arXiv:2305.01858v2 [math.AG] 8 May 2023

超簇的德拉姆上同调

Alexander Polishchuk

Abstract. 我们研究超簇的德拉姆上同调和 Hodge 到 de Rham 谱序列。

1. Basics

1.1. 引言。回顾一下（例如参见 [6]），对于域 k 上的光滑真概形 X_0，可将德拉姆上同调 $H_{dR}(X_0)$ 定义为德拉姆复形 $\Omega^\bullet_{X_0}$ 的超上同调。存在一个自然的 Hodge 到 de Rham 谱序列

$$E_1^{pq}(X_0) = H^q(X, \Omega^p_{X_0}) \Longrightarrow H^{p+q}_{dR}(X_0).$$

在零特征下，已知它会在 E_1 处退化（这可由霍奇理论推得）。本文研究光滑真超簇 X 的类似谱序列。容易看出，它往往不会在 E_1 处退化，而且其行为复杂得多。

我们证明，光滑超簇 X 的德拉姆上同调与底层簇 X_0 的德拉姆上同调一致（见定理 1.1）。我们证明，若光滑真超簇 X 是分裂的（见定理 2.1），或其维数为 $n|2$（见定理 2.4），则其 Hodge 到 de Rham 谱序列会在 E_2 处退化。在后一种情形下，我们还给出各项 E_2^{pq}（X）维数的公式。另一方面，我们举例说明，若 X 的维数为 $1|3$，该谱序列并非总会在第 E_2 页退化（见定理 2.15）。这对 [3, 问题 5.14] 中提出的问题给出了否定回答。

一个有趣的现象是，霍奇到德拉姆序列的极限项（$E^{pq}_\infty(X)$）可能不同于（$E^{pq}_\infty(X_0)$）（例如，超格拉斯曼流形 $G(1|1, 2|2)$ 就是如此，见例 2.13）。因此，$H^i_{dR}(X_0)$ 的维数如何分配到带有 $p+q=i$ 的 $E^{pq}_\infty(X)$ 中，为超簇带来了有趣的数值不变量（这些不变量无法从 X_0 中恢复，除非 X 是可投射的）。

关于代数超几何的基础知识，请参阅 [8] 和 [2]。我们研究代数超簇和扎里斯基拓扑，但类似的图景也适用于复解析情形。请注意，尽管可以在复超流形底层的 CS 流形上引入（p,q）-形式的类似物，但在存在奇变量时，似乎不存在霍奇分解的类似物。显而易见的问题是，德拉姆复形 $\Omega^\bullet_X$ 无界，而扭曲对偶 $(\Omega^\bullet_X)^\vee \otimes \omega_X$（其中 ω_X 是 Berezinian）是另一个复形，即积分形式复形。

在许多方面，对超簇的研究类似于对光滑概形的幂零扩张的研究（在通常的偶概形范畴中）。作为这一点的体现，我们在偶代数几何中证明了一个结果（受与超簇的类比启发）：在零特征下，光滑 proper 概形的幂零扩张的结构层上同调映射是满射的（见定理 1.11）。

本文组织如下。在第 1.2 节中，我们证明超簇 X 的德拉姆上同调比较定理（定理 1.1）。在第 1.3 节中，我们讨论相对德拉姆上同调和高斯-马宁联络。在第 1.4 节中，我们对超簇的 Hodge 到 de Rham 谱序列进行一些一般性考察。在第 1.5 节中，我们证明关于光滑 proper 概形的偶幂零扩张的一个结果（定理 1.11）。接下来，在第 2 节中，我们给出一些更具体的计算。在第 2.1 节中，我们考察分裂超簇以及其中的超簇

本研究部分由美国国家科学基金会资助项目 DMS-2001224 提供支持，并在高等经济学院大学基础研究计划框架内以及俄罗斯学术卓越项目“5-100”的资助下开展。

特征 2，在第 2.2 节——维数为 $n|2$ 的超簇；以及在第 2.3 节——一个例子表明，在维数为 $1|3$ 时，微分 $d:(\mathrm{O}_X)_- \to (\Omega^1_X)_-$ 并不总是在 H^1 上诱导单射。

致谢。感谢 Vera Serganova 和 Johan de Jong 与我进行了有益的讨论。本研究的部分工作是在作者访问西蒙斯几何与物理中心期间完成的。我谨向该机构致谢，感谢其热情接待并提供了优良的工作条件。

约定。对于一个 $\mathbb{Z}/2$-分次对象 X，我们用 X_+ 和 X_- 表示其偶部和奇部。我们采用微分形式的奇偶性约定，使得德拉姆微分为偶，因此德拉姆复形可视为由 $\mathbb{Z}/2$-分次层构成的复形。

1.2. 超簇的德拉姆上同调。设 X 是域 k 上的光滑超概形。那么我们有德拉姆复形 $\Omega^\bullet_X = (\Omega^\bullet_X, d)$，我们将其视为扎里斯基拓扑中的有下界复形的 k-模。因此，我们可以将 X 的德拉姆上同调定义为其超上同调：

$$H^\bullet_{dR}(X) := H^\bullet(X, \Omega^\bullet_X).$$

注意，一旦 X 具有非零奇维，复形 $\Omega^\bullet_X$ 就不是有界的 .

令 $\mathrm{N} \subset \mathrm{O}_X$ 表示由奇函数生成的理想，并令 X_0 表示 X 的玻色化，因此 $\mathrm{O}_{X_0} = \mathrm{O}_X/\mathrm{N}$。我们有一个自然的复形之间的满射映射，其中取值于 k 向量空间

$$\Omega^\bullet_X \to \Omega^\bullet_{X_0}.$$

我们将其核记为 K。

定理 1.1. 复形 K 是无环的。因此，存在一个自然同构 $H_{dR}(X) \tilde{\to} H_{dR}(\{\mathrm{v5}) \quad \text{——} \quad)$.

证明。我们通过令 $F^i_{\mathcal{N}}$ 为由.....生成的理想（相对于 $\Omega^\bullet_X$ 上的代数结构），来引入 $\Omega^\bullet_X$ 上的递减代数滤过 $(F^\bullet_{\mathcal{N}})$。

$$(\mathcal{N}^i, \mathcal{N}^{i-1}d\mathcal{N}, \mathcal{N}^{i-2}(d\mathcal{N})^2, \dots, (d\mathcal{N})^i).$$

那么 $K^\bullet = F^1_{\mathcal{N}}$。

我们断言，对于 $i \geq 1$，复形 $\mathrm{gr}^i_F := F^i{}_{\mathcal{N}}/F^{i+1}{}_{\mathcal{N}}$是正合的。考虑赋有由 d诱导的微分 $d_{\mathcal{A}}$ 的 O_{X_0}-代数 $\mathrm{A} := \mathrm{gr}^\bullet_F \Omega^\bullet$。注意，$\mathrm{gr}^0_F = \Omega^\bullet_{X_0}$。我们有一个 O_{X_0}-代数的嵌入

$$\mathcal{A}_0 := \Omega^\bullet_{X_0} \otimes \bigwedge{}^\bullet(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2) \hookrightarrow \mathcal{A}.$$

我们设定

$$\mathcal{A}_n := \mathcal{A}_0 \cdot \mathrm{gr}_F^{\leq n} \subset \mathcal{A}.$$

那么，(A_n) 是一个递增的代数滤过，并且我们有一个代数同构。

$$\overline{\mathcal{A}} := \bigoplus_n \mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n-1} \simeq \mathcal{A}_0 \otimes S^\bullet(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2) \simeq \Omega^\bullet_{X_0} \otimes K(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2),$$

其中 $K(\mathrm{N}/\mathrm{N}^2) := \wedge^\bullet(\mathrm{N}/\mathrm{N}^2) \otimes S^\bullet(\mathrm{N}/\mathrm{N}^2)$。此外，微分 $d_{\mathcal{A}}$ 将 A_n 映至 A_{n+1}，而 $\mathrm{A}_n/\mathrm{A}_{n-1} \to \mathrm{A}_{n+1}/\mathrm{A}_n$ 上的诱导微分，是由$K(\mathrm{N}/\mathrm{N}^2)$上的 Koszul 微分诱导的。最后，我们注意到 $\oplus_n(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{gr}_F^{\geq 1})/(\mathrm{A}_{n-1} \cap \mathrm{gr}_F^{\geq 1})$ 与 $\Omega^\bullet_{X_0} \otimes K_{\geq 1}(\mathrm{N}/\mathrm{N}^2)$ 相对应，其中 $K_{\geq 1}(\mathrm{N}/\mathrm{N}^2) \subset K(\mathrm{N}/\mathrm{N}^2)$ 是权为 ≥ 1 的元素构成的子复形（即增广理想）。现在，由于 $K_{\geq 1}(\mathrm{N}/\mathrm{N}^2)$ 正合（事实上，它同伦于零），我们的断言即得证。□

注 1.2。注意，定理 1.1 在任意特征下都成立。在复解析背景下（因而在零特征下），定理 1.1 也可以由以下事实推出：$\Omega^\bullet_X$ 是 X上的常值层的分解。

1.3. 相对德拉姆上同调、超群作用与高斯–马宁联络。更一般地，若 $f : X \to S$ 是超概形之间的光滑适当态射，则我们有相对德拉姆复形 $\Omega^\bullet_{X/S}$，并且可以构造相应的 O-模相对德拉姆上同调层，它们是 S上的层，

$$H^i_{dR}(X/S) \coloneqq \underline{H}^i Rf_*(\Omega^\bullet_{X/S}).$$

假设 S 是诺特的。由于层 $R^q\overset{p}{(}\Omega_{X/S})$ 是凝聚的，因此 $H^i_{dR}(X/S)$ 是凝聚层。

容易看出， $H^i_{dR}(X/S)$ 的构造与平坦基变换 $S' \to S$ 相容。特别地，若我们从基域 k 上真且光滑的 X 出发，那么对于任意诺特交换 k-超代数 A，我们都可以考虑基变换 $X_A \to \mathrm{Spec}(A)$，并且有自然同构。

$$H^i_{dR}(X) \otimes A \simeq H^i_{dR}(X_A/A).$$

这表明，如果一个代数 k-超群 G 作用于 X ，那么 $H^i_{dR}(X)$具有自然的 G-表示结构。事实上，对于上述 A ，群 $G(A)$作用于 X_A ，由此得到它在$H^i_{dR}(X_A/A) \simeq H^i_{dR}(X) \otimes A$上的作用。

命题 1.3. 假设特征为零。如果底层通常代数群 G_0 是连通的，那么 $H^i_{dR}(X)$ 作为一个 G-表示是平凡的。

证明。只需证明相应的李超代数平凡作用即可。因此，只需证明对于每个整体向量场 v（偶或奇），在 X_D 上由 $D = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$（$\epsilon$ 为偶或奇）给出的自同构 $f \mapsto f + v(f)\epsilon$，在 $H^i_{dR}(X_D/D)$ 上诱导出平凡自同构。但这立即由以下事实得出：相对德拉姆复形 $\Omega^\bullet_{X_D/D}$ 上由 $\eta \mapsto \eta + L_v(\eta)\epsilon$ 给出的相应自同构（其中 L_v 是李导数），通过同伦 $\eta \mapsto i_v(\eta)$（即由 v 给出的收缩）与恒等映射同伦。□

当 $f : X \to S$ 是一个光滑的适当态射，且 S 在域 k 上光滑时，与经典情形类似（例如参见 [7, 第 IV] 节），可以在 $H^i_{dR}(X/S)$ 上构造高斯-马宁联络。具体而言，考虑绝对德拉姆复形 $\Omega^\bullet_X$ 上的滤过 F^i，其中F^i是 $f^*\Omega^i_S \otimes \Omega^{\bullet-i}_X \to \Omega^\bullet_X$ 的像。于是我们得到自然的同构。

$$\mathrm{gr}^i_F \Omega^\bullet_X \simeq f^*\Omega^i_S \otimes \Omega^\bullet_{X/S}[-i].$$

$H^i_{dR}(X/S)$ 上的联络定义为连接同态

$$\nabla : H^i_{dR}(X/S) \simeq R^i f_* \,\mathrm{gr}^0_F \to R^{i+1} f_* \,\mathrm{gr}^1_F \simeq \Omega^1_S \otimes H^i_{dR}(X/S).$$

其可积 性通过考察相应谱序列的整个页得以证明。

与经典情形一样，这意味着对于光滑的 S， S 上的相干层 $H^i_{dR}(X/S)$ 实际上是局部自由的（使用 [9, 第 2.2 节1]），并且 $H^i_{dR}(X/S)$ 的构造与任意基变换相容。

注意，层 $R^q f_*\Omega^p_X$ 不一定是局部自由的（在偶情形、零特征下它们是局部自由的）：例如，存在超曲线族 $f : X \to S$，使得 $R^1 f_*\mathcal{O}_X$ 不是局部自由的（见 [5, 第 3 节3]）。

1.4. 谱序列：一般观察。从现在起，我们假设 X 在基域 k 上真且光滑。

与偶情形一样，我们将谱序列与层复形 $\Omega^\bullet_X$ 相关联

$$E_1^{pq}(X) = H^q(X, \Omega^p_X) \implies H^{p+q}_{dR}(X),$$

我们称之为 Hodge 到 de Rham 谱序列。根据定理 1.1，其极限 $H^\bullet_{dR}(X)$ 可识别为 $H^\bullet_{dR}(X_0)$

在偶情形中，假设特征为零，已知 Hodge 到 de Rham 谱序列在第 E_1 页退化。即使在零特征下，对于一般的超簇，我们对这个谱序列也知之甚少。仅 X 的维数为 $0|n$ 的例子就表明，它不一定在 E_1 退化。我们将证明，如果 X 是分裂的，或维数为 $n|2$ ，那么它在 E_2 退化（见定理 2.1 和 2.4）。我们还将证明，

存在维数为 $1|3$ 的 X，使得 X 的 Hodge 到 de Rham 谱序列在 E_2 不退化（见定理 2.15）。

目前，我们尚不知道一个特征为零的 X 的例子，使得 $E_2(X)$ 不是有限维的。

命题 1.4. 我们总有一个同构 $E_2^{00}(X) \simeq H^0_{dR}(X_0)$ 和一个单射

$$E_2^{10}(X) \hookrightarrow H^0(\Omega^1_{X_0}). \tag{1.1}$$

证明。第一个断言显然成立，因为谱序列在 E_2^{00} 处退化。它也在 E_2^{10} 处退化，因此我们有一个嵌入 $E_2^{10}(X) \to H^1_{dR}(X) \simeq H^1_{dR}(X_0)$。这个映射可分解为以下复合映射

$$E_2^{10}(X) \to H^0(\Omega^1_{X_0}) \to H^1_{dR}(X_0),$$

这意味着所声称的单射。 □

对于任意一个光滑完备簇之间的态射 $f : X \to Y$，拉回给出了谱序列之间的一个态射。

$$f^* : E_n^{pq}(Y) \to E_n^{pq}(X).$$

将此应用于嵌入 $i : X_0 \to X$，我们得到一个谱序列之间的态射。

$$i^* : E_n^{pq}(X) \to E_n^{pq}(X_0)$$

一个有趣的事实是，尽管态射 $H_{dR}(X) \to H_{dR}(X_0)$ 总是同构，但如果 X 不是可投射的，态射 $E_\infty^{pq}(X) \to E_\infty^{pq}(X_0)$ 不一定是同构（例如，对于 $X = G(1|1, 2|2)$ 就会出现这种情况，见下文的例 2.13 ）。

下一个结果表明，对于常数 $p+q$，$E_\infty^{pq}(X)$ 的维数分布相较于 $E_\infty^{pq}(X_0)$ 偏向较小的 p。

命题 1.5. 对于每个 $m \geq 0$、 $p \geq 0$,

$$\sum_{i \geq p} \dim E_\infty^{i,m-i}(X) \leq \sum_{i \geq p} h^{i,m-i}(X_0)$$

（这就成为关于 $p = 0$ 的等式）。此外，对于每个 m，自然映射

$$E_\infty^{0,m}(X) \to E_\infty^{0,m}(X_0)$$

是满射的。

证明。第一个不等式直接源于这样一个事实：由霍奇到 de Rham 谱序列诱导的 $F_p(X)$ 上的 $H^n_{dR}(X)$ 滤过满足

$$F_p(X) \subset F_p(X_0).$$

第二个断言也可由此推出，因为我们可以将此映射等同于

$$H^m_{dR}(X)/F_1H^m_{dR}(X) \to H^m_{dR}(X_0)/F_1H^m_{dR}(X_0).$$

□

推论 1.6. 假设特征为零。那么对于每个 $i \geq 0$，复合映射

$$E_\infty^{0,i}(X) \to H^i(X, \mathcal{O}_X) \to H^i(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$$

是满射。

注 1.7. 类似地，在零特征下，对于任意 $i \geq 0$ 和任意 $m \geq 0$，截断德拉姆复形的超上同调自然映射，

$$H^i(X, [\mathcal{O}_X \to \Omega^1_X \to \ldots \to \Omega^m_X]) \to H^i(X_0, [\mathcal{O}_{X_0} \to \Omega^1_{X_0} \to \ldots \to \Omega^m_{X_0}])$$

是满射的。

命题 1.8. 假设 X 是可投射的。那么对于每个 $i \geq 1$，自然映射 $E_i^{pq}(X) \to H^q(\Omega^p_{X_0})$ 是满射，并且它们诱导同构。

$$E_\infty^{pq}(X) \xrightarrow{\sim} H^q(\Omega^p(X_0)).$$

特别地，$E_2^{10}(X) \simeq H^0(\Omega^1_{X_0})$。

证明。令 $i : X_0 \to X$ 表示嵌入，并令 $p : X \to X_0$ 为投影（因此 $p \circ i = \mathrm{id}_{X_0}$）。于是我们有谱序列之间的态射

$$E_n^{pq}(X_0) \xrightarrow{p^*} E_n^{pq}(X) \xrightarrow{i^*} E_{pq}^n(X_0),$$

其复合等于恒等映射。由此立即得到满射性。我们得到无穷页上的同构这一事实，源于维数相等：$\dim E_\infty(X) = \sum_{pq} h^q(\Omega^p_{X_0})$。□

命题 1.9。（i）设 L 是 X 上的偶线丛。那么存在一个谱序列之间的态射

$$c_1(L) \cup \cdot : E_n^{pq}(X) \to E_n^{p+1,q+1}(X),$$

使得 E_1 上的映射由与 $c_1(L) \in H^1(\Omega^1_X)$ 作杯积给出，并且与极限 $H^\bullet_{dR}(X)$ 上由 $c_1(L)_{dR} \in H^2_{dR}(X)$ 作杯积相容。

(ii) 进一步假设特征为零，且 X 具有丰线丛。令 $d = \dim X_0$。那么，对于任意 $i \geq j \geq 1$ 和任意 $n \geq 1$，我们有 $p + q = d - i$，

$$\mathrm{rk}(E_n^{pq} \to H^q(\Omega^p_{X_0})) \leq \mathrm{rk}(E_n^{p+j,q+j} \to H^{q+j}(\Omega^{p+j}_{X_0})).$$

证明。(i) 可以通过取值于 $\Omega^{1,cl}$（闭 1-形式层）的 Čech 上循环 $d\log(f_{ij})$ 来实现 $c_1(L)$，其中 (f_{ij}) 是 L 的转移函数，并使用此上循环在 $\Omega^\bullet$ 的 Čech 复形上的乘法。

(ii) 这由 (i) 以及乘法映射这一事实即可得出。

$$c_1(L)^j \cup \cdot : H^q(\Omega^p_{X_0}) \to H^{q+j}(\Omega^{p+j}_{X_0})$$

在我们的假设下是单射。□

注记 1.10。自然会提出这样的问题：Deligne-Illusie 通过约化到有限特征的方法（见 [4]），是否能为超情形下的 Hodge 到 de Rham 谱序列提供一些启示？也就是说，对于特征为 p 的 X/k，弗罗贝尼乌斯会消去奇函数，因此可以将其视为一个态射 $F : X \to X_0$。于是，$F_*\Omega^\bullet_X$ 变成了一个由 $\mathcal{O}_{X_0}$-模构成的复形。现在很容易看出，卡蒂埃同构的类比（由相同公式给出）是

$$C^{-1} : \Omega^i_{X_0} \xrightarrow{\sim} \underline{H}^i(F_*\Omega^\bullet_X).$$

与 [4] 中相同的方法表明，如果特征为 $> \dim X_0$ 且 X 可提升到特征零，那么 $F_*\Omega^\bullet_X$ 的超上同调的第二个谱序列（从 $E_2 = \bigoplus H^q(\underline{H}^i(F_*\Omega^\bullet_X))$ 开始）在 E_2 处退化。这与定理 1.1 一致，但并未提供关于 X 的 Hodge 到 de Rham 谱序列的任何额外信息（因为在卡蒂埃同构中，Ω^i_X 被 $\Omega^i_{X_0}$ 替代）。

1.5. 关于偶幂零扩张的一个结果。推论 1.6 有以下经典的逆命题（对通常的概形而言），而这似乎并未广为人知。

定理 1.11. 设 Y 是特征为零的域 k 上的一个真概形，且 Y_0 是相应的约化概形。假设 Y_0 在 k 上光滑。那么对任意 i，自然映射 $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) \to H^i(Y_0, \mathcal{O}_{Y_0})$ 都是满射。

证明. 所讨论的映射可纳入由自然映射构成的交换方块

$$\begin{array}{ccc} H^i(Y_{inf}, \mathsf{O}_Y) & \twoheadrightarrow & H^i((Y_0)^{inf}, \mathsf{O}_{Y_0}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(Y, \mathsf{O}_Y) & \twoheadrightarrow & H^i(Y_0, \mathsf{O}_{Y_0}) \end{array}$$

其中第一行考虑的是无穷小位点上的上同调（见 [6]）。已知顶部的水平箭头是一个同构（见 [6, 第 5.3] 节）。此外，众所周知，$H^i((Y_0)^{inf}, \mathsf{O}_{Y_0})$ 与 Y_0 的德拉姆上同调同构，因此根据 Y_0 的霍奇到德拉姆退化，右侧的竖直箭头是满射。这意味着复合映射$H^i(Y_{inf}, \mathsf{O}_Y) \to H^i(Y_0, \mathsf{O}_{Y_0})$ 是满射。由于它经过 $H^i(Y, \mathsf{O}_Y)$，结论得证。□

2. Some computations

2.1. 在分裂情形和特征 2 中使用特殊导子。

定理 2.1. 假设 X 是分裂的，且基域 k 的特征为零。则 X 的 Hodge 到 de Rham 谱序列在 E_2 处退化，并且存在自然同构$E^{p,q}_2(X) \tilde{\to} H^{p,q}(X_0)$。

证明. 设 $\mathsf{O}_X = \wedge^\bullet(E)$，其中 E 是 X_0上的一个向量丛。于是我们有 $\mathbb{G}_m$ 在 X上的作用，使得 O_{X_0} 是 $\mathbb{G}_m$-不变的，且 E 的权为 1。令 ξ 为 X上相应的全局（偶）向量场。在局部坐标 $(x_\bullet, \theta_\bullet)$ 中，有 $\xi = \sum_i \theta_i \partial_{\theta_i}$。现在我们声称，对每个 $n \geq 0$，都有

$$\Omega^n_X = \bigoplus_{i \geq 0} \Omega^n_i,$$

其中 $\Omega^n_i \subset \Omega^n_X$ 是 η 的子层，满足 $L_\xi(\eta) = i\eta$，这里 L_ξ 是关于 ξ的李导数。事实上，这是一个局部命题，在局部坐标中显然成立。此外，对每个 $i \geq 0$，$\Omega^\bullet_i$ 在德拉姆微分下保持不变（因为 $dL_\xi = L_\xi d$），并且

$$\Omega^\bullet_0 \simeq \Omega^\bullet_{X_0}.$$

最后，缩并算子 i_ξ 给出了从 $i \cdot \mathrm{id}$ 到 0 的同伦，作用于 $\Omega^\bullet_i$。因此，对于 $i > 0$，每个复形 $\Omega^\bullet_i$ 都是可缩的。这意味着与每个 $\Omega^\bullet_i$（$i > 0$）相关的谱序列的 E_1 页也是可缩的，因此当 $i > 0$ 时，每个 $\Omega^\bullet_i$ 对应的 E_2 页均为零。这就得出了我们的断言。□

注 2.2. 当 X 在一个平坦族中变化时，空间 $E^{p,q}_2(X)$ 不满足半连续性（因为它们是通过两次取上同调得到的），因此分裂情形无法对一般 X 的 $E^{p,q}_2(X)$ 的行为得出任何非平凡结论。例如，对于某个超簇 X，可能存在 $E^{p,q}_2(\mathrm{gr}\ X) = 0$，其中 (p,q) 如此，而 $E^{p,q}_2(X) \neq 0$（其中 gr X 是与 X 相关的分裂超簇），见下文例 2.13。

当基域的特征为 2 时，定理 2.1 中使用的向量场 $\xi = \sum_i \theta_i \partial_{\theta_i}$ 与坐标无关。也就是说，它对应于导子 ξ，满足：对于偶的 f，$\xi(f) = 0$；对于奇的 η，$\xi(\eta) = \eta$。这立即导出以下结果。

命题 2.3。设基域 k 的特征为 2。那么，德拉姆复形 $(\Omega^\bullet_X)_-$ 的奇部分同伦于零。因此，$E_2(X)_- = 0$。

证明。$((\Omega^\bullet_X)_-$ 上从 id 到 0 的同伦由缩并算子 i_ξ 给出。□

2.2. 奇维 2。本节考虑 X 的维数为 $n|2$ 的情形。我们假设 k 的特征为零。

对于每个 p、q，令

$$\delta_{pq}(X) := \dim \operatorname{coker}(H^q(\Omega_X^p) \to H^q(\Omega_{X_0}^p)).$$

注意，由推论 1.6 可知，我们有 $\delta_{0q} = 0$。

定理 2.4。假设 X 的维数为 $n|2$，且 k 的特征为零。则 (i) 有 $(E_2^{pq})_- = 0$；(ii) X 的 Hodge 到 de Rham 谱序列在 E_2处退化；(iii) 有

$$\dim E_2^{pq} = h^{pq}(X_0) + \delta_{p+1,q-1}(X) - \delta_{p,q}(X).$$

证明将基于以下结果，其中我们使用了定理 1.1 的证明中引入的滤过 $F^\bullet\Omega_X^\bullet$。

命题 2.5。假设 X 的维数为 $n|2$，且 k 的特征为零。则复形 $(\Omega_X^\bullet)_-$ 和 $(F^2\Omega_X^\bullet)_+$ 同伦于零。

引理 2.6. 假设在某个阿贝尔范畴中有一个行正合的交换图 ，

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \\ 0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

假设 f_1 和 f_3 是分裂单射，且第二行分裂正合，那么 f_2 也是分裂单射。

证明很直接，留给读者完成。

下文为简便起见，将写作 $(\Omega_X^\bullet)_\pm = \Omega_\pm^\bullet$。对于 $k \geq 2$，令

$$G^k\Omega_\pm^n := (\mathcal{N}^2 F^{k-2}\Omega^n)_\pm + F^{k+2}\Omega_\pm^n,$$

其中 k 的奇偶性与该空间的奇偶性相同。对于 $k = 1$，令 $G^1\Omega_-^n = F^3\Omega_-^n$。

引理 2.7. (i) 对于每个 $k \geq 1$ 和每个 n，以下序列正合：

$$0 \to G^k\Omega_\pm^n/d(F^{k+2}\Omega_\pm^{n-1}) \to F^k\Omega_\pm^n/d(F^k\Omega_\pm^{n-1}) \xrightarrow{\delta} \Omega_{X_0}^{n-k+1} \otimes S^k(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2) \to 0, \qquad (2.1)$$

其中，对于偶数 k，我们使用 $+$（对于奇数 k，则使用 $-$），而 δ 定义为

$$\delta(\alpha_{n-k+1} \cdot n_1 dn_2 \cdot \ldots \cdot dn_k) = \alpha_{n-k+1}|_{X_0} \otimes (\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{n}_k),$$

其中 $\alpha_{n-k+1} \in \Omega^{n-k+1}$。

(ii) 对于每个 $k \geq 1$，由 d 诱导的下述映射是分裂单射：

$$F^k\Omega_\pm^n/d(F^k\Omega_\pm^{n-1}) \to F^k\Omega_\pm^{n+1}/\mathcal{N}^2 \cdot F^{k-2}\Omega_\pm^{n+1}, \qquad (2.2)$$

*wher*对于 $k = 1$，我们将 $\mathrm{N}^2 F^{-1}\Omega_-^{n+1}$ 替换为零；对于偶数 k，我们使用 $+$（对于奇数 k，则使用 $-$ ），

证明。我们假设 $k \geq 1$ 是奇数。偶数 $k \geq 2$ 的情形完全类似。

(i) 我们对 $n \geq -1$ 使用归纳法（对于 $n = -1$，断言显然成立）。为简便起见，记 $S^i = S^i(\mathrm{N}/\mathrm{N}^2)$。

考虑具有正合行的交换图（其中第一行根据归纳假设是正合的）

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G^k\Omega_-^{n-1}/d(F^{k+2}\Omega_-^{n-2}) & \longrightarrow & F^k\Omega_-^{n-1}/d(F^k\Omega_-^{n-2}) & \xrightarrow{\delta} & \Omega_{X_0}^{n-k} \otimes S^k & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N} \cdot F^{k-1}\Omega_+^n + G^k\Omega_-^n & \longrightarrow & F^k\Omega_-^n & \longrightarrow & \Omega_{X_0}^{n-k} \otimes S^k & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

这表明自然嵌入诱导出一个同构

$$(\mathcal{N}\cdot F^{k-1}\Omega_+^n + G^k\Omega_-^n)/d(G^k\Omega_-^{n-1}) \xrightarrow{\sim} F^k\Omega_-^n/d(F^k\Omega_-^{n-1}). \tag{2.3}$$

接下来，我们有一个交换图，其正合行是，

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F^{k+2}\Omega_-^{n-1} & \longrightarrow & G^k\Omega_-^{n-1} & \longrightarrow & \Omega_{X_0}^{n-k+1}\otimes\mathcal{N}^2\otimes S^{k-2} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\kappa} & & \\
0 & \longrightarrow & G^k\Omega_-^n & \longrightarrow & \mathcal{N}\cdot F^{k-1}\Omega_+^n + G^k\Omega_-^n & \longrightarrow & \Omega_{X_0}^{n-k+1}\otimes\mathcal{N}/\mathcal{N}^2\otimes S^{k-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中 κ 是 Koszul 微分。由于 κ 是单射，我们可推出纵向映射的余核所成的序列正合。结合同构 (2.3)，可得 (2.1) 正合。

(ii) 我们对 k 使用递减归纳法。注意 $F^{n+3}\Omega_-^n = 0$，因此归纳基是显然的。

首先假设 $k \geq 3$。考虑以下交换图，其中各行正合，

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & G^k\Omega_-^n/d(F^{k+2}\Omega_-^{n-1}) & \longrightarrow & F^k\Omega_-^n/d(F^k\Omega_-^{n-1}) & \xrightarrow{\delta} & \Omega_{X_0}^{n-k+1}\otimes S^k & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\
0 & \longrightarrow & (\mathcal{N}\cdot F^{k-1}\Omega_+^{n+1} + G^k\Omega_-^{n+1})/\mathcal{N}^2F^{k-2}\Omega_-^{n+1} & \longrightarrow & F^k\Omega_-^{n+1}/\mathcal{N}^2F^{k-2}\Omega_-^{n+1} & \longrightarrow & \Omega_{X_0}^{n-k+1}\otimes S^k & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{2.4}$$

利用引理 2.6（取 $f_3 = \mathrm{id}$），我们看到，只需证明左侧的竖直箭头是一个分裂单射。但同一个映射出现在具有正合行的交换图中的中间竖直箭头位置，

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F^{k+2}\Omega_-^n/d(F^{k+2}\Omega_-^{n-1}) & \longrightarrow & G^k\Omega_-^n/d(F^{k+2}\Omega_-^{n-1}) & \longrightarrow & \Omega_{X_0}^{n-k+2}\otimes\mathcal{N}^2\otimes S^{k-2} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\kappa} & & \\
0 & \longrightarrow & F^{k+2}\Omega_-^{n+1}/\mathcal{N}^2F^k\Omega_-^{n+1} & \longrightarrow & (\mathcal{N}\cdot F^{k-1}\Omega_+^{n+1} + G^k\Omega_-^{n+1})/\mathcal{N}^2F^{k-2}\Omega_-^{n+1} & \longrightarrow & \Omega_{X_0}^{n-k+2}\otimes\mathcal{N}/\mathcal{N}^2\otimes S^{k-1} & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{2.5}$$

根据归纳假设，最左侧竖直箭头是分裂单射；而最右侧竖直箭头也是分裂单射，因为 Koszul 微分 κ 如此。由引理 2.6，只需证明第二行是分裂正合的。但这个分裂由以下良定义映射诱导：

$$\begin{aligned}
&\Omega_{X_0}^{n-k+2}\otimes\mathcal{N}/\mathcal{N}^2\otimes S^{k-1} \to \mathcal{N}\cdot F^{k-1}\Omega_+^n/\mathcal{N}^2F^k\Omega_-^n:\\
&df_1\dots df_{n-k+2}\otimes n_1\otimes(n_2\dots n_k) \mapsto d\widetilde{f_1}\dots d\widetilde{f}_{n-k+2}n_1dn_2\dots dn_k,
\end{aligned}$$

其中 $f_i \in (\mathcal{O}_X)_+$ 是 $f_i \in \mathcal{O}_{X_0}$ 的提升。~

在 $k = 1$ 的情况下，我们对上述论证作如下修改：将图（2.4）中的 $\mathcal{N}^2F^{-1}\Omega_-^{n+1}$ 替换为零，并将图（2.5）替换为

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F^3\Omega_-^n/d(F^3\Omega_-^{n-1}) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & F^3\Omega_-^n/d(F^3\Omega_-^{n-1}) & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & & & \\
0 & \longrightarrow & F^3\Omega_-^{n+1}/\mathcal{N}^2\Omega_-^{n+1} & \longrightarrow & (\mathcal{N}\cdot\Omega_+^{n+1} + F^3\Omega_-^{n+1})/\mathcal{N}^2\Omega_-^{n+1} & \longrightarrow & \Omega_{X_0}^{n+1}\otimes\mathcal{N}/\mathcal{N}^2 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

和之前一样，我们看到底行是分裂正合的，并且根据归纳假设，最左侧竖直箭头是分裂单射。因此，中间竖直箭头是分裂正合的，这就得出了所要证明的结论。□

命题 2.5 的证明。对于 $k=1$ （分别地，对于 $k=2$），引理 2.7(ii) 表明，映射 $\Omega_-^n/d\Omega_-^{n-1}\to\Omega_-^{n+1}$（分别地，$F^2\Omega_+^n/dF^2\Omega_+^{n-1}\to F^2\Omega_+^{n+1}$）是一个分裂单射，由此立即可得结论。□

定理 2.4 的证明。（i）部分由命题 2.5 立即得出。为证明（ii）和（iii）部分，只需证明以下不等式

$$\dim E_2^{pq}=\dim(E_2^{pq})_+\le h^{pq}(X_0)+\delta_{p+1,q-1}(X)-\delta_{p,q}(X).$$

事实上，将这些不等式相加，可得

$$\dim E_2(X)\le\dim H_{dR}(X_0)=\dim E_\infty(X),$$

因此 t 该谱序列在 E_2 处退化，且上述不等式实际上是等式 .

由于自然映射 $(E_2^{pq})_+\to H^q(\Omega_{X_0}^p)$ 经由 $H^q(\Omega_X^p)$ 的一个商分解，其余秩为$\ge\delta_{p,\,q}(X)$。因此，只需证明

$$\dim\ker((E_2^{pq})_+\to H^q(\Omega_{X_0}^p))\le\delta_{p+1,q-1}(X).$$

正合列

$$0\to F^2(\Omega_X^p)_+\to(\Omega_X^p)_+\to\Omega_{X_0}^p\to 0$$

从而产生该满射

$$K:=\ker(H^q(F^2(\Omega_X^p)_+)\to H^q((\Omega_X^{p+1})_+))/\operatorname{im}H^q((F^2\Omega_X^{p-1})_+)\to\ker((E_2^{pq})_+\to H^q(\Omega_{X_0}^p)).$$

让我们考虑正合列的态射

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F^2(\Omega_X^p)_+ & \longrightarrow & (\Omega_X^p)_+ & \longrightarrow & \Omega_{X_0}^p & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\
0 & \longrightarrow & F^2(\Omega_X^{p+1})_+ & \longrightarrow & (\Omega_X^{p+1})_+ & \longrightarrow & \Omega_{X_0}^{p+1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

利用该序列的正合性

$$H^q(F^2(\Omega_X^{p-1})_+)\to H^q(F^2(\Omega_X^p)_+)\to H^q(F^2(\Omega_X^{p+1})_+),$$

根据命题 2.5 可知，这给出了一个嵌入

$$K\hookrightarrow\ker(H^q(F^2(\Omega_X^{p+1})_+)\to H^q((\Omega_X^{p+1})_+))\simeq\operatorname{coker}(H^{q-1}((\Omega_X^{p+1})_+)\to H^{q-1}(\Omega_{X_0}^{p+1}))$$

所以 $\dim K\le\delta_{2,\,q-1}(X)$。 □

推论 2.8。若 X 的维数为 $n|2$，则 $E_2^{pq}=0$ 对 $p>n$ 成立（显然对 $q>n$也成立）。

我们的下一个目标是为 $\delta_{1q}(X)$ 求一个下界（见下文的命题 2.11）。令 $L:=\mathsf{N}^2$，将其视为 X_0 上的线丛。令 Y 表示底层空间与 X_0 相同、结构层为 $\mathsf{O}_Y=(\mathsf{O}_X)_+$ 的偶概形。于是 O_Y 是 O_{X_0} 由 L 作平方零扩张，因此它对应于一个类 $e\in H^1(T_{X_0}\otimes L)$。

引理 2.9。在 X_0 上有一个自然的凝聚层正合列。

$$0\to L\xrightarrow{\iota}\Omega_Y^1|_{X_0}\to\Omega_{X_0}^1\to 0\tag{2.6}$$

相应的扩张类在自然同构下对应于 e under $\mathrm{Ext}^1(\Omega_{X_0}^1,L)\ \simeq H^1(T_{X_0}\otimes L)$。

证明。这个正合列是标准的：其左侧的正合性源于这样一个事实，即局部地，Y 是 $X_0 \times \mathbb{A}^1$ 中的一个卡蒂埃除子。设 (U_i) 是 X_0 的一个开仿射覆盖，并设 $\sigma_i : \mathsf{O}_{X_0} \to \mathsf{O}_Y$ 是定义在 U_i 上的分裂，使得 e 的类由余循环 $v_{ij} \in T_{X_0} \otimes L(U_{ij})$ 表示，其中满足

$$(\sigma_j - \sigma_i)(f) = \iota\langle v_{ij}, df\rangle.$$

我们在 U_i 上得到诱导的分裂，

$$d\sigma_i : \Omega^1_{X_0} \to \Omega^1_Y|_{X_0} : f dg \mapsto f d\sigma_i(g)|_{X_0}.$$

现在，上循环 $d\sigma_j - d\sigma_i \in (\Omega^1)^\vee \otimes L(U_{ij})$ 表示扩张 (2.6) 的类。接下来只需注意

$$\langle d\sigma_j - d\sigma_i, dg\rangle = d(\sigma_j(g) - \sigma_i(g)) = \iota\langle v_{ij}, df\rangle,$$

因此，该上循环与 v_{ij} 一致。 □

引理 2.10. (i) 有如下典范分解

$$(\Omega^1_X)_+/(\mathcal{N}^2 \otimes \Omega^1_{X_0}) \simeq \Omega^1_Y|_{X_0} \oplus S^2(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2).$$

(ii) 对任意 $q \geq 0$，都有一个嵌入

$$\mathrm{im}(H^q(\Omega^1_X) \to H^q(\Omega^1_{X_0})) \subset \mathrm{im}(H^q(\Omega^1_Y|_{X_0}) \to H^q(\Omega^1_{X_0})).$$

证明. (i) 拉回映射 $\Omega^1_Y \to (\Omega^1_X)_+$ 诱导一个 O_{X_0}-线性映射 $\Omega^1_Y|_{X_0} \to (\Omega^1_X)_+/(\mathsf{N}^2 \otimes \Omega^1_{X_0})$。另一方面，映射

$$\mathcal{N}_- \otimes \mathcal{N}_- \to (\Omega^1_X)_+ : a \otimes b \mapsto adb + bda$$

诱导出一个 O_{X_0}-线性映射 $S^2(\mathsf{N}/\mathsf{N}^2) \to (\Omega^1_X)_+/(\mathsf{N}^2 \otimes \Omega^1_{X_0})$。可以利用局部坐标检验这些映射是嵌入，并给出所声称的分解。(ii) 由于映射 $(\Omega^1_X)_+ \to \Omega^1_{X_0}$ 因子化通过商 $(\Omega^1_X)_+/(\mathsf{N}^2 \otimes \Omega^1_{X_0})$，这由第 (i) 部分中证明的分解可得。□

命题 2.11。考虑杯积映射

$$\mu^q_e : H^q(\Omega^1_{X_0}) \xrightarrow{\cup e} H^{q+1}(L).$$

那么有】【。

$$\delta_{1q}(X) \geq \mathrm{rk}(\mu^q_e).$$

证明。根据引理 2.10(ii),

$$\delta_{1q}(X) \geq \dim \mathrm{coker}(H^q(\Omega^1_Y|_{X_0}) \to H^q(\Omega^1_{X_0})).$$

但根据引理 2.9，我们有一个同一性

$$\mathrm{coker}(H^q(\Omega^1_Y|_{X_0}) \to H^q(\Omega^1_{X_0})) \simeq \mathrm{im}(\mu^q_e).$$

□

推论 2.12. 假设 X_0 是亏格为 $g \geq 1$ 的光滑射影曲线，且 $L \simeq \omega_{X_0}$。那么$\delta_{10}(X) \geq 1$。

例 2.13。考虑 $X = G(1|1,2|2)$。那么 $X_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，且 $\mathsf{N}/\mathsf{N}^2 \simeq \mathsf{O}(-1,-1)^{\oplus 2}$，$\mathsf{N}^2 \simeq \omega_{X_0} = \mathsf{O}(-2,-2)$。由命题 2.11，我们有

$$\delta_{11}(X) \geq \mathrm{rk}(\mu^1_e : H^1(\Omega^1_{X_0}) \to H^2(\Omega^2_{X_0})).$$

众所周知，$e \in H^1(T_{X_0} \otimes \omega_{X_0}) \simeq H^1(\Omega^1_{X_0})$ 非零，因此 $\mu^1_e \neq 0$，并且得到 $\delta_{11}(X) \geq 1$。另一方面，令 B 表示 $X = G(1|1,2|2)$ 上典范丛的 Berezinian。于是 $c_1(\mathsf{B})$ 给出 $H^1(\Omega^1_X)$ 中的一个元素，它在 $H^1(\Omega^1_{X_0})$ 中投影为一个非零类（参见例如 [8, 第 4 章 .3]）。因此，我们有 $\delta_{11}(X) = 1$，于是

$$\dim E_2^{11}(X) = \dim E_2^{02}(X) = 1.$$

事实上，很容易看出，对于 $p \geq 2$ 和 $i = 0$，$H^i(\Omega^p_X) = 0$为 1，这意味着唯一非零的 E_2 项是

$$E_2^{00} = E_2^{02} = E_2^{11} = E_2^{22} = k.$$

2.3. 维数为 $1|3$ 的例子。我们将给出一个例子，说明在维数为 $1|3$ 时，由 $d:(\mathsf{O}_X)_- \to (\Omega^1_X)_-$ 诱导的 H^1 上的映射可能具有非平凡核（见下文的定理 2.15）。我们先给出维数为 1 的光滑超簇的一般构造 $|3$.

引理 2.14. 设 C 是一条光滑曲线， V 是 C 上的一个秩 3 向量丛，

$$0 \to \bigwedge^2 V \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_C \to 0 \tag{2.7}$$

一个平方零扩张。于是，存在一个维数为 $1|3$ 的光滑超簇 X，满足 $X_0 = C$、$\mathsf{N}/\mathsf{N}^2 = V$，并且 $(\mathsf{O}_X)_+ \simeq \mathsf{O}_Y$ 是 O_C 的一个平方零扩张。

证明。设 $e \in H^1(T_C \otimes \bigwedge^2 V)$ 为扩张 (2.7) 的类。注意，我们有一个自然同构

$$\bigwedge^2 V \simeq V^\vee \otimes \det(V) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(V, \det(V)).$$

令 $D_{\le 1}(V,\det(V))$ 表示从 V 到 $\det(V)$ 的 ≤ 1 阶微分算子层。于是我们有一个正合列

$$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}(V, \det(V)) \to D_{\le 1}(V, \det(V)) \xrightarrow{\sigma} T_C \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(V, \det(V)) \to 0,$$

其中 σ 是符号映射。由于 $H^2(C, \mathrm{Hom}(V, \det(V))) = 0$，我们可以将 e 提升为一个类 $\widetilde{e} \in H^1(C, D_{\le 1}(V, \det(V)))$。我们用关于仿射覆盖 $C = (U_1, U_2)$ 的 Čech 上循环来表示 $\widetilde{e}$， $\phi_{12} : V|_{U_{12}} \to \det(V)|_{U_{12}}$。根据假设，它满足

$$\phi_{12}(fs) = f\phi_{12}(s) + v_{12}(f) \wedge s,$$

对于 $f \in \mathsf{O}$、 $s \in V$，其中 $v_{12} \in H^0(U_{12}, T_C \otimes \bigwedge^2 V)$ 是表示 e 的 Čech 上循环。

现在我们将把来自 U_i, $i = 1, 2$ 上的分裂超簇的 X 粘合起来，它们对应于 $\bigwedge^\bullet(V|_{U_i})$。我们只需构造一个层 $\mathbb{Z}/2$-分次环 $\bigwedge^\bullet(V|_{U_{12}})$ 的自同构 α，使其模 $\bigwedge^{\ge 1}$ 意义下诱导恒等映射即可。只需指定 α 在 O 和 V 上的作用方式。对于 $f \in \mathsf{O}$，我们令 $s \in V$，

$$\alpha(f) = f + v_{12}(f), \quad \alpha(s) = s + \phi_{12}(s).$$

容易验证，这给出了 $\bigwedge^\bullet(V|_{U_{12}})$ 的一个良定义的自同构，因此定义了具有所需性质的超簇 X。□

定理 2.15. 假设基域 k 是特征为 $\neq 2$ 的代数闭域。对于任意一个定义在 k 上、亏格为 2 的光滑射影曲线 C，存在一个维数为 $1|3$ 且具有 $X_0 = C$ 的光滑超簇 X，并且满足以下条件。

$$E_2^{01}(X)_- = \ker(H^1(X, (\mathcal{O}_X)_-) \to H^1(X, (\Omega^1_X)_-)) \neq 0.$$

X 的 Hodge 到 de Rham 谱序列在 E_2不退化 .

我们先介绍一些辅助性结论。

引理 2.16. 假设 k 的特征为 $\neq 2$，且 3。对于一个 k-向量空间 V，线性映射

$$\tau_V : V \otimes \bigwedge^2 V \to V \otimes \bigwedge^2 V : v_1 \otimes (v_2 \wedge v_3) \mapsto v_3 \otimes (v_1 \wedge v_2) - v_2 \otimes (v_1 \wedge v_3)$$

是可逆的。

证明。令 我们来考虑投影算子 π 在 $V \otimes \bigwedge^2 V$ 上的投影（投向一个与 $\bigwedge^3 V$ 同构的子空间），其定义如下:

$$v_1 \otimes (v_2 \wedge v_3) \mapsto \frac{1}{3}\big(v_1 \otimes (v_2 \wedge v_3) + v_2 \otimes (v_3 \wedge v_1) + v_3 \otimes (v_1 \wedge v_2)\big).$$

于是我们有 $\tau_V = 3\pi - \mathrm{id}$，因此它的特征值为 2 和 -1。 □

引理 2.17。假设 k 的特征为 $\neq 2$, 3。设 C 是 k 上的光滑射影曲线，并设 V 是 C 上的秩 3 向量丛，使得

$$H^1(\underline{\mathrm{End}}_0(V) \otimes \det(V)) = H^0(V) = H^0(\det(V)^{-1}) = 0,$$

当 $H^0(\omega_C \otimes V) \neq 0$ 且 $H^1(\det(V)) \neq 0$时。于是，存在一个维数为 $1|3$ 的光滑超簇 X，满足 $X_0 = C$，且 $\mathsf{N}/\mathsf{N}^2 = V$，使得 $E_2^{01}(X)_- \neq 0$。

证明。根据引理 2.14，对于任意类 $e \in H^1(T_C \otimes \bigwedge^2 V)$，存在一个维数为1|3的超簇 X，满足 $X_0 = C$，且 $\mathcal{N}/\mathcal{N}^2 = V$，使得 $(\mathcal{O}_X)_+ \to \mathcal{O}_C$ 的扩张类为 e。我们将证明，存在一种 e 的选取，使得 $E_2^{01}(X)_- \neq 0$。

正合列

$$0 \to \mathcal{N}^3 \to \mathcal{O}_- \to V \to 0$$

表明映射 $H^1(\mathcal{N}^3) \to H^1(\mathcal{O}_-)$ 是单射。因此，只需证明映射 $H^1(\mathcal{N}^3) \to H^1((\mathcal{N}\Omega^1)_-)$ 具有非平凡核。由于 $\mathcal{N}^3\Omega^1_{X_0} \simeq \det(V) \otimes \omega_C$ 具有平凡的 H^1（其对偶于 $H^0(\det(V)^{-1}) = 0$），只需证明映射

$$H^1(\mathcal{N}^3) \to H^1((\mathcal{N}\Omega^1)_-/\mathcal{N}^3\Omega^1_{X_0})$$

具有非平凡核。

我们有一个 $\mathcal{O}_{X_0}$-模的正合列

$$0 \to \mathcal{N}^2 d\mathcal{N} \to (\mathcal{N}\Omega^1)_-/\mathcal{N}^3\Omega^1_{X_0} \to \mathcal{N}/\mathcal{N}^2 \otimes \Omega^1_{X_0} \to 0. \tag{2.8}$$

注意，如果 $\sigma_i : \mathcal{O}_{X_0} \to (\mathcal{O}_X)_+$ 是扩张 $(\mathcal{O}_X)_+ \to \mathcal{O}_C$ 的局部分裂，那么我们得到 (2.8) 的诱导分裂，由 $n \otimes df \mapsto \widetilde{n} \cdot d\sigma_i(f)$ 给出（其中 $\widetilde{n} \in \mathcal{N}_-$ 是 $n \in \mathcal{N}/\mathcal{N}^2$ 的提升）。两个此类分裂之差由 1-余循环 $n \otimes df \mapsto \widetilde{n} \cdot dv_{ij}, df$ 给出，其中 v_{ij} 是表示 $e \in H^1(T_{X_0} \otimes \bigwedge^2 V)$ 的 1-余循环。利用莱布尼茨法则，我们推得 (2.8) 在 $\mathrm{Ext}^1(V \otimes \Omega^1_{X_0}, V \otimes \bigwedge^2 V)$ 中的扩张类等于 e 在自然映射下的像

$$H^1(T_{X_0} \otimes \bigwedge^2 V) \simeq \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X_0}, \bigwedge^2 V) \to \mathrm{Ext}^1(V \otimes \Omega^1_{X_0}, V \otimes \bigwedge^2 V) \xrightarrow{\tau_V \circ} \mathrm{Ext}^1(V \otimes \Omega^1_{X_0}, V \otimes \bigwedge^2 V),$$

其中最后一个箭头由自同构 τ_V 诱导（见引理 2.16）。

我们有一个同构 $\bigwedge^2 V \simeq V^\vee \otimes \det(V)$，因此我们有一个直和分解。

$$V \otimes \bigwedge^2 V \simeq V \otimes V^\vee \otimes \det(V) \simeq \det(V) \oplus \underline{\mathrm{End}}_0(V) \otimes \det(V).$$

根据假设，$H^1(\mathrm{End}_0(V) \otimes \det(V)) = 0$，因此映射。

$$H^1(\mathcal{N}^3) \simeq H^1(\det(V)) \to H^1(V \otimes \bigwedge^2 V)$$

是一个同构。因此，只需验证连接同态即可。

$$H^0(\omega_C \otimes V) \to H^1(V \otimes \bigwedge^2 V)$$

与（2.8）相关的映射非零。由于投影 $V \otimes \bigwedge^2 V \to \det(V)$ 在 H^1 上诱导了一个同构，这等价于证明该同态

$$H^0(\omega_C \otimes V) \xrightarrow{\cup e} H^1(\det(V))$$

不为零，其中我们将 e 视为 $H^1(\omega_C^{-1} \otimes V^\vee \otimes \det(V))$ 的一个元素。因此，我们需要选择 e，使得这个杯积映射不为零。

只要映射

$$H^0(\omega_C \otimes V) \otimes H^1(\omega_C^{-1} \otimes V^\vee \otimes \det(V)) \to H^1(\det(V))$$

非零即可。根据塞尔对偶，我们需要验证映射

$$H^0(\omega_C \otimes V) \otimes H^0(\omega_C \otimes \det(V)^{-1}) \to H^0(\omega_C^2 \otimes V \otimes \det(V)^{-1})$$

非零。根据假设，存在一个非零元素 $s \in H^0(\omega_C \otimes \det(V)^{-1})$（该空间与 $H^1(\det(V)) \neq 0$ 对偶）。乘以 s 给出一个单射映射

$$H^0(\omega_C \otimes V) \xrightarrow{s} H^0(\omega_C^2 \otimes V \otimes \det(V)^{-1}).$$

因此，我们的断言可由 $H^0(\omega_C \otimes V)$ 的非零性推出。 □

我们需要一些关于与循环覆盖相关的普林簇类比对象的性质（其中假设特征为 $\neq 3$）。

~引理 2.18. 设 $\pi : C \to C$ 是由 C上的一个阶为 3 的线丛 ξ 所关联的循环覆盖，且 $\tau : C \to C$ 是伽罗瓦群 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$中一个非平凡元素的作用。

(i) 态射 $\pi^* : J_C \to J_{\widetilde{C}}$和 $\mathrm{Nm}_{\widetilde{C}/C} : J_{\widetilde{C}} \to J_C$相对于雅可比簇上的典范主极化互为对偶。可得

$$\mathrm{Nm}_{\widetilde{C}/C} \circ \pi^* = [3]_{J_C}, \quad \pi^* \circ \mathrm{Nm}_{\widetilde{C}/C} = \tau_* + \tau_*^{-1} + \mathrm{id}_{J_{\widetilde{C}}}.$$

(ii) 可得 $\ker(\pi^*) = \xi \subset J_C$，这是由 ξ生成的 3 阶子群。
(iii) 令

$$\widetilde{P} = \ker(\mathrm{Nm}_{\widetilde{C}/C} : J_{\widetilde{C}} \to C),$$

~，并令 $P \subset P$ 表示 P 中 0 所在的连通分支（P 是 Prym 簇的一个类似物）。那么 $P = (\tau - \mathrm{id})(J_{\widetilde{C}})$， $\tau - \mathrm{id} : P \to P$是一个同源，且 $|\widetilde{P}/P| = 3$。

证明。(i) 这是众所周知的（参见 [1, 第 11.4] 节）。
(ii) 回忆一下， $\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}} \simeq \mathcal{O}_C \oplus \xi \oplus \xi^{-1}$。因此，

$$h^0(\pi^*\xi) = h^0(\xi \otimes \pi_*\mathcal{O}) = h^0(\pi_*\mathcal{O}) = 1,$$

~所以， $\pi^*\xi$ 是 C 上的次数为零的线丛，且有一个非零截面，因此 $\pi^*\xi \simeq \mathcal{O}_{\widetilde{C}}$。
反过来，假设 $\pi^* M \simeq \mathcal{O}$。那么

$$M \otimes \pi_*\mathcal{O} \simeq \pi_*\pi^* M \simeq \pi_*\mathcal{O},$$

所以， M 同构于 $\pi_*\mathcal{O}$中的某个直和项。
(iii) 令 $A := J_{\widetilde{C}}/P$。我们有阿贝尔簇的一个正合列

$$0 \to P \to J_{\widetilde{C}} \xrightarrow{p} A \to 0, \tag{2.9}$$

~其中， p由 $\mathrm{Nm}_{\widetilde{C}/C}$诱导，且存在一个同源 $f : A \to J_C$，使得 $\ker(f) \simeq P/P$且 $\mathrm{Nm}_{\widetilde{C}/C} = f \circ p$。考虑对偶同源 $f : J_C \to A$，以及(2.9)的对偶序列，

$$0 \to \hat{A} \to J_{\widetilde{C}} \to \hat{P} \to 0.$$

^ 那么，态射 $\pi^* : J_C \to J_{\widetilde{C}}$作为 $\mathrm{Nm}_{\widetilde{C}/C} = f \circ p$的对偶，可分解为先作用 f^，再经过嵌入 $A \to J_{\widetilde{C}}$。因此，我们有

$$\ker(\hat{f}) = \ker(\pi^*) = \langle \xi \rangle.$$

^ 但是，$\ker(f)$ 是 $\ker(f)$ 的 Cartier 对偶，因此我们得出

$$|\widetilde{P}/P| = |\ker(f)| = |\ker(\hat{f})| = 3.$$

~注意，$\mathrm{Nm}_{\widetilde{C}/C} \circ \tau_* = \mathrm{Nm}_{\widetilde{C}/C}$，因此 $(\tau_* - \mathrm{id})(J_{\widetilde{C}})$ 包含于 P，进而包含于 P。接下来只需证明态射 $(\tau_* - \mathrm{id}) : P \to P$是同源。只需证明其在切空间 T_0P 上诱导的映射非退化。我们有

$$T_0P \simeq \ker(H^1(\widetilde{C}, \mathcal{O}_{\widetilde{C}}) \xrightarrow{\mathrm{tr}} H^1(C, \mathcal{O}_C)).$$

分解 $\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}} = \mathcal{O}_C \oplus \xi \oplus \xi^{-1}$与 τ的作用相容：它对应于特征值 1、 ζ 和 ζ^{-1}，其中 ζ 是三次本原单位根。因此， τ 在 T_0P 上的特征值为 ζ 和 ζ^{-1}，这意味着 $\tau - \mathrm{id}$ 是非退化的。□

定理 2.15 的证明。只需构造一个秩 3 向量丛 V on C，使其满足引理 2.17 的假设。

步骤 1。一个三重覆盖和一个 3 阶特殊线丛。我们首先在 C 上选取一个 ξ 的 3 阶线丛 ~。令 $\pi : C \to C$ 为相应的循环覆盖（其中 C 的亏格为 4）。我们将使用引理 2.18 中的记号和结果。我们声称存在一个 3 阶线丛 η，使得 $\eta \notin \xi$，且 $\pi^*\eta \in P$。

~事实上，由于 $\mathrm{Nm}_{\widetilde{C}/C} \circ \pi^* = [3]_{J_C}$，我们得到了一个良定义的同态 $J_C[3]/\xi \to P$，其中 $J_C[3] := \ker([3]_{J_C})$。下面考虑由此诱导的有限群之间的同态。

$$J_C[3]/\langle \xi \rangle \to \widetilde{P}/P.$$

~由于 C的亏格为 2，因此我们有 $|J_C[3]/\xi| = 27$，而 $|P/P| = 3$。因此，核中存在一个非零元素 $\eta + \xi$，其中 $\eta \in J_C[3] \setminus \xi$。但这意味着 $\pi^*\eta \in P$，正如所要证明的那样。步骤 2. 选择一个点。我们声称，对于一个一般点 $p \in C$，有

$$H^*(\xi(p)) = H^*(\xi^{-1}(p)) = H^*(\eta(p)) = H^*(\eta \otimes \xi(p)) = H^*(\eta \otimes \xi^{-1}(p)).$$

事实上，对于任意非平凡的 0 次线丛 M，都有 $h^0(\omega_C \otimes M) = 1$，因此存在唯一的有效除子 D_M，使得 $\omega_C \otimes M \simeq \mathsf{O}_C(D_M)$。现在，我们只需选择一个不属于 D_ξ、 $D_{\xi^{-1}}$、 $D_{\eta\xi}$ 和 $D_{\eta\xi^{-1}}$ 的支集的 p。由此可知，线丛 $\pi^*\eta \in P$ 满足

$$H^0(\widetilde{C}, \pi^*\eta(\pi^{-1}(p))) = H^0(C, \eta(p) \oplus \eta\xi(p) \oplus \eta\xi^{-1}(p)) = 0. \tag{2.10}$$

步骤 3. 在 P 中选取一个线丛。我们断言，存在一个在 $\widetilde{C}$ 上次数为 1 的线丛 L，使得 $\mathrm{Nm}_{\widetilde{C}/C}(L) \simeq \mathsf{O}_C(p)$， $H^0(\widetilde{C}, L) = 0$，并且

$$H^*(\widetilde{C}, \tau_*L \otimes L^{-1}(\pi^{-1}(p))) = H^*(\widetilde{C}, \tau_*^{-1}L \otimes L^{-1}(\pi^{-1}(p))) = 0.$$

事实上，我们来寻找形如 $L = M(q)$ 的 L，其中 $p = \pi(q)$ 且 $M \in P$。我们声称，对于一般的 $M \in P$，我们的条件均得到满足。事实上，记与 $\pi^{-1}(p)$ 相关联的 θ 除子为 $\Theta_p \subset J_{\widetilde{C}}$。我们需要验证，对于一般的 $M \in P$，以下条件成立：

(1) $H^0(\widetilde{C}, M(q)) = 0$;
(2) $\phi^{\pm}(M) \notin \Theta_p$, where $\phi^{\pm} = t_{\tau^{\pm 1}(q)-q} \circ (\tau_*^{\pm 1} - \mathrm{id})$, where $t_{\tau^{\pm 1}(q)-q}$ is the translation by $\mathcal{O}(\tau^{\pm 1}(q) - q) \in P$.

对于 (1)，由 (2.10) 可知该条件对 $M = \pi^*\eta$ 成立，因为 $H^0(\pi^*\eta(q)) \subset H^0(\pi^*\eta(\pi^{-1}(p)))$。对于 (2)，我们注意到映射 $\phi^{\pm} : P \to P$ 是满射，因此只需证明存在 $M' \in P$ 使得 $M' \notin \Theta_p$。由 (2.10)，我们可以取 $M' = \pi^*\eta$。

步骤 4. 检验向量丛的性质。现在令 $V = \pi_*(L)$。我们有 $\det(V) \simeq \mathrm{Nm}_{\widetilde{C}/C}(L) \simeq \mathsf{O}_C(p)$，因此

$$H^0(\det(V)^{-1}) = H^0(\mathcal{O}_C(-p)) = 0,$$

而 $H^1(\det(V)) = H^1(\mathsf{O}_C(p)) \neq 0$。我们还有

$$H^0(C, V) \simeq H^0(\widetilde{C}, L) = 0,$$

$$H^0(C, \omega_C \otimes V) \simeq H^0(\widetilde{C}, \pi^*\omega_C \otimes L) \simeq H^0(\widetilde{C}, \omega_{\widetilde{C}} \otimes L) \neq 0,$$

因为 $\deg(L) = 1$。最后，由于 π 是非分歧的，我们有一个同构 $V^\vee \simeq \pi_*(L^{-1})$，因此

$$V^\vee \otimes V \simeq \pi_*(\pi^*\pi_*(L) \otimes L^{-1}).$$

此外， $\pi^*\pi_*(L) \simeq L \oplus \tau^*L \oplus (\tau^{-1})^*L$。因此，

$$V^\vee \otimes V \simeq \pi_*\mathcal{O} \oplus \pi_*(\tau^*L \otimes L^{-1}) \oplus \pi_*((\tau^{-1})^*L \otimes L^{-1}).$$

我们需要验证

$$h^1(V^\vee \otimes V \otimes \det(V)) = h^1(V^\vee \otimes V(p)) = 1.$$

由于 $\pi_*\mathsf{O} \otimes \mathsf{O}_C(p) = \mathsf{O}_C(p) \oplus \xi(p) \oplus \xi^{-1}(p)$，这由消失性可知。

$$H^1(C, \pi_*((\tau^{\pm 1})^*L \otimes L^{-1})(p)) = H^1(\widetilde{C}, (\tau^{\pm 1})^*L \otimes L^{-1}(\pi^{-1}(p))) = 0.$$

□

注 2.19。值得注意的是，定理 2.15 的构造在特征 2 下失效（因为引理 2.16 需要特征 $\neq 2$）。事实上，根据命题 2.3，在特征 2 下我们有 $E_2^{01}(X)_- = 0$。

References

[1] C. Birkenhake, H. Lange, *Complex abelian varieties*, 第二版, Springer-Verlag, 柏林, 2004 年。[2] U. Bruzzo, D. Hern´ andez Ruiperez, A. Polishchuk, , 《Advances in Mathematics》 ( ) , 第 号, 页。[3] S. L. Cacciatori, S. Noja, R. Re, *The universal de Rham/Spencer double complex on a supermanifold*, 《Documenta Mathematica》27（2022）, 489–518。[4] P. Deligne, L. Illusie, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, 《Inventiones Mathematicae》89（1987）, 第 2 期, 247–270。[5] G. Felder, D. Kazhdan, A. Polishchuk, *Regularity of the superstring supermeasure and the superperiod map*, 《Selecta Mathematica》（新系列）28（2022）, 第 1 期, 第 17 号, 64 页。[6] A. Grothendieck, *Crystals and the de Rham cohomology of schemes* *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, 载于 , –358, North-Holland, 阿姆斯特丹, 。[7] N. Katz, *The regularity theorem in algebraic geometry*, 1970 年国际数学家大会会议录, 437–443。[8] Yu. I. Manin, *Gauge field theory and complex geometry*, Springer-Verlag, 柏林, 1988 年。[9] I. Penkov, *D-modules on supermanifolds*, 《Inventiones Mathematicae》71（1983）, 第 3 期, 501–512。

Department of Mathematics, University of Oregon, Eugene, OR 97403, USA; and National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia*Email address*: apolish@uoregon.edu