arXiv:2305.01862v1 [math.FA] 3 May 2023

# 新矩序列的构造方法

Seunghwan Baek[a]、Hayoung Choi[a]、Seonguk Yoo[b,*]

[a]*Department of Mathematics, Kyungpook National University, Daegu 41566, Republic ofKorea*[b]*Department of Mathematics Education and RINS, Gyeongsang National University, Jinju*52828, *Republic of Korea*

摘要

本文给出了一种从给定矩序列构造新矩序列的方法。通过应用基于多元正多项式的算子，可以得到新的矩序列。一类新的序列分别对应于唯一的对称多项式；如果该多项式为正多项式，则新序列再次成为矩序列。例如，我们将看到，由斯蒂尔切斯矩序列的汉克尔矩阵的子式生成的新序列也是斯蒂尔切斯矩序列。

关键词：矩序列、表示测度、半正定、全正矩阵、对称正多项式。2020年数学学科分类：主要分类 47A57、44A60；次要分类 15B48、15A29、15-04

## 1. 引言

令 $\mathbb{N}_0$ 为非负整数集，令 $\mathbb{R}$ 为实数集。若非负博雷尔测度 $\mu$ 在 $\mathbb{R}$ 上的支集（记为 supp($\mu$)）包含于某个闭集 $K \subset \mathbb{R}$ 中，则称其为 $K$-测度。符号 $\mathbb{R}[x]$ 表示 $x$ 上实系数多项式构成的环。积分 $\int_K x^n d\mu$（若存在）称为测度 $\mu$ 的第 $n$ 阶矩。若序列 $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足

$$\alpha_n = \int_K x^n d\mu \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.1}$$

这样的 $\mu$ 称为 $K$-表示测度，而 $\alpha$ 称为 $K$-矩序列。当 $K = \mathbb{R}$ （分别地，$K = [0,\infty)$， $K = [0,1]$）时，序列 $\alpha$ 也称为 Hamburger（分别为 Stieltjes、Hausdorff）矩序列。如果一个矩序列存在唯一的

*通讯作者*Email addresses:* seunghwan@knu.ac.kr （Seunghwan Baek），hayoung.choi@knu.ac.kr（Hayoung Choi）， seyoo@gnu.ac.kr （Seonguk Yoo）

测度使得（1.1）成立，则称其为确定的；否则称其为不确定的。更多信息请参见 [6] 及其中的参考文献。

给定序列 $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$，记

$$H_m(\alpha) := \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m & \alpha_{m+1} & \cdots & \alpha_{2m} \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

对于实数序列 $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$，令 $E\alpha \equiv E(\alpha)$ 表示其移位序列；也就是说，

$$E\alpha = (\alpha_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

矩序列的一个充要条件如下。

定理 1.1. 设 $\alpha$ 为实数序列。则有以下结论：

(i) $\alpha$ 是 Hamburger 矩序列，当且仅当对所有 $m \in \mathbb{N}_0$，$H_m(\alpha)$ 都是半正定的。(ii) $\alpha$ 是斯蒂尔切斯矩序列，当且仅当对所有 $m \in \mathbb{N}_0$，$H_m(\alpha)$ 和 $H_m(E\alpha)$ 都是半正定的；等价地，对所有 $m \in \mathbb{N}_0$，$H_m(\alpha)$ 都是全正的。

然而，一般而言，要检验给定序列是否为 Hamburger（或斯蒂尔切斯）矩序列并不容易；对于所有非负整数 $m$，证明汉克尔矩阵 $H_m(\alpha)$ 的 Positivity 通常非常困难。有时，通过简单观察，可以确认由给定矩序列生成的一些新序列也成为矩序列。例如，如果 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是 Hamburger（分别地，斯蒂尔切斯）矩序列，那么对于 $\theta \geq 0$，$(\alpha_n+\theta\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(\alpha_n\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 也都是 Hamburger（分别地，斯蒂尔切斯）矩序列。此外，如果 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是斯蒂尔切斯矩序列，那么 $(\alpha_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(\alpha_{n+2})_{n\in\mathbb{N}_0}$ 也都是；特别地，$(\alpha_n\alpha_{n+2}+\alpha_{n+1}^2)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是斯蒂尔切斯矩序列。另一方面，要检验 $(\alpha_n\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1}^2)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是否为斯蒂尔切斯矩序列则相当不平凡。

基于给定的矩序列，通过线性变换和卷积构造新的矩序列的方法已在 [1, 7] 中得到研究。此外，Zhu 给出了以下一个有趣的结果：

定理 1.2（[9]）。对于固定的 $r$、$s \in \mathbb{N}$，如果 $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是斯蒂尔切斯矩序列，那么它也是斯蒂尔切斯矩序列。

$$\left(\det\begin{bmatrix} \alpha_n & \alpha_{n+r} \\ \alpha_{n+s} & \alpha_{n+r+s} \end{bmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\alpha_n\alpha_{n+r+s} - \alpha_{n+r}\alpha_{n+s})_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

这一结果表明，$H_m(\alpha)$ 的任意 $2\times 2$ 子矩阵的行列式都可以视为一个生成新斯蒂尔切斯矩序列的算子。接下来我们将看到，该算子对应于一个对称正多项式。然后，我们更一般地证明，$H_m$ 的任意子式都可以成为一个新的

斯蒂尔切斯矩序列，只需检验与该子式对应的对称多项式的正性。我们还将提供若干生成新斯蒂尔切斯矩序列（或豪斯多夫矩序列）的算子。

本文由四节组成。在第 2 节中，我们给出一种方法，利用多项式从给定的矩序列构造新序列，并证明若该多项式为正，则所诱导的序列也是矩序列。在第 3 节中，我们讨论生成新序列的对称多项式及其性质。此外，我们给出了定理 1.2 的推广。在第 4 节中，我们还针对豪斯多夫矩序列得到了类似结果。

## 2. 新序列与正多项式

本节将使用具有 $K$-测度的多重序列，针对 $K \subset \mathbb{R}^d$ 以及正多元多项式，从给定的矩序列生成新的矩序列。我们先为$K \subset \mathbb{R}^d$介绍一个 $K$-矩问题。

令 $\beta \equiv (\beta_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}_0^d}$ 表示一个 $d$维实多重序列，并令 $K$ 表示 $\mathbb{R}^d$的一个闭子集。完整的 $K$-矩问题旨在寻求关于 $\beta$ 的条件，使得存在一个正 Borel 测度 $\mu$，满足 $\operatorname{supp}(\mu) \subset K$，并且

$$\beta_{\boldsymbol{i}} = \int_K \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}} d\mu \quad \text{for all } \boldsymbol{i} \in \mathbb{N}_0^d,$$

其中 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}} := x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}$ 对于 $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ 和 $\boldsymbol{i} \equiv (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbb{N}_0^d$。

设 $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}] = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$，并设 $p \equiv p(\boldsymbol{x}) = \sum p_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}} \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$。对应于 $\beta$，黎斯泛函 $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_\beta \colon \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{L}\left(\sum p_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}}\right) := \sum p_{\boldsymbol{i}} \beta_{\boldsymbol{i}}$$

我们称 $\mathcal{L}$ 是 $K$-正的，如果

$$\mathcal{L}_\beta(p) \geq 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] : p|_K \geq 0.$$

当 $K = \mathbb{R}^d$ 时，我们简称 $\mathcal{L}$ 为正的，而不称其为 $K$-正的。$\mathcal{L}_\beta$ 的 $K$-正性是 $\beta$ 存在 $K$-测度的必要条件。反之，黎斯-哈维兰德定理为 $K$-表示测度提供了一个基本的存在性判据。

定理 2.1（黎斯-哈维兰德定理）。一个 $d$ 维实多重序列 $\beta$ 存在一个支集位于闭集 $K \subset \mathbb{R}^d$ 中的表示测度，当且仅当 $\mathcal{L}_\beta$ 是 $K$-正的。

利用黎斯-哈维兰德定理，我们可以证明，由斯蒂尔切斯矩序列中的项生成的一些新序列也是斯蒂尔切斯矩序列。我们用 $\mathcal{A}$ 表示所有实数序列的集合。

定义 2.2。对于给定的多项式 $p=\sum p_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}}\in\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$，我们定义 $T_p:\ \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 定义为

$$T_p(\alpha)=\tilde{\alpha}=(\tilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\quad \text{for all } \alpha\in\mathcal{A}, \tag{2.1}$$

其中

$$\tilde{\alpha}_n=\sum p_{\boldsymbol{i}}\alpha_{n+i_1}\alpha_{n+i_2}\cdots\alpha_{n+i_d}\ \text{ for all }\ n\in\mathbb{N}_0.$$

例如，当 $p=\sum p_i x^i$ 是一元多项式时，$\tilde{\alpha}_n$ 定义为

$$\tilde{\alpha}_n=\sum p_i\alpha_{n+i}.$$

定义 2.3. 设 $K$ 是 $\mathbb{R}$ 和 $p\in\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ 的闭子集。如果对于任意 $K$-矩序列 $\alpha$，$T_p(\alpha)$ 都是 $K$-矩序列，则称 $T_p$ 具有 $K$-矩性质。当 $K=[0,\infty)$（分别为 $\mathbb{R}$、$[0,1]$）时，我们简称 $T_p$ 具有斯蒂尔切斯（分别为汉堡、豪斯多夫）矩性质。

下面是主要结果之一。

定理 2.4（$d=1$）。设 $p\in\mathbb{R}[x]$ 是一元多项式。那么，$T_p$ 具有斯蒂尔切斯矩性质，当且仅当

$$p|_{[0,\infty)}\geq 0.$$

证明。（⇐）设 $\alpha=(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列。假设 $p=\sum p_i x^i$ 在 $[0,\infty)$ 上非负，并且 $\tilde{\alpha}=T_p(\alpha)$ 如（2.1）中所定义。根据定理 2.1，只需证明

$$\mathcal{L}_{\tilde{\alpha}}(q)\geq 0\quad \forall q\in\mathbb{R}[x]:q|_{[0,\infty)}\geq 0.$$

设 $q=\sum q_i x^i\in\mathbb{R}[x]$ 在 $[0,\infty)$ 上非负。因此可得

$$\mathcal{L}_{\tilde{\alpha}}(q(x))=\sum_i q_i\tilde{\alpha}_i=\sum_i\sum_j p_j q_i\alpha_{i+j}=\mathcal{L}_\alpha(p(x)q(x))\geq 0.$$

最后一个不等式成立，因为 $p$ 和 $q$ 在 $[0,\infty)$ 上均非负。
(⇒) 假设 $T_p$ 具有斯蒂尔切斯矩性质，且存在 $\xi\in(0,\infty)$，使得 $p(\xi)<0$。令 $d\mu=\delta_\xi$ 为狄拉克测度。设 $\alpha=(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 定义如下：

$$\alpha_n=\int_0^\infty x^n d\mu.$$

那么 $\alpha$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列。注意，如果 $p=\sum p_i x^i$，那么

$$\tilde{\alpha}_0=\sum p_i\alpha_i=\sum p_i\xi^i=p(\xi)<0.$$

然而，由于 $\tilde{\alpha}=T_p(\alpha)$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列，因此可得 $\tilde{\alpha}_0\geq 0$。这就产生了矛盾。□

例 2.5。假设 $\alpha=(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列。

(i) 对于固定的 $k \in \mathbb{N}$，考虑由下式定义的新序列 $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$\tilde{\alpha}_n = c_0\alpha_{n+k} + c_1\alpha_{n+k+1} + c_2\alpha_{n+k+2} \quad \text{for} \quad c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

实际上，通过检验 $\tilde{\alpha}$ 的 Hankel 行列式的 Positivity，很难证明 $\tilde{\alpha}$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列（有时，对于像卡特兰数 $\alpha_n$ 这样的情形，我们可以求出 $\tilde{\alpha}_n$ ([3]) 的精确 Hankel 行列式，但这种情形很少见）。然而，利用定理 2.4，我们可以得到一个简单的等价条件。事实上，$T_p(\alpha) = \tilde{\alpha}$，其中 $p(x) = x^k(c_0 + c_1x + c_2x^2)$。如果想知道 $\tilde{\alpha}$ 是斯蒂尔切斯矩序列的充要条件，只需验证 $c_0 + c_1x + c_2x^2 \geq 0$ 在 $[0, \infty$ 上为二次多项式即可；很容易得到这一条件。

（ii）我们知道，当且仅当 $p(x) \geq 0$ 在 $[0, \infty$ 上时，$T_p(\alpha)$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列；根据推论 3.25]，这等价于 $p(x) = [f(x)]^2 + x[g(x)]^2$，其中某个 $f(x) = \sum f_i x^i$ 且 $g(x) = \sum g_j x^j \in \mathbb{R}[x]$。即，$\tilde{\alpha} \equiv (\tilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列，其中

$$\tilde{\alpha}_n = \sum_{i,k} f_i f_k a_{n+i+k} + \sum_{j,\ell} g_j g_\ell a_{n+j+\ell+1}.$$

现在我们推广定理 2.4。

定理 2.6（$d \geq 2$）。设 $p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$，其中 $d \geq 2$。那么，$T_p$ 具有斯蒂尔切斯矩性质，当且仅当

$$p|_{[0,\infty)^d} \geq 0.$$

证明。设 $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列。那么，存在一个正 Borel 测度 $\mu$，使得 $\text{supp}(\mu) \subset [0, \infty)$，满足

$$\alpha_n = \int_0^\infty x^n d\mu(x) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}_0.$$

假设 $p = \sum p_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}}$ 在 $[0, \infty)^d$ 上非负，并且 $\tilde{\alpha} = T_p(\alpha)$ 定义为

在 (2.1) 中。由此可得，对每个 $m \in \mathbb{N}_0$，二次型

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\tilde{\alpha}_{j+k}\xi_j\xi_k &= \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\sum_{\boldsymbol{i}} p_{\boldsymbol{i}}\alpha_{j+k+i_1}\cdots\alpha_{j+k+i_d}\xi_j\xi_k \\ &= \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\sum_{\boldsymbol{i}} p_{\boldsymbol{i}}\left(\prod_{\ell=1}^{d}\int_0^\infty x_\ell^{j+k+i_\ell}d\mu(x_\ell)\right)\xi_j\xi_k \\ &= \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}(x_1\cdots x_d)^{j+k}\sum_{\boldsymbol{i}} p_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}}\xi_j\xi_k d\mu\cdots d\mu \\ &= \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}(x_1\cdots x_d)^{j+k}\xi_j\xi_k p(\boldsymbol{x})d\mu\cdots d\mu \\ &= \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^{m}(x_1\cdots x_d)^j\xi_j\right)^2 p(\boldsymbol{x})d\mu\cdots d\mu\end{aligned}$$

对所有 $\xi_0$、.....、$\xi_m \in \mathbb{C}$，均为非负。类似地，可以验证

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\tilde{\alpha}_{j+k+1}\xi_j\xi_k \\ &\quad= \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^{m}(x_1\cdots x_d)^j\xi_j\right)^2 (x_1\cdots x_d)p(\boldsymbol{x})d\mu\cdots d\mu\end{aligned}$$

对每个 $m \in \mathbb{N}_0$ 均为非负。因此，$\tilde{\alpha}$ 也是一个斯蒂尔切斯矩序列。 □

定理 2.6 的证明还推出以下结论。

推论 2.7. 若 $p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上非负，则 $T_p$ 具有汉堡矩性质。

下面的例子说明定理 2.6 如何发挥作用。

例 2.8. 假设 $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列。

(i) 对于固定的 $r, s \in \mathbb{N}$，多项式 $p(x, y) = \frac{1}{2}(x^r - y^r)(x^s - y^s)$ 在 $[0,\infty)^2$ 上非负，且容易验证的是

$$T_p(\alpha) = \left(\det\begin{bmatrix}\alpha_n & \alpha_{n+r}\\ \alpha_{n+s} & \alpha_{n+r+s}\end{bmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}. \tag{2.2}$$

由定理 2.6 可知，$T_p$ 具有斯蒂尔切斯矩性质；至此，对定理 1.2 的一个非常简单的验证便完成了。

(ii) 显然，多项式 $p(x, y, z) = \frac{1}{6}(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$ 在 $[0,\infty)^3$ 上非负，计算表明 $p$ 对应于新的序列

$$T_p(\alpha) = \left(\det\begin{bmatrix}\alpha_n & \alpha_{n+1} & \alpha_{n+2}\\ \alpha_{n+1} & \alpha_{n+2} & \alpha_{n+3}\\ \alpha_{n+2} & \alpha_{n+3} & \alpha_{n+4}\end{bmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}. \tag{2.3}$$

应用定理 2.6，我们知道 $T_p(\alpha)$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列。(iii) 通过相同的讨论可以看出，与以下情形对应的所有新序列都是斯蒂尔切斯矩序列：

$$
\begin{aligned}
T_{p_1}(\alpha) &= \left(\alpha_{n+2}\alpha_{n+4} - \alpha_{n+2}^2 + \alpha_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \\
T_{p_2}(\alpha) &= \left(\frac{(-1)^r}{2}\binom{2r}{r}\alpha_{n+r}^2 + \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\binom{2r}{k}\alpha_{n+k}\alpha_{n+2r-k}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \\
T_{p_3}(\alpha) &= \left(\alpha_n^2\alpha_{n+3} - \alpha_{n+1}^3\right)_{n\in\mathbb{N}_0},
\end{aligned}
$$

其中 $p_1(x,y) = \frac{1}{2}(x^4y^2 + x^2y^4 - 2x^2y^2 + 2)$，$p_2(x,y) = \frac{1}{2}(x-y)^{2r}$，且 $p_3(x,y,z) = \frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3-3xyz)$。

需要注意的是，要证明例 2.8 中的序列是汉堡（或斯蒂尔切斯）矩序列，极具挑战性；证明汉克尔矩阵 $H_m(\alpha)$ 对所有非负整数 $m$ 都是半正定的，并非易事。

请注意，到目前为止，前面讨论的大多数多项式都是齐次的，但情况并非总是如此，例如例 2.8 (i) 中的 $p_1$。稍后我们将定义定义 2.2 中某种逆算子；届时将考察一类新的序列，其成员应当对应于唯一的齐次多项式。

接下来，我们简要讨论由二次型生成的一种新矩序列。回顾一下，若一个 $d\times d$ 对称实矩阵 $A$ 满足对所有向量 $\boldsymbol{x}\in[0,\infty)^d$ 都有 $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}\geq 0$（分别满足 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$），则称其为共正（分别为半正定）的。显然，若 $A$ 是共正（分别为半正定）的，则 $p(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ 在 $[0,\infty)^d$（分别在 $\mathbb{R}^d$）上非负。因此，由定理 2.6 和推论 2.7 可得如下结论。

推论 2.9。设 $A=[a_{ij}]_{i,\ j=1}^d$ 是一个 $d\times d$ 对称余正（分别为半正定）矩阵，且 $\tilde{\alpha}=(\tilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是如下定义的序列

$$\tilde{\alpha}_n = \sum_{i=1}^d a_{ii}\alpha_{n+2}\alpha_n^{d-1} + \sum_{i\neq j}a_{ij}\alpha_{n+1}^2\alpha_n^{d-2}.$$

如果 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是一个 Stieltjes（分别为 Hamburger）矩序列，那么 $(\tilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$也如此。

例 2.10。可以证明 $A=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}$ 是一个余正（分别为半正定）矩阵。

于是由推论 2.9 可知，如果 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是一个 Stieltjes（分别为 Hamburger）矩序列，那么

$$\left(\det\begin{bmatrix}\alpha_n & \alpha_{n+1}\\ \alpha_{n+1} & \alpha_{n+2}\end{bmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}. \tag{2.4}$$

Wang 和 Zhu（[7]）基于式（1.2）中汉克尔矩阵的复合矩阵的正性，证明了对于任意斯蒂尔切斯矩序列（$\alpha_n$）$_{n\in\mathbb{N}_0}$，式（2.4）都是斯蒂尔切斯矩序列。

我们以统一的方法简要证明了它是斯蒂尔切斯矩序列。此外，式（2.2）和（2.3）可视为式（2.4）的推广。现在我们证明一个更一般的情形：由汉克尔矩阵 $H_m(\alpha)$ 的任意子式生成的所有新序列都具有斯蒂尔切斯矩性质。

定理 2.11。设 $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_{d-1}$ 和 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{d-1}$ 按给定顺序为自然数。若 $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列，则下列序列也是斯蒂尔切斯矩序列：

$$\left(\det\begin{bmatrix} \alpha_n & \alpha_{n+r_1} & \cdots & \alpha_{n+r_{d-1}} \\ \alpha_{n+t_1} & \alpha_{n+r_1+t_1} & \cdots & \alpha_{n+r_{d-1}+t_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n+t_{d-1}} & \alpha_{n+r_1+t_{d-1}} & \cdots & \alpha_{n+r_{d-1}+t_{d-1}} \end{bmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}. \tag{2.5}$$

为证明该定理，我们需要了解对称正多项式的一些性质。证明将在下一节给出。

## 3. 对称正多项式

在上一节中，我们可以看到，对于给定的斯蒂尔切斯矩序列和一个正多项式，其关联序列也是一个斯蒂尔切斯矩序列。从相反的角度来看，自然会提出以下问题：

*for any given $\beta \in \mathcal{A}$, are there $p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ and $\alpha \in \mathcal{A}$ such that $T_p(\alpha) = \beta$?*

若答案为肯定，则当 $\alpha$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列且 $p$ 在 $[0,\infty)^d$ 上为非负时，我们可以知道 $\beta$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列。事实上，我们并不知道 $\alpha$ 和 $p$ 是否存在，但一旦它们存在，就可以有无穷多个这样的多项式（不一定是对称的或正的）。例如，设 $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是一个实数序列，其中对于某个斯蒂尔切斯矩序列 $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$，有 $\beta_n = \alpha_n\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}^2$ $(n \in \mathbb{N}_0)$。那么 $T_p(\alpha) = \beta$，其中

$$p_\theta(x,y) = \frac{1-\theta}{2}x^2 - xy + \frac{1+\theta}{2}y^2 \quad \text{for all} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

也就是说，我们可以看到，有无穷多个多项式与这个新序列相对应。但是，对于 $\theta \neq 0$， $p_\theta$ 在 $[0,\infty)^2$, 上并非非负，因此定理 2.6 不适用于这种情况。然而，由于 $p_0(x,y)$ 在$[0,\infty)^2$上非负， $T_{p_\theta}(\alpha)$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列。我们还注意到， $p_0(x,y) = \frac{1}{2}(x-y)^2$ 是对称的（见下文的定义）。因此，若要判断给定序列 $\beta$ 是否为矩序列，我们需要找到一个对应的正多项式，尤其是一个对称正多项式。本节将研究对称正多项式，并利用对称正多项式的性质证明定理 2.11。

用 $\mathcal{S}$ 表示 $\{1,\ldots,d\}$ 上所有置换构成的集合。若多变量多项式 $p(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ 满足

$$p(x_1,\ldots,x_d) = p(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(d)}) \text{ for all } \pi \in \mathcal{S}.$$

对于任意给定的实数序列 $\beta$，若已知存在 $\alpha$ 和 $p$，使得$T_p(\alpha) = \beta$，我们有以下问题：

(i) 能否找到这样的 $p$ 和 $\alpha$? (ii) 是否存在对称多项式 $q$，使得 $T_p(\alpha) = \beta = T_q(\alpha)$? (iii) 若存在，这样的对称多项式是否唯一？(iv) 若存在，如何求得这样的对称多项式?

对于问题(i)，一般而言，很难说明如何求得这样的 $p$ 和$\alpha$。对于问题(ii)和(iii)，答案是肯定的。我们将在下文回答问题(iv)。

定义3.1. 给定多项式 $p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$，定义多项式 $\overline{p} \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$如下：

$$\overline{p}(x_1,\ldots,x_d) = \frac{1}{d!}\sum_{\pi\in\mathcal{S}} p(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(d)}).$$

那么 $\overline{p}$具有一些性质，这些性质很容易证明，因此省略其证明。

命题3.2. 设 $p$、$q \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ 和 $K$ 是实数集 $\mathbb{R}$的一个闭子集。那么在 $K^d$上有以下结论：

(i) $\overline{p}$ 是对称的。(ii) $\overline{p+q} = \overline{p} + \overline{q}$。(iii) $\overline{cp} = c\overline{p}$，其中 $c$ 是常数。(iv) $\overline{p+c} = \overline{p} + c$，其中 $c$ 是常数。(v) 若 $p$ 是对称的，则 $p = \overline{p}$。(vi) 若 $p$ 是非负的，则 $\overline{p}$也如此。(vii) 对任意序列 $\alpha \in \mathcal{A}$，$T_p(\alpha) = T_{\overline{p}}(\alpha)$。(viii) 若 $T_p(\alpha) = T_q(\alpha)$，则对任意序列 $\alpha \in \mathcal{A}$，$\overline{p} = \overline{q}$。

对于给定的实数序列 $\beta$，我们假设存在一个序列 $\alpha$ 和一个多项式 $p$，使得 $T_p(\alpha) = \beta$。那么由命题3.2可知，尽管 $\beta$ 可以有无穷多个这样的多项式，但这样的对称多项式必定唯一。因此，即使许多多项式都不是非负的，对称多项式 $\overline{p}$ 仍可能是非负的。例如，考虑一个多项式 $p(x,y) = 3x^2 - y^2$，它在 $\mathbb{R}^2$ 上不是非负的，但其对应的对称多项式 $\overline{p}(x,y) = x^2 + y^2$ 在 $\mathbb{R}^2$上是非负的。本节开头还出现了另一个例子；对于所有 $\theta \in \mathbb{R}$，$\overline{p_\theta} = p_0$。

现在我们有了一个判据；通过检验对称多项式的正性，我们可以判断一个关联序列是否为斯蒂尔切斯矩序列。

顺便说一句，如果相应的多项式不是非负的，则无法据此得出结论，也就是说，$T_p$ 仍有可能具有斯蒂尔切斯矩性质。令 $\alpha_n = 2^n$ ，并对 $t \in \mathbb{R}$考察 $\tilde{\alpha}_n = \alpha_n\alpha_{n+2} - t\alpha_n\alpha_{n+1} = 2^{2n+1}(2-t)$。若 $0 < t < 2$，则 $\tilde{\alpha}_n$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列。接下来，我们找到一个对称多项式$\overline{p} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - tx - ty)$，并观察到该多项式在 $t > 0$时于$[0,\infty)^2$ 上不为正。

推论3.3. 设 $p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$。若 $\overline{p}$ 在 $[0,\infty)^d$ 上非负，则 $T_p$ 具有斯蒂尔切斯矩性质。

这里，我们利用对称正多项式的性质，证明定理 2.11；该定理是定理 1.2 的推广结果。

定理 2.11 的证明。设 $\tilde{\alpha}$ 是 (2.5) 中的一个序列，并令

$$p(x_1,\dots,x_d) := \det\begin{bmatrix} 1 & x_1^{r_1} & \cdots & x_1^{r_{d-1}} \\ x_2^{t_1} & x_2^{r_1+t_1} & \cdots & x_2^{r_{d-1}+t_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_d^{t_{d-1}} & x_d^{r_1+t_{d-1}} & \cdots & x_d^{r_{d-1}+t_{n-1}} \end{bmatrix}.$$

于是有 $T_p(\alpha) = \tilde{\alpha}$。对于任意有限序列 $\beta = (b_n)_{n=1}^{d-1}$，记广义范德蒙德行列式为

$$D_\beta(x_1,\dots,x_d) := \det\begin{bmatrix} 1 & x_1^{b_1} & \cdots & x_1^{b_{d-1}} \\ 1 & x_2^{b_1} & \cdots & x_2^{b_{d-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_d^{b_1} & \cdots & x_d^{b_{d-1}} \end{bmatrix}.$$

于是有

$$p(x_1,\dots,x_d) = \prod_{i=1}^{d} x_i^{t_{i-1}} D_\rho(x_1,\dots,x_d),$$

其中 $t_0 = 0$ 和 $\rho := (r_n)_{n=1}^{d-1}$，由此可得

$$\begin{aligned} \overline{p}(x_1,\dots,x_d) &= \frac{1}{d!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}}\prod_{i=1}^{d} x_{\sigma(i)}^{t_{i-1}} D_\rho(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(d)}) \\ &= \frac{1}{d!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}}\prod_{i=1}^{d} x_{\sigma(i)}^{t_{i-1}} \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot D_\rho(x_1,\dots,x_d) \\ &= \frac{1}{d!} D_\rho(x_1,\dots,x_d)\cdot \det\left[x_j^{t_{i-1}}\right]_{i,j=1}^{d} \\ &= \frac{1}{d!} D_\rho(x_1,\dots,x_d)\cdot D_\tau(x_1,\dots,x_d), \end{aligned}$$

其中 $\tau := (t_n)_{n=1}^{d-1}$。如果对于某个 $i \neq j$， $x_i = x_j$；或者对于某个 $k$，$x_k = 0$，那么$\overline{p}(x_1,\dots,x_d) = 0$。设 $x_1,\dots,x_d$为任意互不相同的正实数。

那么存在一个排列 $\pi \in \mathcal{S}$，使得对于 $i = 1, \ldots, d-1$， $x_{\pi(i)} < x_{\pi(i+1)}$。根据一些行列式性质，我们有

$$D_\rho(x_1, \ldots, x_d) \cdot D_\tau(x_1, \ldots, x_d) = D_\rho(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(d)}) \cdot D_\tau(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(d)}).$$

由 [8, 定理 1]可知， $D_\rho(x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(d)})$和 $D_\tau(x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(d)})$均为正。因此， $\overline{p}$ 在 $[0, \infty)^d$上非负。根据推论3.3， $T_p$ 具有斯蒂尔切斯矩性质。也就是说， $\tilde{\alpha}$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列。 □

一个新的矩序列 $\tilde{\alpha}$ 必须对应唯一的对称多项式；如果该多项式非负，那么 $\tilde{\alpha}$ 就具有斯蒂尔切斯矩性质和汉堡矩性质。我们需要一个能够判定哪些对称多项式为正的准则。也就是说，需要确认对称多项式的最小值非负。第一种方法是求解一阶导数构成的对称多项式方程组，以找出给定对称多项式的临界点。第二种方法是直接检验对称多项式是否属于正多项式锥。值得注意的是，有相当多的多项式通常为正，却不能表示为平方和。无论如何，实际运用这两种方法都很困难，因此需要熟悉代数几何的重要背景知识（见 [2, 5]）。相反，我们想介绍一个较为直观的结果，即所谓的半阶原理。对于 $k \in \mathbb{N}$，令 $A_k$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中至多有 $k$ 个不同分量的所有点构成的集合，也就是说，

$$A_k := \left\{ \boldsymbol{x} \equiv (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |\{x_1, \ldots, x_d\}| \leq k \right\}.$$

命题3.4（[2], 半次数原理）。设 $p$ 是一个关于 $d$ 个变量的 $2m$ 次对称齐次多项式，并令 $k := \max\{2, m\}$。那么，当且仅当对所有 $y \in A_k$，$f$ 均为非负的，且 $p(y) \geq 0$

顺便说一下，我们想进一步讨论对称多项式 $\overline{p}$的优化。

定理3.5。设 $p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ 和 $K$ 是 $\mathbb{R}$的闭子集。如果 $p$ 在 $K^d$上有最小值，那么 $\min_{\boldsymbol{x} \in K^d} p \leq \min_{\boldsymbol{x} \in K^d} \overline{p}$。

证明。由于 $p$ 有最小值，存在 $\boldsymbol{x}^* \in K^d$ 使得 $\boldsymbol{x}^* = \arg\min_{\boldsymbol{x} \in K^d} p(\boldsymbol{x})$。

根据命题3.2， $\overline{p} - p(\boldsymbol{x}^*) = p - p(\boldsymbol{x}^*) \geq 0$，于是对所有$\boldsymbol{x} \in K^d$， $\overline{p}(\boldsymbol{x}) \geq p(\boldsymbol{x}^*)$。 □

定理3.6. 设 $p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ 和 $K$ 是 $\mathbb{R}$的闭子集。如果 $p$ 在 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_1, \ldots, a_1) \in K^d$ 处取得最小值，那么 $\min_{\boldsymbol{x} \in K^d} p = \min_{\boldsymbol{x} \in K^d} \overline{p}$，且 $\overline{p}$在 $\boldsymbol{a}$处取得最小值。

证明。只需证明 $\min_{\boldsymbol{x} \in K^d} p \geq \min_{\boldsymbol{x} \in K^d} \overline{p}$，然后

$$\min_{\boldsymbol{x} \in K^d} \overline{p} \leq \overline{p}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{d!} \sum p(a_1, a_1, \ldots, a_1) = p(\boldsymbol{a}) = \min_{\boldsymbol{x} \in K^d} p.$$ □

定理 3.7。设 $p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ 和 $K$ 是 $\mathbb{R}$的闭子集。若 $\min_{\boldsymbol{x}\in K^d} p = \min_{\boldsymbol{x}\in K^d} \overline{p}$，则 $p$ 和 $\overline{p}$ 在相同的点处取得最小值。此外，若它们在 $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_d)$ 处取得最小值，则 $p$和 $\overline{p}$在 $\{(c_{\pi(1)}, \ldots, c_{\pi(d)}) : \pi \in \mathcal{S}\}$中的所有点处都取得最小值。

证明。设 $\overline{p}$在 $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_d)$ 处取得最小值，则

$$\min_{\boldsymbol{x}\in K^d} \overline{p} = \overline{p}(\boldsymbol{c}) = \frac{1}{d!} \sum_{\pi\in\mathcal{S}} p(c_{\pi(1)}, \ldots, c_{\pi(d)}) \geq \min_{\boldsymbol{x}\in K^d} p.$$

由于 $\min_{\boldsymbol{x}\in K^d} p = \min_{\boldsymbol{x}\in K^d} \overline{p}$，可知

$$p(c_{\pi(1)}, \ldots, c_{\pi(d)}) = \min_{\boldsymbol{x}\in K^d} p, \quad \text{for all } \pi \in \mathcal{S};$$

因此，对于所有 $\pi \in \mathcal{S}$， $p$和 $\overline{p}$都在 $(c_{\pi(1)}, \ldots, c_{\pi(d)})$ 处取得最小值。 □

## 4. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$-矩序列

回顾一下，实数序列 $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是 $[a, b]$-矩序列，当且仅当存在一个定义在 $[a, b]$ 上的非负测度 $\mu$，使得

$$\alpha_n = \int_a^b x^n d\mu(x) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}_0.$$

支集包含于 $[0, 1]$ 的矩序列通常称为豪斯多夫矩序列。本节采用与第 2 节相同的策略，并验证豪斯多夫矩序列也具有类似的结果。

定理 4.1（[6], 定理 3.13）。序列 $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是 $[a, b]$-矩序列，当且仅当

$$H_m(\alpha) \geq 0 \quad \textit{and} \quad H_m\left((a + b)E\alpha - E(E\alpha) - ab\alpha\right) \geq 0 \quad \textit{for all} \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

关于 $[a, b]$-矩序列的第一个结果如下。

定理 4.2。设 $p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ 使得 $p(\boldsymbol{x}) \geq 0$ 于 $[a, b]^d$ 上，并设 $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 为一个 $[a, b]$-矩序列。则有以下结论。

(i) 若 $a \geq 0$，则 $T_p(\alpha)$ 是 $[a^d, b^d]$-矩序列。(ii) 若 $b \leq 0$，则 $T_p(\alpha)$ 是 $[-|a|^d, -|b|^d]$- 矩序列。(iii) 若 $a \leq 0 \leq b$，则 $T_p(\alpha)$ 是 $[-|a|^d, b^d]$- 矩序列。(iv) 若 $-1 \leq a \leq 0 \leq b \leq 1$，则 $T_p(\alpha)$ 是 $[a, b]$-矩序列。

证明。(i) 由于 $\alpha$ 是 $[a, b]$-矩序列，因此存在一个正的 Borel 测度 $\mu$，其支集 $\mathrm{supp}(\mu) \subset [a, b]$，使得

$$\alpha_n = \int_a^b x^n d\mu \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}_0.$$

由定理 2.6 的证明可知，对所有 $m \in \mathbb{N}_0$，都有 $H_m(\tilde{\alpha}) \geq 0$。令 $\tilde{\alpha} = T_p(\alpha)$ 按照 (2.1) 定义。为应用定理 4.1，注意到对每个 $m \in \mathbb{N}_0$ 以及所有 $\xi_0, \ldots, \xi_m \in \mathbb{C}$，$(a+b)E\tilde{\alpha} - E(E\tilde{\alpha}) - ab\tilde{\alpha}$ 的二次型为

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\left[(a+b)\tilde{\alpha}_{j+k+1} - \tilde{\alpha}_{j+k+2} - ab\tilde{\alpha}_{j+k}\right]\xi_j\xi_k$$
$$= \int_a^b \cdots \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{m}(x_1\cdots x_d)^j\xi_j\right)^2 (x_1\cdots x_d)f(x_1\cdots x_d)p(\boldsymbol{x})d\mu\cdots d\mu,$$

其中 $f(t) := -(t-a^d)(t-b^d)$。对于 $a \leq x_k \leq b\,(k = 1, \ldots, d)$，我们知道 $f(x_1\cdots x_d) \geq 0$ 在 $[a^d, b^d]$上。因此，$T_p(\alpha)$是 $[a^d, b^d]$-矩序列。其他结论可用类似的方法证明。 □

根据定理 4.2，定理 2.6 和定理 2.11 对豪斯多夫矩性质也成立。

推论 4.3. 若 $p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ 在 $[0,1]^d$上非负，则 $T_p$ 具有豪斯多夫矩性质。

推论 4.4. 假设与定理 2.11 中的相同。若 $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$是豪斯多夫矩序列，则 (2.5) 也是如此。

例 4.5. 利用 $p(x,y) = \frac{1}{2}(x^r - y^r)(x^s - y^s)$ 在 $[0,\infty)^2$ 对任意 $r, s \in \mathbb{N}$ 都是非负的这一事实，根据定理 4.2 可知，对于任意 $[0,1]$-矩序列 $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$，$T_p(\alpha) = (\alpha_{n+r+s}\alpha_n - \alpha_{n+r}\alpha_{n+s})_{n\in\mathbb{N}_0}$ 都是一个 $[0,1]$-矩序列。文献 [4] 证明了，卡特兰数 $C_n$、移位卡特兰数 $C_{n+1}$、中心二项式系数 $\binom{2n}{n}$和 Fine 数 $F_n$都是 $[0,4]$-矩序列。因此，根据定理 4.2，以下各项都成为$[0,16]$-矩序列。

(i) $(C_{n+r+s}C_n - C_{n+r}C_{n+s})_{n\in\mathbb{N}_0}$

(ii) $\left(\binom{2(n+r+s)}{(n+r+s)}\binom{2n}{n} - \binom{2(n+r)}{n+r}\binom{2(n+s)}{n+s}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$

(iii) $(F_{n+r+s}F_n - F_{n+r}F_{n+s})_{n\in\mathbb{N}_0}$

此外，由于（受限）六边形数 $h_n$ 是一个 $[1,5]$-矩序列，因此 $(h_{n+r+s}h_n - h_{n+r}h_{n+s})_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是一个 $[1,25]$-矩序列。由于中心德拉诺伊数 $D_n$、大施罗德数 $'$和小施罗德数 $'$都是 $[3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$-矩序列，给定序列在 $T_p$ 下的像也是 $[17-12\sqrt{2}, 17+12\sqrt{2}]$-矩序列。

致谢。第一作者获得了韩国国家研究基金会（NRF）基础科学研究计划的资助，

该计划由教育部资助（NRF-2020R1I1A1A01068230）。第二作者获得了韩国政府（MSIT）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目资助（2020R1C1C1A01009185）。第三作者获得了韩国政府（MSIT）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目资助（2020R1F1A1A01070552）。

参考文献

[1] G. Bennett，豪斯多夫平均与矩序列，Positivity 15 (2011), 17–48.[2] G. Blekherman 和 C. Riener，对称非负形式与平方和，Discrete Comput. Geom. 65 (2021), 764–799.[3] B. Bouras，三个连续卡特兰数的线性组合的汉克尔行列式，Mediterr. J. Math. 10 (2013), 693–705.[4] H. Choi、Y.-N. Yeh 和 S. Yoo，类卡特兰数列与豪斯多夫矩序列，Discrete Mathematics 343 (2020), 111808.[5] J. Lasserre，矩、正多项式及其应用，帝国理工学院出版社优化丛书，第 1 卷。帝国理工学院出版社，伦敦，2010。xxii+361 页。[6] K. Schm¨udgen，《矩问题》，施普林格国际出版股份公司，查姆，瑞士，2017。[7] Y. Wang 和 B.-X. Zhu，对数凸序列与斯蒂尔切斯矩序列，Adv. in Appl. Math. 81 (2016), 115–127.[8] S.-J. Yang、H.-Z. Wu 和 Q.-B. Zhang，范德蒙行列式的推广。Linear Algebra Appl. 336 (2001), 201–204.[9] B.-X. Zhu，某些序列的汉克尔全正性，Proc. Am. Math. Soc. 147 (2019), 4673–4686。