arXiv:2305.01833v1 [math.NT] 3 May 2023

18 阶非阿贝尔群的整数群行列式

Bishnu Paudel 和 Chris Pinner

Abstract. 我们完整描述了18阶非阿贝尔群的整数群行列式。

1. Introduction

Olga Taussky-Todd 提出了这样一个问题：当群行列式的各项为整数时，它所能取的值是什么。在这里，我们将整数群行列式视为定义在群环 $\mathbb{Z}[G]$ 中各元素上的函数:

$$\mathcal{D}_G\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) := \det\left(a_{gh^{-1}}\right),$$

其中 g 为行索引， h 为列索引。我们用 $\mathcal{S}(G)$表示 G的整数群行列式集合。我们用 $\mathbb{Z}_n$ 和 D_n 分别表示 n阶循环群和二面体群。

文献 [7, 11], 中给出了 $\mathbb{Z}_p$和 $\mathbb{Z}_{2p}$ 的整数群行列式的完整描述；文献 [3], 中给出了 D_{2p} 和 D_{4p} 的完整描述；文献 [12, 8]中则给出了其余 15 阶及以下群的完整描述。最近，相关结果已扩展到 14 个 16 阶群（文献 [14, 15, 16, 17, 18]中的 5 个阿贝尔群，以及文献[3, 9, 10, 19, 20, 1, 21, 2]中的 9 个非阿贝尔群）。

18 阶群共有五个。文献 [3]给出了二面体群的整数群行列式:

$$\mathcal{S}(D_{18}) = \{2^a 3^b m \mid a = 0 \text{ or } a \geq 2,\ b = 0 \text{ or } b \geq 5,\ \gcd(m, 6) = 1\}.$$

根据 GAP 小群库中的群标识，这是 SmallGroup(18,1)。

本文确定了剩余两个非阿贝尔群的整数群行列式。第一个是阶为 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ 的广义二面体群

$$G_{18,4} = \langle X, Y, Z \mid X^3 = Y^3 = Z^2 = 1,\ XY = YX,\ XZ = ZX^{-1},\ YZ = ZY^{-1}\rangle.$$

这是 SmallGroup(18,4)。

定理 1.1. 与 6 互素的 SmallGroup(18,4) 的整数群行列式为 $m \equiv \pm 1$ 模 18。

能被 6 整除的行列式为 $2^2 \cdot 3^9 m$, $m \in \mathbb{Z}$。能被 2 整除但不能被 3 整除的行列式为 $2^2(9m \pm 2)$, $m \in \mathbb{Z}$.。能被 3 整除但不能被 2 整除的行列式为 $3^9(2m + 1)$, $m \in \mathbb{Z}$.

Date: 2023年5月4日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：11C20，15B36；次要分类号：11C08，43A40。*Key words and phrases.* 整数群行列式、小群、广义二面体群。

我们在第 2 节给出定理 1.1 的证明。

另一个群是

$$\mathbb{Z}_3 \times D_6 = \langle X, Y, Z \mid X^3 = Y^3 = Z^2 = 1,\ XZ = ZX^{-1},\ YX = XY,\ YZ = ZY \rangle.$$

这是 SmallGroup(18,3)。

对于与 6 互素的 $\mathbb{Z}_3 \times D_6$，整数群行列式是模 18 的 $m \equiv \pm 1$。

能被 6 整除的行列式是 $2^2 \cdot 3^6 m$、 $m \in \mathbb{Z}$。能被 2 整除但不能被 3 整除的行列式是 $2^2(9m \pm 2)$、 $m \in \mathbb{Z}$。能被 3 整除但不能被 2 整除的行列式是 $3^6(2m+1)$、 $m \in \mathbb{Z}$.

我们将在第 3 节给出定理 1.2 的证明。

1.1. 子群的整数群行列式。对于所有子群 H of G， $\mathcal{S}(G) \subseteq \mathcal{S}(H)$ 是否成立仍是一个悬而未决的问题。对于阿贝尔 H，这一点已经得到证明，见 [14, 定理 1.4]。在 [9] 中，我们还证明了 $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_2 \times H) \subseteq \mathcal{S}(H)$。

注意，$G_{18,\ 4}$ 和 $\mathbb{Z}_3 \times D_6$ 都具有子群 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 = \langle X、\ Y \rangle$，其中

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) = \{9m \pm 1 \text{ and } 3^6 m \mid m \in \mathbb{Z}\},$$

来自 [12]。事实上，我们将利用这样一个事实：可以将我们的行列式明确地写成一个 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ 行列式。它们都具有一个非阿贝尔子群 $D_6 = \langle X、\ Z \rangle$，并满足 $\mathcal{S}(G) \subseteq \mathcal{S}(D_6)$，其中来自 [3]

$$\mathcal{S}(D_{2p}) = \{2^a p^b m \mid \gcd(m, 2p) = 1,\ a = 0 \text{ or } a \geq 2,\ b = 0 \text{ or } b \geq 3\},$$

（其中 $\langle Y、\ Z \rangle$ 为 $G_{18,\ 4}$ 给出另一个 D_6，并为 $\mathbb{Z}_3 \times D_6$给出 $\mathbb{Z}_6$）。

20 阶的一般仿射群具有 $\mathcal{S}(GA(1,5)) \subset \mathcal{S}(D_{10})$（可以证明，一个 $GA(1,5)$ 行列式 $2^a 5^b m$，其中 $\gcd(m, 10) = 1$，具有 $a = 0$ 或 $a \geq 4$ 以及 $b = 0$或 $b \geq 5$）。因此，一个反例要求 G 至少具有 24 阶。

2. The Proof of Theorem 1.1

2.1. 广义二面体群行列式的一个公式。回顾一下，对于阿贝尔群 H，广义二面体群是其与二阶循环群的半直积，其中非单位元在 H 上的作用为逆映射：

$$G = \langle H, Z \mid Z^2 = 1,\ Zh = h^{-1}Z\ \forall h \in H \rangle.$$

Frobenius [5] 观察到群行列式可以分解为

$$\mathcal{D}_G\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) = \prod_{\rho \in \hat{G}} \det\left(\sum_{g \in G} a_g \rho(g)\right)^{\deg \rho},$$

^其中 G 表示该群的一组完备的互不同构不可约群表示（例如参见 [4] 或 [6]）。

我们设 $H = \mathbb{Z}_{m_{1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_r}$ 并记

$$H = \langle X_1, \ldots, X_r \mid X_1^{m_1} = \ldots = X_r^{m_r} = 1,\ X_i X_j = X_j X_i\ \forall i, j \rangle,$$

因此， $\mathbb{Z}[G]$ 中的一个元素可以写成

$$F = f(X_1, \ldots, X_r) + Z g(X_1, \ldots, X_r)$$

其中， $f(x_1,\dots,x_r)$ $g(x_1,\dots,x_r)$是关于 x_i的次数至多为 m_i-1 的整系数多项式。 H 上的表示是 $|H|$ 特征标，其中 $\chi(x_i)$是各种 m_i次单位根。注意，

$$\rho(Z)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \rho(h)=\begin{pmatrix}\chi(h)&0\\0&\chi(h)^{-1}\end{pmatrix},$$

满足群关系，并给出在 G 上的表示

$$\begin{aligned}\det\left(\sum_{g\in G}a_g\rho(g)\right)&=\det\begin{pmatrix}f(\chi(X_1),\dots,\chi(X_r)) & g\left(\chi(X_1^{-1}),\dots,\chi(X_r^{-1})\right)\\ g(\chi(X_1),\dots,\chi(X_r)) & f\left(\chi(X_1^{-1}),\dots,\chi(X_r^{-1})\right)\end{pmatrix}\\&=f(\chi(X_1),\dots,\chi(X_r))f(\chi(X_1^{-1}),\dots,\chi(X_r^{-1}))\\&\quad-g(\chi(X_1),\dots,\chi(X_r))g(\chi(X_1^{-1}),\dots,\chi(X_r^{-1})).\end{aligned}$$

注意，如果所有 $\chi(X_i)$ =1 或 -1 （如果 m_i 为偶数），这些将对应于两个特征标的乘积；否则对应于二度表示（其中相同因子出现在 χ 和 χ^{-1}中）。因此

$$\mathcal{D}_G(F)=\prod_{x_1^{m_1}=1,\dots,x_r^{m_r}=1}f(x_1,\dots,x_r)f(x_1^{-1},\dots,x_r^{-1})-g(x_1,\dots,x_r)g(x_1^{-1},\dots,x_r^{-1}).$$

注意，这是 H 的行列式

$$f(X_1,\dots,X_r)f(X_1^{-1},\dots,X_r^{-1})-g(X_1,\dots,X_r)g(X_1^{-1},\dots,X_r^{-1})\in\mathbb{Z}[H].$$

2.2. SmallGroup(18,4) 的行列式。我们有 $H=\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$，并且可以写成

$$F(X,Y,Z)=f(X,Y)+Zg(X,Y) \tag{1}$$

其中

$$f(x,y)=a_0(x)+ya_1(x)+y^2a_2(x),\quad g(x,y)=b_0(x)+yb_1(x)+y^2b_2(x),$$

其中 $a_i(x)$ $b_i(x)$ $\in\mathbb{Z}[x]$ 的次数至多为二次。

对于 G =SmallGroup(18,4)，我们得到

$$\mathcal{D}_G(F)=\prod_{x^3=1,y^3=1}f(x,y)f(x^{-1},y^{-1})-g(x,y)g(x^{-1},y^{-1}).$$

记 $\omega:=e^{2\pi i/3}$ 为一个本原三次单位根，我们可以将其写为

$$\mathcal{D}_G(F)=AB_1^2B_2^2B_3^2B_4^2,$$

含 Integers

$$\begin{aligned}A&:=f(1,1)^2-g(1,1)^2=(f(1,1)+g(1,1))\,(f(1,1)-g(1,1)),\\B_1&:=f(1,\omega)f(1,\omega^2)-g(1,\omega)g(1,\omega^2),\\B_2&:=f(\omega,1)f(\omega^2,1)-g(\omega,1)g(\omega^2,1),\\B_3&:=f(\omega,\omega)f(\omega^2,\omega^2)-g(\omega,\omega)g(\omega^2,\omega^2),\\B_4&:=f(\omega,\omega^2)f(\omega^2,\omega)-g(\omega,\omega^2)g(\omega^2,\omega).\end{aligned}$$

2.3. SmallGroup(18,4) 的行列式必须具有所述形式。注意，如果 $2 \mid A$，那么 $4 \mid A$（因为它是两个奇偶性相同的项的乘积），而其他项 B_1、.....、B_4 都是平方。因此，如果 $2 \mid \mathcal{D}_G(F)$，那么 $2^2 \mid \mathcal{D}_G(F)$。

注意，$B_i \equiv A$ 模 $1-\omega$，因此，由于它们都是整数，它们模 3 同余。因此，若 $3 \mid \mathcal{D}_G(F)$，则 $3 \mid A, B_1, \ldots, B_4$，且 $3^9 \mid \mathcal{D}_G(F)$。

因此，6 的倍数必为 $2^2 \cdot 3^9$ 的倍数，而是 3 的倍数但不是 2 的倍数的数必为 3^9 的奇数倍。这些都可以得到。

由于它们是 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ 行列式，我们知道与 3 互素的值必须是 ± 1 模 9。因此，奇数值必须是 ± 1 模 18，而偶数值必须具有 $2^2 k$ 的形式，其中 $k \equiv \pm 2$ 模 9。同样，我们可以实现所有这些值。

2.4. 求得 SmallGroup(18,4) 的行列式。写作

$$h(x,y) := (x^2+x+1)(y^2+y+1),$$

我们通过取 $1+18m$ 得到

$$f = 1+mh, \quad g = mh,$$

并通过交换 f 和 g 得到 $-1-18m$。

我们得到 $2^2(2+9m)$，其中

$$f = 1+x+x^2+y-y^2x^2+mh, \quad g = 1+x+yx-y^2(x+x^2)+mh,$$

并通过交换 f 和 g 得到 $2^2(-2-9m)$。

对于 6 的倍数，我们由下式得到 $2^2 \cdot 3^{10}m$

$$f = 1+x-yx^2-y^2(1+x)-mh, \quad g = 1+y-y^2(1+x+x^2)+mh,$$

并由下式得到 $2^2 \cdot 3^9(1+3m)$

$$f = 1+x+x^2+y(1+x)-y^2x^2+mh, \quad g = (1+x^2)(1+y-y^2)+mh,$$

通过交换 f 和 g 得到 $2^2 \cdot 3^9(-1-3m)$。

对于 3 的奇数倍，我们由此得到 $3^{10}(1+2m)$

$$f = 1+x+x^2+y(1+x+x^2)+y^2(1-x-x^2)+mh, \quad g = 1+x+x^2+y(1+x)+y^2(1-x-x^2)+mh,$$

并由此得到 $3^9(1+6m)$

$$f = 1+x+x^2+y(1+x)-y^2(1+x+x^2)+mh, \quad g = 1+x+x^2+y(1+x-x^2)-y^2(1+x+x^2)+mh,$$

通过交换 f 和 g，可得到 $3^9(-1-6m)$。□

3. Proof of Theorem 1.2

3.1. $G = \mathbb{Z}_3 \times D_6$的群行列式。根据群表示，我们同样可以将 $\mathbb{Z}[G]$ 中的元素写成形式 (1)。由 [9] 可将 G行列式写成三个 $D_6 = \langle X, Z\rangle$ 行列式的乘积，即

$$F(X,1,Z), \quad F(X,\omega,Z), \quad F(X,\omega^2,Z), \quad \omega := e^{2\pi i/3}.$$

这些式子的系数属于 $\mathbb{Z}[\omega]$，而非 $\mathbb{Z}$。由 [3] 可得

$$\mathcal{D}_G(F) = \prod_{y^3=1}\prod_{x^3=1} f(x,y)f(x^{-1},y) - g(x,y)g(x^{-1},y).$$

注意，这是 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 = \langle XY\rangle$ $f(X,Y)f(X^{-1},Y) - g(X,Y)g(X^{-1},Y)$ 的测度。将共轭项配对后，我们可以将其写成以下形式

$$\mathcal{D}_G(F) = A_1A_2^2A_3A_4^2$$

其中 Integers 为

$$
\begin{aligned}
A_1 &= f(1,1)^2 - g(1,1)^2 = (f(1,1)+g(1,1))(f(1,1)-g(1,1)),\\
A_2 &= f(\omega,1)f(\omega^2,1) - g(\omega,1)g(\omega^2,1),\\
A_3 &= (f(1,\omega)^2 - g(1,\omega)^2)(f(1,\omega^2)^2 - g(1,\omega^2)^2)\\
&= |f(1,\omega)+g(1,\omega)|^2 |f(1,\omega)-g(1,\omega)|^2,\\
A_4 &= (f(\omega,\omega)f(\omega^2,\omega) - g(\omega,\omega)g(\omega^2,\omega))(f(\omega^2,\omega^2)f(\omega,\omega^2) - g(\omega^2,\omega^2)g(\omega,\omega^2)).
\end{aligned}
$$

3.2. $\mathbb{Z}_3 \times D_6$ 行列式必须具有所述形式。由于 A_1 和 A_3都是两个奇偶性相同的整数的乘积，而 A_2 和 A_4 是平方数，因此偶数行列式必须是 4 的倍数。

现在， $A_2 \equiv A_1$ 模 3，且 A_3、$A_4 \equiv A_1^2$ 模 3。因此，若行列式是 3 的倍数，则必须有 $3 \mid A_1$、A_2、A_3、A_4和 $3^6 \mid \mathcal{D}_G(F)$。由于它是一个 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$行列式，与 3 互素的行列式必须满足模 9 下的 ± 1。

因此，与 3 互素的奇数行列式必须满足模 18 下的 ± 1，而与 3 互素的偶数行列式必须具有 $4k$ 的形式，其中 $k \equiv \pm 2$ 模 9。3 的奇数倍必须是 3^6 的奇数倍，而 3 的偶数倍是 $2^2 \cdot 3^6$的倍数。我们将证明这些数都可以取到。

3.3. 实现这些行列式。我们记 $h(x,y) := (1+x+x^2)(1+y+y^2)$。对于与 6 互质的值，我们得到 $1+18m$，由

$$f = 1 + mh, \quad g = 0 + mh,$$

将 f 和 g 互换即可得到 $-1-18m$。

对于 6 的倍数，我们由下式得到 $2^2 \cdot 3^6(1+3m)$:

$$f = (1+x) + y + y^2 + mh, \quad g = 1 + y + mh,$$

将 f 和 g 互换即可得到 $2^2 \cdot 3^6(-1-3m)$，而 $2^2 \cdot 3^7 m$ 则由

$$f = (1+x-x^2)+y(1-x^2)+y^2(1-x^2)+mh, \quad g = (1-x^2)+y(1+x-x^2)+y^2(x-x^2)-mh.$$

对于 3 的奇数倍，我们由下式得到 $3^6(1+6m)$:

$$f = 1 + y + mh, \quad g = 1 + mh,$$

将 f 和 g 互换即可得到 $3^6(-1-6m)$，而 $3^7(2m+1)$ 则由

$$f = (1+x)+y(1+x)+y^2(1+x-x^2)+mh, \quad g = (1+x)+y(1+x-x^2)+y^2+mh.$$

对于与 3 互素的偶数行列式，我们通过交换 f和 g，由 $f = (1+x-x^2) + yx^2 + y^2x^2 + mh$，$g = (1+x-x^2)+y(-x+x^2)+y^2(-1+x^2)+mh$，以及 $2^2(-2-9m)$ 得到 $2^2(2+9m)$。□

References

[1] H. Bautista-Serrano、B. Paudel 和 C. Pinner, *The integer group determinants for Small-Group(16,13)* 2304 00321 [ ], arXiv: . math.NT . [2] H. Bautista-Serrano、B. Paudel 和 C. Pinner, *The integer group determinants for the semidihedral group of order 16* 2304 04379 [ ], arXiv: . math.NT . [3] T. Boerkoel 和 C. Pinner, *Minimal group determinants and the Lind-Lehmer problem for dihedral groups* **186** 2018 4, 377 395 1802 07336 [ ], 《Acta Arith.》 (), 第 - 期。arXiv: . math.NT . [4] K. Conrad, *The origin of representation theory*, 《Enseign. Math.》 (2) 44 (1998), 第 3-4 期, 361-392。[5] F. G. Frobenius, *Über die Primefactoren der Gruppendeterminante*, 《Gesammelte Ahhand- lungen》, 第三卷, Springer, 纽约, 1968 年, 第 38–77 页。MR0235974

[6] K. Johnson, 《群矩阵、群行列式与表示论》, 《数学讲义》2233, Springer, 2019年。[7] M. Newman, *On a problem suggested by Olga Taussky-Todd*, 《Ill. J. Math.》24（1980）, 156-158。（1980）, 第 3 期, 187–191。MR0601702。[8] B. Paudel 和 C. Pinner, *Integer circulant determinants of order 15*, 《Integers》22（2022年）, 论文编号 A4。[9] B. Paudel 和 C. Pinner, *The group determinants for $\mathbb{Z}_n \times H$*, arXiv:2211.09930 [math.NT]。[10] B. Paudel 和 C. Pinner,
The integer group determinants for Q_{16} 2302 11688 , arXiv: .
[ ]
math.NT . [11] H. T. Laquer, *Values of circulants with integer entries*, 载于《与斐波那契数列相关的论文集》, Fibonacci Assoc., 圣克拉拉, 1980年, 第 212–217 页。MR0624127。[12] C. Pinner 和 C. Smyth, *Integer group determinants for small groups*, 《Ramanujan J.》51（2020年）, 第 2 期, 421-453。[13] O. Taussky Todd, *Integral group matrices*, 《Notices Amer. Math. Soc.》24（1977年）, 第 3 期, A-345。摘要编号 746-A15, 第 746 次会议, 加利福尼亚州海沃德, 1977年4月22日至23日。[14] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi, *Generalized Dedekind's theorem and its application to* Yamaguchi, *integer group determinants* 2022 2203 14420 2 [ ] , .
arXiv: . v math.RT . [15] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi, *Integer circulant determinants of order 16*, 《Ramanujan J.》, arXiv:2204.05014 [math.NT]。[16] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi,
Integer group determinants for C_2^4, 2022年。arXiv: 2203 14420 2 [ ]。v math.RT
[17]
Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi,
Integer group determinants for C_4^2 2211 01597 , arXiv: .
[ ]
math.NT . [18] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi, *Integer group determinants for abelian groups of order 16*, arXiv:2211.14761 [math.NT]。[19] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi,
Integer group determinants for $C_2^2 \rtimes C_4$ 2303 08489 , arXiv: .
[ ]
math.NT . [20] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi,
Integer group determinants for $C_4 \rtimes C_4$ 2303 13189 , arXiv: .
[ ]
math.NT . [21] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi, *Integer group determinants for $C_8 \rtimes_5 C_2$*, 已提交至 arXiv [math.NT]。[22] Y. Yamaguchi 和 N. Yamaguchi, *Integer group determinants of order 16*, 已提交至 arXiv [math.NT]。

Department of Mathematics, Kansas State University, Manhattan, KS 66506, USA
Email address: bpaudel@ksu.edu, pinner@math.ksu.edu