |u(v)| \\ &+ \varepsilon r \|J'\|_{r\partial\mathbb{D}} \left(\frac{\|J\|_{r\partial\mathbb{D}}}{m_2} + \frac{1}{m_1 m_2} + (\varepsilon + \|G'\|_{J(r\partial\mathbb{D})}) \frac{1}{m_2^2} \left(\|J\|_{r\partial\mathbb{D}} + \frac{|w|}{m_1^2} + \frac{2}{m_1} \right) \right). \quad (15) \end{aligned}$$

证明。 非正式地说，误差有两个来源：

- 求积误差——由于 R 变换是解析的，可以应用定理 5.1；
- 待积分函数无法精确求值这一事实——每个点也都需要进行求积。

更准确地说，根据三角不等式，我们有

$$\begin{aligned} |R(w) - R_N(w)| \le{}& \left| \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R(s)}{w-s} - \frac{r}{N}\sum_{j=1}^{N} \xi_N^j \cdot G'(J(r\xi_N^j)) \cdot J'(\xi_N^j) \cdot \frac{J(r\xi_N^j) - 1/\tilde{G}(r\xi_N^j)}{\tilde{G}(r\xi_N^j) - w} \right| \\ &+ \frac{r}{N}\sum_{j=1}^{N} |\xi_N^j J'(r\xi_N^j)| \cdot \left| d_j \frac{J(r\xi_N^j) - 1/c_j}{c_j - w} - G'(J(r\xi_N^j)) \frac{J(r\xi_N^j) - 1/\mathcal{G}(r\xi_N^j)}{\mathcal{G}(r\xi_N^j) - w} \right|. \end{aligned}$$

我们可以直接利用定理 5.1，将第一项界定为 $\frac{4\pi}{\rho^N - 1}\max\{|u(v)| :\ \rho^{-1} \le |v| \le \rho\}$，其中 $u(v)$ 是待积分的函数，定义见 (3)。接下来分析第二部分求和中的各项。为简化记号，我们省略函数对 $r\xi_N^j$ 的依赖，并

记 $J(r\xi_N^j) = J_j$， $G'(J(r\xi_N^j)) = G'_j$， $\mathcal{G}(r\xi_N^j) = \mathcal{G}_j$。我们有

$$\left| d_j \frac{J_j - 1/c_j}{c_j - w} - G'_j \frac{J_j - 1/\mathcal{G}_j}{\mathcal{G}_j - w} \right| \le |G'_j - d_j| \cdot \left| \frac{J_j - 1/\mathcal{G}_j}{\mathcal{G}_j - w} \right| + |d_j| \cdot \left| \frac{J_j - 1/c_j}{c_j - w} - \frac{J_j - 1/\mathcal{G}_j}{\mathcal{G}_j - w} \right|$$
$$= |G'_j - d_j| \cdot \left| \frac{J_j - 1/\mathcal{G}_j}{\mathcal{G}_j - w} \right| + |d_j| \cdot \left| \frac{J_j(\mathcal{G}_j - c_j) + w(1/c_j - 1/\mathcal{G}_j) + (c_j/\mathcal{G}_j - \mathcal{G}_j c_j)}{(c_j - w)(\mathcal{G}_j - w)} \right|.$$

我们可以对各项进行界定，得到 $|G'_j - d_j| \cdot \left| \frac{J_j - 1/\mathcal{G}_j}{\mathcal{G}_j - w} \right| \le \frac{\varepsilon}{m_2} \left(\|J\|_{r\partial\mathbb{D}} + \frac{1}{m_1} \right)$，

$|1/c_j - 1/\mathcal{G}_j| = \left| \frac{\mathcal{G}_j - c_j}{c_j \mathcal{G}_j} \right| \le \frac{\varepsilon}{m_1^2}$, $|c_j/\mathcal{G}_j - \mathcal{G}_j/c_j| \le \frac{2\varepsilon}{m_1}$, $|(c_j - w)(\mathcal{G}_j - w)| \ge m_2^2$，因此得到 (15)。 □

定理（5.3）基本上表明，在 R 变换的计算中，求积误差会随着求积点数量的增加而呈指数级下降，并且由对 G 和 G' 进行非精确计算所产生的误差不会被显著放大。请注意，该结果不需要假设 μ 在边界处具有平方根行为。

备注 *5.4*（计算 $\mu_1 \boxplus \mu_2$ 支撑集时的误差）。我们用 $g'_N(w)$ 表示采用 N 个求积点计算所有相关求积规则后得到的函数 $g'(w)$ 的近似。当 $N \to \infty$ 时，函数 $g'_N(w)$ 是全纯的，并且在区间 $(\max\{\mathcal{G}_{\mu_1}(-r_A + \varepsilon)\ \mathcal{G}_{\mu_2}(-r_A + \varepsilon)\}, 0)$ 和 $(0, \min\{\mathcal{G}_{\mu_1}(r_A - \varepsilon)\ \mathcal{G}_{\mu_2}(r_A - \varepsilon)\})$ 的紧子集上一致收敛到$g'(w)$。由 *Hurwitz*定理可知，当 N 足够大时，函数 $g'_N(w)$ 在上述每个区间内恰有一个单零点，且这些零点收敛到 $g'(w)$ 的零点 ξ_a, ξ_b。因此，当求积点数量足够多时，计算得到的 μ 支撑集 $[a, b]$ 的值是准确的。

到目前为止所述内容意味着，我们能够准确计算 μ_1 和 μ_2的 R 变换，以及 $\mu = \mu_1 \boxplus \mu_2$ 的支撑集。算法 1 的下一步是在半径为 $r_C \in (0, 1)$ 的适当圆上计算 $\mathcal{G}_\mu(v)$（见第 14 行）。

注 5.5（计算 $\mu_1 \boxplus \mu_2$ 的柯西变换时的误差）。令 $r = r_C$，下面讨论计算 $\mathcal{G}(v)$ 时的误差来源。记 $\widetilde{g}_j$， $\widetilde{g}'_j$ 为通过数值求积得到的 $g(r\xi_N^j)$ 和 $g'(r\xi_N^j)$ 的近似值。对于第 *3.3* 节定义的曲线 $J^-_{[a,b]}(\Gamma)$ 内部的任意~点 v，令 $\widetilde{a}$， b为 μ支撑集极值的近似值，则由 (7) 得到的 $\mathcal{G}(v)$ 的近似值为

$$\widetilde{\mathcal{G}}_v := \frac{r^2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\widetilde{g}'_j \xi_N^{2j}}{\widetilde{g}_j - J_{[\widetilde{a},\widetilde{b}]}(v)}.$$

~根据三角不等式，我们可以将误差 $|\mathcal{G}(v) - \mathcal{G}_v|$ 分为三个来源：

$$|\mathcal{G}(v) - \widetilde{\mathcal{G}}_v| \le \left| G(J_{[a,b]}(v)) - G(J_{[\widetilde{a},\widetilde{b}]}(v)) \right| + \left| G(J_{[\widetilde{a},\widetilde{b}]}(v)) - \frac{r^2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{g'(r\xi_N^j)\xi_N^{2j}}{g(r\xi_N^j) - J_{[\widetilde{a},\widetilde{b}]}(v)} \right|$$
$$+ \frac{r^2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left| \frac{g'(r\xi_N^j)}{g(r\xi_N^j) - J_{[\widetilde{a},\widetilde{b}]}(v)} - \frac{\widetilde{g}'_j}{\widetilde{g}_j - J_{[\widetilde{a},\widetilde{b}]}(v)} \right|.$$

我们不打算对这一步进行完整的误差分析，但会简要讨论上述误差界中的~三项。若 $[\widetilde{a}, b]$ 准确，第一项预计会很小。

第二项，即梯形求积公式产生的误差，可由定理 *5.1* 界定，因为被积函数（柯西变换 G）在$\partial\mathbb{D}$周围的环域内解析；因此，这一部分会随着求积点 N数量的增加而指数快速减小。最后，如果我们知道$\widetilde{g}_j$，$\widetilde{g}'_j$，$\widetilde{a}$，b均已准确计算，则第三项可按照定理 *5.3* 中的方法类似地界定。

算法的最后一部分是根据圆周半径为 $r = r_C$ 上等距点处柯西变换 $G = G_\mu$ 的（近似）值，恢复测度 $\mu = \mu_1 \boxplus \mu_2$ 的密度。

定理 *5.6*（计算 $\mathcal{G}$ 的系数时的误差）。设 μ 是一个在边界处具有平方根行为的测度，其支撑集为 $[a,b]$，密度为 $d\mu(x) = \sqrt{b-x}\sqrt{x-a}\psi(x)dx$，其中 $\psi(x)$ 是利普希茨连续的。假设有一个向量 $\begin{bmatrix}\widetilde{\mathcal{G}}_0 & \widetilde{\mathcal{G}}_1 & \cdots & \widetilde{\mathcal{G}}_{M-1}\end{bmatrix}^T$，它逐项近似向量$\begin{bmatrix}\mathcal{G}(r\xi_M^0) & \mathcal{G}(r\xi_M^1) & \cdots & \mathcal{G}(r\xi_M^{M-1})\end{bmatrix}^T$，误差不超过 ε，其中某个$M \in \mathbb{N}$和某个 $r < 1$ 满足 $|\widetilde{\mathcal{G}}_j - \mathcal{G}(r\xi_M^j)| \le \varepsilon$，对 $j = 0, 1, \ldots, M-1$ 均成立。令

$$\begin{bmatrix}\widetilde{g}_1\\ \widetilde{g}_2\\ \vdots\\ \widetilde{g}_M\end{bmatrix} := \begin{bmatrix}r^{-1} & & & \\ & r^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & r^{-M}\end{bmatrix} F^{-1} \begin{bmatrix}\xi_M^{-0} & & & \\ & \xi_M^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_M^{-M+1}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\widetilde{\mathcal{G}}_0\\ \widetilde{\mathcal{G}}_1\\ \vdots\\ \widetilde{\mathcal{G}}_{M-1}\end{bmatrix}.$$

Then

$$\left\| \begin{bmatrix}\widetilde{g}_1\\ \widetilde{g}_2\\ \vdots\\ \widetilde{g}_M\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}g_1\\ g_2\\ \vdots\\ g_M\end{bmatrix} \right\| \le \begin{bmatrix}r^{-1}\\ r^{-2}\\ \vdots\\ r^{-M}\end{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\sqrt{M}} + \frac{r^M}{1-r^M}\|\psi\|_{[a,b]} \begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix},$$

其中，符号 $|\cdot|$ 表示该不等式逐项成立，而 $g_1,\ldots,g_M$ 是级数展开(1)的精确系数。

证明。 首先，我们可以写成

$$\begin{bmatrix}\mathcal{G}(r\xi_M^0)\\ \mathcal{G}(r\xi_M^1)\\ \cdots\\ \mathcal{G}(r\xi_M^{M-1})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\xi_M^0 & & & \\ & \xi_M^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_M^{M-1}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}F & F & F & \cdots\end{bmatrix} \begin{bmatrix}g_1 r\\ g_2 r^2\\ g_3 r^3\\ \vdots\end{bmatrix},$$

其中我们有一个无限矩阵和一个无限向量（由于级数绝对收敛，这样写是可以的）。利用三角不等式（逐项地），我们有

$$\left\| \begin{bmatrix}\widetilde{g}_1\\ \widetilde{g}_2\\ \vdots\\ \widetilde{g}_M\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}g_1\\ g_2\\ \vdots\\ g_M\end{bmatrix} \right\| \le \left| \begin{bmatrix}r^{-1} & & & \\ & r^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & r^{-M}\end{bmatrix} F^{-1} \begin{bmatrix}\xi_M^{-0} & & & \\ & \xi_M^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_M^{-M+1}\end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix}\widetilde{\mathcal{G}}_0\\ \widetilde{\mathcal{G}}_1\\ \vdots\\ \widetilde{\mathcal{G}}_{M-1}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mathcal{G}(r\xi_M^0)\\ \mathcal{G}(r\xi_M^1)\\ \vdots\\ \mathcal{G}(r\xi_M^{M-1})\end{bmatrix} \right) \right|$$

$$+ \left| \begin{bmatrix}r^{-1} & & & \\ & r^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & r^{-M}\end{bmatrix} F^{-1} \begin{bmatrix}\xi_N^{-0} & & & \\ & \xi_M^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_M^{-M+1}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\xi_M^0 & & & \\ & \xi_M^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_M^{M-1}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}F & F & F & \cdots\end{bmatrix} \begin{bmatrix}g_1 r\\ g_2 r^2\\ g_3 r^3\\ \vdots\\ \vdots\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}g_1\\ g_2\\ \vdots\\ g_M\end{bmatrix} \right|.$$

第一项的上界为

$$\left|\begin{bmatrix} r^{-1} & & & \\ & r^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & r^{-M} \end{bmatrix} \cdot \left\| F^{-1} \begin{bmatrix} \xi_M^{-0} & & & \\ & \xi_M^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_M^{-M+1} \end{bmatrix} \right\|_2 \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{bmatrix}\right| \leq \begin{bmatrix} r^{-1} \\ r^{-2} \\ \vdots \\ r^{-M} \end{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}$$

因为 F^{-1} 的范数为 $1/\sqrt{M}$，且所有 ξ_M^{-j} 的模都为 1。第二项可化简为

$$\left|\begin{bmatrix} g_{M+1}r^M + g_{2M+1}r^{2M} + g_{3M+1}r^{3M} + \dots \\ g_{M+2}r^M + g_{2M+2}r^{2M} + g_{3M+2}r^{3M} + \dots \\ \vdots \\ g_{2M}r^M + g_{3M}r^{2M} + g_{4M}r^{3M} + \dots \end{bmatrix}\right| \leq \frac{r^M}{1-r^M} \left(\max_{k \geq M+1} |g_k| \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

由于它与 $\mathcal{G}$ 的切比雪夫级数展开有关（参见注 2.9），所有系数 g_k 的模都不超过 $\|\psi\|_{[a,b]}$，由此完成了该定理的证明。 □

定理 5.6 告诉我们，当 ε/r^j 很大时，不能指望对 g_j 的近似值是可靠的。这就是我们只保留级数系数的前几个近似值的原因。我们还需要确保 $r^M = r_C^M$ 很小，这样第二个误差项才会很小（不过这点不太难处理）：因此，在代码中，我们设置 $M = \max\left\{100, \left\lvert 16 \log_{1/r_C} 10 \right\rvert\right\}$。

注 5.7（恢复 $\mu_1 \boxplus \mu_2$ 的密度时的误差）。记 $\begin{bmatrix} \widetilde{f}_0 & \cdots & \widetilde{f}_{m-1} \end{bmatrix}^T$ 为将向量 $\begin{bmatrix} \widetilde{g}_1 & \cdots & \widetilde{g}_m \end{bmatrix}^T$ 代入（9）后得到的近似值。利用三角不等式以及 F 在一个 $\sqrt{m}$ 缩放因子意义下为酉矩阵这一事实，可得

$$\begin{aligned} \left|\begin{bmatrix} f\left(J_{[a,b]}(\xi_m^0)\right) \\ f\left(J_{[a,b]}(\xi_m^1)\right) \\ \vdots \\ f\left(J_{[a,b]}(\xi_m^{m-1})\right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widetilde{f}_0 \\ \widetilde{f}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{f}_{m-1} \end{bmatrix}\right| &\leq \frac{\sqrt{m}}{\pi} \left|\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widetilde{g}_1 \\ \widetilde{g}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{g}_m \end{bmatrix}\right| \\ &+ \left|\begin{bmatrix} f\left(J_{[a,b]}(\xi_m^0)\right) \\ f\left(J_{[a,b]}(\xi_m^1)\right) \\ \vdots \\ f\left(J_{[a,b]}(\xi_m^{m-1})\right) \end{bmatrix} + \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} \xi_m^0 & & & \\ & \xi_m^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_m^{m-1} \end{bmatrix} \cdot F \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} \right)\right|. \end{aligned}$$

第一项误差可用定理 *5.6* 进行界定。第二项误差取决于级数(1) 收敛到 $\mathcal{G}_\mu(v)$的速度，而这又取决于与 μ 相关的密度函数的正则性（见注 *2.9*）。

6 数值实验

6.1 柯西变换逐点求值的梯形求积公式的指数收敛

首先，我们考虑在半圆分布、均匀分布（其中 $m = 3$）和马尔琴科-帕斯图尔分布（其中 $\lambda = 0.7$）的支撑集之外的一些点处计算柯西变换。

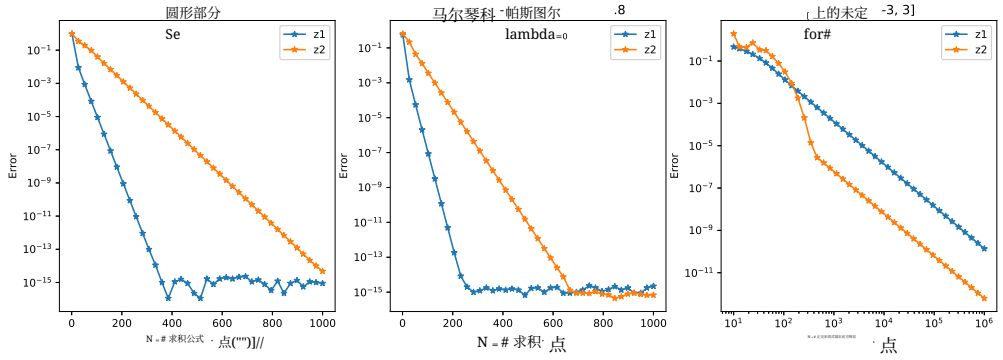

图5：对半圆分布（左）、参数为 0.8 的马尔琴科-帕斯图尔分布（中）以及 $[-3,3]$ 上的均匀分布（右）的点 $z_1 = 1.001 \cdot b$和 $z_2 = (0.8 + 0.01i) \cdot b$进行柯西变换的计算。x 轴表示求积点的数量，y 轴表示梯形求积公式的误差。

结果如图5所示。对于每个测度，我们分别考察点 $z_1 = 1.001 \cdot b$（蓝色）和 $z_2 = (0.8 + 0.01i) \cdot b$（橙色）。x 轴表示求积点的数量，y 轴表示梯形求积公式的误差。不出所料，半圆分布和马尔琴科-帕斯图尔分布的误差呈指数级下降。均匀分布则并非如此（注意此处的图为双对数图）。

6.2 从柯西变换恢复测度

我们通过以下方式对根据柯西变换在圆上的（精确）$\mathcal{G}(z)$知识恢复谱测度 μ进行数值测试：在半径为 $R = 0.9$ 的圆上取来自等距点的 $N = 3000$ 个点，并使用幂级数（1）中的 $m = 40$ 个系数。结果如图6所示。正如预期，我们能够非常准确地恢复边界处具有平方根行为的测度。

6.3 分布的自由加法卷积和乘法卷积

在本节中，我们在各种输入测度上测试算法 1。在某些情况下，我们知道自由和的支撑集的解析形式，或自由和本身的解析形式。这使我们能够通过一些示例测试算法的准确性。在其他情况下，我们将算法返回的近似密度与两个随机矩阵之和的经验特征值分布进行比较，这两个随机矩阵根据输入分布选取。

如何阅读这些图。 下面说明各图中所绘制的内容。第一（顶部）行的图块对应测度 μ_1，第二行的图块对应 μ_2，第三行的图块对应自由卷积 $\mu_1 \boxplus \mu_2$。从第一（左侧）列到第二（中间）列通过 Joukowski 变换，从第二列到第三（右侧）列通过柯西变换/T变换。左侧列中的红色圆始终是单位圆。第二列中的红色线表示相应测度的支撑集。(1,3) 图块（右上图块）中的蓝色曲线是 Γ_1，而 (2,3) 图块（上方中间图块）中的蓝色曲线是 Γ_2。这些曲线也显示在 (4,3) 图块中，并附有一个橙色圆

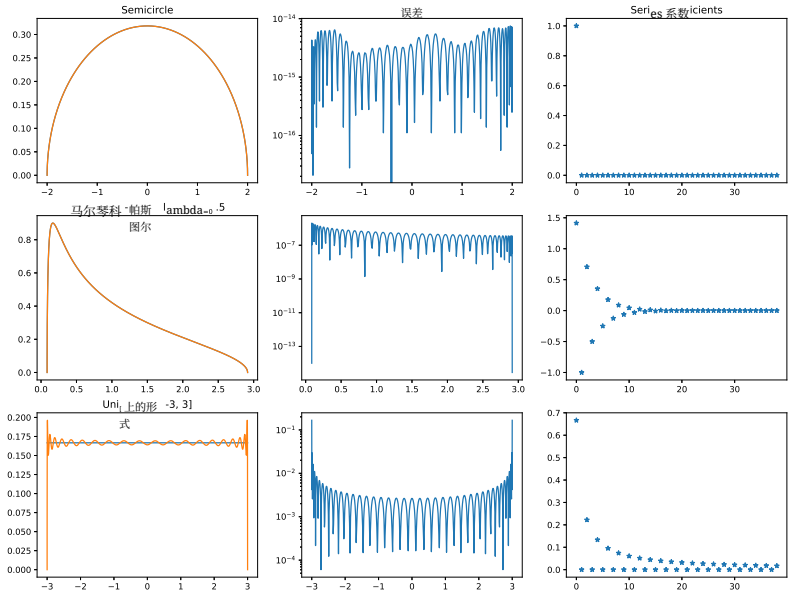

图6：利用柯西变换的40个傅里叶系数恢复测度。从上到下，我们依次考虑半圆分布、参数为$\lambda = 0.5$的Marchenko-Pastur定律，以及区间$[-3, 3]$上的均匀分布。在左侧区块列中，蓝色曲线表示密度函数，橙色曲线表示测度的重构结果。在中间区块列中，我们绘制逐点误差$|f(x) - \{(x)|$。右侧区块列展示近似系数$g_1, g_2, \ldots, g_{10}$的大小。

，该圆位于两条曲线的交集内，且在$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \backslash [a, b]$的像内。同一个橙色圆也绘制在 (1,3)、(2,3) 和 (3,3) 图块中，而通过G_1、G_2、G得到的逆像分别绘制在 (1,2)、(2,2) 和 (3,2) 图块中。最后，圆$\mathcal{A}$在 (3,1) 图块中以绿色表示，其经J再经G/T得到的像也在 (3,2) 和 (3,3) 图块中以绿色表示。在 (4,2) 图块中，我们绘制测度μ_1、μ_2和μ的密度。在 (4,1) 图块中，我们（通常）绘制一个大小为5000×5000的随机矩阵实例的特征值分布，该矩阵由具有极限特征值分布μ_1和μ_2的矩阵求和/相乘得到。

实现细节。除非另有说明，我们为算法 1 设置以下参数：

- 为了计算某一点处的柯西变换，对于边界处具有平方根行为的测度（半圆分布、马尔琴科-帕斯图尔分布），我们使用 400 个求积点；对于其他测度，则使用 4000 个求积点。

- 我们使用 400 个求积点对积分进行离散化，这些积分对应于计算μ_1和μ_2的 R 变换以及μ的柯西变换所需的柯西积分公式。

• 半径为 r_C 的圆上的点数选为 $\max\left\{100, \left\lfloor 16\log_{1/r_C} 10 \right\rfloor\right\}$（这是为了确保定理 5.6 中误差的第二项可以忽略）。然后，我们将级数截断为前 $m = 20$ 项。

• 我们选择一个参数 $\varepsilon = 0.05$，用来量化所取曲线和区间“离边界有多远”。具体来说：

– 我们设定 $r_A = 1 - \varepsilon$；– 在算法 1 的第 8–9 行中使用 ε 的这个值；– 在寻找内部最大圆的半径时

$$G_{\mu_1}(\mathbb{C}\cup\{\infty\}\backslash[a_1,b_1]) \cap G_{\mu_2}(\mathbb{C}\cup\{\infty\}\backslash[a_2,b_2]) \cap G_{\mu}(\mathbb{C}\cup\{\infty\}\backslash[a,b])$$

我们从半径为 $(1-\varepsilon)r$ 的圆开始，其中 r 是内接于 $G_{\mu_1}(\mathbb{C}\cup\{\infty\}\backslash[a_1,b_1]) \cap G_{\mu_2}(\mathbb{C}\cup\{\infty\}\backslash[a_2,b_2])$ 的最大圆的半径；
– 在选择半径 r_C 时，我们将内接于 $J^{-}_{[a,b]}(\Gamma)$ 的最大圆的半径乘以 $(1-\varepsilon)$。

• 计算 μ 支撑集时，二分搜索的停止容差设为 10^{-12}。计算 r_B 时，二分搜索的停止容差为 10^{-3}。

对于算法 1，我们在代码的相应部分使用相同的参数值。

代码可用性。算法 1 和算法 2 的 Python 实现可在 https://github.com/Alice9 找到
以及用于复现本文所有数值示例的脚本。

例6.1。在图 *7* 中，我们计算两个半圆分布的自由加法卷积。其结果在解析上已知，是一个经过缩放的半圆分布，其支撑集为 $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$，密度函数为 $f(x) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{8-x^2}$。我们的算法能够以 10^{-14} 的精度计算自由加法卷积。在这个例子中，我们只使用了级数(1)的 $m = 10$ 个系数。

例6.2。在图 *8* 中，我们计算半圆分布与区间 $[-4, 4]$ 上的均匀分布的自由加法卷积。在这种情况下，我们不知道解的解析形式，但可以计算自由和的支撑集，其为

$$\left[-\frac{1}{4}\log\left(4+\sqrt{17}\right) - \sqrt{17}, \frac{1}{4}\log\left(4+\sqrt{17}\right) + \sqrt{17}\right].$$

我们数值计算得到的支撑集与理论结果一致，绝对误差不超过 $3.6\cdot 10^{-6}$。均匀分布在边界处没有平方根行为；因此，用于计算柯西变换的梯形求积公式收敛较慢。为此，本例中我们使用 4000 个求积点。请注意，由于柯西变换的解析表达式已知，我们本可以直接使用该表达式，但我们希望观察在不了解这一信息的情况下算法的表现。

例 6.3。图 *9* 中，我们考察区间 $[-2, 2]$ 上的均匀分布与参数为 $\lambda = 0.7$ 的 *Marchenko-Pastur* 分布的自由加法卷积。

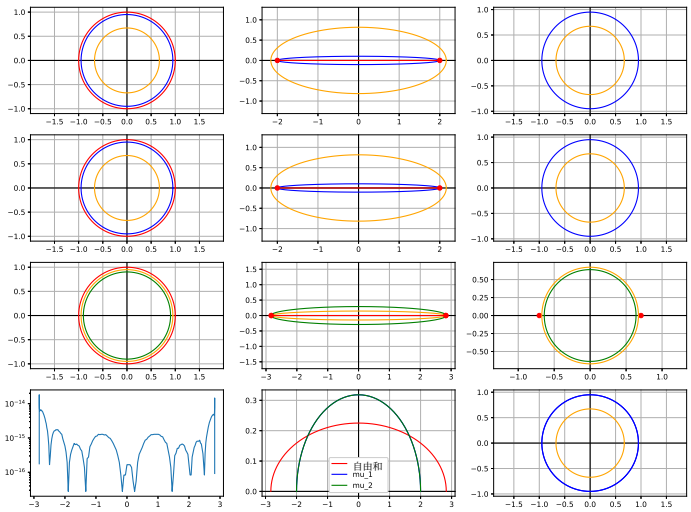

图 7：半圆与半圆的自由和。仅使用 400 个求积点。(4, 2) 子图显示了计算得到的自由和的误差。精确说明见例6.1。

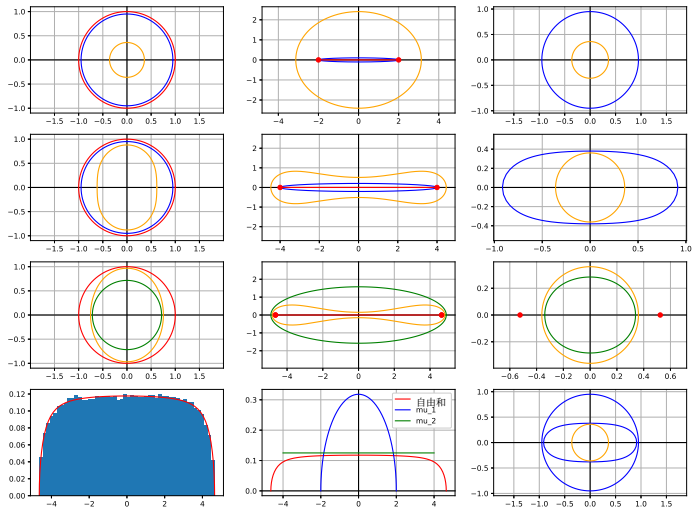

图 8：半圆与 $[-4,4]$ 上均匀分布的自由和。见例6.2。

例 6.4。 图 *10* 中，我们考察支撑集为 $[1,5]$（而非 $[-2,2]$）的平移半圆分布与参数为$\lambda = 0.2$的 *Marchenko-Pastur* 分布的自由乘法卷积。

例 6.5。 在图 *11* 中，我们考察两个相同的

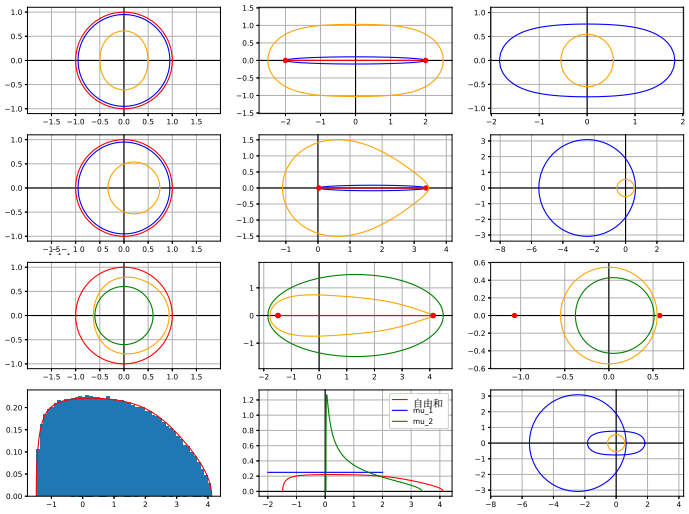

图 9： $[-2,2]$ 上均匀分布与马尔琴科-帕斯图尔（$\lambda = 0.7$）的自由和。参见例 6.3。

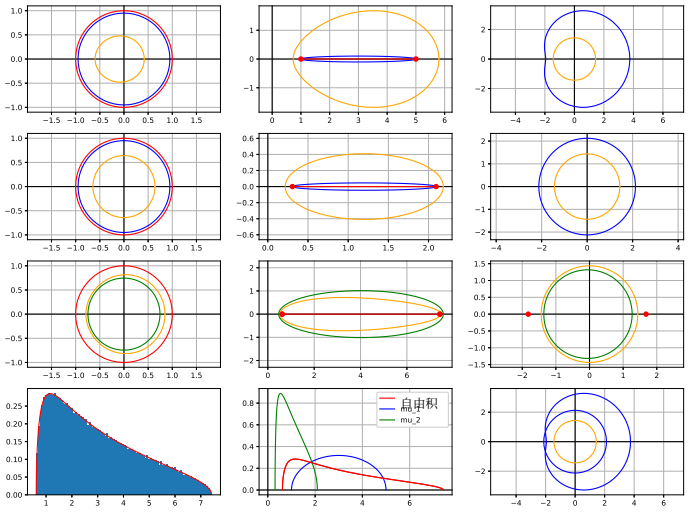

图 10：平移半圆分布与 Marchenko-Pastur 分布的自由乘法。参见例 6.4。

平移半圆分布的自由乘法卷积。

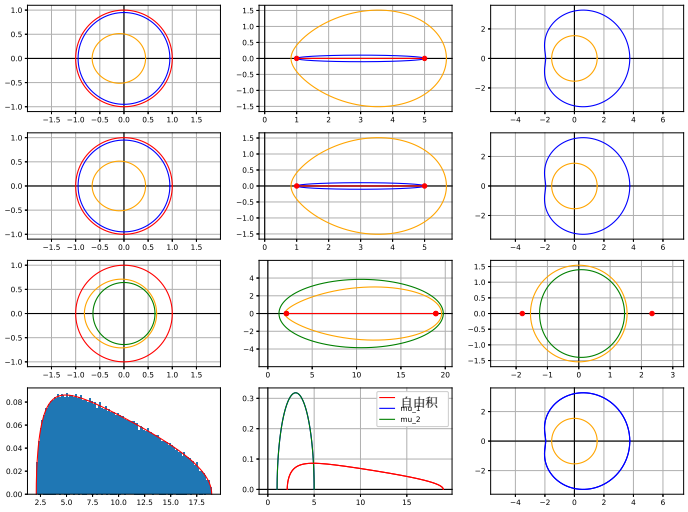

图 11：两个平移半圆分布的自由乘法。参见例 6.5。

6.4 我们算法的优势与局限性

上面的数值示例表明，算法 1 和算法 2 在各种情况下都能很好地近似测度的自由卷积。在下面的四个示例中，我们将展示，即使输入测度不满足定理 3.2 的假设，我们的算法仍然能够提供有价值的洞见。

例6.6。 在图*12*中，我们考虑区间 $[-1,1]$ 上的均匀分布与区间 $[-2,2]$ 上的均匀分布的自由加法卷积。这种组合不属于我们算法的理论适用范围，但它们的自由加法卷积在边界处具有平方根行为（参见例如 *[1]*）。

例6.7。 在图*13*中，我们考虑 *Marchenko-Pastur* 分布与区间 $[1,3]$ 上的均匀分布的自由乘法卷积，其中 $\lambda = 0.1$。

例6.8。 在图*14*中，我们考虑半圆分布与分布 μ_2 的自由卷积，该分布的支撑集为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$，其密度为

$$\mathrm{d}\mu_2(x) = \frac{5\sqrt{3}}{144}(x^2+1)^2.$$

它具有以下性质：$G'_{\mu_2}(i) = G'_{\mu_2}(-i) = 0$（并且在边界处不具有平方根行为），因此其柯西变换不可逆。通过 $\mathcal{G}_{\mu_2}$ 映射半径为 r_A 的蓝色圆所得的像是一条具有两个自交点的曲线。只要我们考虑曲线内部的一点，这并不妨碍应用柯西积分公式。这个例子的缺点是，我们需要 r_B ——橙色圆的半径——非常小，这意味着我们需要将对应于 $\mathcal{G}_{\mu_1 \boxplus \mu_2}$ 的幂级数截断为前几项。

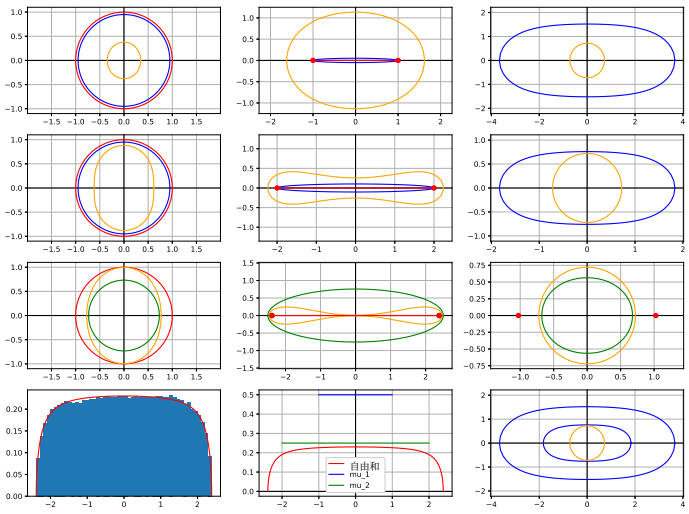

图12： $[-1,1]$ 和 $[-2,2]$上的均匀分布的自由和。参见例6.6。

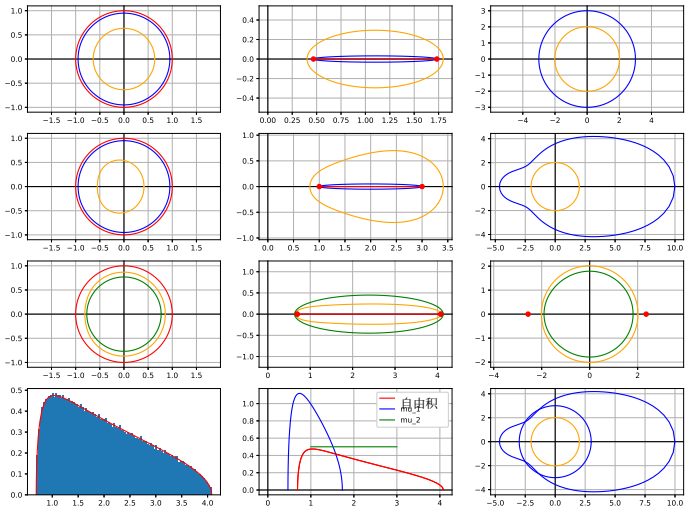

图13：马尔琴科-帕斯图尔分布与均匀分布的自由乘法。参见例6.7。

我们得到的数值近似结果与一个对称随机矩阵和一个特征值取自该奇异分布样本的随机矩阵之和的特征值直方图高度一致。在这个例子中，我们使用了 4000 个求积点，对 μ 的柯西变换积分进行离散化。

尽管该理论无法扩展到这种情况，我们也可以考虑具有以下特征的测度：

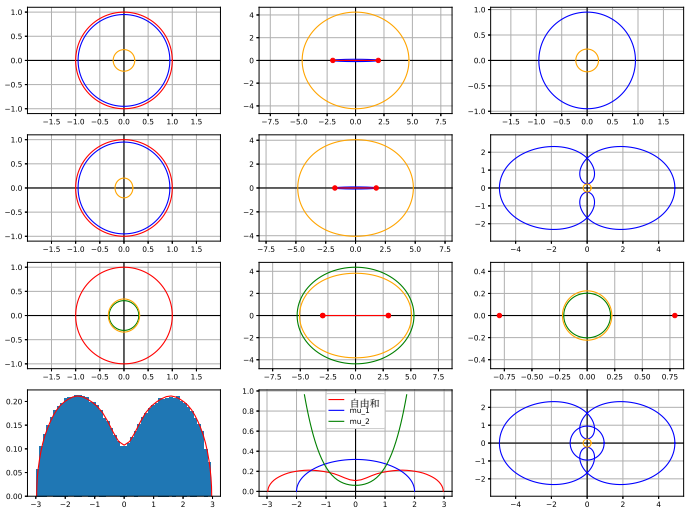

图 14：半圆分布与例6.8中的分布的自由和，其中 $m = 20$。

原子。对于点测度，可以很容易地显式写出其柯西变换（当原子数量超过两个时，该变换不可逆）。在我们的代码中，我们对柯西变换中对应于原子的部分使用显式表达式，而对其余部分使用求积法。当考虑具有边界处平方根行为的测度与离散测度的自由卷积 μ 时， μ 的支撑集可能会分裂成两个或更多互不相连的部分；当不 出现这种情况时，我们的算法便能够成功地近似 μ 的密度，如下一个示例所示。

例6.9。 在图*15*中，我们考察平移半圆分布与离散测度的自由乘法卷积，该离散测度在点 $\frac{1}{7}1$, $\frac{3}{2}2, 2, \frac{5}{2}2, 3, \frac{7}{2}2, 4$处的质量为。在这种情况下，*T*变换很容易直接计算，因此我们在算法的这部分不使用梯形求积公式。

我们对算法中参数（r_A 和 ε）的选择提出警示。一方面，当 r_A 与 1（相对）相距较远且 ε （相对）较大时，在两个区间 $(\max\{\mathcal{G}_{\mu_1}(-r_A+\varepsilon)\ \mathcal{G}_{\mu_2}(-r_A+\varepsilon)\}, 0)$ 和 $(0, \min\{\mathcal{G}_{\mu_1}(r_A-\varepsilon)\ \mathcal{G}_{\mu_2}(r_A-\varepsilon)\})$ 上用于计算 $g(z)$ 的梯形求积公式收敛很快，因此求积点数量 N 可以较少。另一方面，定理 3.2 保证了在较大的区间 $(\max(G_{\mu_1}(a_1)\ G_{\mu_2}(a_2)), 0)$ 和 $(0, \min(G_{\mu_1}(b_1)\ G_{\mu_2}(b_2)))$ 内存在 g' 的一个零点。因此，轻松选取 r_A 和 ε 可能意味着我们无法成功找到 μ 的支撑集。在我们的实现中，遇到这种情况时会给出警告，然后继续选择 $\xi_a = \max\{\mathcal{G}_{\mu_1}(-r_A+\varepsilon)\ \mathcal{G}_{\mu_2}(-r_A+\varepsilon)\}$ 或 $\xi_b = \min\{\mathcal{G}_{\mu_1}(r_A-\varepsilon)\ \mathcal{G}_{\mu_2}(r_A-\varepsilon)\}$，这样仍能得到视觉效果良好的结果，见下一个例子。

例6.10. 我们考虑半圆分布与区间 $[-10, 10]$ 上的均匀分布的自由加法卷积。我们可以通过解析方法计算结果的支撑集，其结果为 $[-10.3497, 10.3497]$。 $\varepsilon = 0.05$ 的选择还不够小，因此无法让我们找到

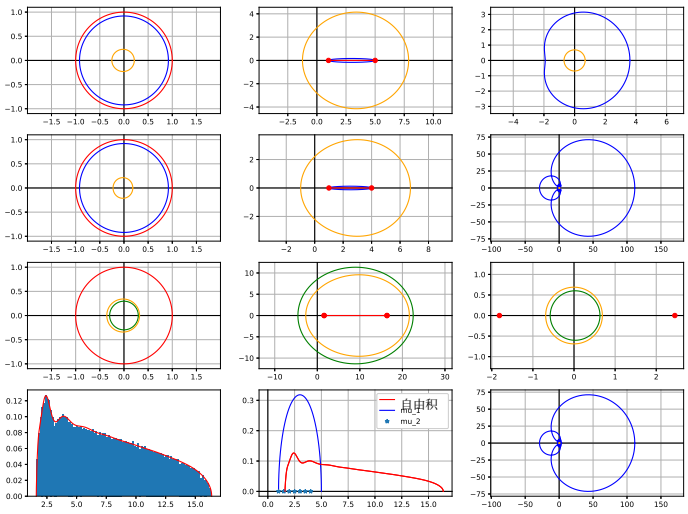

图 15：平移半圆分布与离散分布的自由乘法。参见例 6.9。

如 (z) 所定义的 g 的导数的零点。选择较小的值 $\varepsilon = 0.02$ 可得到准确的近似；请参见图*16*。

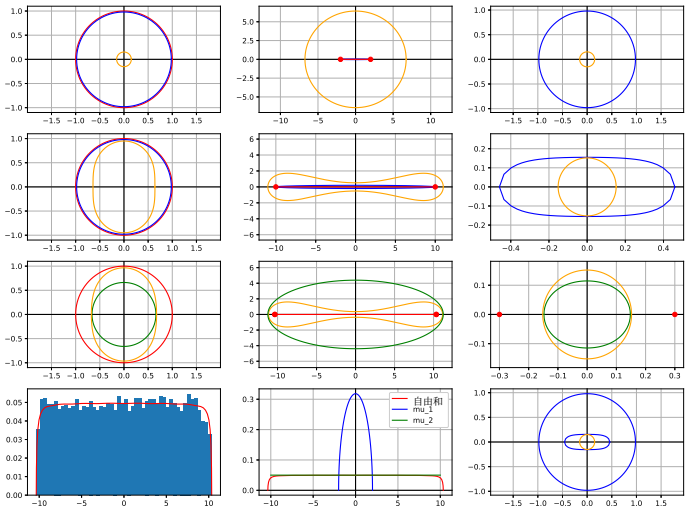

图16： $[-20, 20]$ 上半圆分布与均匀分布的自由加法。参见例6.10。

7 结论

本文提出了一种算法，可近似计算由两个具有紧支撑的测度经过自由（加法或乘法）卷积后所得测度的密度，该密度在边界处具有平方根行为。我们的方法采用数值求积，增加求积点的数量后，精度会迅速提高。

我们提出了三个可能的后续研究方向。首先，可以寻找更一般的假设，使定理 3.2 中的策略能够计算 μ 的支撑集；或者在定理 3.2 的限制较少的假设下证明定理 4.2。事实上，数值实验似乎表明，算法 2 在更一般的假设下同样有效：其中一个输入测度在边界处具有平方根行为，另一个则是更一般的 Jacobi测度。其次，若能将该方法推广到支撑集位于多个区间上的情形，将会很有意义；例如，考虑半圆分布或马尔琴科-帕斯图尔分布与离散测度的自由卷积时便会遇到这种情况。最后，值得探究这种方法能否推广到算子值自由概率理论（例如，参见 [6]），因为这将使自由加法卷积算法得以扩展为一个计算自由随机变量有理函数的算法。

致谢。 作者谨向 Emmanuel Candès、Jorge Garza Vargas 和 Iain Johnstone 致谢，感谢他们就这项工作展开了富有启发性的讨论。

A 第 2 节结果的证明

定理 2.7 的证明。 给定 $z \in \mathbb{C}\backslash[a,b]$，我们将证明 G 在 z 的某个邻域内存在级数展开。考虑满足以下条件的点 $w \in \mathbb{C}$：

$$|z-w| < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(z,[a,b]). \tag{16}$$

那么，对于所有 $z \in [a,b]$，都有 $|w-z|/|x-z| < \frac{1}{2}$。因此，级数 $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{w-z}{x-z}\right)^n$ 在邻域 (16) 内均匀收敛到 $\frac{x-z}{x-w}$。重新排列各项后，我们得到：

$$(w-x)^{-1} = -\sum_{n\geq 0}(x-z)^{-n-1}(w-z)^n.$$

因此，根据 Fubini–Tonelli 定理，我们可以在柯西变换的定义中交换求和与积分，从而得到：

$$G(z) = \sum_{n\geq 0}\left[-\int_a^b (x-z)^{-(n+1)}\mathrm{d}\mu(x)\right](w-z)^n$$

对于邻域 (16) 内的所有 w，均有此结论。这证明了 G 在 $\mathbb{C}\backslash[a,b]$ 上是解析的。

为了证明 G 在 ∞ 处是解析的，我们需要证明 $g(z) := G\left(\frac{1}{z}\right)$ 在零点处是解析的。我们已知，

$$g(z) = \int_a^b \frac{z}{1-zx}\mathrm{d}\mu(x).$$

级数 $z\cdot\sum_{n\geq 0}(zx)^n$ 在 $|z|<\frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{|a|},\frac{1}{|b|}\right\}$ 上一致收敛于 $\frac{z}{1-zx}$（约定 $\frac{1}{0}=+\infty$）。因此，我们可以交换求和与积分的顺序，从而得到

$$g(z)=\sum_{n\geq 1}\left(\int_a^b x^{n-1}\mathrm{d}\mu(x)\right)z^n=z+\sum_{n\geq 2}\left(\int_a^b x^{n-1}\mathrm{d}\mu(x)\right)z^n$$

在 $|z|<\frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{|a|},\frac{1}{|b|}\right\}$ 的区域内，这证明 G 在 $z=\infty$ 中也是解析的。 □

推论 2.12 的证明直接由以下定理得出，该定理是定理 2.11 的一个略微推广。

定理 A.1. 设 $\mathrm{d}\mu(x)=f(x)\mathrm{d}x$，其中函数 f 连续。对于任意 $c<d\in(a,b)$，有

$$-\frac{1}{\pi}\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}^+}}\int_c^d \mathrm{Im}\left(G(t+z)\right)\mathrm{d}t=\mu([c,d]).$$

证明。 记 $z=\varepsilon+iy$，其中 $\varepsilon\in\mathbb{R}$ 和 $y\in\mathbb{R}^+$。有

$$\mathrm{Im}(G(t+z))=\int_a^b \mathrm{Im}\left(\frac{1}{t+\varepsilon-x+iy}\right)\mathrm{d}\mu(x)=\int_a^b\frac{-y}{(t+\varepsilon-x)^2+y^2}\mathrm{d}\mu(x).$$

根据 Fubini–Tonelli 定理，我们可以写成

$$\begin{aligned}\int_c^d \mathrm{Im}(G(t+z))\mathrm{d}t&=\int_a^b\left(\int_c^d-\frac{y}{(t+\varepsilon-x)^2+y^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\mu(x)\\&=-\int_a^b\left(\int_{(c+\varepsilon-x)/y}^{(d+\varepsilon-x)/y}\frac{1}{1+\sqcup^2}\mathrm{d}\sqcup\right)\mathrm{d}\mu(x)\\&=-\int_a^b\left(\arctan\left(\frac{d+\varepsilon-x}{y}\right)-\arctan\left(\frac{c+\varepsilon-x}{y}\right)\right)\mathrm{d}\mu(x),\end{aligned}$$

其中我们进行了变量替换 $\sqcup=\frac{t+\varepsilon-x}{y}$。现在考虑函数 $F((\varepsilon,y)\ x):=$反正切 $\left(\frac{d+\varepsilon-x}{y}\right)-$反正切 $\left(\frac{c+\varepsilon-x}{y}\right)$。有 $|F((\varepsilon,y)\ x)|\leq 2\pi$，并且 $F((\varepsilon,y)\ x)\to_{(\varepsilon,y)\to(0,0^+)}\mathcal{F}(x)$，其中

$$\mathcal{F}(x)=\begin{cases}0 & \text{if } x\notin[c,d];\\ \pi & \text{if } x\in(c,d),\end{cases}$$

对所有 x，除 $x\in\{c,d\}$ 外。函数 $\mathcal{F}$ 可测，并且它与几乎处处存在的逐点极限在 μ-几乎处处相等。因此，我们可以应用控制收敛定理。再结合 $\mathrm{d}\mu(\{c,d\})=0$ 这一事实，可得

$$\lim_{(\varepsilon,y)\to(0,0^+)}\int_c^d\mathrm{Im}(G(t+\varepsilon+iy))\mathrm{d}t=-\int_a^b\mathcal{F}(x)\mathrm{d}\mu(x)=-\pi\mu([c,d]).$$ □

定理 *2.14* 的证明。 [7] 的第 3 章定理 17 指出，如果支撑集包含于区间 $[-r,r]$，那么 $R(z)$ 在半径为 $\frac{1}{6r}$ 的圆盘内是解析的。现在回想函数 $G(z)$

在 $\mathbb{C}\backslash[a,b]$ 上是解析的；根据全纯函数的反函数定理（定理 B.1），只要 $G'(z) \neq 0$，它在点 $z \in \mathbb{C}\backslash[a,b]$ 的某个邻域内就可逆。我们有

$$G'(z) = -\int_a^b \frac{1}{(x-z)^2} \mathrm{d}\mu(x),$$

对于 $z \in \mathbb{R}\backslash[a,b]$，它始终非零，因此我们可以得出定理的第二部分。

□

B 定理 4.2 的证明

定理 B.1 (全纯函数的反函数定理 [4, 定理 7。5])。设 U 是 $\mathbb{C}$ 中的一个开集，设 $f\colon U \to \mathbb{C}$ 是全纯函数，且 $p \in U$ 满足 $f'(p) \neq 0$。那么存在 p 的一个开邻域 V，使得 $f\colon V \to f(V)$ 是一个双全纯映射。

推论：在定理 B.1 的假设下，如果 $f(p) \in \mathbb{R}$，那么存在且仅存在一条经过 p 的 V 曲线，在这条曲线上 f 为实值。

定理 *B.2*（复莫尔斯引理 [14]）。设 U 是 $\mathbb{C}$中的一个开集，$f : U \to \mathbb{C}$ 是一个全纯函数，并设 $p \in U$ 满足 $f'(p) = 0$ 且 $f''(p) \neq 0$ （即 f的一个非退化~临界点）。那么，存在 p 的邻域 U 和 0 的邻域 V，以及一个双射全纯函数 $\varphi : V \to \tilde{U}$，使得 $\varphi(0) = p$ 且 $f(\varphi(w)) = f(p) + w^2$。

推论：在定理 B.2 的假设下，若另有 $f(p) \in \mathbb{R}$，则存在恰好两条 经过 p 的曲线，在这些曲线上 f 为实值。这些曲线是 V 与 x 轴和 y 轴的交集经由 φ 映射所得的像。

引理 B.3. 设 μ 是在边界处具有平方根行为的测度。对于邻域 0 中的 z，有

$$T_\mu^{-1}(z) = \frac{1}{z}\mathbb{E}[X_\mu] + \textit{analytic function.}$$

证明。我们有，

$$\begin{aligned} T_\mu\left(\frac{1}{z}\right) &= \int_a^b \frac{x}{1/z - x}\mathrm{d}\mu(x) = \int_a^b \frac{zx}{1-zx}\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty}(zx)^n \mathrm{d}\mu(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \int_a^b x^n \mathrm{d}\mu(x) = z\mathbb{E}[X_\mu] + z^2 f(z), \end{aligned}$$

对于某个全纯函数 $f(z)$。第四个不等式由 Fubini–Tonelli 定理得到，因为该级数在零点的某个邻域内绝对收敛。现在，我们在 0 的某个邻域内对 $\varphi(z) := T_\mu\left(\frac{1}{z}\right)$ 应用反函数定理（定理 B.1），其中 $\varphi(0) = 0$ 且 $\varphi'(0) = \mathbb{E}[X_\mu] > 0$。由此可得，对于某个全纯函数 $\varphi(z)$，有 $\varphi^{-1}(z) = \frac{z}{\mathbb{E}[X_\mu]} + \tilde{\varphi}(z)$，因此

$$T_\mu^{-1}(z) = \frac{\mathbb{E}[X_\mu]}{z}\left(\frac{1}{1 + z\tilde{\varphi}(z)\mathbb{E}[X_\mu]}\right) = \frac{\mathbb{E}[X_\mu]}{z} + \frac{\tilde{\varphi}(z)}{1 + z\varphi(z)\mathbb{E}[X_\mu]},$$

其中函数 $\tilde{\varphi}(z)\ 1+z\varphi(z)\mathbb{E}[X_\mu]$ 在零的邻域内全纯。

□

命题 B.4. 假设 μ 满足假设 *4.1*。那么 $T_\mu([a,b])$ 是一条有界连续曲线。

证明。 加法情形 [8, 命题 A.8]也有类似结果；在 [8, 命题 A.8]的证明中，将所有积分里的 $\psi(x)$ 替换为 $x\psi(x)$，即可得到命题 B.4。

□

命题 B.5。 如果 μ 是一个在边界处具有平方根行为且支撑集为 $[a,b]$ 的测度，那么 T_μ^{-1}在 T_μ（a） 和 T_μ（b）的某个邻域内是解析的，且导数为零、二阶导数非零。

证明。 注意，对于适当的常数 c，有 $T_\mu(z) = cG_\nu(z) := \int_a^b x\mathrm{d}\mu(x) > 0$，并且存在适当的测度 ν，使得 $\mathrm{d}\nu(x) = \frac{1}{c}x\mathrm{d}\mu(x)$。如果 μ是一个在边界处具有平方根行为的测度，那么 ν也是如此。因此，我们可以将 [8, 命题 A.6] 应用于 ν，从而得到所述结果。 □

现在，我们可以参照加法情形 [8, 定理 2.2]的证明，按照类似步骤来证明定理 4.2。

定理 *4.2* 的证明。集合 $T_{\mu_1}(\mathbb{C}^-) \cap T_{\mu_2}(\mathbb{C}^-)$ 有界，且根据命题 B.4，它具有连续边界。设 ν 位于边界上，并且不失一般性地假设 $\nu \in \partial T_{\mu_1}(\mathbb{C}^-)$。这意味着 $T_{\mu_1}^{-1}(\nu) \in \mathbb{R}$。

断言 #1： $\mathcal{I}t(\nu) > 0$。

断言 #1 的证明： 由于 $T_{\mu_1}^{-1}(\nu) \in \mathbb{R}$，我们需要证明 $\mathcal{I}\begin{pmatrix} \nu T_{\mu_2}^{-1}\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right) \end{pmatrix} > 0$。函数 $f(y) := \frac{1}{y} + \frac{1}{yT_{\mu_2}(y)}$在 $y \in \mathbb{C}^-$ 上全纯（这是因为 T_{μ_2}在此处全纯且非零），因此函数 $f(y) := \mathcal{I}(f(y))$ 是调和的。~~若~~ 若 $y \notin [a,b]$，则有 $f(y) = 0$；若 $y \in \mathbb{R}\backslash[a,b]$，根据斯蒂尔切斯反演定理（定理 2.11），有

$$\lim_{\varepsilon \to 0^-} \mathcal{I}(T_{\mu_2}(y+\varepsilon I)) = \pi y \mathrm{d}\mu_2(y) > 0,$$

~因此 $f(y) \leq 0$。根据调和函数的模最大化性质，对于所有 $y \in \mathbb{C}^-$，都有 $\tilde{f}(y) < 0$。代入 $y = T_{\mu_2}^{-1}(\nu)$，得到 $\mathcal{I}\begin{pmatrix} 1+\nu \\ \nu T_{\mu_2}^{-1}(\nu) \end{pmatrix} < 0$，因此 $\mathcal{I}\begin{pmatrix} \nu T_{\mu_2}^{-1}\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right) \end{pmatrix} > 0$，从而证明了该结论。

根据引理 B.3，在零点的一个邻域内，

$$t(z) = \frac{z}{1+z}\frac{1}{z^2}\mathbb{E}[X_{\mu_1}]\mathbb{E}[X_{\mu_2}] + f(z) = \frac{C}{z} + f(z) \tag{17}$$

对于正实常数 C 和解析函数 $f(z)$，因此 $\mathcal{I}(t(z)) < 0$ 在零点的某个邻域内。由此可知，存在一点 $\zeta \in T_{\mu_1}^{-1}(\mathbb{C}^-) \cap T_{\mu_2}^{-1}(\mathbb{C}^-)$，使得在该点 $t(\zeta) \in \mathbb{R}$。根据定理 B.1 的推论，存在一条曲线 Γ，位于 $\mathbb{C}^-$ 中，在该曲线上 t 为实值函数。这条曲线不能与自身相交（否则我们将得到一个闭合回路，并且根据解析性，函数 t 将是常数），它是有界的，也不能接触复平面中的边界部分。因此，它将与实轴相连；恰好需要有一个点位于 0 的左侧，以及一个点位于 0 的右侧，

我们分别将其称为 ξ_a 和 ξ_b。事实上，如果零点同一侧有两个点，我们将得到一个闭合回路，在该回路上 t 在 t 解析的区域内取实值，从而导致 t 为常数。出于同样的原因， Γ 是 $T_{\mu_1}^{-1}(\mathbb{C}^-) \cap T_{\mu_2}^{-1}(\mathbb{C}^-)$ 内部唯一一条 t 取实值的曲线。我们已经证明， Γ 将 $T_{\mu_1}^{-1}(\mathbb{C}^-) \cap T_{\mu_2}^{-1}(\mathbb{C}^-)$ 分割为一个内部区域 D，其中 $\mathcal{I}(t(z)) > 0$，以及一个外部区域，使得 $\mathcal{I}(t(z)) < 0$。

断言 #2: 设 $\xi_b^1 := T_{\mu_1}(b_1)$ 且 $\xi_b^2 := T_{\mu_2}(b_2)$。则 $\xi_b < \min\{\xi_b^1, \xi_b^2\}$。

断言 #3： $t'(z) > 0$ 在 $\min\{\xi_b^1, \xi_b^2\}$ 的左侧邻域内（该邻域包含实轴上的点 $\min\{\xi_b^1, \xi_b^2\}$）。

断言 #3 的证明： 对于 $z \in (0, \min\{\xi_b^1, \xi_b^2\})$ 我们有

$$t'(z) = \frac{z}{1+z}(T_{\mu_1}^{-1})'(z)T_{\mu_2}^{-1}(z) + \frac{z}{1+z}T_{\mu_1}^{-1}(z)(T_{\mu_2}^{-1})'(z) + \frac{1}{(1+z)^2}T_{\mu_1}^{-1}(z)T_{\mu_2}^{-1}(z).$$

不失一般性，我们可以假设 $\xi_b^1 < \xi_b^2$。在这种情况下 $(T_{\mu_1}^{-1})'(\xi_b^1) = 0$（根据命题 B.5），因此我们需要证明的是

$$t'(\xi_b^1) = \frac{T_{\mu_1}^{-1}(\xi_b^1)}{1+\xi_b^1}\left(\frac{\xi_b^1}{T'_{\mu_2}(T_{\mu_2}^{-1}(\xi_b^1))} + \frac{T_{\mu_2}^{-1}(\xi_b^1)}{1+\xi_b^1}\right) > 0.$$

第一个因子 $\frac{T_{\mu_1}^{-1}(\xi_b^1)}{1+\xi_b^1}$ 为正。我们来看第二个因子。令 $w = T_{\mu_2}^{-1}(\xi_b^1)$，这等价于证明：

$$\frac{T_{\mu_2}(w)}{T'_{\mu_2}(w)} + \frac{w}{1+T_{\mu_2}(w)} = \frac{T_{\mu_2}(w) + T_{\mu_2}^2(w) + wT'_{\mu_2}(w)}{(1+T_{\mu_2}(w))T'_{\mu_2}(w)} > 0. \tag{18}$$

- 我们有 $1 + T_{\mu_2}(w) = 1 + \xi_b^1 > 0$。
- 我们有 $T'_{\mu_2}(w) = -\int_{a_2}^{b_2} \frac{x}{(w-x)^2}\mathrm{d}x < 0$
- 我们有

$$\begin{aligned} &T_{\mu_2}(w) + T_{\mu_2}^2(w) + wT'_{\mu_2}(w) \\ &\quad= \int_{a_2}^{b_2} \frac{x}{w-x}\mathrm{d}x + \left(\int_{a_2}^{b_2} \frac{x}{w-x}\mathrm{d}x\right)^2 - \int_{a_2}^{b_2} \frac{xw}{(w-x)^2}\mathrm{d}x \\ &\quad< \int_{a_2}^{b_2} \frac{x}{w-x}\mathrm{d}x + \int_{a_2}^{b_2} \frac{x^2}{(w-x)^2}\mathrm{d}x - \int_{a_2}^{b_2} \frac{xw}{(w-x)^2}\mathrm{d}x = 0, \end{aligned}$$

  其中我们对凸函数 $x \mapsto \frac{x}{w-x}$ 使用了詹森不等式。

因此，(18)成立，从而证明了该结论。

断言 #2 的证明： 函数 t 在 ξ_b 的一个邻域内解析。我们知道， $t'(z)$ 在零的一个（右侧）邻域内趋于 $-\infty$（由 (17) 可知），而由于断言 #3， $t'(z)$ 在 $\min\{\xi_b^1, \xi_b^2\}$ 的一个（左侧）邻域内为正。因此，

在区间 $(0,\xi_b)$ 内至少存在一点，使得 t' 为零。在这些点中的每一点，p 莫尔斯引理（定理 B.2）的推论告诉我们，存在两条从 p 发出的曲线，在这些曲线上 t 为实值；然而，唯一的实值曲线是 x 轴和 Γ。因此，这样的点只能有一个，而且必定是 ξ_b。

通过类似的论证，定义 $\xi_a^1 := T_{\mu_1}(a_1)$ 和 $\xi_a^2 := T_{\mu_2}(a_2)$，可以证明$\xi_a > \max\{\xi_a^1, \xi_a^2\}$。

现在，$t(z) = T_\mu^{-1}(z)$ 在 0 的某个邻域内成立，而 $t(z)$ 是 D 上的单值函数，因此 $t(z) = T_\mu^{-1}(z)$ 在整个 D 内成立（这一步是因为单值性意味着，在某个开集内相等的两个函数处处相等）。由于包含在 $T_\mu(\mathbb{C}^-)$ 中的实值曲线只有边界，Γ 便是 $T_\mu(\mathbb{C}^-)$ 的边界。

我们想在 D（闭包）内对 t 使用反函数定理，但要排除点 ξ_a 和 ξ_b。我们检查 $t(z)$ 的导数在此集合上恒不为零：当 $z \in D$（开）时，有 $t'(z) = T_\mu'(T_\mu^{-1}(z))^{-1}$，且 $\mathcal{I}(z) \neq 0$；此外，如果 $t'(z)$ 在区间 (ξ_a, ξ_b) 内或在 Γ 上还有其他零点，那么就会出现另一条实值曲线，这是不可能的。反函数定理（定理 B.1）表明，t^{-1} 在 $t(D)$ 内处处存在且解析；在 (a,b) 上，其中 $a := t(\xi_a)$ 且 $b := t(\xi_b)$；以及在 Γ 上（一般而言，除点 a 和 b 外）。注意，我们可以得出结论：t^{-1} 在 (a,b) 上也解析，因为 t 在区间 $(\xi_a, 0)$ 和 $(0,\xi_b)$ 上以及在区域 D' 中也有定义、解析且可逆，而该区域关于实轴与 D 对称。

我们来考察 μ 的密度函数 $f(x)$。我们有

$$xf(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{I}(t^{-1}(x - i\varepsilon)) \text{ for } x \in (a,b),$$

因此，$f(x)$ 在 (a,b) 内是解析的。我们来考察点 a（关于 b 的论证完全类似）。有两条实值曲线经过点 ξ_a，因此函数 t 具有如下形式

$$t(z) = a + c_2(z - \xi_a)^2 + (z - \xi_a)^3 h(z)$$

在 ξ_a 的某个邻域内，其中 $h(z)$ 是某个解析函数；对 ξ_b 也有类似结论。根据定理 B.2，存在一个局部双全纯映射 φ，使得 $\varphi(0) = \xi_a$ 且 [1] $t(\varphi(z)) = a - z^2$。因此，令 $w = a - z^2$，可得表达式

$$t^{-1}(w) = T_\mu(w) = \varphi\left(\sqrt{a-w}\right) = c_0 + c_{1/2}\sqrt{a-w} + c_1(a-w) + c_{3/2}(a-w)^{3/2} + \ldots,$$

其中所有系数均为实数，因为当 $w \in \mathbb{R}\backslash[a,b]$ 时，$T_\mu(w)$ 为实数。因此，当 $x \in (a,b)$ 充分接近 a 时，我们有

$$\begin{aligned} xf(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{I}(T_\mu(x - i\varepsilon)) \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{I}(\sqrt{a - x + i\varepsilon}(c_{1/2} + c_{3/2}(a-w) + c_{5/2}(a-w)^2 + \ldots)) \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sqrt{x-a} \cdot h(x), \end{aligned}$$

[1] 出现负号是因为我们希望选择 φ，使得实轴上 ξ_a 右侧的一个邻域映射到实轴上 a 左侧的一个邻域，并且 Γ 中靠近 ξ_a 的一段映射到实轴上 a 右侧的一个邻域。

对于在 a 的右侧邻域内解析的函数 $h(x)$。同样的论证在 b 的邻域内也成立。因此， μ 是一个在边界处具有平方根行为的测度，即其形式为 $\mathrm{d}\mu(x) = \sqrt{x-a}\sqrt{b-x}\psi(x)$，其中 $\psi(x)$ 是解析函数，且具有可逆的 T变换。这证明了定理 4.2，并使我们能够利用截断级数展开重构该测度。

□

参考文献

[1] Z. Bao、L. Erdős 和 K. Schnelli。《自由加法卷积的支撑集》。数学分析杂志，142(1):323–348，2020年。[2] P. J. Davis。《周期解析函数的数值积分》。数值近似，第21–23页，1959年。[3] E. Dobriban。《样本协方差矩阵极限谱的高效计算》。随机矩阵理论与应用，4(4):1550019，36页，2015年。[4] K. Fritzsche、H. Grauert 和 H. Grauert。《从全纯函数到复流形》，第213卷。Springer，2002年。[5] J. W. Helton、T. Mai 和 R. Speicher。《实现（又称线性化）在自由概率中的应用》。泛函分析杂志，274(1):1–79，2018年。[6] T. Mai 和 R. Speicher。《自由概率、随机矩阵与非交换有理函数的表示》。载于动力学、随机过程与控制中的计算与组合学，Abel 研讨会论文集第13卷，*Abel* 研讨会论文集，第551–577页。Springer，Cham，2018年。[7] J. A. Mingo 和 R. Speicher。《自由概率与随机矩阵》，菲尔兹研究所专著第35卷。Springer，纽约；多伦多安大略省菲尔兹数学科学研究所，2017年。[8] S. Olver 和 R. R. Nadakuditi。《自由概率理论中卷积的数值计算》。*arXiv*预印本 *arXiv:1203.1958*，2012年。[9] N. R. Rao 和 A. Edelman。《随机矩阵的多项式方法》。计算数学基础，8(6):649–702，2008年。[10] J. W. Silverstein。《大维随机矩阵特征值经验分布的强收敛性》。多元分析杂志，55(2):331–339，1995年。[11] J. W. Silverstein 和 S.-I. Choi。《大维随机矩阵极限谱分布的分析》。多元分析杂志，54(2):295–309，1995年。[12] L. N. Trefethen。《逼近理论与逼近实践（扩展版）》。SIAM，2019年。[13] L. N. Trefethen 和 J. A. C. Weideman。《指数收敛的梯形求积公式》。*SIAM*评论，56(3):385–458，2014年。[14] H. Zoladek。《单值化群》，第67卷。Springer Science & Business Media，2006年。