arXiv:2305.01829v1 [math.CO] 2 May 2023

合并操作和 $(d-i)$-单纯的 i-单纯d-多胞体

伊莎贝拉·诺维克* 郑海伦数学系 数学与统计系 华盛顿大学 休斯敦市中心大学 西雅图，华盛顿州 98195-4350，美国 休斯敦主街一号，德克萨斯州 77002，美国 novik@uw.edu zhengh@uhd.edu

2023年5月4日

谨献给 G ¨unter M. Ziegler，以纪念他六十岁生日。

摘要

我们定义了一种特定的合并操作：给定两个 d-多胞体 P和 Q，满足P 具有一个单纯形面 F，且 Q 具有一个简单顶点 v，该操作可生成一个新的 d-多胞体 $P\triangleright Q$，其顶点数为 $f_0(P)+f_0(Q)-(d+1)$。我们证明，如果对于某个 $1\le i\le d-1$，P和 Q 是（$d-i$）-单纯的 i-简单 d-多胞体，那么 $P\triangleright Q$也具有这一性质。接着，我们利用该操作构造新的（$d-i$）-单纯的 i-简单 d-多胞体族。具体而言，我们证明，对除（i,d）$=(3,8)$ 和 $(5,8)$ 以外的所有 $2\le i\le d-2\le 6$，都存在一个（$d-i$）-单纯的 i-简单 d-多胞体无限族；此外，对所有 $2\le i\le 4$，都存在一个自对偶的 i-单纯的 i-简单 $2i$-多胞体无限族。最后，我们证明，对于任意 $d\ge 4$，至多有 N 个顶点的（$d-2$）-单纯 2-简单 d-多胞体有 $2^{\Omega(N)}$ 种组合类型。

1 引言

本文 致力于研究迷人的这一类（$d-i$）-单纯的 i-单纯 d-多胞体 s.

多胞体是 $\mathbb{R}^d$ 中有限多个点的凸包。多胞体的 f-向量编码了各个维数的面的数量。为简洁起见，我们将 d 维多胞体称为 d-多胞体。若每个面都恰好包含 d 个顶点，则称 A d-多胞体 P 为单纯多胞体。类似地，若多胞体的每个顶点都恰好属于 d 个面，则称 d-多胞体 P 为单纯的。既非单纯多胞体也非单纯的多胞体称为一般多胞体。

尽管多胞体自古以来就受到研究，但毫不夸张地说，我们对它们仍知之甚少。更准确地说，各种组合不变量

*IN 的研究部分得到 NSF 资助，项目编号 DMS-1953815，并得到 Robert R. 与 Elaine F. Phelps 数学教授席位的支持。

例如，得益于 Steinitz 定理 [16]，我们已经充分理解了三维多面体的面格和 f-向量。在更高维度中，著名的 g-定理完整刻画了单纯多胞体和简单多面体的 f-向量 [3, 14]。然而，迄今为止，对于一般 d-多胞体的 f-向量，当 $d \geq 4$ 时，其刻画问题即使在四维情形下也完全难以解决；例如，参见 [2, 5, 12, 17, 18]。

或许有人会想，研究兼具某些单纯多面体与简单多面体性质的一般多胞体的 f-向量，是否会更容易着手。为此，若一个 d-多胞体的所有 $(d-i)$-面都是单形，就称其为 $(d-i)$-拟单纯；若每个 $(d-i-1)$-面恰好包含于 $i+1$ 个面中，则称其为i-简单。特别地，$(d-1)$-拟单纯的 1-简单 d-多胞体类与单纯 d-多胞体类一致，而 1-拟单纯的 $(d-1)$-简单 d-多胞体类就是简单 d-多胞体类。换言之，随着 i 在 1 与 $d-1$ 之间变化，$(d-i)$-拟单纯、i-简单的 d-多胞体在单纯 d-多胞体类与简单 d-多胞体类之间递变。还值得一提的是，2-单纯2-简单4-多面体的 f-向量是对称的。

当 $2 \leq i \leq d-2$ 时，是否存在 $(d-i)$-拟单纯 i-单纯 d-多胞体？（参见 [10, 问题 19.5.23]。）尽管各种猜想（例如参见 [8, 练习 9.7.7(iii)]）表明这类多胞体应有很多，但目前所知不多。Eppstein、Kuperberg 和 Ziegler 构造了首个 2-单纯2-简单4-多胞体的无限族 [7]。Paffenholz 和 Ziegler 将他们的方法推广 [13]，证明对所有 $d \geq 4$，都存在 $(d-2)$-拟单纯 2-简单 d-多胞体的无限族。值得注意的是，他们构造的 d 维多胞体中，顶点数的最小值为 $2(d+1)$；这一数值由 $\mathrm{conv}(\Sigma \cup \Sigma^*)$ 达到，其中 Σ 是一个 d-单纯形，其 $(d-3)$-面与单位球相切$\mathbb{S}^{d-1}$。Paffenholz 和 Werner 还构造了其他 2-单纯2-简单4-多胞体的无限族 [12]：其中所有多胞体都是初等的（即，具有 $g_2^{\mathrm{toric}} = 0$），并且至少有一个单纯形面。

对于较大的 i，具有 $d \geq 4$ 的 d 维半立方体（也称为半立方体）是 3-单纯形的（$d-3$）-单纯的，而其对偶是（$d-3$）-单纯形的 3-简单的（见[8, 练习 4.8.18]）。此外，由 Wythoff 构造得到的 Gosset–Elte 多胞体提供了有限多个（$d-i$）-单纯形的 i-简单的 d 维多胞体示例，适用于 $d \leq 8$ 和 $2 \leq i \leq d-2$ [6]。这些基本上是迄今已知的全部具有 $2 \leq i \leq d-2$ 的（$d-i$）- 单纯形的 i- 简单的 d 维多胞体示例。尤其是，目前尚不清楚是否存在 5-单纯的 5-简单 10 维多胞体。鉴于此，我们进一步提出以下问题。

问题 1.1。

1. 设 $d \geq 4$。一个非单纯形的（$d-2$）-单纯的 2-简单 d-多胞体至少可以有多少个顶点？ 2. 设 $d \geq 6$，且设 $3 \leq i \leq d/2$。是否存在（$d-i$）-单纯的 i-简单 d-多胞体的无限族？这样的非单纯形多胞体至少可以有多少个顶点？

本文旨在为某些 i 和 d 的取值提供新的（$d-i$）-单纯的 i-简单d-多胞体无限族。为此，我们定义一种特定的合并操作：给定两个 d-多胞体 P 和 Q，其中 P 有一个单纯形面，且 Q 有一个简单顶点，该操作会生成一个新的 d-多胞体。这种操作借鉴了单纯多胞体连通和这一熟悉的概念，但经过专门设计，能够保留（$d-i$）-单纯且 i-简单的性质。利用这一操作，我们得出以下结果：

1. 对于所有满足 $2 \leq i \leq d-2 \leq 6$ and (i,d) 不属于 (3, 8) 或 (5, 8) 的数对 $(d-i, i)$，存在 $(d-i)$-单纯的 i-单纯 d-多胞体的无限族；见定理 5.1。这部分回答了问题 1.1(2) 和 [10,问题 19.5.23]。2. 对于 $2 \leq i \leq 4$，存在自对偶 i-单纯的 i-单纯 $2i$-多胞体的无限族；见定理 5.4。这部分回答了 [10, 问题 19.5.24]。3. 对于所有 $d \geq 4$，至多有 N 个顶点的 $(d-2)$-单纯 2-简单d-多胞体有 $2^{\Omega(N)}$ 种组合类型；见定理 6.13。

为证明最后的结果，我们构造了唯一的具有九个顶点的 2-单纯2-简单4-多面体的高维类比。（这个 4-多胞体在 [12] 中被称为 P_9；在所有非单纯形 2-单纯2-简单4-多胞体中，它具有最少的顶点数。）然后我们应用合并操作，生成新的无限族（$d-2$）-单纯的 2-简单 d-多胞体。

关于第二个结果，此前已知几个（非单纯形）自对偶二拟单纯 2-简单4-多胞体的例子，其中包括来自 [12] 的多胞体 P_9 和 P_{10}。事实上，[11] 给出了一个（不同的）自对偶二拟单纯 2-简单4-多胞体的无限族，其中例如包含24胞体。一个有趣的自对偶 d-多胞体无限族，既不是 j-拟单纯的，也不是 i-简单的（对任意 $d \geq 3$ 和 $j, i > 1$），是 Bisztriczky [4] 构造的多重体族。

本文的结构如下。我们在第 2 节回顾若干与多胞体和面格有关的定义。第 3 节作为预热部分，讨论非单纯形的 3-单纯、2-简单 5-多胞体所能具有的最少顶点数。在第 4 节中，我们介绍并研究合并操作，该操作适用于一对多胞体，其中一个具有单纯形面，另一个具有简单顶点。这一操作具有若干有趣的性质；例如，参见定理 4.6 和定理 4.12。第 5 节和第 6 节构成了本文最关键的部分：在这两节中，我们利用合并操作及其性质，给出所承诺的新型 $(d-i)$-单纯 i-简单d-多胞体构造。具体而言，在第 5.1 节中，我们为 $d \leq 8$ 构造了无限族 $(d-i)$-单纯i-简单 d-多胞体。在第 5.2 节中，我们为 $i \leq 4$ 构造了无限族自对偶i-单纯 i-简单 $2i$-多胞体。在第6.1节中，我们重新考察 2-拟单纯、2-简单的四维多胞体，并给出若干新的构造。最后，在第6.2节中，我们给出 P_9 的一个高维类比，并利用它构造出指数多（关于 N）种组合类型的 $(d-2)$-单纯 2-简单 d-多胞体，其顶点数至多为 N。

2 预备知识

多胞体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中一个有限点集的凸包。 P 的维数是 P 的仿射包的维数。为简便起见，若 P 是 d 维的，我们称 P 为 d-多胞体。下文中，我们始终假设 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个 d-多胞体。

超平面 $H \subseteq \mathbb{R}^d$ 是 P 的支撑超平面，当且仅当 P 包含于由 H 确定的两个闭半空间之一中。 P 的一个（真）面是 P 与 P 的任一支撑超平面的交集。多胞体的面本身也是多胞体。我们将 P 的 $(d-1)$ 维面称为 P 的面，将 $(d-2)$ 维面称为脊，将 1 维面称为边，将 0 维面称为顶点。我们用 $V(P)$ 表示 P 的顶点集。如果 $V(P)$ 由 $d+1$ 个仿射独立点组成，那么 P 是一个 d 维单纯形；我们将其记为 σ_d。

P, $\mathcal{L}(P)$ 的面偏序集是 P 的面（包括 P 和 $\emptyset$）按包含关系排序后构成的集合。 P 的面偏序集是一个格。我们通常将 $\mathcal{L}(P)$ 的最大元（即 P ）记作 $\hat{1}$，将最小元（即 $\emptyset$ ）记作 $\hat{0}$。对于 $\mathcal{L}(P)$ 的子集 S ，我们分别用 $\vee S$ 和 $\wedge S$ 表示 S 中元素的并和交。

必要时，通过平移，我们总可以假设原点位于 P的内部。 P的对偶多胞体 P^* 定义为

$$P^* = \{y \in \mathbb{R}^d : \ y^t x \leq 1, \ \forall x \in P\}.$$

对于每个 P，都存在一个反序双射 $\phi : \mathcal{L}(P) \to \mathcal{L}(P^*)$；稍微滥用一下记号，我们也将（逆）映射 $\mathcal{L}(P^*) \to \mathcal{L}(P^{**}) = \mathcal{L}(P)$ 记为 ϕ。如果 $\mathcal{L}(P)$ 和 $\mathcal{L}(P^*)$ 同构（即存在一个保序双射），则称 P 为自对偶。

设 $1 \leq i \leq d-1$。如果一个 d-多胞体 P 的所有 i-面都是单形，则称其为 i-单纯的；等价地，如果其所有 i-面都具有 $i+1$ 个顶点，则称其为 i-单纯的。类似地，如果每个 $(d-i-1)$-面都恰好包含 $i+1$ 个面，则称 P 为 i-单纯的。$(d-1)$-单纯的 d-多胞体类称为单纯的 d-多胞体类，而 $(d-1)$-单纯的 d-多胞体类称为单纯的 d-多胞体类。特别地，如果 P 是 i-单纯的，那么对于任意满足 $\dim \tau \leq i$ 的面 τ，区间 $[\hat{0}, \tau]$ 都是布尔格。同样，如果 P 是 i-单纯的，那么对于任意满足 $\dim \tau \geq d-i-1$ 的面 τ， $[\tau, \hat{1}]$ 都是布尔格。因此， P 是 i-单纯的，当且仅当 P^* 是 $(d-i)$-单纯的。

如果 v 是 P的一个顶点，那么 P 在 v处的顶点图，记作 P/v，是通过用一个超平面 H 截取 P 得到的多胞体，该超平面使 v 位于一侧，而 P 的所有其他顶点位于另一侧。 P/v 的组合类型不依赖于 H的选择。事实上， $\mathcal{L}(P/v)$恰好是 $\mathcal{L}(P)$中的区间 $[v, \hat{1}]$。我们称 d-多胞体 P 的顶点 v是单纯的，如果 P/v 是一个单纯形；等价地，如果 v 恰好属于 P的 d个面。

如果 P 是单纯多胞体，那么由 P 的各个面（包括 $\emptyset$ ，但不包括 P 本身）的顶点集组成的集合构成一个抽象单纯复形 ∂P ，称为 P 的边界复形。当 V 是有限集时，我们用 $\partial \overline{V} := \{\tau \subset V : \ \tau \neq V\}$ 表示顶点集为 V 的抽象单形的边界复形。

考虑一个 d-多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d \times \{0\}$ 和一个 d'-多胞体 $Q \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{d'}$，使得原点同时位于 P 和 Q 的相对内部。多胞体 $P \oplus Q := \mathrm{conv}(P \cup Q)$ 称为 P 和 Q 的自由和。$P \oplus Q$ 的所有面都具有 $\mathrm{conv}(F \cup G)$ 的形式，其中 $F \neq P$ 是 P 的一个面，$G \neq Q$ 是 Q 的一个面。因此，如果 P 和 Q 是单纯多胞体，那么 $P \oplus Q$ 的边界复形与 ∂P 和 ∂Q 的并重合：

$$\partial(P \oplus Q) = \partial P * \partial Q := \{\sigma \cup \tau : \sigma \in \partial P, \tau \in \partial Q\}.$$

对于一个 d-多胞体 P，我们令 $f(P) = (f_0(P)\ f_1(P) \ldots, f_{d-1}(P))$ 表示 P 的 f-向量；这里 $f_i(P)$ 表示 P 的 i-面数。此外，对于 $0 \leq i < j \leq d-1$，我们令 $f_{i,\ j}(P)$ 表示 P 中满足 $\dim F_i = i$ 且 $\dim F_j = j$ 的面 $F_i \subset F_j$ 对数。

最后，我们注意到，对所有 $0 \leq i \leq d-1$，都有 $f_i(P) = f_{d-i-1}(P^*)$。这直接源于反序双射 ϕ: $\mathcal{L}(P) \to \mathcal{L}(P^*)$ 的存在。

3 预热：顶点的最小数量

如引言中所述，对于每个 $d \geq 4$，都存在一个具有 $2(d+1)$ 个顶点的 $(d-2)$-单纯 2-简单d-多胞体。此外，对于 $d = 4$，存在一个仅有 9 个顶点的 2-单纯2-简单4-多胞体。对于 $d > 4$，是否存在顶点少于 $2d+2$ 个的 $(d-2)$-单纯 2-简单 d-多胞体？（参见问题 1.1(1)。）本预热章节旨在回答 $d = 5$ 的这一问题；见命题 3.3。为此，我们首先建立一个判据，说明 $(d-i)$-单纯 i-单纯 d-多胞体（如果存在）的 f-向量必须满足该判据；参见 [8, 习题 9.7.7(ii)]。为求完整起见，我们给出证明。

引理 3.1。设 $d \geq 2$ 和 $1 \leq i \leq d-1$。设 P 是一个（$d-i$）-单纯的 d-多胞体。那么，P 是 i-单纯的，当且仅当（$d-i+1$）f_{d-i}（P）=（$i+1$）f_{d-i-1}（P）。

证明：如果 P 是（$d-i$）-单纯的，那么 P 的每个（$d-i$）-面都是一个单纯形；因此，每个（$d-i$）-面都包含 $d-i+1$ 个维数为 $d-i-1$ 的面。这意味着 $f_{d-i-1,\ d-i}$（P）=（$d-i+1$）f_{d-i}（P）。另一方面，任意 d-多胞体的一个（$d-i-1$）-面至少包含于 $i+1$ 个维数为 $d-i$ 的面中。因此，$f_{d-i-1,\ d-i}$（P）$\geq$（$i+1$）f_{d-i-1}（P），由此可得（$d-i+1$）f_{d-i}（P）$= f_{d-i-1,\ d-i}$（P）$\geq$（$i+1$）f_{d-i-1}（P）。此外，当且仅当每个（$d-i-1$）-面恰好属于 $i+1$ 个维数为 $d-i$ 的面时，等号成立；而这当且仅当 P 是 i-单纯的。□

推论 3.2. 对于所有 $i \geq 1$，一个 i-单纯的 $2i$-多胞体 P 是 i-单纯的，当且仅当 $f_{i-1}(P) = f_i(P)$。

命题 3.3。非单纯形的 3-单纯形的 2-单纯的 5-多胞体所能拥有的最少顶点数是 12。

证明：存在一个有 $2(5+1)=12$ 个顶点的 3-单纯、2-简单 5-多胞体。因此，我们只需证明不存在顶点少于 12 个的非单纯形的 3-单纯、2-简单 5-多胞体。

众所周知（见 [12]），每个非单纯形的二拟单纯 2-简单 4-多胞体至少有 9 个顶点，而唯一一个具有 9 个顶点的此类多胞体，是 [12] 中记作 P_9 的多胞体。由于 3-单纯的 2-简单 5-多胞体的顶点图都是二拟单纯且 2-简单的，因此可知，非单纯形的 3-单纯的 2-简单多胞体 Q 至少有 10 个顶点。

假设 $f_0(Q)=10$。那么，每个顶点图要么是 4-单纯形 σ_4，要么是 P_9，因此 Q 的每个顶点的度数为 5 或 9。由于 Q 不是简单的，Q 至少有一个顶点图是 P_9。考虑 Q^*；它有 10 个面，每个面要么是 σ_4，要么是 P_9。（这是因为 σ_4 和 P_9 都是自对偶的。）现在考虑 Q^* 中一个与 P_9 同构的面 F。它有 7 个非单纯形面（一个交叉多胞体，也称为八面体，以及六个双锥）；构造 6.1。这七个 3-面都必须包含在 F 以及 Q^* 的另一个面中，而后者不可能是单纯形面。这表明 Q^* 至少有八个与 P_9 同构的面。因此，在 Q 中，10 个顶点至少有 8 个的度数为 9。这意味着 Q 的所有顶点的度数都是 ≥ 8。由此，Q 的所有顶点的度数都是 9，因此 $f_1(Q)=\binom{10}{2}=45$。

由于 Q 是 3-单纯形的 2-简单，根据引理 3.1，$4f_3(Q)=3f_2(Q)$。此外，由于Q 是 3-单纯形的，并且 5-多胞体的环面 h-向量是对称的 [15]，。

$$0=g_3^{\mathrm{toric}}(Q)=f_2(Q)-4f_1(Q)+10f_0(Q)-20.$$

最后，由欧拉关系，$f_0(Q)-f_1(Q)+f_2(Q)-f_3(Q)+f_4(Q)=2.$

这唯一确定了 f 的 Q-向量：$f(Q)=(10,45,100,75,12)$。但随后我们必须有 $75=f_3(Q)\leq\binom{f_4(Q)}{2}=66$，这就产生了矛盾。

类似地，如果 $f_0(Q)=11$，那么 $f_2(Q)=4f_1(Q)-10f_0(Q)+20=4f_1(Q)-90$，它不是 4 的倍数。另一方面，$4f_3(Q)=3f_2(Q)$ 仍然成立，因此 $f_3(Q)$ 不是整数，这再次产生矛盾。□

虽然具有 9 个顶点的 2-单纯2-简单4-多面体是唯一的，但具有 12 个顶点的 3-单纯的 2-简单 5-多胞体并非如此。（例如，在第 6 节中，我们将看到存在一个具有单纯形面的此类多胞体。）对于 $d\geq 6$，问题 1.1(1) 仍未解决。如果能对答案究竟是 $2d+2$ 还是小于 $2d+2$ 提供任何见解，将会非常有意义。

4 合并操作

全文中，设 $d\geq 2$。回顾一下，两个单纯的 d-多胞体的连通和是一个单纯的 d-多胞体。换言之，取连通和会保留（$d-1$）-单纯的 1-单纯这一性质。是否存在类似的运算，能对任意 $2\leq i\leq d-1$ 保留（$d-i$）-单纯的 i-单纯这一性质？本节的目标是

讨论一种这样的运算，只要两个 d-多胞体中一个有单纯形面，另一个有简单顶点，就可以对它们应用这种运算。我们列出顶点的顺序对构造至关重要。具体来说，我们用 $[a_1,\ldots,a_m]$表示凸包 conv($a_1,\ldots,a_m$)，其顶点按 $a_1,\ldots,a_m$ 的顺序排列。我们主要用这种记法来描述给定多胞体的面。为简便起见，我们也将边 $[u,v]$ 记作 uv。

4.1 定义和基本性质

设 P_1 和 P_2 是两个 d-多胞体，其中 P_1 有一个单纯形面 $F:=[u_1,\ldots,u_d]$，而 P_2 有一个简单顶点 v，其邻点按 u'_1、.....、u'_d 的顺序排列。我们采用以下记号：对于 $1\le j\le d$，记 P_1 的面 H_j 为沿脊 G_j 与 F 相邻的面：$=[u_1,\ldots,\widehat{u_j},\ldots,u_d]$。类似地，对于 $1\le j\le d$，记 P_2 的面 H'_j 为包含与 v 相 incident 的 P_2 的所有棱、但不包含 vu'_j 的面。

通过对 P_1 应用射影变换，我们可以假设超平面 aff(F)、aff(H_1).....、aff(H_d) 定义了一个包含 P_1 的 d-单纯形 Σ。将不位于 F 中的 Σ 的顶点记为 u。通过应用将 v 映射到 u、并在 $1\le k\le d$ 时将 u'_k 映射到 u_k 的唯一仿射变换，我们还可以进一步假设 d-单纯形 $\Sigma'=[v,u'_1,\ldots,u'_d]$ 和 Σ 重合，特别地，$P_1\subseteq\Sigma=\Sigma'$ 是 P_2 的凸子集。

最后，设 \(P'_2 := \)凸包\((V(P_2)\backslash v)\) 和 \(F' := [u'_1,\ldots,u'_d] \) 是 \(P_2\) 的两个子多胞体。注意，如果 \(P_2\) 是一个 \(d\)-单纯形，那么 \(P'_2\) 是 \(F'\)；否则，\(F'\) 是 \(P'_2\) 的面。

定义 4.1. 在满足上述关于 P_1 和 P_2的假设的条件下，通过将 $\Sigma'=\Sigma$ 替换为 P_1，定义一个新的 d-多胞体$P_1\triangleright P_2$，该多胞体由 P_2得到。或者，$P_1\triangleright P_2$是 P_1 和 P'_2 的并集，其中对于 $1\le k\le d$，我们将 u_k 与 u'_k 等同起来。（注意，P_1 和 P'_2 共享面 $F=F'$，位于 F 的相对两侧，并且它们的并集是一个多胞体。）这个新的多胞体称为沿着 F 和 v对 P_1 和 P_2 进行的合并。

例 4.2. 考虑两个多边形 P_1，P_2，它们的边界复形分别是循环 ($u_1,\ldots,u_n,u_1$) 和 ($v_0,v_1,\ldots,v_k,v_0$)。那么沿边 $F=u_1u_n$ 和顶点 v_0 合并 P_1 与 P_2，得到的多边形的边界复形是循环 ($v_1=u_1,u_2,\ldots,u_{n-1},u_n=v_k,v_{k-1},\ldots,v_2,v_1=u_1$)。换言之，在二维情形下，$P_1\triangleright P_2$ 恰好是 P_1 与 $P'_2=$ 的连通和 conv($V(P_2)\backslash v_0$)。

图 1 展示了如何合并两个三维多面体。

注 4.3。对于 $d\ge 3$，$P_1\triangleright P_2$ 的面集由以下部分组成。

- 旧面：P_1 的所有面（ F、H_1、.....、H_d除外），以及 P_2的所有面（ H'_1、.....、H'_d除外）；
- 新面：对于每个 $1\le j\le d$，将 H_j 和 H'_j 合并为单个面 $H_j\triangleright H'_j$，其中合并沿着 $G_j=[u_1,\ldots,\widehat{u_j},\ldots,u_d]$和 v进行（ v在 $\widehat{H'_j}$中的邻点按 u'_1、.....、u'_j、$\ldots u'_d$的顺序排列）。

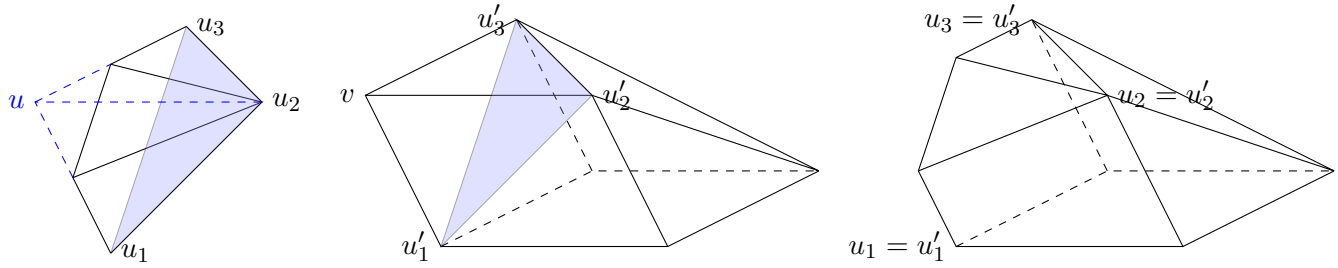

图 1： $P_1 \subseteq \Sigma$、 $P_2 \supseteq \Sigma'$和 $P_1 \triangleright P_2$，其中合并沿着 $[u_1, u_2, u_3] \cong [u'_1, u'_2, u'_3]$ 和 v进行。

注 4.4。对 $P_1 \triangleright P_2$ 的面进行描述后，可得如下观察： $P_1 \triangleright P_2$ 的组合类型可能取决于 F的顶点和 v的邻点的排列顺序。也就是说，令 $F = [u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(d)}]$，并将 v的邻点重新标记为$v_{\sigma'(1)}$ $\cdots$、 $v_{\sigma'(d)}$，对于 $[d] := \{1, 2, \ldots, d\}$的某些排列 σ、 σ'，可能得到组合类型不同的多胞体；示例见第 6 节。这与两个单纯多面体的连通和情形类似。

由定义 4.1 可知，若 P_1 是单纯形，则 $P_1 \triangleright P_2 = P_2$；类似地，若 P_2是单纯形，则 $P_1 \triangleright P_2 = P_1$。在所有其他情况下， F不是 $P_1 \triangleright P_2$的面，且 v不是 $P_1 \triangleright P_2$的顶点。此外，若 P_1 和 P_2 都是单纯的，且 P_2 有一个简单顶点 v，则沿着 P_1 和 v 的任意面 F 合并 P_1 和 P_2，所得结果是 P_1 与 $P'_2 =$ 凸包$(V(P_2)\backslash v)$的连通和。

我们将上述讨论总结为以下引理。

引理 4.5. 设 $d \geq 2$。设 P_1 为一个具有单纯形面的 d-多胞体，设 P_2 为一个具有简单顶点的 d-多胞体。则 $f_0(P_1 \triangleright P_2) = f_0(P_1) + f_0(P_2) - (d+1)$。特别地，$f_0(P_1 \triangleright P_2) \geq \max\{f_0(P_1), f_0(P_2)\}$，且等号成立当且仅当 P_1和P_2 中至少一个是单纯形。若 P_1 和 P_2 中有一个是单纯形，则 $P_1 \triangleright P_2$ 等于另一个多胞体。

下　述定理和推论阐明了合并运算的意义　n.

定理 4.6. 设 $d \geq 2$ 和 $1 \leq i, j \leq d-1$，且设 P_1 和 P_2 分别为具有单纯形面的 d-多胞体和具有简单顶点的 d-多胞体。若 P_1 和 P_2 是 j-单纯的，则$P_1 \triangleright P_2$也是。若 P_1和 P_2是 i-单纯的，则 $P_1 \triangleright P_2$也是。

证明：我们首先讨论 j-单纯多胞体。证明采用对 d的归纳法。对于任意 d ，命题在 $j = 1$ 时成立（因为所有多胞体都是 1-单纯的）。因此，命题在 $d = 2$时成立。

现在，假设该命题对 $d-1$ 和任意 $1 \leq j \leq d-2$ 都成立。我们证明该命题对 d 和任意 $1 \leq j \leq d-1$ 都成立。设 P_1 和 P_2 是两个 j-单纯 d 维多胞体。

如果其中一个是单纯形，则无需证明。此外，如果 $j = d-1$，那么 $P_1 \triangleright P_2$ 是两个单纯多胞体 P_1 和 P_2' 的连通和，它是 $(d-1)$- 单纯的。

因此，假设 $2 \le j \le d-2$，且 P_1 和 P_2 都不是单纯形。设 τ 是 $P_1 \triangleright P_2$的一个j-面。那么，τ 要么是 P_1 的一个 j-面，要么是 P_2 的一个 j-面，要么对于某个 k，它是$H_k \triangleright H_k'$ 的一个 j-面。在前两种情况下，τ 是一个单纯形，因为 P_1 和 P_2 都是 j-单纯的。在最后一种情况下，它也是一个单纯形，因为 H_k 和 H_k' 都是 j-单纯的，因此根据归纳假设，τ 是一个单纯形。

我们现在讨论 i-单纯多胞体。证明仍然采用关于 d 的归纳法。对于 $i = 1$ 和任意 d，该命题成立（因为所有多胞体都是 1-单纯的）。因此，该命题对于 $d = 2$ 成立。现在假设该命题对于 $d-1$ 和任意 $2 \le i \le d-2$ 均成立。设 $2 \le i \le d-1$，并设 P_1 和 P_2 是两个 i- 单纯的 d- 多胞体。为了证明 $P_1 \triangleright P_2$ 是 i-单纯的，设 τ 是 $P_1 \triangleright P_2$ 的一个 $(d-i-1)$-面。这里有两种可能的情况。

情形 1：τ 是 $H_k \triangleright H_k'$之一的一个面。由于 P_1 和 P_2 是 i-单纯的，H_k 和 H_k' 是$(i-1)$-单纯的$(d-1)$-多胞体。因此，根据归纳假设，$H_k \triangleright H_k'$ 是一个$(i-1)$-单纯的$(d-1)$-多胞体。由于 τ 是 $H_k \triangleright H_k'$的一个维数为 $d-i-1 = (d-1)-(i-1)-1$的面，因此恰有 i 个 $H_k \triangleright H_k'$ 的面（因而也是 $P_1 \triangleright P_2$的脊）包含τ。这些 i 个脊中的每一个都包含在 $P_1 \triangleright P_2$的两个面中：$H_k \triangleright H_k'$和另一个面。因此，τ恰好包含在 $P_1 \triangleright P_2$的 $i+1$ 个面中，即$H_k \triangleright H_k'$ 以及上述 i个额外的面。

情形 2：τ不包含在任何一个 $H_k \triangleright H_k'$ 中（对于 $k = 1, \ldots, d$）。那么，要么 τ是 P_1的一个面，且不包含在 $F, H_1, \ldots, H_d$中的任何一个之中；要么 τ是 P_2的一个面，它不包含 v，且不包含在 $H_1', \ldots, H_d'$中的任何一个之中。在前一种情形下，包含 τ的 $P_1 \triangleright P_2$的面就是包含 τ的 P_1的面，共有 $i+1$个，因为 P_1是 i-单纯的。类似地，在后一种情形下，包含 τ 的 $P_1 \triangleright P_2$ 的面就是包含 τ的 P_2 的面，共有 $i+1$ 个。□

推论 4.7。设 $d \ge 2$ 和 $1 \le i \le d-1$。设 P是一个 $(d-i)$-单纯的 i-单纯d-多胞体，并满足：(1) P 不是单纯形；(2) P 有一个单纯形面 F；(3) P 有一个不包含在 F 中的简单顶点 v。最后，设 $P \triangleright P$ 是沿着 F和 v将 P 与其自身合并得到的多胞体。那么 $P \triangleright P$ 是一个 $(d-i)$-单纯的 i-单纯 d-多胞体，它有一个单纯形面和一个不包含在该面中的简单顶点；此外，$f_0(P \triangleright P) > f_0(P)$。因此，存在一个通过与 P迭代合并得到的 $(d-i)$-单纯 i-单纯 d-多胞体的无限族。

证明：考虑 P 的两个副本：P_1 和 P_2。将 P_j 中的 F 的副本记为 F_j，将 P_j 中的 v 的副本记为 v_j。沿着 F_1 和 v_2 合并 P_1 和 P_2。根据定理 4.6，$P_1 \triangleright P_2$ 是 $(d-i)$-单纯的，且 i-单纯的；它有一个单纯形面 F_2 和一个简单顶点 $v_1 \notin F_2$。□

该推论意味着，要找到无穷多个（$d-i$）-单纯的 i-单纯 d-多胞体，只需找到“构件”——即具有单纯形面的多胞体和简单顶点。因此，我们提出以下问题，该问题强化了问题 1.1(2)。

问题 4.8。设 $d \geq 4$ 和 $2 \leq i \leq d-2$。是否存在无限族（$d-i$）-单纯的i-单纯 d-多胞体，使得其中每一个都具有一个单纯形面和一个简单顶点?

4.2 面格

在本小节中，我们假设 P_1 和 P_2 是两个 $(d-i)$-单纯的 i-单纯 d 多胞体，它们将沿着 P_1 的一个单纯形面 $F = [u_1, \ldots, u_d]$ 和 P_2 的一个简单顶点 v 合并。我们的目标是描述 $P_1 \triangleright P_2$, $\mathcal{L}(P_1 \triangleright P_2)$ 的面格。我们继续使用第 4.1 节中引入的记号。

定义 4.9。考虑 $\mathcal{L}(P_1)$ 和 $\mathcal{L}(P_2)$ 的以下两个子偏序集:

$$\mathcal{L}(P_1)^- := \mathcal{L}(P_1) \backslash \{\sigma : \sigma \subseteq F, \dim \sigma \geq d-i\},$$

$$\mathcal{L}(P_2)^- := \mathcal{L}(P_2) \backslash \{\sigma : v \in \sigma, \dim \sigma < d-i\},$$

并令 $\mathcal{L}(P_1)^- \sqcup \mathcal{L}(P_2)^-$ 为它们的不交和，即 $\mathcal{L}(P_1)^-$ 与 $\mathcal{L}(P_2)^-$ 的不交并，其中 $\mathcal{L}(P_1)^-$ 和 $\mathcal{L}(P_2)^-$ 上保留原有的偏序，且不存在其他可比较的元素对。

定义 4.10。令 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{L}(P_1)^- \sqcup \mathcal{L}(P_2)^-$ 的以下商偏序集（其定义取决于 d 和 i）。作为一个集合，它是 $(\mathcal{L}(P_1)^- \sqcup \mathcal{L}(P_2)^-) / \sim$，其中

$$[u_k : k \in S] \sim [u'_k : k \in S] \text{ for all } S \subseteq [d],\ |S| \leq d-i,$$

$$\text{and } \cap_{k \in S} H_k \sim \cap_{k \in S} H'_k \text{ for all } S \subseteq [d],\ |S| \leq i.$$

$\mathcal{L}$ 上的偏序继承自 $\mathcal{L}(P_1)^- \sqcup \mathcal{L}(P_2)^-$: 若存在等价类 $[\tau]$ 和 $[\sigma]$ 的代表元 τ' 和 σ'，使得 $\tau' < \sigma'$ 在 $\mathcal{L}(P_1)^- \sqcup \mathcal{L}(P_2)^-$ 中。

本小节的主要结果——定理 4.12——断言 $\mathcal{L}$ 是 $P_1 \triangleright P_2$ 的面格。证明依赖于以下引理。

引理 4.11. 令 $S \subseteq [d]$。

1. 如果 $|S| \leq i$，那么 $\cap_{k \in S} H_k$ 是 P_1 的一个 $(d - |S|)$-面，且不包含在 F 中，而 $\cap_{k \in S} H'_k$ 是 P_2 的一个 $(d - |S|)$-面，且包含 v。 2. 如果 $|S| \leq d - i$，那么 $[u_k : k \in S]$ 是 P_1 的一个 $(|S| - 1)$-面，而 $[u'_k : k \in S]$ 是 P_2 的一个 $(|S| - 1)$-面。
3. 如果 H 是 P_1 的一个面，且它不是 F、H_1、.....、H_d 中的任何一个，那么 H 与 F 至多共享 $d - i - 1$ 个顶点，并且 H 不包含任何形如 $\cap_{k \in S} H_k$ 的交集，其中 $S \subseteq [d]$、$|S| \leq i$。因此，在 $\mathcal{L}(P_1)^-$ 和 $\mathcal{L}$ 中计算得到的 $\mathcal{L}(H)$ 均等于 $[\hat{0}, H]$。 4. 如果 H 是 P_2 的一个面，且不包含 v，那么 H 不包含任何形如 $\cap_{k \in S} H'_k$ 的交集。因此，在 $\mathcal{L}(P_2)^-$ 和 $\mathcal{L}$ 中计算得到的 $\mathcal{L}(H)$ 均等于 $[\hat{0}, H]$。

证明：对于第 (1) 部分，我们只需证明 $\cap_{k\in S}H_k$ 是 $(d-|S|)$ 维的，且不包含在 F 中。考虑 $\tau := (\cap_{k\in S}H_k)\cap F = \cap_{k\in S}(H_k\cap F)$。由于 F 是一个 $(d-1)$-单纯形，τ 是 P_1 的一个维数为 $d-|S|-1$ 的面。现在，由于 $|S|\le i$，因此 $d-|S|-1\ge d-i-1$，假设 P_1 是 i-单纯的，这意味着区间 $[\tau,\hat{1}]$ 是一个布尔格，其余原子为 H_k，其中 $k\in S$，且 F。进而，这意味着 $\cap_{k\in S}H_k$ 具有所需的性质。

对于第 (2) 部分，由于 F 是 P_1, $[u_k$ 的一个单纯形面，$k\in S]$ 必须是 P_1 的一个单纯形 $(|S|-1)$-面。此外，由于 v 是单纯的，对于 $k\in S$，棱 vu'_k 确定了 P_2 的一个 $|S|$-面；又因为 P_2 是 $(d-i)$-单纯的，该面必为单纯形。因此，$[u'_k : k\in S]$ 是 P_2 的一个 $(|S|-1)$-面。

对于第 (3) 部分，注意如果 H 包含 F 的 $d-i$ 个顶点，比如说 $u_1,\dots,u_{d-i}$，那么 $[u_1,\dots,u_{d-i}]$ 将是 P_1 的一个 $(d-i-1)$-面，并且至少包含在 $i+2$ 个面中，即 F,$H_{d-i+1},\dots,H_d$ 和 H；这是不可能的，因为 P 是 i-单纯的。类似地，如果 H 包含面 $H_1\cap\cdots\cap H_i$，那么这个 $(d-i)$-面至少属于 $i+1$ 个面，即 $H_1,\dots,H_i$ 和 H，这同样会导出矛盾。

第 (4) 部分由 $v\in\cap_{k\in S}H'_k$ but $v\notin H$ 这一事实，以及 $\mathcal{L}(P_2)^-$ and $\mathcal{L}$ 的定义得出。□

设 S 是 $[d]$ 的一个子集。注意，$\hat{}\,0_{P_1}=\vee_{k\in\emptyset}u_k\sim\vee_{k\in\emptyset}u'_k=\hat{}0_{P_2}$ 是 $\mathcal{L}$ 的最小元素，而 $\hat{}\,1_{P_1}=\wedge_{k\in\emptyset}H_k\sim\wedge_{k\in\emptyset}H'_k=\hat{}1_{P_2}$ 是最大元素。此外，引理 4.11 意味着，如果 $|S|\le d-i$，那么 $\vee_{k\in S}u_k\in\mathcal{L}(P_1)$ 和 $\vee_{k\in S}u'_k\in\mathcal{L}(P_2)$ 都是 $\mathcal{L}(P_1)^-\sqcup\mathcal{L}(P_2)^-$ 的元素，并且它们具有相同的秩。类似地，如果 $|S|\le i$，那么 $\wedge_{k\in S}H_k$ 和 $\wedge_{k\in S}H'_k$ 都属于 $\mathcal{L}(P_1)^-\sqcup\mathcal{L}(P_2)^-$，并且在其中具有相同的秩。现在我们准备证明 $\mathcal{L}$ 是 $P_1\triangleright P_2$ 的面格。具体而言，对于 $S\subseteq[d]$、$|S|\le i$，$\mathcal{L}$ 中的类 $\wedge_{k\in S}H_k\sim\wedge_{k\in S}H'_k$ 表示该面

$$\cap_{k\in S}(H_k\triangleright H'_k)=(\cap_{k\in S}H_k)\triangleright(\cap_{k\in S}H'_k)\text{ of }P_1\triangleright P_2.$$

定理 4.12. 设 $d\ge 2$ 和 $1\le i\le d-1$。设 P_1 和 P_2 是 $(d-i)$-单纯的 i-简单多胞体，其中 P_1 有一个单纯形面 $F=[u_1,\dots,u_d]$，而 P_2 有一个简单顶点 v，其邻点为 $u'_1,\dots,u'_d$。则 $\mathcal{L}=\mathcal{L}(P_1\triangleright P_2)$。

证明：通过对 d 和 i作归纳法来证明。首先考虑 P_1 和 P_2都是 $(d-1)$-单纯的 1-简单 d-多胞体的情形。这种情形分为两个子情况：

1. 若 P_2 不是单纯形，则 $P_1\triangleright P_2=P_1\#P'_2$。格 $\mathcal{L}(P_1\triangleright P_2)$由 $\mathcal{L}(P_1)$ 和 $\mathcal{L}(P'_2)$ 去掉面 $[u_1,\dots,u_d]$ 和 $[u'_1,\dots,u'_d]$，并将它们的边界复形识别后得到；这与我们对 $\mathcal{L}(P_1)^-\sqcup\mathcal{L}(P_2)^-/\sim=\mathcal{L}$ 的定义一致。2. 若 P_2 是单纯形，则 $P_1\triangleright P_2$ 是 P_1。在这种情况下，$\mathcal{L}$ 等于 $\mathcal{L}(P_1)$，这一点也可由 $\mathcal{L}$ 的定义直接得出。

本讨论完成了基例 $i=1$ 和任意 $d\ge 2$的证明 .

现在假设该命题在维数 $\leq d-1$ 时成立，并考虑两个（$d-i$）-单纯的 i-单纯 d 多胞体 P_1 和 P_2，其中 $i \geq 2$。根据定义， $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}(P_1 \triangleright P_2)$ 具有相同的余原子。因此，只需证明对于 $P_1 \triangleright P_2$ 的每个面 H， $\mathcal{L}$ 中的区间$[\hat{0}, H]$ 等于 $\mathcal{L}(H)$。

首先，若 H 是 P_1 的一个面，且不等于 F、H_1、.....、H_d，或者若 H 是 P_2 的一个面，且不包含 v，则由引理 4.11， $[\hat{0}, H]$ 在 $\mathcal{L}$ 中的区间等于 $\mathcal{L}(H)$。对于 $1 \leq k \leq d$， H_k 和 H'_k 都是（$d-i$）-单纯的（$i-1$）-单纯的（$d-1$）-多胞体。特别地，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H_k)^- &= \mathcal{L}(H_k) \backslash \{\sigma : \sigma \subseteq F \backslash u_k,\ \dim \sigma \geq (d-1)-(i-1) = d-i\}, \\ \mathcal{L}(H'_k)^- &= \mathcal{L}(H'_k) \backslash \{\sigma : v \in \sigma,\ u'_k \notin \sigma,\ \dim \sigma < (d-1)-(i-1) = d-i\}. \end{aligned}$$

因此，在 $\mathcal{L}(P_1)^-$ 中计算得到的 $[0, H_k]$ 为 $\mathcal{L}(H_k)^-$，而在 $\mathcal{L}(P_2)^-$ 中计算得到的 $[0, H'_k]$ 为 $\mathcal{L}(H'_k)^-$。于是，归纳假设推出 $[\hat{0}, H_k \triangleright H'_k]$ 在 $\mathcal{L}$ 中的区间等于 $\mathcal{L}(H_k \triangleright H'_k)$。这证明了 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P_1 \triangleright P_2)$。 □

定理 4.12 的一个应用是关于 $P_1 \triangleright P_2$ 的 f-数的如下结果。

推论4.13。设 $d \geq 2$ 和 $1 \leq i \leq d-1$。设 P_1 和 P_2 是 $(d-i)$-单纯的 i-单纯d-多胞体，它们可以沿着 P_1 的单纯形面 F 和 P_2 的简单顶点 v 合并。那么对所有的 $0 \leq j \leq d-1$， $f_j(P_1 \triangleright P_2) = f_j(P_1) + f_j(P_2) - \binom{d+1}{j+1}$。

证明：首先假设 $0 \leq j \leq d-i-1$。根据 $\mathcal{L}(P_1 \triangleright P_2)$ 的定义，F 的每个 j-面（即 $\{u_1, \ldots, u_d\}$ 的每个 $(j+1)$-子集）都与 F' 中相应的 j-面（即 $\{u'_1, \ldots, u'_d\}$ 中相应的 $(j+1)$-子集）对应。此外，所有包含 v 的 P_2 的 j-面（即所有包含 v 的 $\{v, u'_1, \ldots, u'_d\}$ 的 $(j+1)$- 子集）都从 $\mathcal{L}(P_1 \triangleright P_2)$ 中移除。因此

$$f_j(P_1 \triangleright P_2) = f_j(P_1) + f_j(P_2) - \binom{d}{j+1} - \binom{d}{j} = f_j(P_1) + f_j(P_2) - \binom{d+1}{j+1}.$$

同样，对于 $d-i \leq j \leq d-1$，根据 $\mathcal{L}(P_1 \triangleright P_2)$ 的定义，包含在 F 中的 P_1 的所有 j-面（即 $\{u_1, \ldots, u_d\}$ 的 $(j+1)$-子集）都从 $\mathcal{L}(P_1 \triangleright P_2)$ 中移除；而对于 $[d]$ 的每个 $(d-j)$-子集 S， $\cap_{k \in S} H_k$ 这个 j-面与 $\cap_{k \in S} H'_k$ 这个 j-面相重合。因此，$f_j(P_1 \triangleright P_2) = f_j(P_1) + f_j(P_2) - \binom{d}{j+1} - \binom{d}{d-j} = f_j(P_1) + f_j(P_2) - \binom{d+1}{j+1}$. □

5 应用：第一部分

5.1 小值情况下的无限族 $(d-i)$-单纯的 i-简单多胞体 d

本节的目标是对较小的d值，以肯定的方式回答问题 4.8。我们的出发点是在 E_8 群的对称性下构造的均匀 8-多胞体 2_{41} 。（它最早由 Gosset 和 Elte 发现；另见 [6, 第 11]节。）这个多胞体有 17280 个单纯形面，且它是 4-单纯形的和 4-简单的。多胞体 2_{41}产生以下 7-多胞体:

- 2_{41} 的每个非单纯形面都是 7-多胞体 2_{31}。它是 4-单纯形的、3-简单的，并且有 576 个单纯形面。
- 2_{41} 的每个顶点图都是 7-半立方体。

回忆一下， d-半立方体的定义如下（参见 [8, 习题 4.8.18]）。考虑d-立方体 $C_d = [0,1]^d$。对于 C_d 中坐标里 1 的个数为偶数的每个顶点 v ，沿着包含与 v相邻的所有顶点 d 的超平面截断 C_d 。所得的多胞体称为 d-半立方体；记作 Q_d。这个多胞体具有以下性质：

- 当 $d > 4$、 Q_d 恰有 2^{d-1} 个单纯形面（这些面由截切超平面定义），以及 $2d$ 个非单纯形面（这些面是截切 C_d 的面后得到的）。此外，在 Q_d 中，没有两个单纯形面彼此相邻。
- 当 $d \geq 4$ 时， Q_d 是 3-单纯形的且为 $(d-3)$-单纯的。

现在我们可以证明本小节的主要结果：

定理 5.1。对于 $\{(i,d)$ 中的每个元素： $2 \leq i \leq d-2 \leq 6\} \backslash \{(3,8)$、$(5,8)\}$，都存在一个无限族的 ($d-i$)-单纯形的 i-单纯的 d-多胞体，其中每一个都具有一个单纯形面以及一个不在该面上的简单顶点。

证明：考虑对偶多胞体后，只需证明关于 $i \leq d/2 \leq 4$ 的陈述。 $i = 2$ 和任意 $d \geq 4$ 的情形将在第 6 节中讨论。现在我们指出，对于 $i = 2$ 和 $d = 4$，将推论 4.7 应用于 P_9 即可得到该结果。（关于 P_9 的各面的描述，见构造 6.1。）考虑 $i = 3$ 和 $d = 6$ 的情形。由于 Q_6 和 Q_6^* 都是 3-单纯形的 3-单纯的，并且由于 Q_6 具有一个单纯形面（事实上有 32 个），而 Q_6^* 具有一个简单顶点（事实上有 32 个），因此 Q_6 和 Q_6^*、 $P = Q_6 \triangleright Q_6^*$ 的合并是良定义的；此外， P 具有一个单纯形面 F 和一个不包含于 F 中的简单顶点v 。因此，推论 4.7 适用于 P ，并得到所需的 3-单纯形的 3-单纯的 6-多胞体的无限族。类似地，在 $i = 3$ 和 $d = 7$ 的情形下，将推论 4.7 应用于 $P = 2_{31} \triangleright Q_7^*$。最后，在 $i = 4$ 和 $d = 8$ 的情形下，将推论 4.7 应用于 $P = 2_{41} \triangleright 2_{41}^*$。□

定理 5.1 的证明为问题 4.8 提供了以下部分答案 .

推论 5.2. 设 $2 \leq i \leq 4$。存在一个由 i-单纯的 i-简单$2i$-多胞体组成的无限族，其中每个多胞体都有一个单纯形面和一个不在该面上的简单顶点。

5.2 自对偶多胞体

Kalai [10, 问题 19.5.24] 询问，对于哪些 i 和 d ，存在除 d-单纯形以外的自对偶 i-单纯d-多胞体。本节余下部分中，假设 $d = 2i$

并考虑一个带有单纯形面 $F = [u_1, \ldots, u_{2i}]$ 的 i-单纯 i-单纯的 $2i$-多胞体 P。和之前一样，假设 H_1，$\ldots$，H_d 是与 F 相邻的 P 的面，其中 $H_k \cap F = [u_1, \ldots, \widehat{u_k}, \ldots, u_d]$。令 $\phi\colon \mathcal{L}(P) \to \mathcal{L}(P^*)$、$\phi\colon \mathcal{L}(P^*) \to \mathcal{L}(P)$ 为面格上的反序双射。则 P^* 是一个带有简单顶点 $v := \phi(F)$ 的 i-单纯 i-单纯的 $2i$-多胞体。v 的邻点为 $u'_k := \phi(H_k)$，其中 $1 \le k \le d$。令 H'_k 为由棱 vu'_1、$\ldots$、vu'_k、$\ldots$、vu'_d 确定的 P^* 的面$\frown$。换言之，$H'_k = (\vee_{j \in [d]\setminus k} u'_j) \vee v$，因此

$$\phi(H'_k) = \left(\wedge_{j\in[d]\setminus k}\phi(u'_j)\right) \wedge \phi(v) = \left(\wedge_{j\in[d]\setminus k} H_j\right) \wedge F = u_k.$$

下一个命题是构造自对偶 i-单纯的 i-单纯的$2i$-多胞体的主要工具。我们沿用上一段中引入的假设和记号。

命题 5.3. 沿着 $F = [u_1, \ldots, u_d]$ 和 v 合并 P 和 P^*（其邻点按 u'_1,... , u'_d 排序），得到的是一个自对偶多胞体。

证明：映射 $\phi\colon \mathcal{L}(P) \to \mathcal{L}(P^*)$ $\mathcal{L}(P^*) \to \mathcal{L}(P)$ 在 $\mathcal{L}(P) \sqcup \mathcal{L}(P^*)$ 上给出了一个序反转对合。由于 $\phi(H_k) = u'_k$ 和 $\phi(H'_k) = u_k$，因此对于 $S \subseteq [d]$，

$$\phi(\vee_{k\in S} u_k) = \wedge_{k\in S} H'_k, \quad \phi(\vee_{k\in S} u'_k) = \wedge_{k\in S} H_k. \tag{5.1}$$

特别地，ϕ 将 F 的 ℓ-面映射为包含 v 的 $(d-\ell-1)$-面。由于 $d = 2i$，可知 ϕ 在 $\mathcal{L}(P)^- \sqcup \mathcal{L}(P^*)^-$ 上诱导出一个序反转对合。此外，根据 (5.1)，该对合下降为商 $\mathcal{L}$ 上的序反转对合，该商在定义 4.10 中进行了描述。因此 $\mathcal{L}$ 是一个自对偶格。由定理 4.12，$\mathcal{L} = \mathcal{L}(P \triangleright P^*)$，故结论成立。□

定理 5.4。对于所有 $2 \le i \le 4$，都存在一个由自对偶 i-单纯$2i$-多胞体组成的无限族。

证明：设 $2 \le i \le 4$。根据推论 5.2，存在一个由 i-单纯的i-单纯 $2i$-多胞体组成的无限族，其中每个多胞体都有一个单纯形面。对该无限族应用命题 5.3，即得结论。□

6 应用：第二部分

本节致力于研究所有 $d \ge 4$ 的 $(d-2)$-二拟单纯 2-简单 d-多胞体。我们证明，对于这些参数取值，问题 4.8 的答案是肯定的；事实上，对于每个 $d \ge 4$，都存在 $2^{\Omega(N)}$ 种组合类型的 $(d-2)$-二拟单纯 2-简单 d-多胞体，其顶点数至多为 N，且每个多胞体都具有一个单纯形面和一个简单顶点。第6.1节重点介绍针对 $d = 4$ 的若干构造；第6.2节则讨论一般情形。

6.1 重新审视2-单纯2-简单4-多胞体

根据 Paffenholz 和 Werner 的一项结果 [12], ，存在无限族二拟单纯、2-单纯的 4-多胞体，每个多胞体都具有一个单纯形面和一个简单顶点。这肯定地回答了维数为 $d = 4$ 时的问题 4.8。

在本节中，我们将介绍替代性的（且更加对称的）构造。我们首先重新审视 [12] 中的构造，即具有九个顶点的唯一2-单纯2-简单4-多胞体，并以一种有助于我们在第6.2节中构造 P_9 的高维类比物的方式来阐述它。随后，我们将介绍另一种具有高度对称性的、拥有18个顶点的2-单纯2-简单4-多胞体构造，该构造似乎是新的。通过对所有自然数 $k \geq 2$ 合并 k 个 P_9 （分别为 P_{18}）的副本，可以得到所承诺的无限族。交叉多胞体在我们的构造中占有突出地位，我们常将其缩写为CP。（点位于某个面之外或之下的概念定义于[8,第 78]页。）

构造 6.1。为构造 P_9，从一个正则4-单纯形 Σ 开始：$= [u'_1, u'_2, u'_3, u'_4, u'_5]$。现在按以下方式添加顶点 u_1、u_2、u_3、v_2 。（我们以这种方式标记顶点的原因将在第6.2节中变得清楚。）对于 $i = 1$、2、3，将 u_i 置于 Σ 的面$\Sigma\backslash u'_i$ 的仿射包中，使其位于2-面 $\Sigma\backslash u'_i u'_5$ 之外，并使 $[u_1, u_2, u_3, u'_1, u'_2, u'_3]$成为一个3-交叉多胞体；参见下文定义6.8。（因此， u_i 可以看作 $[u'_j, u'_k, u'_\ell]$的重心的一种扰动，其中 $\{i, j, k, \ell\} = [4]$。）然后，将 v_2 置于 $[u'_1, u'_4, u_2, u_3]$、$[u'_2, u'_4, u_1, u_3]$和 $[u'_3, u'_4, u_1, u_2]$ 的仿射包的交集上（该交集是一条直线），并使其位于超平面 aff(u'_4、u_1、u_2、u_3)之外；参见定义6.7和6.9。（因此， v_2 是 $[u_1, u_2, u_3, u'_4]$的重心的一种特殊扰动。）

所得多胞体有九个顶点 $\{v_2, u_1, u_2, u_3, u'_1, \ldots, u'_5\}$；此外，令 $v_1 = u'_4$ 也很方便。图 2 展示了 $P'_9 = \text{conv}(V(P_9)\backslash u'_5)$ 的施莱格尔图的一部分。 P_9 的完整面列表如下（参见引理 6.10）：

1. 一个 CP，其对跖面为 $[u_1, u_2, u_3]$ 和 $[u'_1, u'_2, u'_3]$ （以蓝色标出），以及一个单纯形 $[u'_1, u'_2, u'_3, u'_5]$；2. 三个双锥 $[u_1, u'_5, u'_2, u'_3, u'_4]$、$[u_2, u'_5, u'_1, u'_3, u'_4]$ 和 $[u_3, u'_5, u'_1, u'_2, u'_4]$，其悬接顶点对分别为 (u_1, u'_5)、(u_2, u'_5) 和 (u_3, u'_5)；3. 另外三个双锥 $[v_2, u'_1, u_2, u_3, v_1]$ （以紫色标出）、 $[v_2, u'_2, u_1, u_3, v_1]$ 和 $[v_2, u'_3, u_1, u_2, v_1]$，其悬接顶点对分别为 (v_2, u'_1)、(v_2, u'_2) 和 (v_2, u'_3)；4. 另一个单纯形 $[v_2, u_1, u_2, u_3]$ （以橙色标出）。

面的列表表明， P_9 是二拟单纯的。 P_9 的 f-向量是对称的，即$f(P_9)$ $=(9, 26, 26, 9)$。因此，根据推论 3.2， P_9 也是2-简单的。此外， P_9 有两对由单纯形面和不在该面上的简单顶点组成的对象：$([v_2, u_1, u_2, u_3], u'_5)$ 和

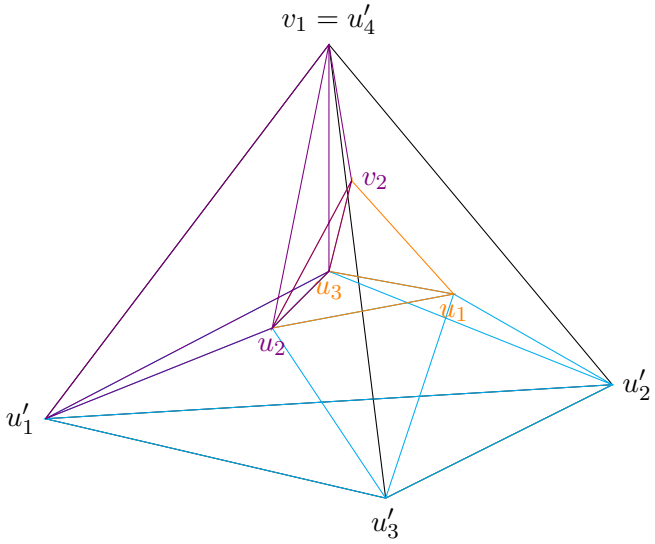

图2： P'_9的施莱格尔图的部分。

$([u'_1, u'_2, u'_3, u'_5], v_2)$. 取两个 P_9, P'_9和 P''_9 的副本，并考虑沿 $[v_2, u_1, u_2, u_3]$ 对来自 P'_9 和来自 P''_9 的 $P'_9 \triangleright P''_9$ 进行合并。由于包含 u'_5 的 P_9 的面由一个单纯形和三个双锥组成，取决于我们列出 u'_5 的邻点的顺序， P'_9 的交叉多胞体面将与一个 3-单纯形或与 P''_9 的一个双锥合并，从而产生两种不同的 2-单纯二拟单纯4-多胞体组合类型；每种类型都具有一个单纯形面和一个不在该面上的简单顶点。这个观察将使我们能够构造出数量随顶点数呈指数增长的 2-单纯二拟单纯4-多胞体。我们将在构造出适用于所有 $d \geq 4$ 的 P_9 的 d 维类比之后，在第6.2节回到这一讨论（并提供更多细节）；参见定理 6.13 和注记6.14。

与 P_9 合并会如何影响 f-数? 设 Q 是一个具有单纯形面的2-单纯2-简单4-多胞体，并且有一个不在此面上的简单顶点（例如，$Q = P_9$）。那么 $P_9 \triangleright Q$ 和 $Q \triangleright P_9$ 都有定义，根据推论4.13,

$$\begin{aligned} f(P_9 \triangleright Q) - f(Q) = f(Q \triangleright P_9) - f(Q) &= f(P_9) - \left(\binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4} \right) \\ &= (9, 26, 26, 9) - (5, 10, 10, 5) = (4, 16, 16, 4). \end{aligned}$$

回顾一下，2-单纯4-多胞体的托里克 g_2-数由 $g_2^{\text{toric}} = f_1 - 4f_0 + 10$给出，并且任何满足 $g_2^{\text{toric}} = 0$ 的多胞体都称为初等多胞体。由此可知，P_9 是一个初等多胞体，并且 $g_2^{\text{toric}}(P_9 \triangleright Q) = g_2^{\text{toric}}(Q \triangleright P_9) = g_2^{\text{toric}}(Q)$。换言之，如果 Q 也是一个初等多胞体，那么 $P_9 \triangleright Q$ 和 $Q \triangleright P_9$也都是初等多胞体。（初等多胞体在下界定理中发挥着重要作用，见 [9]。）

值得指出的是，如果对 Q 应用 [12,第 3.2], 节中的第二种构造，所得多胞体 $\mathcal{I}^2(Q)$ 与 $f(P_9 \triangleright Q) = f(Q \triangleright P_9)$ 具有相同的 f-向量；见 [12, 定理 3.7]。与此同时，多胞体 $P_9 \triangleright Q$ 和 $Q \triangleright P_9$ 都不同于 $\mathcal{I}^2(Q)$。事实上，与 P_9进行连通和时，无论在左侧还是右侧，总会生成一个面（由 P_9的交叉多胞体面贡献），该面同构于 CP，或同构于 CP 与另一个3-多面体的连通和；而在 [12], 的第二种构造中，所有新面都是堆叠3-多面体，其顶点数分别为4、5或6。

我们的下一个任务是描述另一个高度邻接的二拟单纯2-简单4-多胞体，它具有一个单纯形面和一个简单顶点。该多胞体有18个顶点，我们将其记为 P_{18}。

构造6.2。我们从 $\mathbb{R}^3$ ×中的一个正则3-单纯形 $F = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ 开始。具体而言， $\{0\}$. 令

$$v_1 = (0,0,0,0),\ v_2 = (2,2,0,0),\ v_3 = (2,0,2,0),\ v_4 = (0,2,2,0). \tag{6.1}$$

定义 对某个 $h > 0$, 令$u = (1, 1, 1, h)$。令 $0 < \epsilon \ll 1$。对于所有互不相同的 $1 \le i$、 j、 $k \le 4$，有 t

$$u_{ji,k} = u_{ij,k} = \frac{1}{2}(v_i + v_j) + \epsilon(u + v_k - v_i - v_j).$$

也就是说,

$$u_{12,3} = (1+\epsilon, 1-\epsilon, 3\epsilon, h\epsilon),\ u_{12,4} = (1-\epsilon, 1+\epsilon, 3\epsilon, h\epsilon),\ u_{13,2} = (1+\epsilon, 3\epsilon, 1-\epsilon, h\epsilon),$$

$u_{13,4} = (1-\epsilon, 3\epsilon, 1+\epsilon, h\epsilon)$ $u_{14,2} = (3\epsilon, 1+\epsilon, 1-\epsilon, h\epsilon)$ $u_{14,3} = (3\epsilon, 1-\epsilon, 1+\epsilon, h\epsilon)$,$u_{23,1} = (2-3\epsilon, 1-\epsilon, 1-\epsilon, h\epsilon)$ $u_{23,4} = (2-3\epsilon, 1+\epsilon, 1+\epsilon, h\epsilon)$ $u_{24,1} = (1-\epsilon, 2-3\epsilon, 1-\epsilon, h\epsilon)$,$u_{24,3} = (1+\epsilon, 2-3\epsilon, 1+\epsilon, h\epsilon)$ $u_{34,1} = (1-\epsilon, 1-\epsilon, 2-3\epsilon, h\epsilon)$ $u_{34,2} = (1+\epsilon, 1+\epsilon, 2-3\epsilon, h\epsilon)$.

注意，每个 $u_{ij,\ k}$都可以看作是 $[v_i, v_j]$的重心的一种特定扰动，并且该扰动使其仍位于由 $[u, v_i, v_j, v_k]$定义的超平面内。还要注意，顶点集$\{u_{1i,j} : \ \{i,j\} \in \{2,3,4\}\}$ 构成一个六边形 H_1，它位于仿射2-空间 $x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 3\epsilon, x_4 = h\epsilon$. 类似地，顶点集

$$\{u_{2i,j} : \{i,j\} \in \{1,3,4\}\},\ \{u_{3i,j} : \{i,j\} \in \{1,2,4\}\},\ \text{and}\ \{u_{4i,j} : \{i,j\} \in \{1,2,3\}\}$$

分别在由下列对象定义的平面内构成六边形 H_2, H_3, H_4

$$\{x_1 + x_2 - x_3 = 2 - 3\epsilon,\ x_4 = h\epsilon\}, \quad \{x_1 - x_2 + x_3 = 2 - 3\epsilon,\ x_4 = h\epsilon\}, \quad \text{and}$$
$$\{-x_1 + x_2 + x_3 = 2 - 3\epsilon,\ x_4 = h\epsilon\},$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{aff}(v_1 \cup H_1) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ :\ -h\epsilon(x_1 + x_2 + x_3) + (2 + 3\epsilon)x_4 = 0\},\\
\operatorname{aff}(v_2 \cup H_2) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ :\ h\epsilon(x_1 + x_2 - x_3) + (2 + 3\epsilon)x_4 = 4h\epsilon\},\\
\operatorname{aff}(v_3 \cup H_3) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ :\ h\epsilon(x_1 + x_3 - x_2) + (2 + 3\epsilon)x_4 = 4h\epsilon\},\\
\operatorname{aff}(v_4 \cup H_4) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ :\ h\epsilon(x_2 + x_3 - x_1) + (2 + 3\epsilon)x_4 = 4h\epsilon\}.
\end{aligned}$$

交 这四个超平面的交点为 $(1, 1, 1, \frac{3h\epsilon}{2+3\epsilon})$；我们将其记为 w。

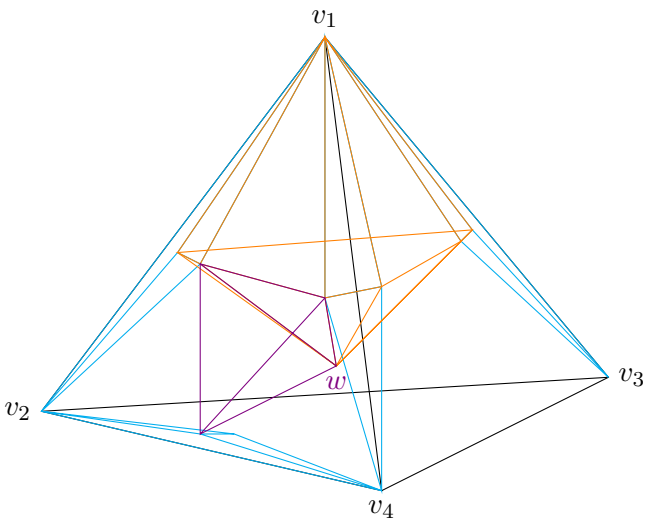

图3： P'_{18}的施莱格尔图局部。

定义 P'_{18} 为全部17个顶点 $\{w, v_1, \ldots, v_4, u_{ij,k}$ 的凸包： $1 \le i, j, k \le 4\}$。当 ϵ 非常小时，多胞体 P'_{18} 有以下19个面（部分施莱格尔图见图3）。我们使用 $\epsilon = 0.05$, $h = 2$ 并借助软件 SAGE 验证了这个列表。

1. 六个形如 $[v_i, v_j, u_{ij,k}, u_{ij,m}]$ 的单形，其中 $\{i, j, k, m\} = [4]$。其中四个的一部分在图3中以蓝色显示。2. 四个形如 $[u_{ij,k}, u_{ik,j}, u_{jk,i}, w]$ 的单形，其中 $1 \le i$、j、$k \le 4$ 互不相同。图3中以紫色显示了其中一个这样的单形。3. 单形 $[v_1, v_2, v_3, v_4]$。4. 四个形如 $[v_i, w, u_{ij,k}, u_{ij,m}, u_{ik,j}, u_{ik,m}, u_{im,j}, u_{im,k}]$ 的多胞体。每个都是以 H_i 为底的悬挂，悬接顶点为 v_i 和 w。（这里 $\{i, j, k, m\} = [4]$。）图3中以橙色显示了其中一个这样的多胞体。5. 四个形如 $[v_i, v_j, v_k, u_{ij,k}, u_{ik,j}, u_{jk,i}]$ 的交叉多胞体，其中 $1 \le i$、j、$k \le 4$ 互不相同。

为了完成 P_{18} 的构造，我们对 P'_{18} 施加射影变换 π，以确保 $G = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ 的相邻面，即上一项中的四个交叉多胞体，在 G 之外的点 w' 相交。我们令 $P_{18} =$ 凸包$(\pi(P'_{18}) \cup w')$。于是， G 不是 P_{18} 的一个面，并且每个面 $[v_i, v_j, v_k, u_{ij,k}, u_{ik,j}, u_{jk,i}]$ 都被其与 $[v_i, v_j, v_k, w']$ 的连通和所替代。可以验证， $f(P_{18}) = (18, 64, 64, 18)$。由于 P_{18} 是一个具有 $f_1 = f_2$ 的 2-单纯 4-多胞体，根据推论 3.2 可知， P_{18} 也是 2-简单的。直接计算表明， $g_2^{\text{toric}}(P_{18}) = 2$。换言之， P_{18} 不是初等的。

注意到 P_{18} 有一个简单顶点 w'，以及许多不包含 w'的单纯形面（见列表中的第一项）。因此，我们可以不断地将 P_{18} 与自身合并，从而得到一个无限序列的二拟单纯2-简单4-多胞体，每个多胞体都至少有一个单纯形面和一个简单顶点。根据推论4.13，合并 $k \geq 1$ 个 P_{18} 副本得到的任何多胞体都将有 $5 + 13k$ 个顶点和 $g_2^{\text{toric}} = 2k$。其他一些二拟单纯2-简单4-多胞体族中，第 k个多胞体具有 $g_2^{\text{toric}} = 2k$（但 $f_0 = 10 + 4k$），这些族是在[13,推论4.2]中构造的。

作为本节的结尾，我们提出以下问题。

问题6.3。是否存在一列逼近单位球的二拟单纯2-简单4-多胞体?

鉴于 [1, 定理 3.2],，自然会猜想，若存在这样的4-多胞体序列$\{Q_i\}$，则 $\lim_{i\to\infty} g_2^{\text{toric}}(Q_i) = \infty$。

6.2 许多 $(d-2)$-拟单纯2-简单 d-多胞体

本节中，我们为所有 $d \geq 4$构造一个 d维的 P_9 类比。随后，我们利用这个多胞体以及推论 4.7，证明存在 $2^{\Omega(N)}$ 种组合类型的$(d-2)$-拟单纯2-简单 d-多胞体，它们至多有 N个顶点，并且具有另一项性质：每个多胞体都有一个单纯形面和一个简单顶点。

与第6.1节一样，我们经常用到 d 维和 $(d-1)$ 维交叉多胞体，并将它们简称为 CP。首先，我们引入伪正则CP的概念，并证明它的一些性质。令 0 表示 $\mathbb{R}^{d-1}$ 的原点。

定义 6.4. 设 $G \subset \mathbb{R}^{d-1}$ 是以原点为中心的正则 $(d-1)$-单纯形，设 $G^* \subset \mathbb{R}^{d-1}$ 是 G 的对偶，且设 $\alpha > 0$ 为实数。还假设 G 包含于 αG^* 的内部，记作 int(αG^*)。若一个 d-交叉多胞体与 conv($G \times \{1\} \cup \alpha G^* \times \{-1\}$) 全等，则称其为伪正则。

考虑一个以原点为中心的正则单纯形 $G = [\mu_1, \ldots, \mu_d] \subset \mathbb{R}^{d-1}$，并令 $\alpha > 0$。那么 $\alpha G^* = [\mu_1', \ldots, \mu_d'] \subset \mathbb{R}^{d-1}$ 也是一个以原点为中心的正则单纯形。我们对顶点进行如下标记，使得 μ_i' 是 G的面 $[\mu_1, \ldots, \widehat{\mu_i}, \ldots, \mu_d]$的外法向量。根据我们对 G 的假设，这等价于对顶点进行标记，使得对于所有 $i \in [d]$，$\mu_i' = a\sum_{j\in[d]\setminus i} \mu_j = -a\mu_i$，其中 a 是一个与 i无关的正标量。

对于 $[d]$的非空子集 I，设 $i \in I]$ 为 G 的一个面，$i \in I]$为 αG^*的一个面；设 $\beta_I = \frac{1}{|I|}\sum_{i\in I} \mu_i$ 为 G_I 的重心，$\beta_I' = \frac{1}{|I|}\sum_{i\in I} \mu_i'$ 为 G_I'的重心。由于对于所有 $i \in [d]$、$\mu_i' = a\sum_{j\in[d]\setminus i} \mu_j = -a\mu_i$，可得对于任意真子集 $I \subset [d]$，$\sum_{i\in I} \mu_i = -\frac{1}{a}\sum_{i\in I} \mu_i' = \frac{1}{a}\sum_{j\in[d]\setminus I} \mu_j'$。因此，$\beta_I$ 是 $\beta'_{[d]\setminus I}$的正倍数，所以从 0 出发经过 β_I 的射线与从 0 出发经过 $\beta'_{[d]\setminus I}$的射线重合。此外，由于 G 是正则的，从 0 到 β_I 的距离对所有 $[d]$的 k-子集 I 都相同；我们将其记为 ρ_k，并注意到 $\rho_1 > \cdots > \rho_{d-1}$。类似地，对于所有

$[d]$ 的 k-子集 J，从 0 到 β'_J 的距离均为同一个数 ρ'_k，其中 $\rho'_1 > \cdots > \rho'_{d-1}$。最后，由于 $G \subset \mathsf{int}(\alpha G^*)$，$\rho'_{d-1} > \rho_1$。综上，

$$\rho'_1 > \cdots > \rho'_{d-1} > \rho_1 > \cdots > \rho_{d-1}. \tag{6.2}$$

考虑 d-交叉多胞体 $\mathsf{CP} = \mathsf{conv}(G \times \{1\} \cup \alpha G^* \times \{-1\})$。我们将 CP 的顶点标记为 $u_j = (\mu_j, 1)$ 和 $u'_j = (\mu'_j, -1)$（对于 $j = 1, \dots, d$），使得 $G \times \{1\} = [u_1, \dots, u_d]$ 和 $\alpha G^* \times \{-1\} = [u'_1, \dots, u'_d]$。对于 $[d]$ 的一个子集 I，我们将 $G_I \times \{1\}$ 的重心记为 b_I，并将 $G'_I \times \{-1\}$ 的重心记为 b'_I。最后，我们令 H_I 表示 $\mathbb{R}^d$ 中由以下 d 个点确定的超平面：$\{u_i : i \in I\} \cup \{u'_j : j \in [d] \backslash I\}$。

引理 6.5。设 $0 \le k \le d$。所有超平面 H_I（其中 $I \subseteq [d], |I| = k$）都与 x_d-轴交于同一点。当 $0 < k < d$ 时，该点的第 d 个坐标为 > 1。

证明：首先注意到，$H_{[d]}$ 和 $H_\emptyset$ 分别与 x_d-轴相交于 $d := (0, \dots, 0, 1)$ 和 $-\mathbf{e}_d$。现在，设 I 为 $[d]$ 的任意 k-子集，其中 $1 \le k \le d-1$。考虑点 b_I 和 $b'_{[d]\backslash I}$。它们都位于 H_I 中，因此直线 $\ell = \mathsf{aff}(b_I, b'_{[d]\backslash I})$ 也位于其中。

我们断言 ℓ 与 x_d 轴相交。因此，

$$H_I \cap x_d\text{-axis} = \ell \cap x_d\text{-axis}.$$

为了证明这一断言，考虑直线 $\mathsf{aff}(\mathbf{e}_d, b_I)$ 和 $\mathsf{aff}(-\mathbf{e}_d, b'_{[d]\backslash I})$。根据定义 6.4 后面的讨论，这两条直线平行，因此确定一个二维平面 $\mathcal{L}$。在证明的其余部分中，我们都在该平面内进行讨论。该平面包含 ℓ 和 x_d-轴。此外，由于 β_I 是 $\beta'_{[d]\backslash I}$ 的正倍数，因此点 b_I 和 $b'_{[d]\backslash I}$ 位于 $\mathcal{L}$ 中 x_d-轴的同一侧。最后，由于 b_I 到 x_d-轴的距离为 ρ_k，$b'_{[d]\backslash I}$ 到 x_d-轴的距离为 ρ'_{d-k}，且 $\rho'_{d-k} > \rho_k$，因此可知 ℓ 与 x_d-轴不平行。因此，它们相交，且交点记为 $a_I = (0, \dots, 0, c_I)$，满足 $c_I > 1$。这就证明了该断言。

为完成引理的证明，还需证明 c_I 仅取决于 $|I| = k$。事实上，考虑三角形 $[a_I, \mathbf{e}_d, b_I]$ 和 $[a_I, -\mathbf{e}_d, b'_{[d]\backslash I}]$。它们相似，因此，

$$\frac{c_I - 1}{\rho_k} = \frac{\mathrm{dist}(a_I, \mathbf{e}_d)}{\mathrm{dist}(\mathbf{e}_d, b_I)} = \frac{\mathrm{dist}(a_I, -\mathbf{e}_d)}{\mathrm{dist}(-\mathbf{e}_d, b'_{[d]\backslash I})} = \frac{c_I + 1}{\rho'_{d-k}}.$$

解这个方程可得 $c_I = \frac{\rho'_{d-k} + \rho_k}{\rho'_{d-k} - \rho_k}$。结论得证。 □

设 $0 \le k \le d$。根据引理 6.5，我们将 a_k 记作 H_I 与 x_d 轴的交点，其中 I 是 $[d]$ 中任意一个大小为 k 的子集，并将 $c_k := \frac{\rho'_{d-k} + \rho_k}{\rho'_{d-k} - \rho_k}$ 记作 a_k 的最后一个坐标；维数为 3 时的示意图见图 4。

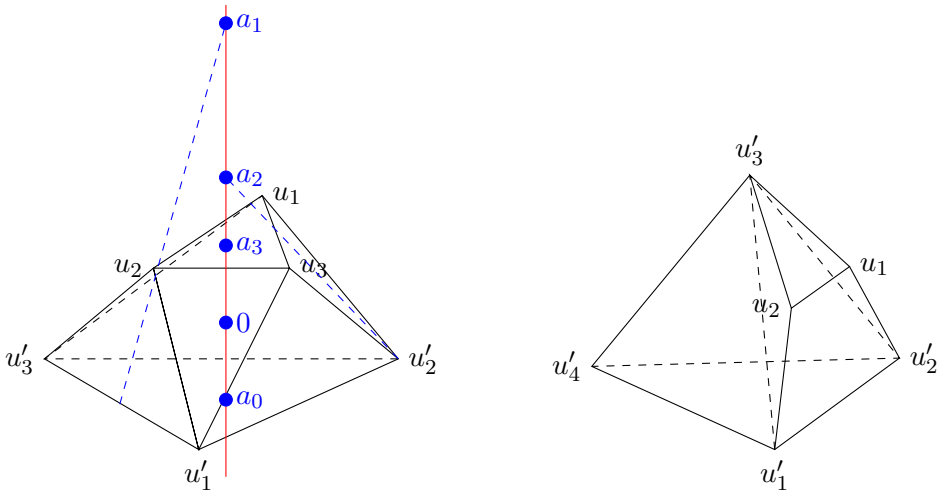

图 4：左：一个三维伪正则CP及点 $\{a_0,\dots,a_3\}$。右：多胞体 $P^{3,\ 1}$。

推论6.6。点 $a_1,\dots,a_d$ 的高度满足 $c_1 > \cdots > c_{d-1} > c_d = 1$。特别地，如果 q 是 x_d 轴上严格位于 a_{k-1} 与 a_k 之间的一个点，那么当 $|I| \le k-1$ 时，q 位于 CP 的面 $H_I = [u_i, u'_j:\ i \in I, j \in [d]\backslash I]$ 之下；当 $|I| \ge k$ 时，则位于面 H_I 之外。

证明：由方程（6.2），对所有 $1 \le k \le d-1$, $\rho'_{d-k} - \rho_k > 0$ 均成立。因此 $c_k = \frac{\rho'_{d-k}+\rho_k}{\rho'_{d-k}-\rho_k} > 1 = c_d$。此外，对于 $2 \le k \le d-1$,

$$\begin{aligned} c_k - c_{k-1} &= \frac{\rho'_{d-k}+\rho_k}{\rho'_{d-k}-\rho_k} - \frac{\rho'_{d-k+1}+\rho_{k-1}}{\rho'_{d-k+1}-\rho_{k-1}} \\ &= 2\left(\frac{\rho_k}{\rho'_{d-k}-\rho_k} - \frac{\rho_{k-1}}{\rho'_{d-k+1}-\rho_{k-1}}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{\frac{\rho'_{d-k}}{\rho_k}-1} - \frac{1}{\frac{\rho'_{d-k+1}}{\rho_{k-1}}-1}\right) < 0, \end{aligned}$$

其中，最后一步由 $\rho'_{d-k} > \rho'_{d-k+1} > \rho_{k-1} > \rho_k$ 这一事实得出；参见方程（6.2）。 □

定义 6.7. 设 CP $=\mathrm{conv}(G \times \{1\} \cup \alpha G^* \times \{-1\})$ 是一个伪正则 d-交叉多胞体。集合 $\{a_k = \cap_{I\subset[d],|I|=k} H_I :\ 1 \le k \le d\}$ 称为与 CP 关联的点序列。

我们构造一个$(d-2)$-单纯的 2-简单多面体，首先从定义 6.8 中描述的某个 d-多胞体 $P^{d,1}$ 开始，然后通过递归地向 $P^{d,1}$ 添加总共 $d-3$ 个额外顶点来完成；图 4 展示了 $P^{3,1}$的示意图。正如我们将在下文看到的，$P^{d,1}$ 的一个面是伪正则 CP（维数为 $d-1$）。稍微滥用一下记号，我们继续将该面的顶点标记为 $u_1,\ldots,u_{d-1},u'_1,\ldots,u'_{d-1}$。

定义 6.8. 设 $\Sigma=[u'_1,...,u'_{d+1}]$ 是一个正则 d-单纯形。任取一个 $0<\epsilon\ll \mathrm{dist}(u'_1,u'_2)$。对于 $1\le i\le d-1$，令 p_i 为 $(d-2)$-面 $\Sigma\backslash u'_iu'_{d+1}$ 的重心，并令 $u_i:=p_i+\epsilon(p_i-u'_{d+1})$。我们将 $P^{d,1}$ 定义为 $\mathrm{conv}(u'_1,\ldots,u'_{d+1},u_1,\ldots,u_{d-1})$。

由于 p_i 是（$d-2$）-面 $\Sigma\backslash u'_iu'_{d+1}$的重心，因此 $[p_1,\ldots,p_{d-1}]$ 是正则（$d-2$）-单纯形，而 $[p_1,\ldots,p_{d-1},u'_1,\ldots,u'_{d-1}]$ 是伪正则（$d-1$）-交叉多胞体。根据我们对 u_i的选择，$[u_1,\ldots,u_{d-1}]$ 是一个正则（$d-2$）-单纯形，它由$[p_1,\ldots,p_{d-1}]$ 先以（$1+\epsilon$）为缩放因子进行膨胀（其中 ϵ 很小），再沿着垂直于 $\mathrm{aff}(p_1,\ldots,p_{d-1},u'_1,\ldots,u'_{d-1})$ 的方向平移得到，且 $=\mathrm{aff}(\Sigma\backslash u'_{d+1})$。特别地，$\mathrm{aff}(u_1,\ldots,u_{d-1})$ 平行于 $\mathrm{aff}(u'_1,\ldots,u'_{d-1})$，并且 CP : $=[u_1,\ldots,u_{d-1},u'_1,\ldots,u'_{d-1}]$ 也是一个伪正则（$d-1$）-交叉多胞体。

这个讨论表明，多胞体 $P^{d,1}$ 是单纯形 Σ 与以 u'_d 为顶点、底面为交叉多胞体 CP 的棱锥（沿单纯形 $[u'_1,\ldots,u'_d]$粘合）之并。此外，对于每个 $1\le i\le d-1$，点 $\{u_i,u'_1,\ldots,u'_i,\ldots,u'_d,u'_{d+1}\}$ 位于同一个超平面上，并且在此超平面中，集合 $\mathrm{conv}(u_i,u'_{d+1})$ 和 $\mathrm{conv}(u'_1,\ldots,u'_i,\ldots u'_d)$ 的相对内部相交。对于 $1\le k\le d-1$，令 $\mathcal{H}_k$ 为 CP 的面 H 集合，其中 $|H\cap\{u_1,\ldots,u_{d-1}\}|=k$。（每个这样的 H都是 $P^{d,1}$的一个（$d-2$）维面。）另外，令$H^+:=H\cap[u_1,\ldots,u_{d-1}]$ 和 $H^-:=H\cap[u'_1,\ldots,u'_{d-1}]$。令 $v_0:=u'_{d+1}$ 和 $v_1:=u'_d$。由此可得，$P^{d,1}$ 有以下面:

1. 单纯形 $\Sigma\backslash u'_d$ 和伪正则交叉多胞体 CP。

2. 形式为 $\mathrm{conv}(H\cup\{v_0,v_1\})$ 的 $d-1$ 双锥，其中 $H\in\mathcal{H}_1$；此类面边界复形为 $\partial(V(H^+)\cup v_0)*\partial(V(H^-)\cup v_1)$。

3. 形如 凸包$(H\cup v_1)$ 的 $2^{d-1}-d$ 单纯形面，其中 $H\in\cup_{2\le k\le d-1}\mathcal{H}_k$。

特别是，CP 与 P^d 的所有其他面相邻，1。

由于 CP 是伪正则的，根据引理 6.5，存在一个与 CP 相关联的点序列（位于 aff(CP) 中）：$a_i=\cap_{F\in\mathcal{H}_i}$仿射包$(F)$，$1\le i\le d-1$；参见定义 6.7。点 $\{a_i:\ 1\le i\le d-1\}$ 全部位于经过 $b_{[d-1]}$的重心和 $[u_1,\ldots,u_{d-1}]$的重心的直线上，并且根据推论6.6，它们按照 a_1、...、a_{d-2}、a_{d-1}的顺序出现在这条直线上，其中 a_{d-2}距离 $a_{d-1}=b_{[d-1]}$最近，而 a_1距离 $b_{[d-1]}$最远。

现在我们可以给出本节的主要定义:

定义 6.9。考虑与 $P^{d,1}$ 的面 $\mathrm{CP}=[u'_1,\ldots,u'_{d-1},u_1,\ldots,u_{d-1}]$ 相关联的点序列 $\{a_i:\ 1\le i\le d-2\}$。令 $v_1=u'_d$。归纳地，对于 $2\le$

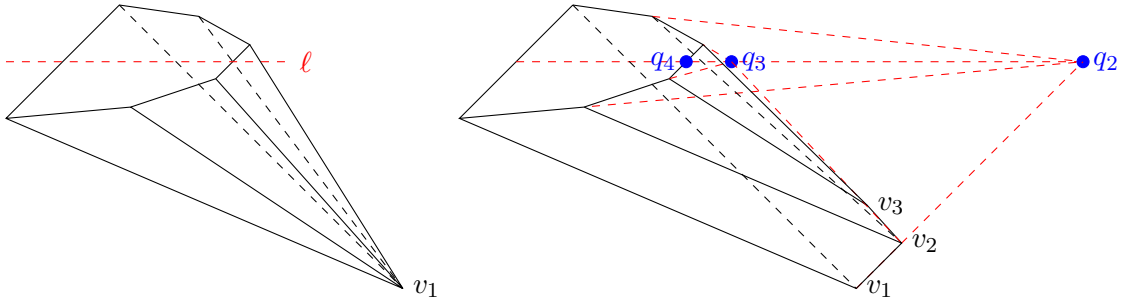

图 5：左：关于直线 ℓ对称的六边形上的棱锥 H 。右：通过添加顶点 v_2 和 v_3得到的新 3-多面体，其中 v_{i+1} 位于线段 $[q_{i+1}, v_i]$的内部；这里， q_{i+1} 是 H中相应对称边的仿射包的交点。

$i \leq d-2$，取线段 $[a_i, v_{i-1}]$ 相对内部中的一点 v_i，并令$P^{d,i}=$凸包$(P^{d,i-1} \cup v_i)$。最后，令 $P^d = P^{d,d-2}$。

图 5 展示了类似于定义 6.9 中所述的添加顶点过程，其中顶点被添加到六边形上的棱锥中。（遗憾的是，定义 6.9 本身只有在 $d \geq 4$时才非平凡，因此很难用图示说明。）

我们的下一个目标是证明 P^d 是 4-多胞体 P_9在高维情形下的预期类比；参见定理 6.11。这需要描述 P^d的面。我们通过归纳法来完成，证明对于 $2 \leq k \leq d-2$， $P^{d,\,k}$ 的面集可由 $P^{d,\,k-1}$ 的面集按如下方式得到。

1. 面 凸包$(H \cup v_k)$，其中 $H \in \cup_{k+1 \leq i \leq d-1} \mathcal{H}_i$。这些面替代了 $P^{d,\,k-1}$ 的面 凸包$(H \cup v_{k-1})$。

2. $\binom{d-1}{k}$ 面 conv$(H \cup \{v_{k-1}, v_k\})$，其中 $H \in \mathcal{H}_k$。它们的边界复形具有如下形式

$$\partial(\overline{V(H^+) \cup v_{k-1}}) * \partial(\overline{V(H^-) \cup v_k}).$$

这些面将替代 $P^{d,\,k-1}$ 的面 conv$(H \cup v_{k-1})$。

3. $P^{d,\,k-1}$ 上文未提及的其余面。

特别地，通过归纳法可知，CP 是 $P^{d,k}$ 的一个面，并且它与 $P^{d,k}$ 的所有其他面相邻；此外，条目 3 中的面集合由 $\Sigma \backslash u'_d$、CP 以及对于每个 $1 \leq i \leq k-1$ 和 $H \in \mathcal{H}_i$ 的一个包含 $H \cup v_i$ 的面组成。

证明基于：

断言1：对于每个 $H \in \mathcal{H}_k$， $v_k \in$ 都属于 aff$(H \cup v_{k-1})$。这是因为 a_k 位于超平面 aff(H) 上，并且 $v_k \in [a_k, v_{k-1}]$。

断言2：对于 $i > k$ 和 $H \in \mathcal{H}_i$， v_k 位于 conv($H \cup v_{k-1}$) 之外。事实上，根据推论6.6，在 aff(CP) 中， a_k 位于 H 之外。因此，在 aff(CP$\cup v_{k-1}$) $= \mathbb{R}^d$ 中，点 $v_k \in$ int$[a_k, v_{k-1}]$ 位于 conv($H \cup v_{k-1}$) 之外。

断言3： v_k 位于 P^d的其余各面之下, $^{k-1}$。首先，从序列 $\{a_j\}$和 $\{v_j\}$的定义可以很容易看出， v_k位于 $\Sigma \backslash u'_d$和 CP 之下。因此，只需证明：如果 G 是 P^d的一个面, $^{k-1}$ 且该面包含某个 $i < k$ 和$H \in \mathcal{H}_i$对应的 $H \cup v_i$ ，那么 v_k 位于 G之下。这可由推论6.6以及关于 j的另一个简单归纳法得到，其中 $i + 1 \le j \le k$。对于基例，根据推论6.6，在 aff(CP) 中， a_{i+1}位于 H 之下。因此，在 aff(CP $\cup v_i$) $= \mathbb{R}^d$ 中， a_{i+1} 位于 G之下。由于 v_{i+1} 位于 $[v_i, a_{i+1}]$的内部， v_{i+1} 也位于 G之下。归纳步骤非常相似：根据归纳假设， v_j 位于 G 之下；根据推论6.6， a_{j+1} 也是如此；因此 $v_{j+1} \in [v_j, a_{j+1}]$ 也位于 G之下。断言得证。

上述三个断言唯一确定了 $P^{d,k}$ 的面。断言3表明，列表中第 3 项的 $P^{d,k-1}$ 的面不受添加 v_k 的影响，因此仍是 $P^{d,k}$ 的面。

断言1表明，对于每个 $H \in \mathcal{H}_k$， $P^{d,k-1}$ 的面 conv($H \cup v_{k-1}$) 会被一个新的面 conv($H \cup \{v_k, v_{k-1}\}$) 取代。注意， H^+ 的重心 b_{H^+} 位于连接 a_k 与 H^- 的重心 b_{H^-} 的线段上（参见引理 6.5 的证明）。因此，如果 v_k 是线段 $[a_k, v_{k-1}]$ 的内部点，那么 $[b_{H^+}, v_{k-1}]$ 与 $[b_{H^-}, v_k]$ 相交于一点 p。这意味着 conv($H^+ \cup v_{k-1}$) $\cap$ conv($H^- \cup v_k$) $= p$。因此，conv($H \cup \{v_k, v_{k-1}\}$) 的边界复形必为 $\partial(V(H^+) \cup v_{k-1}) * \partial(V(H^-) \cup v_k)$。这些面恰好就是包含 $v_{k-1}v_k$ 的 $P^{d,k}$ 的面。

最后， $P^{d,\ k}$ 的其余面是由 $H \in \mathcal{H}_i$ 在 $i > k$时产生的。根据断言2和上一段，它们必定具有 conv($H \cup v_k$) 的形式，用来替换 $P^{d,\ k-1}$的 conv($H \cup v_{k-1}$)。

因此，我们得到以下结果（为方便起见，令 $v_{d-1} = v_{d-2}$）：

引理 6.10。定义 6.9 中的多胞体 P^d 有 3($d-1$) 个顶点和 $2^{d-1}+1$ 个面。 P^d 的顶点集是

$$\{u_1, \ldots, u_{d-1}, u'_1, \ldots, u'_{d-1}, u'_d = v_1, u'_{d+1} = v_0, v_2, \ldots, v_{d-3}, v_{d-2} = v_{d-1}\}.$$

P^d 的面集自然分为以下 d 个子族：

1. $\mathcal{F}_0$ 由单纯形 $[u'_1, \ldots, u'_{d-1}, u'_{d+1}]$ 和交叉多胞体 CP 组成。
2. 对于 $1 \le k \le d-1$、 $\mathcal{F}_k$，由维数为 $d-1$ 的 $\binom{d-1}{k}$ 多胞体组成，其边界复形具有以下形式： $\partial(V(H^+) \cup v_{k-1}) * \partial(V(H^-) \cup v_k)$，其中$H \in \mathcal{H}_k$。特别地， $\mathcal{F}_{d-1} = \{[u_1, \ldots, u_{d-1}, v_{d-2}]\}$。

[1]为此，读者可计算由这些面生成的多胞体复形中 $v_{k-1}v_k$ 的链环，并验证它是一个 ($d-3$) 维伪流形（即每个脊都属于两个面）。因此，它必定与 $P^{d,\ k}$ 边界中 $v_{k-1}v_k$ 的链环重合。

定理 6.11. d多胞体 P^d 是 $(d-2)$-单纯的且 2-简单。它有两对单纯形面和不在该面上的简单顶点；它们分别是 $([u_1,\dots,u_{d-1},v_{d-2}],u'_{d+1})$ 和 $([u'_1,\dots,u'_{d-1},u'_{d+1}],v_{d-2})$。

证明：令 $U=\{u_1,\dots,u_{d-1}\}$ 并令 $U'=\{u'_1,\dots,u'_{d-1}\}$。对于 $M=\{u_{i_1},\dots,u_{i_k}\}\subseteq U$，令 M'：$=\{u'_{i_1},\dots,u'_{i_k}\}\subseteq U'$。此外，为简洁起见，我们用 u、uv、uvw 代替 $\{u\}$、$\{u,v\}$ 和 $\{u,v,w\}$。

引理 6.10 对面的描述保证 P^d 是 $(d-2)$-单纯的。要证明 P^d 也 2-简单，只需检查 P^d 的每个 $(d-3)$-面 τ 恰好包含在三个面中。通过考察引理 6.10 中的族 $\mathcal{F}_i$、$0\le i\le d-1$，我们看到可能出现以下情形：

1. $u'_{d+1}\in V(\tau)$。在这种情况下，$V(\tau)\subset U'\cup u'_d u'_{d+1}$。如果 u'_d 也在 τ 中，那么 τ 包含于来自 $\mathcal{F}_1$ 的三个双锥中；否则，τ 包含于来自 $\mathcal{F}_1$ 的两个双锥以及来自 $\mathcal{F}_0$ 的单纯形 $[u'_1,\dots,u'_{d-1},u'_{d+1}]$ 中。
2. $V(\tau)\subset U'$。在这种情况下，τ包含在来自$\mathcal{F}_0$的交叉多胞体和单纯形，以及来自 $\mathcal{F}_1$的一个双锥中。
3. $V(\tau)=K\cup M'$，其中 $K\sqcup M\sqcup u_\ell=U$和 $|K|=i$，对于某些 $1\le\ell\le d-1$和 $1\le i\le d-2$。那么 τ是来自 $\mathcal{F}_0$的 CP 的一个面，来自$\mathcal{F}_{i+1}$的 $\partial(\overline{K\cup u_\ell v_i})*\partial(\overline{M'\cup v_{i+1}})$，以及来自 $\mathcal{F}_i$的 $\partial(\overline{K\cup v_{i-1}})*\partial(\overline{M'\cup u'_\ell v_i})$。
4. $V(\tau)=K\cup M'\cup v_i$，其中 $1\le i\le d-2$且 $K\sqcup M\sqcup u_ju_k=U$，对某个 $1\le j<k\le d-1$成立。有两种情况：
   (a) $|K|=i-1$。那么，根据 $\mathcal{F}_{i+1}$，τ是 $\partial(\overline{K\cup u_ju_kv_i})*\partial(\overline{M'\cup v_{i+1}})$ 的一个面；根据 $\mathcal{F}_i$，它也是两个面 $\partial(\overline{K\cup u_jv_{i-1}})*\partial(\overline{M'\cup u'_kv_i})$、$\partial(\overline{K\cup u_kv_{i-1}})*\partial(\overline{M'\cup u'_jv_i})$ 的一个面。(b) $|K|=i$（因此，$i<d-2$）。那么，根据$\mathcal{F}_i$，τ是 $\partial(\overline{K\cup v_{i-1}})*\partial(\overline{M'\cup u'_ju'_kv_i})$ 的一个面；根据 $\mathcal{F}_{i+1}$，它也是两个面 $\partial(\overline{K\cup u_jv_i})*\partial(\overline{M'\cup u'_kv_{i+1}})$、$\partial(\overline{K\cup u_kv_i})*\partial(\overline{M'\cup u'_jv_{i+1}})$ 的一个面。
5. $V(\tau)=K\cup M'\cup v_{i-1}v_i$，其中 $2\le i\le d-2$和 $K\sqcup M\sqcup u_ju_ku_\ell=U$，对于某个$1\le j<k<\ell\le d-1$。有两种情况：
   (a) $|K|=i-2$。然后，τ包含在来自 $\mathcal{F}_i$ 的三个面中：
   $$\partial(\overline{K\cup u_ku_\ell v_{i-1}})*\partial(\overline{M'\cup u'_jv_i}),\quad \partial(\overline{K\cup u_ju_\ell v_{i-1}})*\partial(\overline{M'\cup u'_kv_i}),\text{ and}$$
   $$\partial(\overline{K\cup u_ju_kv_{i-1}})*\partial(\overline{M'\cup u'_\ell v_i}).$$
   (b) $|K|=i-1$。那么 τ包含在 $\mathcal{F}_i$中的三个面中：
   $$\partial(\overline{K\cup u_\ell v_{i-1}})*\partial(\overline{M'\cup u'_ju'_kv_i}),\quad \partial(\overline{K\cup u_jv_{i-1}})*\partial(\overline{M'\cup u'_ku'_\ell v_i}),\text{ and}$$
   $$\partial(\overline{K\cup u_kv_{i-1}})*\partial(\overline{M'\cup u'_ju'_\ell v_i}).$$

结果得证。 □

注记 6.12。值得注意的是，多胞体 P^d 是 d维的，且有 $3d-3$个顶点。这是在维数 $d=3$、4、5 中，非单纯形（$d-2$）-单纯的 2-简单 d-多胞体所能拥有的最少顶点数（参见命题 3.3）。

作为本文的最后一个定理，我们证明，迭代合并定理 6.11 中的 P^d 的 n copies 个副本，可得到数量呈指数增长（相对于顶点数）的组合上不同的 $(d-2)$-单纯 2-简单 d-多胞体。回顾定理 6.11，

- 多胞体 P^d 有两个简单顶点 u'_{d+1} 和 v_{d-2}，以及两个单纯形面$F' := [u'_1,\dots,u'_{d-1},u'_{d+1}]$和 $F := [u_1,\dots,u_{d-1},v_{d-2}]$；$u'_{d+1}$ 是 F' 的一个顶点，但不是 F 的顶点，而 v_{d-2} 是 F 的一个顶点，但不是 F'的顶点。包含 u'_{d+1}和 v_{d-2} 的所有其他面都是双锥。

- CP 面 $[u_1,\dots,u_{d-1},u'_1,\dots,u'_{d-1}]$与 P^d的所有其他面都相邻。

令 T_1 和 T_2 为 P^d 的两个副本，其中 CP、F 和 F' 在 T_i 中的副本分别记为 CP_i、F_i 和 F'_i，而 u'_{d+1} 从 T_2 中的副本记为 w。我们沿着 F_1 和 w 合并 T_1 与 T_2。由于 CP_1 与 F_1 相邻，并且如同四维情形，w 位于一个单纯形面（即 F'_2）和 $d-1$ 个双锥中，因此有两种合并方式，分别得到两种不同的组合类型（回顾一下，σ_{d-1} 表示一个（$d-1$）-单纯形）：

- 在 $T_1 \triangleright T_2$ 中，面 CP_1 与单纯形 F'_2 合并。合并面随后再次成为一个 CP。由于 CP_2 与 T_2 的所有其他面（包括 F'_2）都相邻，因此多胞体 $T_1 \triangleright T_2$ 有两个 CP 面，且这两个面彼此相邻。

- 在 $T_1 \triangleright T_2$ 中，面 CP_1 与一个双锥合并，得到一个 $\mathrm{CP}\#\sigma_{d-1}$ 形状的面。在这种情况下，$T_1 \triangleright T_2$ 有两个“大”面：$\mathrm{CP}\#\sigma_{d-1}$ 和 CP_2，它们彼此相邻；其他每个面至多有 $d+1$ 个顶点。

有了这些观察，我们现在可以证明以下结论。

定理 6.13. 存在 $2^{\Omega(N)} = 2^{\Omega(k)}$ 个组合上不同的（$d-2$）-单纯的 2-单纯 d-多胞体，其顶点数为 $N = (3d-3) + k(2d-4)$。

证明：考虑 $k+1$ 个 P^d 的副本，记作 $T_1,\dots,T_{k+1}$，相应的 CP 面副本记作 CP_i。每个 T_i 都有两对由一个单纯形面和一个不在该面上的简单顶点组成的对象，在本证明中分别记作 (F_i, w_i) 和 (F'_i, w'_i)。考虑根据以下规则，由 $(\cdots((T_1 \triangleright T_2) \triangleright T_3) \cdots) \triangleright T_{k+1}$ 得到的所有多胞体：

- 第一步中，我们合并 T_1 和 T_2，使面 CP_1 与一个双锥合并。在步骤 i（其中 $2 \le i \le k$）中，我们有两种选择：将 CP_i 与单纯形合并，或与双锥合并。

- 在第 i步中，计算 $(\cdots((T_1 \triangleright T_2) \triangleright T_3) \cdots) \triangleright T_i$与 T_{i+1}的合并时，我们总是沿着 F_i 和 w_{i+1} 进行合并。

将第 k 步得到的多胞体记为 R_k 。在第 i 步（$1 \le i < k$）中， T_{i+1} 的 F_{i+1} 保持不变，可用于第（$i+1$）步。对于 $1 \le j \le k+1$，我们将由 CP$_j$ 得到的 R_k 的面称为第 j 个特殊面。根据上述说明，对于每个 $1 \le j \le k$，第 j 个特殊面要么是 CP，要么是 CP#σ_{d-1}；第（$k+1$）个特殊面总是 CP。此外，对于所有 $1 \le i$、$j \le k+1$，第 i 个和第 j 个特殊面相邻，当且仅当 $|i-j| = 1$。

我们证明，该过程至少产生 2^{k-1} 个两两不同构的多胞体。首先注意到， R_k 的所有非特殊面的边界复形要么是单形、两个单形的连接，要么是这些结构上的堆叠，因此非特殊面不可能与 CP 或 CP#σ_{d-1} 同构。将以下抽象图称为 R_k 的轮廓：节点表示形如 CP 和 CP#σ_{d-1} 的面；若对应的面相邻，则在这两个节点之间连一条边；此外，根据节点表示的是 CP 面还是 CP#σ_{d-1} 面，分别给每个节点标记 0 或 1。由此得到的轮廓是一条路径，含有 $k+1$ 个标记为 0 或 1 的节点；其中一个端点总是标记为 1（由第一条说明保证），另一个端点总是标记为 0。标记为 1 的端点对应于 T_1 （ P^d 最左边的副本），标记为 0 的端点对应于 T_{k+1} （ P^d 最右边的副本）。

这样的 $0/1$-路径有 2^{k-1} 条，我们声称每一条都是有效的 profile。事实上，给定这样一条路径，从标记为 1 的端点沿路径走到标记为 0 的端点，并依次读取各节点的标签。距离第一个端点 $i-1$ 的节点对应于来自 T_i 的特殊面，而该节点的标签直接告诉我们，在第 i 步应将 CP$_i$ 与单纯形还是双锥合并。由于同构的多胞体具有相同的 profile，这一断言完成了证明。换言之，profile 不同的两个多胞体具有不同的组合类型。□

注记6.14。当 $d = 4$ 时，我们还可以将 R_k 与一个具有 10、11 或 16 个顶点的 2-单纯2-简单4-多胞体合并。在 [12, 第4节中可以找到这类多胞体，1],其中它们记作 P_{10}、P_{11}、$P_{16} = \mathcal{I}^1(P_{11})$。这使我们能够构造顶点数为 N 的、数量随 N 指数增长的二拟单纯2-简单4-多胞体，且对所有充分大的整数 N 都成立（而不只是那些模 4 后与 $N \equiv 1$ 同余的整数）。由推论4.13可知，所有得到的多胞体都是初等的。因此，对于 $d = 4$，同时也是初等的二拟单纯2-简单4-多胞体的组合上不同的数量，随顶点数呈指数增长。这加强了 [13, 推论4.2]。

致谢

我们感谢 Amzi Jeffs、Josh Hinman 和 G¨unter Ziegler 对本文初稿提出的意见，也感谢 Marge Bayer 和 Eran Nevo 与我们进行富有启发性的讨论。

参考文献

[1] K. Adiprasito、E. Nevo 和 J. A. Samper。《几何下界定理》。《Geom. Funct. Anal.》，26:359–378，2016。[2] M. M. Bayer。《四维多胞体的扩展 f-向量》。《J. Combin. Theory, Ser. A》，44:141–151，1987。[3] L. J. Billera 和 C. W. Lee。《证明 McMullen 条件对于单纯凸多胞体的 f-向量而言是充分的》。《J. Combin. Theory, Ser. A》，31:237–255，1981。[4] T. Bisztriczky。《关于一类广义单纯形》。《Mathematika》，43(2):274–285（1997），1996。[5] P. Brinkmann 和 G. M. Ziegler。《三维球面和四维多胞体的小 f-向量》。《Math. Comp.》，87:2955–2975，2018。[6] H.S.M. Coxeter。《正多胞体》。Macmillan，纽约，第二版，1963年。[7] D. Eppstein、G. Kuperberg 和 G. M. Ziegler。《胖四维多胞体与更胖的三维球面》。载于《离散几何：献给 W. Kuperberg 60 岁诞辰》，《纯数学与应用数学专著及教材丛书》第253卷，第239–265页。Marcel Dekker，纽约，2003年。[8] B. Gr¨unbaum。《凸多胞体》，《数学研究生教材》第221卷。Springer-Verlag，纽约，第二版，2003年。Volker Kaibel、Victor Klee 和 G¨unter M. Ziegler 编写并撰写前言。[9] G. Kalai。《刚性与下界定理 I》。《数学发明》，88:125–151，1987年。[10] G. Kalai。《多胞体骨架与路径》。《纯数学高级研究》。CRC出版社离散数学应用丛书，CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，1997年。[11] A. Paffenholz。《由乘积得到的新多胞体》。《J. Combin. Theory Ser. A》，113(7):1396–1418，2006年。[12] A. Paffenholz 和 A. Werner。《四维多胞体构造与旗向量锥》。载于《代数与几何组合学》，《当代数学》第423卷，第283–303页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006年。[13] A. Paffenholz 和 G. M. Ziegler。《格、球面和多胞体的 E_t-构造》。《Discrete Comp. Geom.》，32:601–621，2004。[14] R. P. Stanley。《单纯凸多胞体的面数》。《Adv. Math.》，35:236–238，1980。[15] R. P. Stanley。《广义 h-向量、托里克簇的交叉上同调及相关结果》。载于《交换代数与组合学》，《纯数学高级研究》第11卷，第187–213页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1987年。[16]E. Steinitz。《多面体与空间划分》。《数学科学百科全书》，IIIAB12:1–139，1922年。[17] G. M. Ziegler。《四维多胞体和三维球面的面数》。载于 L. Tatsien 编，《国际数学家大会论文集》（2002年国际数学家大会，北京），第三卷，第625–634页。中国北京：高等教育出版社，2002年。

[18] G. M. Ziegler. 多边形的投影积. 美国数学会电子研究公告，10:122–134，2004。