arXiv:2305.01830v1 [math.OC] 2 May 2023

抛物型偏微分方程驱动的多智能体系统的有限时间与固定时间一致性控制*

Xu-hui Wang、Xue-song Li 和 Nan-jing Huang†

Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, P.R. China

摘要。本文重点研究由抛物型偏微分方程（PDEs）驱动的多智能体系统（MASs）的有限时间一致性（FTC）和固定时间一致性（FXC）问题。与现有文献中的研究相比，本文首次将有限时间一致性和固定时间一致性控制应用于由抛物型偏微分方程驱动的多智能体系统。基于李雅普诺夫定理，本文设计了有限时间一致性和固定时间一致性控制器，以确保多智能体系统在存在外部扰动的情况下收敛到稳定状态。此外，我们简化了控制器，以保证多智能体系统在无外部扰动的情况下实现有限时间一致性和固定时间一致性。最后，通过两个示例验证了控制器的可行性。

关键词：多智能体系统；有限时间一致性；固定时间一致性；抛物型偏微分方程；外部扰动。

AMS 学科分类：34A08；34D05。

1 引言

近几十年来，多智能体系统（MASs）引起了许多领域研究人员的广泛兴趣，尤其是在计算机科学、神经网络和协同控制领域。对多智能体系统的研究为其在工程中的实际应用提供了必要的理论支持，例如复杂系统的控制问题 [1], 无人机编队 [2], 和目标跟踪 [3]。众所周知，一致性问题是多智能体系统研究中的一个重要课题，其目的是通过控制协议使多个智能体达成一致。由于其在现代工业中的应用广泛，这方面的研究历史悠久。Reynolds [4] 根据群体（如羊群、牛群和鱼群）的行为特征，首次提出了 Boid模型，这是最早的多智能体系统模型。后来，Vicsek等人 [5] 采用了不同的方法，从统计学角度首次建立了多智能体系统模型，为研究群体运动行为提供了有力工具。2004年，Olfatid-Saber

*T本工作得到了国家自然科学基金（编号：11671282 和 12171339）的资助

†C通信作者。电子邮箱：nanjinghuang@hotmail.com；njhuang@scu.edu.cn

和 Murray [6] 提出了一种基于一阶积分器解决多智能体系统渐近一致性问题的通用方法。近年来，多智能体系统的渐近一致性控制引发了广泛的研究兴趣，例如二阶多智能体系统 [7], 高阶多智能体系统 [8], 分数阶多智能体系统 [9], 等。关于渐近一致性问题的更多文献，请参阅 [10–15] 及其中的参考文献。

然而，以往文献中的大多数研究成果都存在一个局限性，即终端时间无法控制在有限范围内。在实际应用中，我们通常需要更快的收敛速度，并希望多智能体系统（MASs）能够在有限时间 [16–18] 内达到一致性。因此，研究多智能体系统的有限时间一致性（FTC）问题至关重要。为了使系统在有限时间内达到平衡点，有限时间控制理论应运而生 [19]。Cortes [20] 将非光滑稳定性分析理论拓展至多智能体系统的有限时间一致性问题研究，并提出了一种不连续有限时间一致性控制器。Wang 和 Xiao [21] 提出了一种状态反馈控制器，以解决一阶多智能体系统的有限时间一致性问题。Li 等人 [22]研究了存在外部扰动的二阶多智能体系统，并采用反步法设计了一种非光滑有限时间一致性控制协议。Guan 等人 [23]利用齐次性理论，研究了固定拓扑和切换拓扑下具有领导者的二阶多智能体系统的有限时间一致性问题。对于高阶系统，Fu 等人 [24]设计了一种基于观测器的有限时间一致性控制协议。近年来，Duan 等人 [25] 利用基于事件触发机制的有限时间观测器，解决了异构多智能体系统的二分有限时间一致性问题。然而，初始值可能无法提前获知并加以利用，这使得有限时间一致性技术难以实施。为了使终端时间独立于初始条件，固定时间控制理论也应运而生 [26]。Parsegov 等人 [27] 将固定时间控制理论应用于一阶线性多智能体系统，并设计了一种分布式控制器，以实现固定时间一致性（FXC）。此外，Defoort 等人 [28] 研究了一阶非线性领导者跟随多智能体系统的固定时间一致性问题。当智能体的动态行为具有一定程度的非线性时，可以通过设计相应的固定时间控制协议，使跟随者的状态跟踪领导者的状态。Zuo [29] 研究了二阶领导者跟随多智能体系统的固定时间一致性问题，并采用滑模控制法设计了一种固定时间一致性控制协议，使系统在固定时间内实现一致性。Zuo 等人 [30] 分析了存在干扰的多智能体系统，并设计了一种鲁棒固定时间一致性控制协议，以增强系统的鲁棒性。Zuo 等人 [31] 综述了近年来固定时间协同控制的理论研究成果。与传统的渐近一致性控制理论相比，有限时间一致性和固定时间一致性控制方法能够实现更高的控制精度、更快的收敛速度以及更好的控制效果。近年来，文献中针对有限时间一致性和固定时间一致性问题的各种理论成果及其应用得到了广泛研究；例如，读者可参阅文献 [32–41] 及其中的参考文献。

值得注意的是，目前关于有限时间一致性和固定时间一致性的大多数研究结果，都是在假设智能体的动力系统由常微分方程驱动的条件下得到的。然而，在许多情况下，智能体的动力系统不仅与时间有关，还会受到空间位置的影响，例如传染病传播、车辆编队、大规模无人机系统的交通管理、城市交通网络、噪声控制、工业生产中的温度控制等，参见 [42–47]。因此，与使用常微分方程相比，使用偏微分方程对这些动力系统建模更为合适。近期，Pilloni 等人 [48] 研究了由边界控制热方程描述的多智能体系统的同步问题，并通过非线性滑模方法设计了一致性控制器，以消除边界扰动的影响。Yang 等人[49] 考虑了基于边界控制器的非线性时空多智能体系统同步问题，并给出了确保系统一致性的充分条件。Yang 等人 [50] 研究了抛物型偏微分系统的输出同步问题，并根据信息输出设计了反馈控制器，以确保同步。最近，Wang 等人 [51]

考虑了一类特殊的一阶双曲系统，并设计了边界协议以实现有限时间一致性。然而，在一些实际情况下，有必要考虑具有外部扰动的、基于抛物型偏微分方程的多智能体系统，其形式如下：

$$y_{i,t}(x,t) = ky_{i,xx}(x,t) + u_i(x,t) + d_i(x,t), \tag{1.1}$$

其中 $y_i(x,\ t) \in \mathbb{R}$ 是第 i 个智能体的状态变量，$u_i(x,\ t) \in \mathbb{R}$ 是第 i 个智能体的协议，$d_i(x,\ t) \in \mathbb{R}$ 是未知外部扰动，而 $k > 0$ 是一个常数。下面用 Wang and Wu 提出的食物网网络示例来说明这一点 [52]。

食物网可以用复杂网络模型来描述，其中节点代表各个物种。

在有限栖息地中，物种的分布通常不均匀，不同的物种空间密度会导致相应的迁移差异。物种的空间分布可以描述为抛物型偏微分系统中节点的状态变量，它同时取决于空间变量和时间变量。特别地，可以由 [52] 得到一个简单的食物网网络模型，如下所示：

$$w_{i,t}(x,t) = kw_{i,xx}(x,t) + u_i(x,t), \tag{1.2}$$

其中 $w_i(x,\ t) \in \mathbb{R}$ 是第 i 个物种的空间密度，$u_i(x,\ t) \in \mathbb{R}$ 是第 i 个物种的控制输入，而 $k > 0$ 是扩散系数。显然，MASs（1.2）是 MASs（1.1）在 $d_i(x,\ t) \equiv 0$下的特例。需要指出的是，通常情况下，MASs 中节点的状态可能无法准确测量，因为它们常受到各种扰动和噪声的破坏。受此启发，并考虑外部扰动，本文研究具有外部扰动的抛物型偏微分方程所描述的 MASs（1.1）。

上述观察表明，在工程应用中，智能体在有限时间内完成所有计划任务非常重要。另一方面，针对由偏微分方程描述的多智能体系统的有限时间一致性和固定时间一致性问题，目前尚缺乏统一的研究结果。因此，如何设计控制器来解决偏微分方程系统的有限时间一致性和固定时间一致性问题仍是一个开放问题，这也促使我们开展本研究。

本文的总体目标是研究存在外部扰动时，由抛物型偏微分方程描述的多智能体系统的有限时间一致性和固定时间一致性问题。与现有文献中的研究相比，本文的主要贡献如下。

（1）提出了一种存在外部扰动、由抛物型偏微分方程驱动的多智能体系统新模型，可用于描述科学、工程以及化学工程和生物化学工程实践中涉及的传热过程。这是首次为存在外部扰动的多智能体系统设计有限时间一致性和固定时间一致性分布式控制器，以实现不同的控制效果。

(2) 与其他关于具有常微分方程的多智能体系统有限时间一致性和固定时间一致性控制的研究相比，研究具有偏微分方程的多智能体系统时，主要难点在于构造李雅普诺夫函数、估计状态变量以及设计控制器。为克服这些困难，我们首先构造积分形式的李雅普诺夫函数，以避免估计多元李雅普诺夫函数。由于状态变量与 x 和 t相关，因此不可避免地要估计状态变量关于 x的一阶和二阶偏导数。随后，我们采用分部积分法和Wirtinger不等式，将状态变量的一阶和二阶偏导数的估计转化为对状态变量的估计，并利用 [6,21,53,54]中的一些已知不等式进行估计。最后，我们采用偏微分方程的李雅普诺夫方法设计控制器 [19,26]。

（3）与偏微分方程驱动的多智能体系统一致性控制研究不同，本文考虑的控制目标是在有限时间或固定时间内实现一致性，这更难以利用 the

利用邻居智能体的信息来提高收敛速度。首先提出一种系统化方法，通过为每个控制器添加一个新的控制系数，加快收敛速度并改善控制效果。

本文其余部分安排如下。下一节回顾一些关键引理，并阐述有限时间一致性和固定时间一致性问题。随后，在第三节中，我们通过控制器分析存在外部扰动的多智能体系统的有限时间一致性和固定时间一致性。在第五节总结结果之前，我们将在第四节提供两个仿真实例，以说明控制器的可行性。

符号说明。令 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 和 $\mathbb{R}^{+}=(0,+\infty)$。假设 $\mathbb{R}^{n}$ 和 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 分别表示n 维实向量空间和 $n\times n$ 维实矩阵空间，$|\cdot|$ 表示绝对值，$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示 $\mathbb{R}^{n}$上的内积，$sign(\cdot)$表示符号函数。对于给定的向量或矩阵 M，M^{T}表示其转置。对于给定函数 $f(x,t)$，$f_{xx}(x,t)$ 和 $f_{t}(x,t)$ 分别表示 $f(x,t)$ 关于空间变量 x 的二阶偏导数，以及关于时间变量 t的一阶偏导数。令 $\mathcal{L}^{\infty}([0,L],\mathbb{R}^{n})=\{f(x):\ [0,L]\to\mathbb{R}^{n}|$ 存在一个零测度子集 $E_{0}\subset[0,L]$，使得 $f(x)$ 在 $[0,L]\backslash E_{0}\}$上有界。

2 预备知识

2.1 图论

在多智能体系统中，$G=\{\mathfrak{V},\mathfrak{E},A\}$ 表示一个固定的通信拓扑图，其中 $\mathfrak{V}=\{v_{1},v_{2},\ldots,v_{n}\}$表示图 G 的顶点集，包含 n 个节点；$\mathfrak{E}\in\mathfrak{V}\times\mathfrak{V}$ 是边集，$A=(a_{ij})$ 是图 G的邻接矩阵。如果节点 v_{i} 能够接收来自 v_{j}的数据，则 $a_{ij}>0$，否则 $a_{ij}=0$。因此，我们可以定义 $N_{i}=\{v_{j}\in\mathfrak{V}:\ (v_{j},v_{i})\in\mathfrak{E}\}$。图 G 的拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L}$ 为

$$\mathcal{L}(A)=(l_{ij})=\begin{cases}-a_{ij}, & v_{j}\in N_{i};\\ \sum_{v_{j}\in N_{i}}a_{ij}, & j=i;\\ 0, & other.\end{cases}$$

定义 2.1. 如果对于任意一对 v_{i} 和 v_{j}，都存在一个序列 $S=\{a_{ii_{1}},a_{i_{1}i_{2}},\cdots,a_{i_{m}j}\}$，使得 S 的每个元素均为正，则称无向图为连通图。

定义 2.2. 如果一个有向图满足.....，则称其为

(i) 若存在序列 $S=\{a_{ii_{1}},a_{i_{1}i_{2}},\cdots,a_{i_{m}j}\}$，使得对于任意一对 v_{i} 和 v_{j}，S 的每个元素均为正，则称其为强连通（s-连通）；(ii) 若存在向量 $\omega=[\omega_{1},\omega_{2},\cdots,\omega_{N}]^{T}$，使得对于 i、$j=1$、2、$\cdots$ 和 N，$\omega_{i}>0$ 和 $\omega_{i}a_{ij}=\omega_{j}a_{ji}$，则称其为详细平衡（d-平衡）。

定义 2.3. 如果 $A^{T}=A$，则 $R(x;A)=\frac{\langle x,Ax\rangle}{\langle x,x\rangle}$称为 A 的 Rayleigh 商，其中 $x\neq0$。

2.2 关键引理

在本小节中，我们回顾一些将在本文中用到的重要引理。

引理 2.1。 [19] 假设可微函数 $\mathbb{V}(t)$: $\{0\}\bigcup\mathbb{R}^+ \to \{0\}\bigcup\mathbb{R}^+$ 是正定的，并且存在 $k>0$ 和 $0<\alpha<1$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{V}(t)}{\mathrm{d}t} \le -k\mathbb{V}(t)^{\alpha}.$$

于是， $\mathbb{V}(t)$ 在有限时间 t^* 内收敛到 0。此外，终端时间 t^* 满足 $t^* \le {}^{V}\frac{(\ \ 0\ \ ^{1-\alpha}}{K\ \ 1-\alpha})()$ 。

引理 2.2. [26] 假设可微函数 $\mathbb{V}(t)$: $\{0\}\bigcup\mathbb{R}^+ \to \{0\}\bigcup\mathbb{R}^+$ 是正定的，并且存在 k、p、$q>0$、$0<\alpha k<1$ 和 $\beta k>1$，使得

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{V}(t)}{\mathrm{d}t} \le -\left(p\mathbb{V}(t)^{\alpha}+q\mathbb{V}(t)^{\beta}\right)^{k}.$$

于是， $\mathbb{V}(t)$ 在固定时间 T 内收敛到 0。此外，终端时间 T 满足 $T \le T_{\max}$: $= {}_{p^k}{}^{1}{}_{(1-\alpha k)} + {}_{1q^k(\beta k-1)}$ 。

引理 2.3. [21] 对于任意 $0<\alpha<1$、$\beta>1$ 和 $x_i \ge 0$，且满足 $i=1$、2、$\cdots$、n，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha} \le \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} \le n^{1-\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha},$$

and

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\beta} \le n^{\beta-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}.$$

引理 2.4. [6,53] 如果 $G=\{\mathfrak{V},\mathfrak{E},A\}$ 是无向且连通的，则 $\mathcal{L}(A)$ 具有以下性质 s:

(i) $\zeta^T\mathcal{L}(A)\zeta = \frac{1}{2}\Sigma_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\zeta_j-\zeta_i)^2$ 对于任意 $\zeta=[\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n]^T \in \mathbb{R}^n$；(ii) 对于任意 $\zeta=[\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n]^T \in \mathbb{R}^n$，若 $\langle\zeta,\mathbf{1}\rangle=0$ 满足 $\mathbf{1}=[1,1,\cdots,1]^T \in \mathbb{R}^n$，则 $\zeta^T\mathcal{L}(A)\zeta \ge \lambda_2(\mathcal{L}(A))\zeta^T\zeta$，其中 $\lambda_2(\mathcal{L}(A)) = \min_{\langle x,\mathbf{1}\rangle=0}{}^{R}(x,\mathcal{L}(A))$ 是 $\mathcal{L}(A)$ 的第二小特征值；

(iii) 如果 $\lambda_\omega(\mathcal{L}(A)) = \min_{\langle x,\omega\rangle=0}{}^{R}(x,\mathcal{L}(A))$，那么 $\lambda_2(\mathcal{L}(A)) \ge \lambda_\omega(\mathcal{L}(A)) \ge 0$。特别地，当且仅当 $\lambda_\omega(\mathcal{L}(A)) = 0$ 时， ω 与 $\mathcal{L}(A)$ 的零特征值对应的左特征向量正交。

引理 2.5. [54] 设 $\varphi(\cdot,t) \in \mathcal{H}^1(0,L)$ $\{f(x): [0,L]\to\mathbb{R} | \int_0^L f^T(x)f(x)\mathrm{d}x<\infty, \int_0^L f_x^T(x)f_x(x)\mathrm{d}x<\infty\}$，其中 $\varphi(0)=0$ （或 $\varphi(L)=0$）。那么，对于任意实对称正定矩阵 $\mathcal{P}$，有

$$\int_0^L \varphi^T(s)\mathcal{P}\varphi(s)\mathrm{d}s \le 4L^2\pi^{-2}\int_0^L \varphi_s^T(s)\mathcal{P}\varphi_s(s)\mathrm{d}s.$$

引理 2.6。[55] 系统存在唯一解 $\psi(x,t)$

$$\begin{cases} \psi_t(x,t)-\psi_{xx}(x,t)=f(x,t), \\ \psi(0,t)=\psi(L,t)=0, \\ \psi(x,0)=\psi^0(x), \end{cases}$$

其中 $x\in[0,L]$、ψ^0（x）在 $[0,L]$ 上连续，且 f（x、t）在 $[0,L]\times[0,T]$ 上连续。

引理 2.7. [56] 考虑具有以下形式的非线性抛物型偏微分方程:

$$\begin{cases} \psi_t(x,t)-k\psi_{xx}(x,t)=f(\psi(x,t)), \\ \psi(0,t)=\psi(L,t)=0, \\ \psi(x,0)=\psi^0(x), \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $\psi(x,t) = [\psi_1(x,t)\ \psi_2(x,t)\ \cdots, \psi_n(x,t)]^T$, $\psi^0(\cdot) \in \mathcal{L}^\infty([0,L],\mathbb{R}^n)$, 且 $f(\cdot)$ 连续可微。则存在 $T_M > 0$，保证方程 (2.3) 在 $[0,L]\times[0,T_M)$ 上的经典解局部存在且唯一。此外，若 $T_M < \infty$，则

$$\lim_{t\uparrow T_M} \sup_{x\in[0,L]} \{|\psi_i(x,t)|\} = \infty$$

对于某个 $1 \le i \le n$。

2.3 问题表述

本文将研究存在外部扰动的抛物型偏微分多智能体系统的有限时间一致性和固定时间一致性问题。假设由 N 个智能体组成的多智能体系统具有如下形式:

$$\begin{cases} y_{i,t}(x,t) = k y_{i,xx}(x,t) + u_i(x,t) + d_i(x,t), \\ y_i(0,t) = y_i(L,t) = 0, \\ y_i(x,0) = y_i^0(x), \quad i = 1,2,\cdots,N, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中，$x \in [0,L]$ 表示位置，$t \in \{0\}\bigcup\mathbb{R}^+$ 表示经过时间，$y_i(x,t) \in \mathbb{R}$ 表示第 i 个智能体的状态变量，$y_i^0(\cdot)$表示第 i 个智能体的初始条件，使得 $y_i^0(\cdot)$关于 x有界且连续；$u_i(x,t) \in \mathbb{R}$ 表示第 i 个智能体的协议，$d_i(x,t) \in \mathbb{R}$ 表示未知的外部扰动，且 $k > 0$ 为常数。

假设 $d_i(x,t) \in \mathbb{R}$ 满足以下条件:

(i) $d_i(x,t)$关于 x 和 t连续;

(ii) 对于任意给定的 $x \in [0,L]$、$t \in [0,+\infty)$ 和 $i = 1$、2、$\cdots$、N，$|d_i(x,t)| \le d_{\max}$，其中上界 $d_{\max}$ 是一个已知常数。

定义 2.4. 多智能体系统（2.4）实现有限时间一致性（FTC），如果存在一个有限时间 t^* 对于任意给定的 $x \in [0,L]$ 和i，$j = 1$，2，$\cdots$，N满足

$$\lim_{t\to t^*} |y_i(x,t) - y_j(x,t)| = 0.$$

此外，若有限时间 $t^* < T_{\max}$，则多智能体系统（2.4）可实现固定时间一致性，其中 $T_{\max}$ 是一个与初始条件无关的正数常量。

备注 2.1。值得指出的是，多智能体系统（2.4）的控制目标是设计相应的控制器，以实现有限时间一致性或固定时间一致性。

为简便起见，记为 $\xi_{ij}(x,t) = y_i(x,t) - y_j(x,t)$。为实现有限时间一致性，我们通过设置状态值设计控制器 $u_i(x,t)$，使其满足

$$\begin{aligned} u_i(x,t) = & \underbrace{-\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\left(\int_0^L \xi_{ij}(x,t)^2 \mathrm{d}x\right)^{\alpha-1} \xi_{ij}(x,t)}_{(I)} \\ & \underbrace{-\bar{d}\sum_{j=1}^{N} a_{ij} sign(\xi_{ij}(x,t))}_{(II)}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中，$0 < \alpha < 1$、$a_{ij} \ge 0$ 和 $d > 0$ 为给定常数。

注 2.2。 在控制器（2.5）中，部分（I）确保有限时间一致性，部分（II）用于抵消外部扰动的影响。

为实现固定时间一致性，我们通过设定状态值来设计控制器 $u_i(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_i(x,t) = & \underbrace{-\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\left(\int_0^L \xi_{ij}(x,t)^2 \mathrm{d}x\right)^{\alpha-1} \xi_{ij}(x,t)}_{(I)} \\ & \underbrace{-\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\left(\int_0^L \xi_{ij}(x,t)^2 \mathrm{d}x\right)^{\beta-1} \xi_{ij}(x,t)}_{(II)} \\ & \underbrace{-\bar{d}\sum_{j=1}^{N} a_{ij} sign(\xi_{ij}(x,t))}_{(III)}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中， $0<\alpha<1$、 $\beta>1$、 $a_{ij}\geq 0$ 和 $d>0$ 均为给定常数。

注 2.3. 与控制器(2.5)相比，控制器 (2.6)的第 (II) 部分旨在使有限终端时间独立于初始条件。

注 2.4. 注意，固定时间一致性问题可视为有限时间一致性问题的演化。事实上，有限时间一致性控制器和固定时间一致性控制器均能确保系统在有限时间内达到一致性，但二者具有不同的收敛速率，对有限终端时间的估计也不同。

显然，若 $d_i(x,\ t)\equiv 0$，则多智能体系统 (2.4) 可化简为以下形式:

$$\begin{cases} y_{i,t}(x,t) = k y_{i,xx}(x,t) + u_i(x,t), \\ y_i(0,t) = y_i(L,t) = 0, \\ y_i(x,0) = y_i^0(x), \quad i = 1,2,\cdots,N. \end{cases} \tag{2.7}$$

换言之，多智能体系统 (2.7) 是多智能体系统 (2.4) 的一个特例。

为实现有限时间一致性，我们通过设定状态值来设计控制器 $u_i(x,t)$

$$u_i(x,t) = -\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\left(\int_0^L \xi_{ij}(x,t)^2 \mathrm{d}x\right)^{\alpha-1} \xi_{ij}(x,t), \tag{2.8}$$

其中， $0<\alpha<1$ 和 $a_{ij}\geq 0$ 为常数。

类似地，为实现固定时间一致性，我们通过设定状态值来设计控制器 $u_i(x,t)$

$$\begin{aligned} u_i(x,t) = & -\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\left(\int_0^L \xi_{ij}(x,t)^2 \mathrm{d}x\right)^{\alpha-1} \xi_{ij}(x,t) \\ & -\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\left(\int_0^L \xi_{ij}(x,t)^2 \mathrm{d}x\right)^{\beta-1} \xi_{ij}(x,t), \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中， $0<\alpha<1$、 $\beta>1$ 和 $a_{ij}\geq 0$ 为常数。

备注 2.5. 由于多智能体系统（2.7）是多智能体系统（2.4）在 d_i（x, t） $\equiv 0$下的一个特例，因此我们可以省略第（II）部分，将控制器（2.5）简化为控制器（2.8），以实现有限时间一致性。同理，我们可以得到多智能体系统（2.9）的固定时间控制器（2.7）。

2.4 多智能体系统的唯一可解性 (2.4)

命题 2.1. 假设图 G 是无向且连通的。那么，采用控制器（2.4）的多智能体系统（2.5）（或（2.6））有唯一解。

证明 为方便起见，以下证明中省略变量 (x,t)。我们首先证明以下系统 (2.10) 存在唯一解

$$\begin{cases} y_t = y_{xx} + d, \\ y(0,t) = y(L,t) = 0, \\ y(x,0) = y^0(x), \end{cases} \tag{2.10}$$

其中 $y = [y_1, \cdots, y_N]^T$, $d = [d_1, \cdots, d_N]^T$，以及 $y^0(x) = [y_1^0(x) \ \cdots, y_N^0(x)]^T$。事实上，由于 $y^0(x)$ 和 d均连续，根据引理 2.6 可知，系统 (2.10) 存在唯一解。

接下来，我们证明以下系统 (2.11) 存在唯一解

$$\begin{cases} y_t - k y_{xx} = u(y), \\ y(0,t) = y(L,t) = 0, \\ y(x,0) = y^0(x), \end{cases} \tag{2.11}$$

其中 $y = [y_1, \cdots, y_N]^T$和 $y^0(x) = [y_1^0(x) \ \cdots, y_N^0(x)]^T$。事实上，由于 $y^0(x)$ 关于 x 有界且连续，因此我们知道 $y^0(\cdot) \in \mathcal{L}^\infty([0,L], \mathbb{R}^n)$。注意，控制器 (2.5) 和 (2.6) 中包含符号函数，我们可以将信号切换时刻设为 t_m，其中 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < \cdots$。因此可知，$u(\cdot)$ 关于 y 在 $[t_m, t_{m+1})$ 上连续可微。根据引理 2.7，存在常数 $T_{M,m} > 0$，使得系统 (2.11) 在 $[0,L] \times [t_m, \min\{t_{m+1}, T_{M,m}\})$ 上存在唯一解。构造一个 Lyapunov广义能量函数

$$\mathbb{V}(t) = \int_0^L \sum_{i=1}^N (y_i)^2 \mathrm{d}x.$$

那么，很容易看出，$\mathbb{V}(t)$ 关于 t 的导数可表示为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbb{V}(t)}{\mathrm{d}t} &= 2\int_0^L \sum_{i=1}^N y_i y_{i,t} \mathrm{d}x \\ &= 2k\sum_{i=1}^N \int_0^L y_i y_{i,xx} \mathrm{d}x + 2\sum_{i=1}^N \int_0^L y_i u_i \mathrm{d}x \\ &= -2\sum_{i=1}^N \int_0^L y_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \left(\int_0^L \xi_{ij}^2 \mathrm{d}x \right)^{\alpha-1} \xi_{ij} \mathrm{d}x \\ &\quad -2\sum_{i=1}^N \int_0^L y_i \bar{d} \sum_{j=1}^N a_{ij} sign(\xi_{ij}) \mathrm{d}x - 2k\sum_{i=1}^N \int_0^L (y_{i,x})^2 \mathrm{d}x \\ &\leq -\sum_{i,j=1}^N \left(a_{ij}^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^L \xi_{ij}^2 \mathrm{d}x \right)^{\alpha} - \int_0^L \sum_{i,j=1}^N \bar{d} a_{ij} \left(\xi_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \\ &\quad -\frac{1}{2} k L^{-2} \pi^2 \sum_{i=1}^N \int_0^L (y_i)^2 \mathrm{d}x \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

因此，有 $\mathbb{V}(t) \leq \mathbb{V}(0) < \infty$。根据引理 2.7，有 $T_{M,\ m} = \infty$ 当 $m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 因此，系统（2.11）在 $[0, L] \times [t_m, t_{m+1})$ 上有唯一解，其中 $m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，这意味着系统（2.11）在整个定义域内有唯一解。

因此，由系统 (2.10) 和 (2.11) 的唯一可解性可知，采用控制器 (2.5)（或 (2.6)）的多智能体系统 (2.4) 有唯一解。证明完毕。

注 2.6。由于多智能体系统 (2.7) 是多智能体系统 (2.4) 的特例，根据命题2.1 可知，采用 (2.8)（或 (2.9)）的多智能体系统 (2.7) 有唯一解。

3 主要结果

基于控制器 (2.5) 和 (2.6)，得到了多智能体系统 (2.4) 有限时间一致性和固定时间一致性的充分条件。为方便起见，以下证明中省略变量 (x, t)。

定理3.1。假设图 $\mathcal{G}$ 是无向且连通的。那么，控制器 (2.5) 可以确保多智能体系统 (2.4) 实现有限时间一致性，条件是 $d \geq 2d_{\max}N+1$ $\sqrt{2}\lambda_2^{\frac{1}{2}}\ \mathcal{L}\ E(())$ 满足 $E = (a_{ij}^2) \in \mathbb{R}^{N\times N}$，且有限终端时间 t^* 满足

$$t^* \leq \frac{\left[\int_0^L \frac{1}{2N}\sum_{i,j=1}^N (y_i^0(x) - y_j^0(x))^2 \mathrm{d}x\right]^{1-\alpha}}{C_1(1-\alpha)},$$

其中 $C_1 = (2\lambda_2(\mathcal{L}(B)))^{\alpha}$，且 $B = (a_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$。

证明：设计辅助变量 y^* 如下

$$y^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N y_i.$$

显然，$y^*(x,t)$的动力学方程具有如下形式

$$\begin{cases} y_t^* = ky_{xx}^* + u^* + d^*, \\ y^*(0,t) = y^*(L,t) = 0, \\ y^*(x,0) = y^{*,0}(x), \end{cases}$$

其中，$u^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N u_i$ 为平均协议，$d^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N d_i$ 为平均扰动，且 $y^{*,\ 0}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N y_i^0(x)$为平均初始条件。记 $\delta = [\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_N]^T$，其中 $\delta_i = y_i - y^*$。则 $\langle \delta, \mathbf{1}\rangle = 0$。

现在需要证明 y_i 在有限时间内实现一致性，这等价于证明对于 $i = 1, 2, \cdots, N$，y_i 在有限时间内收敛至 y^*。为此，我们构造一个Lyapunov广义能量函数

$$\mathbb{V}(t) = \int_0^L \sum_{i=1}^N (y_i - y^*)^2 \mathrm{d}x = \int_0^L \sum_{i=1}^N \delta_i^2 \mathrm{d}x,$$

这等价于以下形式

$$\mathbb{V}(t) = \int_0^L \frac{1}{2N}\sum_{i,j=1}^N \xi_{ij}^2 \mathrm{d}x.$$

显然， $\mathbb{V}(t)$ 关于 t 的导数可表示为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbb{V}(t)}{\mathrm{d}t} &= 2\int_0^L \sum_{i=1}^N \delta_i(y_{i,t}-y_t^*)\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{2k\sum_{i=1}^N \int_0^L \delta_i(y_{i,xx}-y_{xx}^*)\mathrm{d}x}_{(I)} \\ &\quad \underbrace{+2\sum_{i=1}^N \int_0^L \delta_i(d_i-d^*)\mathrm{d}x}_{(II)} + \underbrace{2\sum_{i=1}^N \int_0^L \delta_i(u_i-u^*)\mathrm{d}x}_{(III)}.\end{aligned}$$

为了估计 $\mathbb{V}$（t）的导数，我们需要分别估计第（I）、第（II）和第（III）部分。利用引理2.5 估计第（I）部分，可得

$$\begin{aligned}& 2k\sum_{i=1}^N \int_0^L \delta_i(y_{i,xx}-y_{xx}^*)\mathrm{d}x \\ =\ & -2k\sum_{i=1}^N \int_0^L (y_{i,x}-y_x^*)^2\mathrm{d}x \\ \le\ & -\frac{1}{2}kL^{-2}\pi^2\sum_{i=1}^N \int_0^L \delta_i^2\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.12}$$

估计第（II）部分，可容易得到

$$\begin{aligned}& 2\sum_{i=1}^N \int_0^L \delta_i(d_i-d^*)\mathrm{d}x \\ =\ & 2\sum_{i=1}^N \int_0^L \delta_i d_i\mathrm{d}x \le 2d_{\max}\int_0^L \sum_{i=1}^N |\delta_i|\mathrm{d}x \\ \le\ & 2d_{\max}N^{\frac{1}{2}}\int_0^L \left(\sum_{i=1}^N \delta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.13}$$

由于 G 是无向的，因此可得 $a_{ij}=a_{ji}$。利用（2.5）和引理2.3 估计第（III）部分，可得

$$\begin{aligned}& 2\sum_{i=1}^N \int_0^L \delta_i(u_i-u^*)\mathrm{d}x \\ =\ & -2\sum_{i=1}^N \int_0^L y_i \sum_{j=1}^N a_{ij}\left(\int_0^L \xi_{ij}^2\mathrm{d}x\right)^{\alpha-1}\xi_{ij}\mathrm{d}x - 2\sum_{i=1}^N \int_0^L y_i\bar{d}\sum_{j=1}^N a_{ij}sign(\xi_{ij})\mathrm{d}x \\ =\ & -\int_0^L \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\xi_{ij}^2 dx\left(\int_0^L \xi_{ij}^2\mathrm{d}x\right)^{\alpha-1} - \int_0^L \sum_{i,j=1}^N \bar{d}a_{ij}\xi_{ij}sign(\xi_{ij})\mathrm{d}x \\ =\ & -\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\left(\int_0^L \xi_{ij}^2\mathrm{d}x\right)^{\alpha} - \int_0^L \sum_{i,j=1}^N \bar{d}a_{ij}|\xi_{ij}|\mathrm{d}x \\ =\ & -\sum_{i,j=1}^N \left(a_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}\int_0^L \xi_{ij}^2\mathrm{d}x\right)^{\alpha} - \int_0^L \sum_{i,j=1}^N \bar{d}a_{ij}\left(\xi_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\ \le\ & -\left(\int_0^L \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}\xi_{ij}^2\mathrm{d}x\right)^{\alpha} - \bar{d}\int_0^L \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^2\xi_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\leq -\left(\int_0^L \frac{\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}\xi_{ij}^2}{\sum_{i=1}^N \delta_i^2}\sum_{i=1}^N \delta_i^2 \mathrm{d}x\right)^{\alpha} - \bar{d}\int_0^L \left(\frac{\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^2\xi_{ij}^2}{\sum_{i=1}^N \delta_i^2}\sum_{i=1}^N \delta_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x. \tag{3.14}$$

定义 $B=(a_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$和 $E=(a_{ij}^2) \in \mathbb{R}^{N\times N}$。根据引理2.4，可得

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}\xi_{ij}^2}{\sum_{i=1}^N \delta_i^2} &= \frac{\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}(\delta_j-\delta_i)^2}{\sum_{i=1}^N \delta_i^2}\\ &= \frac{2\langle\delta,\mathcal{L}(B)\delta\rangle}{\langle\delta,\delta\rangle} \geq 2\lambda_2(\mathcal{L}(B))\end{aligned} \tag{3.15}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{2}\xi_{ij}^2}{\sum_{i=1}^N \delta_i^2} &= \frac{\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{2}(\delta_j-\delta_i)^2}{\sum_{i=1}^N \delta_i^2}\\ &= \frac{2\langle\delta,\mathcal{L}(E)\delta\rangle}{\langle\delta,\delta\rangle} \geq 2\lambda_2(\mathcal{L}(E)).\end{aligned} \tag{3.16}$$

将3.15）和（3.16）代入（3.14），可得

$$\begin{aligned}&2\sum_{i=1}^N \int_0^L \delta_i(u_i-u^*)\mathrm{d}x\\ \leq\ & -\left(\int_0^L 2\lambda_2(\mathcal{L}(B))\sum_{i=1}^N \delta_i^2\mathrm{d}x\right)^{\alpha} - \bar{d}\int_0^L \left(2\lambda_2(\mathcal{L}(E))\sum_{i=1}^N \delta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\ \leq\ & -(2\lambda_2(\mathcal{L}(B)))^{\alpha}\left(\int_0^L \sum_{i=1}^N \delta_i^2\mathrm{d}x\right)^{\alpha} - \sqrt{2}\bar{d}\lambda_2^{\frac{1}{2}}(\mathcal{L}(E))\int_0^L \left(\sum_{i=1}^N \delta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\ \leq\ & -C_1(V(t))^{\alpha} - \sqrt{2}\bar{d}\lambda_2^{\frac{1}{2}}(\mathcal{L}(E))\int_0^L \left(\sum_{i=1}^N \delta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中 $C_1=(2\lambda_2(\mathcal{L}(B)))^{\alpha}$。由于 $\bar{d}\geq \frac{2d_{\max}N^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\lambda_2^{\frac{1}{2}}(\mathcal{L}E(()))}$，由（3.12）、（3.13）和（3.17）可得

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{V}(t)}{dt} &\leq -C_1(\mathbb{V}(t))^{\alpha} - \frac{1}{2}kL^{-2}\pi^2\sum_{i=1}^N\int_0^L \delta_i^2\mathrm{d}x\\ &\quad + \left(2d_{\max}N^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\bar{d}\lambda_2^{\frac{1}{2}}(\mathcal{L}(E))\right)\int_0^L\left(\sum_{i=1}^N\delta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\ &\leq -C_1(\mathbb{V}(t))^{\alpha}.\end{aligned}$$

由于 $\alpha\in(0,\ 1)$ 且无向图 G 是连通的，我们知道 $C_1>0$。因此，引理 2.1 表明，多智能体系统（2.4）在 t^* 内实现有限时间一致性，且

$$t^*\leq \frac{\mathbb{V}(0)^{1-\alpha}}{C_1(1-\alpha)} = \frac{\left[\int_0^L \frac{1}{2N}\sum_{i,j=1}^N (y_i^0(x)-y_j^0(x))^2dx\right]^{1-\alpha}}{C_1(1-\alpha)}.$$

证明完毕。

定理 3.2. 假设图 G 是无向连通图。那么，控制器 (2.6) 可确保多智能体系统 (2.4) 实现固定时间一致性，其中 $\bar{d}\geq \frac{2d_{\max}N^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\lambda_2^{\frac{1}{2}}(\mathcal{L}E(()))}$ 满足 $E=(a_{ij}^2) \in \mathbb{R}^{N\times N}$，且有限终端时间 t^* 满足

$$t^*\leq T_{\max} := \frac{1}{C_1(1-\alpha)} + \frac{1}{(N^{1-\beta})^2C_2(\beta-1)},$$

其中

$$C_1 = (2\lambda_2(\mathcal{L}(B)))^{\alpha}, \quad C_2 = (2\lambda_2(\mathcal{L}(P)))^{\beta}$$

其中 $B = (a_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$和 $P = (a_{ij}^{\frac{1}{\beta}}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$。

证明 定义多智能体系统（2.4）的 Lyapunov广义能量函数

$$\mathbb{V}(t) = \int_0^L \sum_{i=1}^N \delta_i^2 \mathrm{d}x.$$

类似于定理 3.1中的讨论， $\mathbb{V}$（t）在 t 下的导数可表示为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbb{V}(t)}{\mathrm{d}t} &= 2\int_0^L \sum_{i=1}^N \delta_i(y_{i,t} - y_t^*)\mathrm{d}x \\
&\leq -C_1(\mathbb{V}(t))^{\alpha} - \sum_{i,j=1}^N \left(a_{ij}^{\frac{1}{\beta}} \int_0^L \xi_{ij}^2 \mathrm{d}x\right)^{\beta} \\
&\leq -C_1(\mathbb{V}(t))^{\alpha} - (N^{1-\beta})^2 \left(\int_0^L \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{\frac{1}{\beta}} \xi_{ij}^2 \mathrm{d}x\right)^{\beta} \\
&\leq -C_1(\mathbb{V}(t))^{\alpha} - (N^{1-\beta})^2 C_2(\mathbb{V}(t))^{\beta},
\end{aligned}$$

其中

$$C_1 = (2\lambda_2(\mathcal{L}(B)))^{\alpha}, \quad C_2 = (2\lambda_2(\mathcal{L}(P)))^{\beta}$$

其中 $B = (a_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$且 $P = (a_{ij}^{\frac{1}{\beta}}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$。因此，引理 2.2表明，多智能体系统（2.4）在 t^* 下实现固定时间一致性，其

$$t^* \leq T_{\max} := \frac{1}{C_1(1-\alpha)} + \frac{1}{(N^{1-\beta})^2 C_2(\beta-1)}.$$

证明至此完成。

由于多智能体系统（2.7）是多智能体系统（2.4）的一个特例，因此我们得到以下推论，说明在无向连通图下，通过控制器（2.7）和（2.8）可实现多智能体系统（2.9）的有限时间一致性和固定时间一致性。

推论3.1。 假设图 G 是无向连通的。那么，控制器（2.8）可确保多智能体系统（2.7）实现有限时间一致性，且有限终端时间 t^* 满足

$$t^* \leq \frac{\left[\int_0^L \frac{1}{2N}\sum_{i,j=1}^N (y_i^0(x) - y_j^0(x))^2 \mathrm{d}x\right]^{1-\alpha}}{C_1(1-\alpha)},$$

其中 $C_1 = (2\lambda_2(\mathcal{L}(B)))^{\alpha}$在 $B = (a_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$下。

推论3.2。 假设图 G 是无向连通的。那么，控制器（2.9）可确保多智能体系统（2.7）实现固定时间一致性，且有限终端时间 t^* 满足

$$t^* \leq T_{\max} := \frac{1}{C_1(1-\alpha)} + \frac{1}{(N^{1-\beta})^2 C_2(\beta-1)},$$

其中

$$C_1 = (2\lambda_2(\mathcal{L}(B)))^{\alpha}, \quad C_2 = (2\lambda_2(\mathcal{L}(P)))^{\beta}$$

与 $B = (a_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$和 $P = (a_{ij}^{\frac{1}{\beta}}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$。

接下来，我们聚焦于有向、s-连通且 d-平衡图下通过控制器（2.7）和（2.8）及（2.9）解决多智能体系统的有限时间一致性和固定时间一致性问题。

定理 3.3。 假设图 G 是有向、s-连通且 d-平衡的。那么，控制器（2.8）能够确保多智能体系统（2.7）实现有限时间一致性（FTC），且有限终端时间 t^* 满足

$$t^* \leq \frac{\left[\int_0^L \sum_{i=1}^N \omega_i (y_i^0(x) - \hat{y}^0(x))^2 \mathrm{d}x\right]^{1-\alpha}}{C_3(1-\alpha)},$$

其中,

$$\hat{y}^0(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \omega_i} \sum_{i=1}^N \omega_i y_i^0(x)$$

and

$$C_3 = \left(\frac{2}{\max\limits_{i=1,\cdots,N} \omega_i} \lambda_\omega(\mathcal{L}(D))\right)^\alpha$$

其中 $D = (\omega_i a_{ij})^{\frac{1}{\alpha}} \in \mathbb{R}^{N\times N}$。

证明 由于图 G 是 d-平衡的，因此存在一个向量 $\omega = [\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N]^T$，满足 $\omega_i > 0$ $\omega_i a_{ij} = \omega_j a_{ji} (i, j = 1, \cdots, N)$。设计如下辅助变量 $\hat{y}$

$$\hat{y} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \omega_i} \sum_{i=1}^N \omega_i y_i.$$

显然，$\hat{y}$ 的动力学方程满足

$$\begin{cases} \hat{y}_t = k\hat{y}_{xx} + \hat{u}, \\ \hat{y}(0,t) = \hat{y}(L,t) = 0, \\ \hat{y}(x,0) = \hat{y}^0(x), \end{cases}$$

其中，$\hat{u} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \omega_i} \sum_{i=1}^N \omega_i u_i$ 是加权平均协议，$\hat{y}^0(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \omega_i} \sum_{i=1}^N \omega_i y_i^0(x)$是加权平均初始条件。令$\hat{\delta} = [\hat{\delta}_1、\hat{\delta}_2、\cdots、\hat{\delta}_N]^T$，其中$\hat{\delta}_i = y_i - \hat{y}$。则 $\langle \hat{\delta}、\omega \rangle = 0$。

现在我们需要证明，y_i 在有限时间内实现一致性，这等价于 y_i 对 $i = 1、2、\cdots、N$在有限时间内收敛到$\hat{y}$。为此，我们构造一个Lyapunov广义能量函数

$$\mathbb{V}(t) = \int_0^L \sum_{i=1}^N \omega_i (y_i - \hat{y})^2 \mathrm{d}x = \int_0^L \sum_{i=1}^N \omega_i \hat{\delta}_i^2 \mathrm{d}x.$$

容易验证的是

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbb{V}(t)}{\mathrm{d}t} &= 2\int_0^L \sum_{i=1}^N \omega_i \hat{\delta}_i (y_{i,t} - \hat{y}_t) \mathrm{d}x \\ &= \underbrace{2k \sum_{i=1}^N \int_0^L \omega_i \hat{\delta}_i (y_{i,xx} - \hat{y}_{xx}) \mathrm{d}x}_{(I)} + \underbrace{2 \sum_{i=1}^N \int_0^L \omega_i \hat{\delta}_i (u_i - \hat{u}) \mathrm{d}x}_{(II)}. \end{aligned}$$

为了估计 $\mathbb{V}(t)$的导数，我们需要分别估计第（I）部分和第（II）部分。利用引理2.5估计第（I）部分，可得

$$\begin{aligned} & 2k\sum_{i=1}^{N}\omega_i\int_0^L\hat{\delta}_i(y_{i,xx}-\hat{y}_{xx})\mathrm{d}x \\ = & -2k\sum_{i=1}^{N}\omega_i\int_0^L(y_{i,x}-\hat{y}_x)^2\mathrm{d}x \\ \leq & -\frac{1}{2}kL^{-2}\pi^2\sum_{i=1}^{N}\omega_i\int_0^L\hat{\delta}_i^2\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.18}$$

<escape>由于 $\omega_i a_{ij}=\omega_j a_{ji}(i,\ j=1,\ \cdots,\ N)$，利用 (2.8) 和引理 2.3 对第 (II) 部分进行估计，我们得到</escape>

$$\begin{aligned} & 2\sum_{i=1}^{N}\omega_i\int_0^L\hat{\delta}_i(u_i-\hat{u})\mathrm{d}x \\ = & -2\sum_{i=1}^{N}\omega_i\int_0^L\hat{\delta}_i\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\left(\int_0^L\xi_{ij}^2\mathrm{d}x\right)^{\alpha-1}\xi_{ij}\mathrm{d}x \\ = & -2\sum_{i=1}^{N}\int_0^L\omega_i y_i\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\left(\int_0^L\xi_{ij}^2\mathrm{d}x\right)^{\alpha-1}\xi_{ij}\mathrm{d}x \\ = & -2\int_0^L\sum_{i,j=1}^{N}y_i\omega_i a_{ij}\left(\int_0^L\xi_{ij}^2\mathrm{d}x\right)^{\alpha-1}\xi_{ij}\mathrm{d}x \\ = & -\int_0^L\sum_{i,j=1}^{N}\omega_i a_{ij}\xi_{ij}^2 dx\left(\int_0^L\xi_{ij}^2\mathrm{d}x\right)^{\alpha-1} \\ = & -\sum_{i,j=1}^{N}\omega_i a_{ij}\left(\int_0^L\xi_{ij}^2\mathrm{d}x\right)^{\alpha} \\ = & -\sum_{i,j=1}^{N}\left((\omega_i a_{ij})^{\frac{1}{\alpha}}\int_0^L\xi_{ij}^2\mathrm{d}x\right)^{\alpha} \\ \leq & -\left(\int_0^L\sum_{i,j=1}^{N}(\omega_i a_{ij})^{\frac{1}{\alpha}}\xi_{ij}^2\mathrm{d}x\right)^{\alpha} \\ \leq & -\left(\int_0^L\frac{\sum_{i,j=1}^{N}(\omega_i a_{ij})^{\frac{1}{\alpha}}\xi_{ij}^2}{\sum_{i=1}^{N}\omega_i\hat{\delta}_i^2}\sum_{i=1}^{N}\omega_i\hat{\delta}_i^2\mathrm{d}x\right)^{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

定义 $D=((\omega_i a_{ij})^{\frac{1}{\alpha}})\in\mathbb{R}^{N\times N}$。根据引理 2.4，可得

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i,j=1}^{N}(\omega_i a_{ij})^{\frac{1}{\alpha}}\xi_{ij}^2}{\sum_{i=1}^{N}\omega_i\hat{\delta}_i^2} &= \frac{\sum_{i,j=1}^{N}(\omega_i a_{ij})^{\frac{1}{\alpha}}(\hat{\delta}_j-\hat{\delta}_i)^2}{\sum_{i=1}^{N}\hat{\delta}_i^2} \\ &\geq \frac{2\langle\hat{\delta},\mathcal{L}(D)\hat{\delta}\rangle}{\max\limits_{i=1,\cdots,N}\omega_i\langle\hat{\delta},\hat{\delta}\rangle}\geq\frac{2}{\max\limits_{i=1,\cdots,N}\omega_i}\lambda_\omega(\mathcal{L}(D)). \end{aligned} \tag{3.20}$$

容易看出 $\langle\omega,\ \mathbf{1}\rangle\neq 0$ 因此 $\lambda_\omega(\mathcal{L}(D))\ >0$ 由引理2.4。将(3.20代入(3.19，可得

$$2\sum_{i=1}^{N}\omega_i\int_0^L\hat{\delta}_i(u_i-\hat{u})\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&\leq -\left(\int_0^L \frac{2}{\max\limits_{i=1,\cdots,N}\omega_i}\lambda_\omega(\mathcal{L}(D))\sum_{i=1}^N \hat{\delta}_i^2 \mathrm{d}x\right)^\alpha \\
&\leq -(\frac{2}{\max\limits_{i=1,\cdots,N}\omega_i}\lambda_\omega(\mathcal{L}(D)))^\alpha\left(\int_0^L \sum_{i=1}^N \omega_i\hat{\delta}_i^2 \mathrm{d}x\right)^\alpha \\
&\leq -C_3(\mathbb{V}(t))^\alpha, \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

其中

$$
C_3 = \left(\frac{2}{\max\limits_{i=1,\cdots,N}\omega_i}\lambda_\omega(\mathcal{L}(D))\right)^\alpha > 0.
$$

现在，由（3.18）和（3.21）可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbb{V}(t)}{\mathrm{d}t} &\leq -C_3(\mathbb{V}(t))^\alpha - \frac{1}{2}kL^{-2}\pi^2\sum_{i=1}^N \omega_i\int_0^L \hat{\delta}_i^2 dx \\
&\leq -C_3(\mathbb{V}(t))^\alpha.
\end{aligned}
$$

<escape>因此，引理 2.1 表明，多智能体系统（2.7）在 t^* 内实现了有限时间一致性，且</escape>

$$
t^* \leq \frac{\mathbb{V}(0)^{1-\alpha}}{C_3(1-\alpha)} = \frac{\left[\int_0^L \sum_{i=1}^N \omega_i(y_i^0(x)-\hat{y}^0(x))^2\mathrm{d}x\right]^{1-\alpha}}{C_3(1-\alpha)}.
$$

证明完成。

定理 3.4。 假设图 G 是有向的、s-连通且 d-平衡的。那么，控制器（2.9）可以确保多智能体系统（2.7）实现固定时间一致性，并且有限终端时间 t^* 满足

$$
t^* \leq T_{\max} := \frac{1}{C_3(1-\alpha)} + \frac{1}{(N^{1-\beta})^2 C_4(\beta-1)},
$$

其中

$$
C_3 = \left(\frac{2}{\max\limits_{i=1,\cdots,N}\omega_i}\lambda_\omega(\mathcal{L}(D))\right)^\alpha
$$

and

$$
C_4 = \left(\frac{2}{\max\limits_{i=1,\cdots,N}\omega_i}\lambda_\omega(\mathcal{L}(Q))\right)^\beta
$$

其中 $D = ((\omega_i a_{ij})^{\frac{1}{\alpha}}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$以及 $Q = ((\omega_i a_{ij})^{\frac{1}{\beta}}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$。

证明 通过设定来构造一个 Lyapunov 广义能量函数。

$$
\mathbb{V}(t) = \int_0^L \sum_{i=1}^N \omega_i\hat{\delta}_i^2 \mathrm{d}x.
$$

与定理 3.3中的讨论类似， $\mathbb{V}(t)$ 关于 t 的导数可得

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbb{V}(t)}{\mathrm{d}t} = 2\int_0^L \sum_{i=1}^N \omega_i\hat{\delta}_i(y_{i,t}-\hat{y}_t)\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq -C_3(\mathbb{V}(t))^{\alpha} - \sum_{i,j=1}^{N}\left((\omega_i a_{ij})^{\frac{1}{\beta}}\int_0^L \xi_{ij}^2 \mathrm{d}x\right)^{\beta}\\
&\leq -C_3(\mathbb{V}(t))^{\alpha} - (N^{1-\beta})^2\left(\int_0^L \sum_{i,j=1}^{N}(\omega_i a_{ij})^{\frac{1}{\beta}}\xi_{ij}^2 \mathrm{d}x\right)^{\beta}\\
&\leq -C_3(\mathbb{V}(t))^{\alpha} - (N^{1-\beta})^2 C_4(\mathbb{V}(t))^{\beta},
\end{aligned}
$$

其中

$$
C_3 = \left(\frac{2}{\max\limits_{i=1,\cdots,N}\omega_i}\lambda_{\omega}(\mathcal{L}(D))\right)^{\alpha}
$$

and

$$
C_4 = \left(\frac{2}{\max\limits_{i=1,\cdots,N}\omega_i}\lambda_{\omega}(\mathcal{L}(Q))\right)^{\beta}
$$

其中 $D = ((\omega_i a_{ij})^{\frac{1}{\alpha}}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$和 $Q = ((\omega_i a_{ij})^{\frac{1}{\beta}}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$。因此，引理 2.2 表明多智能体系统 (2.7) 在 t^* 内实现固定时间一致性

$$
t^* \leq T_{\max} := \frac{1}{C_3(1-\alpha)} + \frac{1}{(N^{1-\beta})^2 C_4(\beta-1)}.
$$

证明到此结束。

4 仿真结果

本节提供两个数值仿真，以验证上述设计的控制器的可行性。需要指出的是，我们采用传统的有限差分法求解抛物型多智能体系统。

例 1 考虑包含 3 个智能体的多智能体系统，其图 G 如图1所示，为无向连通图，其中边旁的数字表示邻接元素。显然，我们可以得到邻接矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

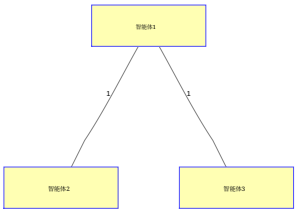


图1：由3个智能体组成的无向连通图。

当 $\alpha = 0.5$、 $\beta = 1.1$、 $k = 10^{-3}$、 $\bar{d} = 8$ 和 $x \in [0, 2]$时，可将多智能体系统表示为

$$
\begin{cases}
y_{i,t} = 10^{-3}\cdot y_{i,xx} + u_i + d_i, \\
y_i(0,t) = y_i(2,t) = 0, \quad i = 1,2,3,
\end{cases}
\tag{4.22}
$$

有限时间一致性控制器可表示为

$$u_i = -\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \left(\int_0^2 \xi_{ij}^2 \mathrm{d}x \right)^{-0.5} \xi_{ij} - 8 \sum_{j=1}^{3} a_{ij} sign(\xi_{ij}), \tag{4.23}$$

FXC控制器可表示如下

$$\begin{aligned} u_i \quad = \quad & -\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \left(\int_0^2 \xi_{ij}^2 \mathrm{d}x \right)^{-0.5} \xi_{ij} \\ & -\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \left(\int_0^2 \xi_{ij}^2 \mathrm{d}x \right)^{0.1} \xi_{ij} - 8 \sum_{j=1}^{3} a_{ij} sign(\xi_{ij}). \end{aligned} \tag{4.24}$$

初始条件设定如下

$$\begin{cases} y_1(x,0) = y_1^0(x) = 3\sin(\pi x), \\ y_2(x,0) = y_2^0(x) = -2\cos(\pi x) + 2, \\ y_3(x,0) = y_3^0(x) = 2\cos(\pi x) - 2, \end{cases} \tag{4.25}$$

外部扰动如下

$$\begin{cases} d_1(x,t) = \sin(\pi t) + x, \\ d_2(x,t) = \cos(\pi t) + x, \\ d_3(x,t) = \sin(\pi t x). \end{cases} \tag{4.26}$$

注意，[57] 中考虑的分布式一致性控制器为

$$u_i = -\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \xi_{ij} \tag{4.27}$$

而[48] 中研究的一致性边界控制器设计如下

$$y_{i,x}(2,t) = u_i(t) = -\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \xi_{ij}(2,t). \tag{4.28}$$

根据定理3.1，容易看出，通过控制器(4.23)，具有(4.25)和(4.26)的MASs (4.22)可在 t^* 和 $t^* \leq 7.746$ 时实现有限时间一致性。图2和图3分别展示了在 $x = 0.5$、1.0、1.5时，通过控制器(4.23)，具有(4.25)和(4.26)的MASs (4.22)的状态和截面。图6分别展示了在 $x = 0.5$、1.0、1.5时，无控制的MASs (4.22)的截面。因此，控制器(4.23)能够确保具有(4.25)和(4.26)的MASs (4.22)实现有限时间一致性。

根据定理 3.2，MAS (4.22) 在满足 (4.25) 和 (4.26) 的情况下，通过控制器 (4.24) 可在 t^* 和 $t^* \leq T_{\max} = 7.226$ 达到固定时间一致性。图4和图5分别展示了 MAS (4.22) 在满足 (4.25) 和 (4.26) 的情况下，通过控制器 (4.24) 在 $x = 0.5$、1.0 和 1.5 时的状态和截面。因此，控制器 (4.24) 能够保证 MAS (4.22) 在满足 (4.25) 和 (4.26) 时的固定时间一致性。

在 $x = 0.5$、1.0、1.5 时，采用控制器 (4.27) 和 (4.28) 对具有 (4.25) 和 (4.26) 的 MAS (4.22) 的截面如图7和图9所示，这表明控制器 (4.27) 和 (4.28) 无法应对外部干扰的存在。当 $d_1(x,t) = d_2(x,t) = d_3(x,t) = 0$ 时，采用控制器 (4.27) 和 (4.28) 对 MAS (4.22) 的截面如图8和图10所示。由图3、图5、图8和图10可知，控制器 (4.23) 和 (4.24) 的收敛速度快于控制器 (4.27) 和 (4.28)。

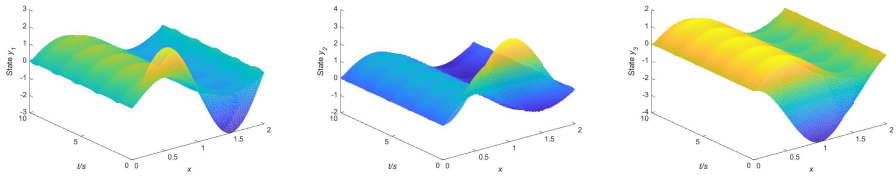


图2：多智能体系统的状态（4.22）在（4.25）和（4.26）条件下通过控制器（4.23）。

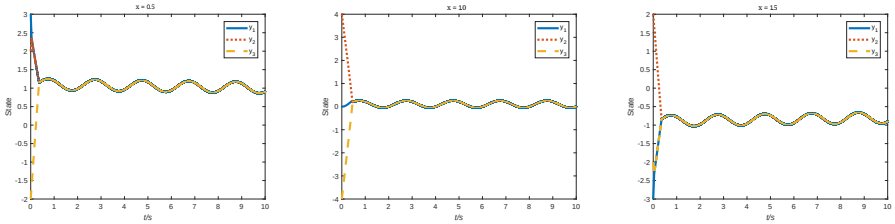


图3：多智能体系统的截面（4.22）在（4.25）和（4.26）条件下通过控制器（4.23）。

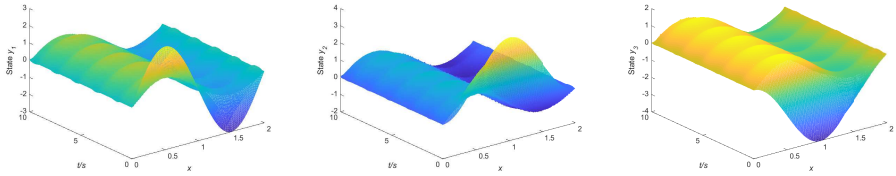


图4：多智能体系统的状态（4.22）在采用控制器（4.25）和（4.26）时4.24）。

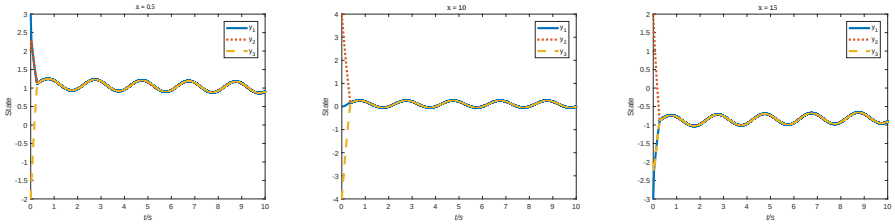


图5：多智能体系统的截面（4.22）与（4.25）和（4.26），通过控制器（4.24）。

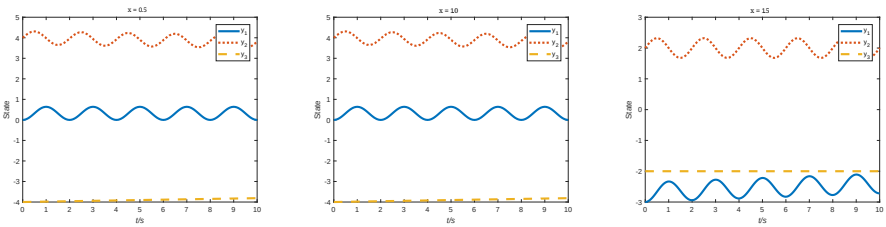


图 6：MAS的截面（4.22），有控制时为（4.25），无控制时为（4.26）。

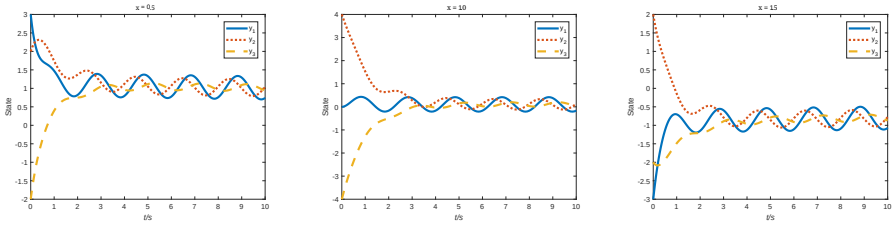
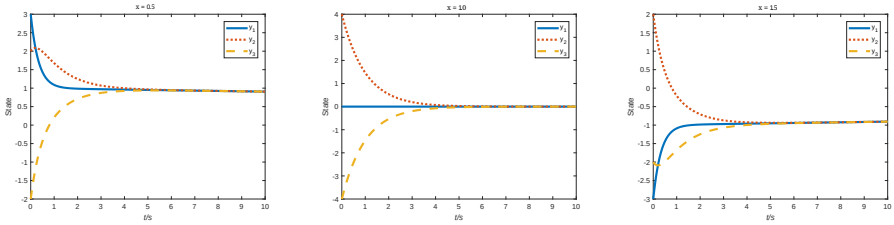


图7：MAS的截面（4.22）在（4.25）和（4.26）下，通过控制器（4.27）。



Fi图8：多智能体系统的截面（4.22）有（4.25）和无（4.26）通过控制器（4.27 ）.

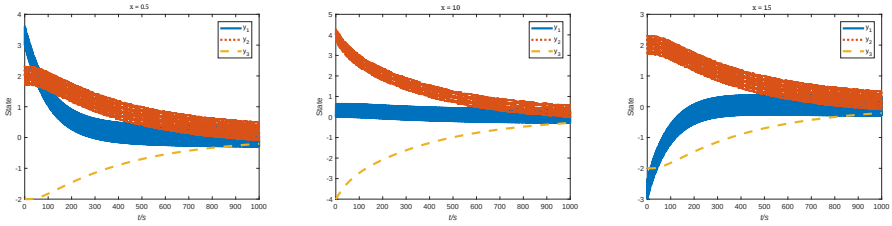


图9：多智能体系统的截面（4.22）有（4.25）和（4.26）通过控制器（4.28）。

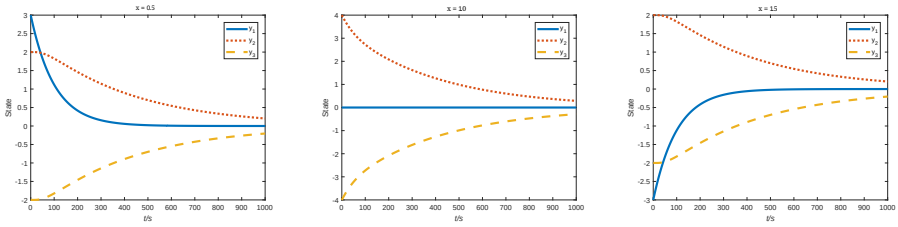


图10：通过控制器（4.22）在有（4.25）和无（4.26）控制器（4.28）作用下的多智能体系统（MAS）的截面。

例2 考虑一个包含3个智能体的多智能体系统，其图 G 是图11所示的有向、s-连通且d-平衡图。11，边旁的数字表示邻接元素。显然，我们可以得到邻接矩阵$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&1\\4&2&0\end{pmatrix}$，且 $\omega=[1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}]^T$。

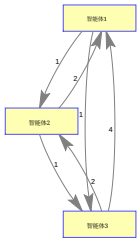


图11：一个包含3个智能体的有向、s-连通且d-平衡图。

当 $\alpha = 0.5$、$\beta = 1.1$、$k = 10^{-3}$ 和 $x \in [0, 2]$时，可得到多智能体系统如下：

$$\begin{cases} y_{i,t} = 10^{-3} \cdot y_{i,xx} + u_i, \\ y_i(0,t) = y_i(2,t) = 0, \quad i = 1,2,3, \end{cases} \tag{4.29}$$

FTC控制器可以表述为

$$u_i = -\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \left(\int_0^2 \xi_{ij}^2 \mathrm{d}x \right)^{-0.5} \xi_{ij}, \tag{4.30}$$

FXC控制器可按如下方式获得。

$$\begin{aligned} u_i(x,t) = \quad & -\textstyle\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \left(\int_0^2 \xi_{ij}^2 \mathrm{d}x \right)^{-0.5} \xi_{ij} \\ & -\textstyle\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \left(\int_0^2 \xi_{ij}^2 \mathrm{d}x \right)^{0.1} \xi_{ij}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

初始条件为

$$\begin{cases} y_1(x,0) = y_1^0(x) = 3\sin(\pi x), \\ y_2(x,0) = y_2^0(x) = -2\cos(\pi x) + 2, \\ y_3(x,0) = y_3^0(x) = 2\cos(\pi x) - 2. \end{cases} \tag{4.32}$$

It 值得一提的是，[57] 中考虑的分布式一致性控制器由以下方式给出 y

$$u_i = -\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \xi_{ij} \tag{4.33}$$

而[48] 中研究的一致性边界控制器设计如下

$$y_{i,x}(2,t) = u_i(t) = -\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \xi_{ij}(2,t). \tag{4.34}$$

根据定理 3.3，容易看出，MASs (4.29) 在 (4.32) 条件下通过控制器 (4.30) 可在 t^* 和 $t^* \leq 4.15$实现有限时间一致性。图12和图13分别展示了 MASs (4.29) 在 (4.32) 条件下于$x = 0.5$、1.0 和 1.5 时的状态和截面。图16分别展示了 MASs (4.29) 在无控制时于 $x = 0.5$、1.0 和 1.5 时的截面。因此，控制器 (4.30) 可以确保 MASs (4.29) 在 (4.32) 条件下实现有限时间一致性。

由定理 3.4 可知，通过控制器（4.31）控制的、满足（4.32）的多智能体系统（4.29）可在t^* 和 $t^* \leq T_{\max} = 3.92$时达到固定时间一致性。图14 和图15 分别展示了满足（4.32）的多智能体系统（4.29）在 $x = 0.5$、1.0、1.5时的状态和截面。因此，控制器（4.31）能够保证满足（4.32）的多智能体系统（4.29）实现固定时间一致性。

图17和图18分别展示了通过控制器（4.33）和（4.34）控制的、满足（4.32）的多智能体系统（4.29）在 $x = 0.5$、1.0、1.5时的截面。由图13、图15、图17和图18可知，控制器（4.30）和（4.31）的收敛速度快于控制器（4.33）和（4.34）。此外，图13和图17显示，控制器（4.33）在前半段的收敛速度快于控制器（4.30），但在后半段有所减慢。

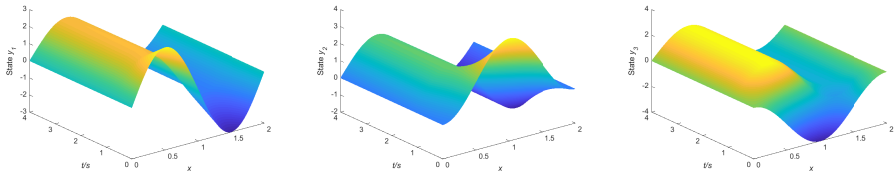


图12：多智能体系统的状态（4.29），采用（4.32）中的控制器（4.30）。

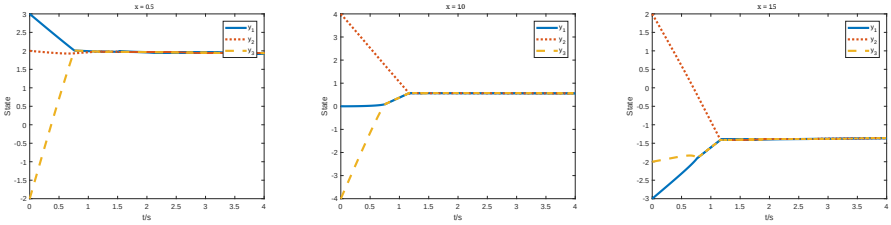


图 13：MAS的截面（4.29），采用（4.32）中的控制器（4.30）。

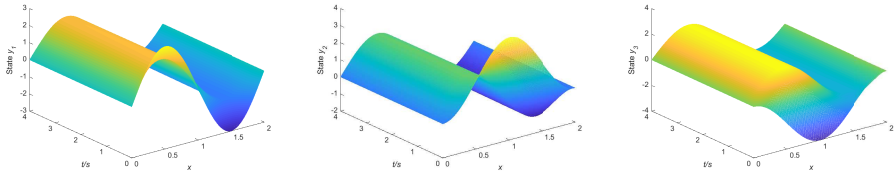


图 14：多智能体系统的状态（4.29），采用（4.32）中的控制器（4.31）。

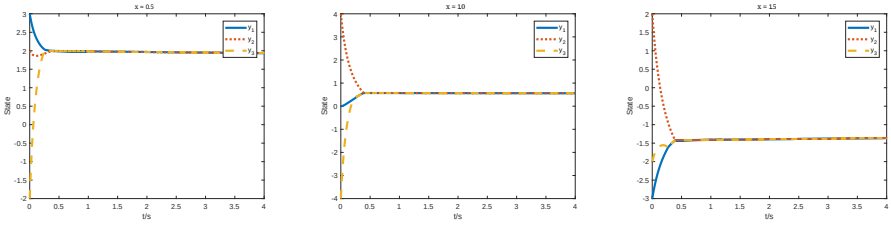


图 15：通过控制器（4.29）得到的 MAS的截面（4.32），其中（4.31）。

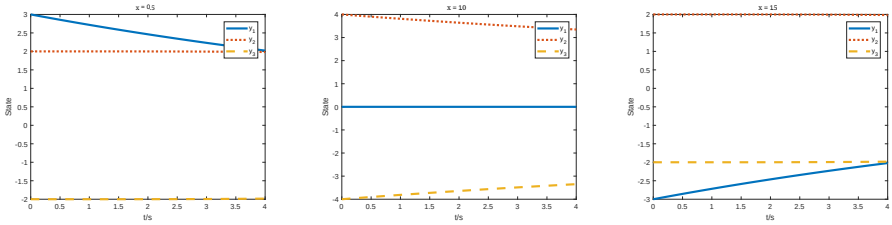


图16：多智能体系统的截面（4.29）有（4.32）无控制。

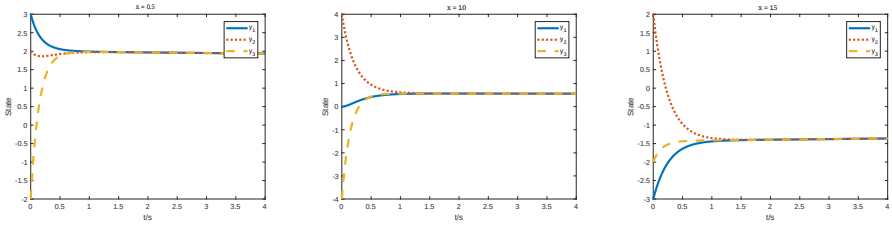


图17：MAS的截面（4.29）在（4.32）下通过控制器（4.33）。

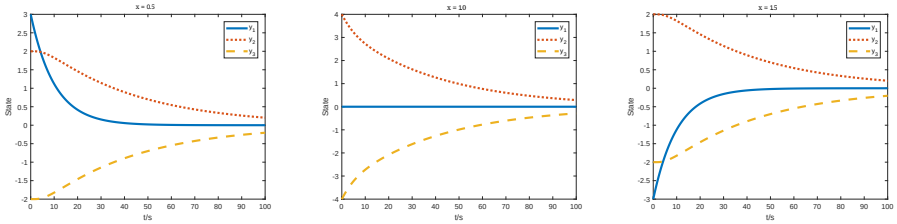


图18：MAS的截面（4.29）在（4.32）下通过控制器（4.34）。

5 结论

本文研究了由抛物型偏微分方程驱动的多智能体系统的有限时间一致性和固定时间一致性问题。我们设计了有限时间一致性和固定时间一致性分布式控制器，以满足存在外部扰动的多智能体系统中不同的控制效果。理论分析表明，在无向连通图或有向、符号一致且权重平衡图下，智能体能够实现有限时间一致性和固定时间一致性。我们还简化了控制器，以解决不存在外部扰动时多智能体系统的有限时间一致性和固定时间一致性问题。本研究为解决由抛物型偏微分方程描述的多智能体系统的有限时间一致性和固定时间一致性控制问题提供了理论支持。此外，本研究还为存在或不存在外部扰动的多智能体系统中满足不同控制效果的控制器设计提供了一些技术指导。然而，对于在事件触发机制或网络攻击下由抛物型偏微分方程驱动的多智能体系统，如何确保控制器的可靠性仍然是一个开放问题。

需要注意的是，在某些实际情况下，有必要且重要的是同时考虑多智能体系统中的其他控制问题，例如事件触发控制问题、模糊快速跟踪控制问题、网络攻击问题等。未来的工作将考虑设计有限时间事件触发和基于观测器的控制策略，以解决由更一般的偏微分方程驱动的多智能体系统的有限时间一致性和固定时间一致性问题。

致谢

本文的原始版本于2022年6月19日提交至IEEE《系统、人类与控制论：系统》汇刊。作者感谢编辑和审稿人，他们提出的宝贵意见和建议改进了本文。

参考文献

[1] J. Qin、W. Fu、H. Gao 和 W. Zheng，“基于多智能体一致性理论的传感器网络分布式 k 均值算法与模糊 c 均值算法”，IEEE《控制论》汇刊，第47卷，第3期，第772–783页，2016年。[2] R.C. Avram、X. Zhang 和 J. Muse，“存在多个执行器故障时四旋翼飞行器高度与姿态非线性自适应容错跟踪”，IEEE《控制系统技术》汇刊，第26卷，第2期，第701–707页，2018年。[3] W. Ren，“多个刚体的分布式协同姿态同步与跟踪”，IEEE《控制系统技术》汇刊，第18卷，第2期，第383–392页，2010年。[4] C.W. Reynolds，“鸟群、兽群与鱼群：一种分布式行为模型”，《计算机图形学》，第21卷，第4期，第25–34页，1987年。[5] T. Vicsek、A. Czirook、E. Ben-Jacob、O. Cohen 和 I. Shochet，“自驱动粒子系统中的新型相变”，《物理评论快报》，第75卷，第6期，第1226–1229页，1995年。[6] R. Olfati-Saber 和 R.M. Murray，“具有切换拓扑和时滞的智能体网络中的一致性问题”，IEEE《自动控制汇刊》，第49卷，第9期，第1520–1533页，2004年。[7] H. Li、Y. Zhu、J. Wang、J. Liu、S. Shen、H. Gao 和 Y. Sun，“具有混合时滞和间歇通信的非线性二阶多智能体系统的一致性”，《神经计算》，第251卷，第16期，第115–126页，2017年。[8] H. Rezaee 和 F. Abdollahi，“随机通信拓扑下某类高阶线性多智能体系统的离散时间一致性策略”，《富兰克林研究所杂志》，第354卷，第9期，第3690–3705页，2017年。[9] X. Wang、X. Li、N. Huang 和 D. O’Regan，“具有当前状态与时滞状态的分数阶多智能体系统的渐近一致性”，《应用数学与力学（英文版）》，第40卷，第11期，第1677–1694页，2019年。[10] Z. Lin、B. Francis 和 M. Maggiore，“独轮车编队控制的必要且充分的图条件”，IEEE《自动控制汇刊》，第50卷，第1期，第121–127页，2005年。[11] R. Olfati-Saber、J.A. Fax 和 R.M. Murray，“网络化多智能体系统中的一致性与协作”，IEEE《自动控制汇刊》，第95卷，第1期，第215–233页，2007年。[12] W. Ren 和 E. Atkins，“通过局部信息交换实现多车辆协调控制”，《国际鲁棒与非线性控制杂志》，第17卷，第1002–1033页，2007年。

[13] W. Ren，“双积分器动力学的一致性算法”，IEEE《自动控制汇刊》，第53卷，第6期，第1503–1509页，2008年。[14] W. Yu、G. Chen、Z. Wang 和 W. Yang，“传感器网络中的分布式一致性滤波”，IEEE系统、人类与控制论汇刊B辑：控制论，第39卷，第6期，第1568–1577页，2009年。[15] Y. Wu、Z. Wang、S. Ding 和 H. Zhang，“存在执行器故障的有向网络中多智能体系统的领导者–跟随者一致性”，《神经计算》，第275卷，第1177–1185页，2018年。[16] X. Yang、Z. Wu 和 J. Cao，“具有非一致不连续节点的复杂网络有限时间同步”，非线性动力学，第73卷，第4期，第2313–2327页，2013年。[17] X. Liu、J. Cao、W. Yu 和 Q. Song，“切换耦合神经网络的非光滑有限时间同步”，IEEE《控制论》汇刊，第46卷，第10期，第2360–2371页，2015年。[18] L. Wang 和 T. Chen，“具有时变时滞的神经网络有限时间与固定时间反同步”，《神经计算》，第329卷，第165–171页，2019年。[19] S.P. Bhat 和 D.S. Bernstein，“连续自治系统的有限时间稳定性”，SIAM控制与优化杂志，第38卷，第3期，第751–766页，2000年。[20] J. Cortes，“有限时间收敛梯度流及其在网络一致性中的应用”，Automatica，第42卷，第11期，第1993–2000页，2006年。[21] L. Wang 和 F. Xiao，“动态智能体网络的有限时间一致性问题”，IEEE《自动控制汇刊》，第55卷，第4期，第950–955页，2010年。[22] S. Li、H. Du 和 X. Lin，“具有双积分器动力学的多智能体系统有限时间一致性算法”，Automatica，第47卷，第8期，第1706–1712页，2011年。[23] Z. Guan、F. Sun、Y. Wang 和 T. Li，“领导者跟随型二阶多智能体网络的有限时间一致性”，IEEE电路与系统汇刊I辑：常规论文，第59卷，第11期，第2646–2654页，2012年。[24] J. Fu 和 J. Wang，“基于观测器的一般线性多智能体系统有限时间协同跟踪”，Automatica，第66卷，第231–237页，2016年。[25] J. Duan、H. Zhang、Y. Liang 和 Y. Cai，“基于有限时间事件触发观测器的异构多智能体系统二分有限时间输出一致性”，《神经计算》，第365卷，第86–93页，2019年。[26] A. Polyakov，“线性控制系统固定时间镇定的非线性反馈设计”，IEEE《自动控制汇刊》，第57卷，第8期，第2106–2110页，2012年。[27] S.E. Parsegov、A. Polyakov 和 P.S. Shcherbakov，“具有积分器动力学的多智能体系统固定时间一致性算法”，IFAC会议论文集，第46卷，第27期，第110–115页，2013年。[28] M. Defoort、A. Polyakov、G. Demesure、M. Djemai 和 K. Veluvolu，“具有未知非线性固有动力学的多智能体系统领导者–跟随者固定时间一致性”，IET控制理论与应用，第9卷，第14期，第2165–2170页，2015年。

[29] Z. Zuo，“二阶多智能体网络的非奇异固定时间一致性跟踪”，Automatica，第54卷，第305–309页，2015年。[30] Z. Zuo和L. Tie，“多智能体系统的分布式鲁棒有限时间非线性一致性协议”，《国际系统科学杂志》，第47卷，第6期，第1366–1375页，2016年。[31] Z. Zuo、Q. Han、B. Ning、X. Ge和X. Zhang，“多智能体系统固定时间协同控制最新进展综述”，IEEE《工业信息学汇刊》，第14卷，第6期，第2322–2334页，2018年。[32] Y. Zheng和L. Wang，“有速度测量和无速度测量条件下异构多智能体系统的有限时间一致性”，《系统与控制通讯》，第61卷，第8期，第871–878页，2012年。[33] Y. Zhu、X. Guan和X. Luo，“具有线性和非线性动力学的异构多智能体系统的有限时间一致性”，《自动化学报》，第40卷，第11期，第2618–2624页，2014年。[34] F. Xiao、L. Wang和T. Chen，“具有定向链路故障的类积分器动态智能体网络的有限时间一致性”，IEEE《自动控制汇刊》，第59卷，第3期，第756–762页，2014年。[35] X. Lin和Y. Zheng，“切换多智能体系统的有限时间一致性”，IEEE《系统、人类与控制论：系统》汇刊，第47卷，第7期，第1535–1545页，2017年。[36] P. Tong、S. Chen和L. Wang，“具有连续时变交互拓扑的多智能体系统的有限时间一致性”，《神经计算》，第284卷，第187–193页，2018年。[37] B. Hu、Z. Guan和M. Fu，“有限时间一致性的分布式事件驱动控制”，Automatica，第103卷，第88–95页，2019年。[38] R. Sakthivel、S. Kanakalakshmi、B. Kaviarasan、Y. Ma和A. Leelamani，“切换拓扑下受输入时延多智能体系统的基于非脆弱控制器的有限时间一致性”，《神经计算》，第325卷，第225–233页，2019年。[39] W. Liu、Q. Ma、Q. Wang和H. Feng，“不确定性由正函数界定的异构非线性多智能体系统有限时间一致性控制”，《神经计算》，第330卷，第29–38页，2019年。[40] J. Liu、C. Wang和X. Cai，“具有正奇有理数次幂和量化控制输入的一类二阶多智能体系统的全局有限时间事件触发一致性”，《神经计算》，第360卷，第254–264页，2019年。[41] P. Li、X. Wu、X. Chen和J. Qiu，“多智能体系统的分布式自适应有限时间跟踪及其应用”，《神经计算》，第481卷，第46–54页，2022年。[42] N. Ghods和M. Krstic，“源上的多智能体部署”，IEEE《控制系统技术》汇刊，第20卷，第1期，第277–285页，2012年。[43] H. Rastgoftar和E. Atkins，“用于无人机系统交通协调的基于物理的自由可扩展连续体变形”，IEEE《网络系统控制汇刊》，第7卷，第2期，第532–544页，2019年。[44] C.G. Cassandras，“高速公路交通建模与控制”，IEEE《控制系统杂志》，第39卷，第1期，第68–71页，2022年。

[45] J. Wang、H. Wu和H. Li，“非线性双曲型偏微分方程系统的分布式模糊控制设计及其在非等温活塞流反应器中的应用”，IEEE《模糊系统汇刊》，第19卷，第3期，第514–526页，2011年。[46] J. Wang、H. Wu和H. Li，“通过模糊偏微分方程建模方法实现非线性抛物型系统的分布式比例—空间导数控制”，IEEE《系统、人类与控制论汇刊B辑》，第42卷，第3期，第927–938页，2012年。[47] W. Ray，《先进过程控制》，纽约：McGraw-Hill，1981年。[48] A. Pilloni、A. Pisano、Y. Orlov和E. Usai，“具有边界局部交互的扩散偏微分方程网络的基于一致性的控制”，IEEE《自动控制汇刊》，第61卷，第9期，第2708–2713页，2016年。[49] C. Yang、H. He、T. Huang、A. Zhang、J. Qiu、J. Cao和X. Li，“基于空间边界通信的偏微分方程建模非线性多智能体系统一致性”，IET控制理论与应用，第11卷，第17期，第3196–3200页，2017年。[50] C. Yang、T. Huang、A. Zhang、J. Qiu、J. Cao和F.E. Alsaadi，“具有输入约束的基于偏微分方程的多智能体系统输出一致性：一种边界控制方法”，IEEE《系统、人类与控制论：系统》汇刊，第51卷，第1期，第370–377页，2018年。[51] X. Wang和N. Huang，“由双曲型偏微分方程驱动的多智能体系统有限时间一致性：基于边界控制的方法”，《应用数学与力学（英文版）》，第42卷，第12期，第1799–1816页，2021年。[52] J. Wang和H. Wu，“时滞反应—扩散网络的无源性及其在食物网模型中的应用”，《应用数学与计算》，第219卷，第11311–11326页，2013年。[53] B. Shi、J. Yuan和Y. Jian，《系统稳定性与控制基础》（中文），北京：电子工业出版社，2020年。[54] H. Wu、J. Wang和H. Li，“一类非线性抛物型分布参数系统的模糊边界控制设计”，IEEE《模糊系统汇刊》，第22卷，第3期，第642–652页，2014年。[55] L.C. Evans，《偏微分方程》，美国数学学会，2010年。[56] S.L. Hollis、R.H. Martin、Wu和M. Pierre，“反应—扩散系统的整体存在性与有界性”，《SIAM数学分析杂志》，第18卷，第3期，第744–761页，1987年。[57] Q. Fu、L. Du、G. Xu、J. Wu和P. Yu，“具有分布参数模型的多智能体系统一致性控制”，《神经计算》，第365卷，第86–93页，2019年。