arXiv:2305.01875v1 [math.CV] 3 May 2023

第一类有界对称域之间真全纯映射的有理性

SUNG-YEON KIM

Abstract. 设 $D_{p,q}$ 和 $D_{p',q'}$ 是秩分别为 q 和 q'的第一类不可约有界对称域，并设 $f: D_{p,q} \to D_{p',q'}$ 是一个可延拓C^2 至边界的真全纯映射。本文证明，若 $q, q' \geq 2$ 和 f 将$D_{p,q}$的Shilov边界映射到 $D_{p',q'}$的 Shilov边界，则 f具有 $f = \imath \circ F$的形式，其中

$$F = F_1 \times F_2 \colon D_{p,q} \to \Omega_1' \times \Omega_2',$$

Ω_1' 和 Ω_2' 是有界对称域， $F_1 \colon D_{p,q} \to \Omega_1'$ 是一个真有理映射， $F_2 : D_{p,q} \to \Omega_2'$ 不是真映射，而 $\imath$: $\Omega_1' \times \Omega_2' \hookrightarrow D_{p',q'}$ 是一个可约有界对称域 $\Omega_1' \times \Omega_2'$ 到 $D_{p',q'}$ 的全测地全纯等距嵌入，所依据的是典范 K¨ahler-Einstein 度量。此外，若 $p > q$，则 f 是有理映射。作为应用，我们证明，一个可延拓 C^∞ 至边界的真全纯映射 $f : D_{p,q} \to D_{p',q'}$ ，若 $3 \leq q \leq q' \leq 2q - 1.$，则它是有理映射或关于 Kobayashi 度量的全测地等距嵌入

1. Introduction

本文旨在研究能否将有界对称域之间的真全纯映射延拓到它们的紧对偶上，而这些紧对偶是紧型Hermitian对称流形。紧型Hermitian对称流形是最小的有理齐性射影簇。特别地，它们与射影空间双有理等价。因此，寻找能够使两个有界对称域之间的真全纯映射延拓为其紧对偶之间的有理映射的条件，是一项值得研究的课题。

从单位圆盘到其自身的真全纯映射是有限Blaschke乘积。在高维情形下，则存在某些刚性现象。这些现象最早由 Poincar´e（[P7]）发现，他证明了， $\mathbb{C}^2$ 中单位球面上任意两个连通开子集之间的双全纯映射，都是其紧对偶的某个自同构的限制。后来，Alexander（[Al74]）和 Henkin-Tumanov（[HeTum82]）分别将他的结果推广到了高维单位球和高秩有界对称域。

对于不同维数的球之间的真全纯映射，Webster（[We79]）利用球面的 CR几何证明，若真全纯映射 $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 在边界上直至三阶连续可微，且 $N = n + 1$ 和 $n \geq 3.$ ，那么它是将 $\mathbb{P}^n$ 嵌入 $\mathbb{P}^N$ 的射影线性嵌入的限制。许多

2010年数学主题分类。32H35、32M15、14M15、32V40。关键词和短语：真全纯映射、有界对称域、全纯映射的有理延拓。

数学家在维数差及 f 在边界上的正则性满足某些条件时推广了这一结果。相关研究可参见 Cima–Suffridge [CiSu90]、Faran [Fa86]、Ebenfelt [E13]、Forstnerič[Fo86, Fo89]、Globevnik [G87]、Huang [Hu99, Hu03]、Huang–Ji [HuJ01]、Huang–Ji–Xu [HuJXu06]、Stensønes [St96]、D'Angelo [D88a, D88b, D91, D03]、D'Angelo–Kos–Riehl（[DKoRi03]）、D'Angelo–Lebl [DL09, DL16]的著作及其中的参考文献。

当维数差任意时，Forstnerič [Fo89] 证明了 f 的有理延拓性：$\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$。更确切地说，他证明了：

定理1.1. 设 U 是以点 $P \in \partial\mathbb{B}^n$为中心的一个开球，并设 $M = U \cap \mathbb{B}^n$。若$N > n > 1$ 且 $f : \overline{\mathbb{B}}^n \cap U \to \mathbb{C}^N$ 是一个 C^{N-n+1} 类映射，在 $\mathbb{B}^n \cap U$上全纯且将 M映到单位球面 $\partial\mathbb{B}^N$，则 f是有理的，$f = (p_1, \ldots, p_N)/q$，其中 p_j和 q是次数至多为 $N^2(N - n + I)$的全纯多项式。延拓后的映射在 $\mathbb{B}^n$上全纯，将 $\mathbb{B}^n$ 映到 $\mathbb{B}^N$，且在 $\partial\mathbb{B}^n$上没有极点。

与复单位球（恰为秩 1 的有界对称域）的情形不同，对于高秩有界对称域 Ω,Ω′ 之间的真全纯映射，目前所知甚少。Tsai（[Ts93]）利用厄米对称空间相对于典范 K¨ahler-Einstein 度量的几何性质证明：若 rank(Ω) $\geq$ rank(Ω′) ≥ 2，则真全纯映射$f : \Omega \to \Omega'$ 是紧对偶之间某个全测地等距嵌入的限制。当 rank(Ω) $<$ rank(Ω′) 时，f 一般不再是全测地的。但当秩差或维数差充分小时，已有针对某些秩为 ≥ 2的不可约有界对称域对，得到真全纯映射的分类或不存在性结果。相关研究可参见 Chan [Ch20, Ch21], Henkin-Novikov [HeNo84], Kim-Mok-Seo [KiMSe22], Kim-Zaitsev [KiZ13, KiZ15], Mok [M08], Mok-Ng-Tu [MNgTu10], Ng[Ng13, Ng15a, Ng15b], Seo [Se15, Se16, Se18]以及 Tu [Tu02a, Tu02b]。

关于 f 的有理延拓性，[KiMSe22] 证明，如果 Ω 和 Ω′ 分别属于相同类型，或者分别属于三型和第一类，并且秩差足够小（$2 \leq \text{rank}(\Omega') < 2\,\text{rank}(\Omega) - 1$），那么 f 具有 $f = \imath \circ F$ 的形式，其中

$$F = F_1 \times F_2 \colon \Omega \to \Omega'_1 \times \Omega'_2,$$

Ω'_1 和 Ω'_2 是有界对称域，$F_1 \colon \Omega \to \Omega'_1$ 是一个全测地等距嵌入，而 $\imath : \Omega'_1 \times \Omega'_2 \hookrightarrow \Omega'$ 是一个可约有界对称域 $\Omega'_1 \times \Omega'_2$ 到 Ω′ 中的全测地全纯等距嵌入，其中采用典范 K¨ahler-Einstein 度量。因此，f 具有一个因子 F_1，该因子可以延拓为 Ω 的紧对偶到 Ω'_1的紧对偶之间的全测地等距嵌入。如果 Ω 的秩为一，则存在不具有上述性质的真全纯映射。Reiter-Son [ReSo22] 和 Xiao-Yuan [XiY20] 对从 $\mathbb{B}^n$ 到四型有界对称域的真全纯映射进行了分类。这些映射是代数的，但不一定具有上述性质。

本文推广了 Forstnerič 的结果。更确切地说，在边界值满足某个条件时，我们证明了秩为 ≥ 2 的第一类有界对称域之间的真全纯映射 f 可有理延拓。如果真全纯映射 f 可连续延拓至边界，f 则将 Ω 的边界映入 Ω′的边界。拓扑

Ω 的边界是 G-轨道 S_r(Ω)、 $r = 0$、.....、秩(Ω) $- 1$的不交并，其中 G 是 Aut(Ω) 的恒等分支，使得每个 S_r(Ω) 都由秩为 r的有界对称域叶状分解。在这些轨道中，Shilov边界 S_0(Ω) 是唯一的闭轨道，且不包含正维复流形。本文施加的条件是 f 将 Ω 的 Shilov边界映入 Ω′的 Shilov边界，这是对条件f： $\overline{\mathbb{B}}^n \cap U \to \mathbb{C}^N$ 将 $\partial\mathbb{B}^n \cap U$ 映至 $\partial\mathbb{B}^N$的推广。

定理1.2. 设$D_{p,q}$, $D_{p',q'}$ 是秩分别为 q,q'的第一类不可约有界对称域，且 $f : D_{p,q} \to D_{p',q'}$ 是一个真全纯映射。假设存在一点$P \in S_0$($D_{p,q}$)及其开邻域 U，使得 f 可延拓 C^2 至 U。进一步假设q, $q' \geq 2$和 f将映射 S_0($D_{p,q}$) $\cap\, U$到 S_0($D_{p',q'}$)。那么 f具有形式 $f = \imath \circ F$，其中

$$F = F_1 \times F_2 \colon D_{p,q} \to \Omega_1' \times \Omega_2',$$

Ω′$_1$ 和Ω′$_2$ 是有界对称域， F_1: $D_{p,q} \to$ Ω′$_1$ 是一个真有理映射， $F_2 : D_{p,q} \to$Ω′$_2$ 不是真映射，而 $\imath$: Ω′$_1$ ×Ω′$_2$ $\hookrightarrow D_{p',q'}$ 是一个全测地全纯等距嵌入，将可约有界对称域Ω′$_1$ ×Ω′$_2$ 嵌入$D_{p',q'}$，并且相对于典范K ¨ahler-Einstein度量。此外，若 $p > q$，则 f 是一个有理映射。

我们指出，若 $q = 1$，即 $D_{p,\ q} = \mathbb{B}^p$ 且若 f 将 Shilov边界映到 Shilov边界，则f是从 $\mathbb{B}^p$ 到 $\mathbb{B}^{\dim D_{p',\ q'}}$的真全纯映射。因此，由定理1.1，若 f 在边界上具有足够的光滑性且 $p > 1$，则 f是有理映射。若 $q' = 1$，即 $D_{p',\ q'} = \mathbb{B}^{p'}$，则不存在这样的真全纯映射 $f : D_{p,\ q} \to \mathbb{B}^{p'}$ ： 当 $q > 1$时，它能连续延拓到某个边界点的开邻域。

若定理1.2中的 F_1 是关于典范 K¨ahler–Einstein 度量的全测地等距嵌入，则根据 [M22], f 是关于 Kobayashi度量的全测地等距嵌入。结合这一结果与 [Ki21], ，我们得到以下推论。

推论 1.3. 设 f :$D_{p,q} \to D_{p',q'}$ 是一个可延拓至边界的真全纯映射。假设

$$3 \leq q \leq q' \leq 2q - 1.$$

那么， f是一个有理映射，或者具有 $f = \imath \circ F$的形式，其中

$$F = F_1 \times F_2 \colon D_{p,q} \to \Omega_1' \times \Omega_2',$$

Ω′$_1$ 和 Ω′$_2$ 是有界对称域， F_1: $D_{p,\ q} \to$ Ω′$_1$ 是真有理映射， F_2 : $D_{p,\ q} \to$Ω′$_2$ 不是真映射，且 $\imath$: Ω′$_1$ ×Ω′$_2$ $\hookrightarrow D_{p',\ q'}$ 是从可约有界对称域 Ω′$_1$ ×Ω′$_2$ 到 $D_{p',\ q'}$ 关于典范 K ¨ahler-Einstein 度量的全测地全纯等距嵌入。因此， f 有理地延拓到紧对偶，或者关于 Kobayashi 度量是全测地等距嵌入。

我们的方法是结合厄米对称空间的 K¨ahler 几何与有界对称域边界轨道上的 CR几何。我们首先推广一种关于厄米对称空间上的特征丛以及由 f 诱导的模映射的策略；该策略最早见于 Mok-Tsai 的工作（ [MTs92]）。利用 f 的适当性，我们定义了 Ω 与 Ω¨ 的

不变全测地子域模空间之间的一个模映射 [MTs92], , 该映射是亚纯的。与 [MTs92], 中一样, 不变全测地子域模空间的伪凹性迫使该模映射全局延拓为紧对偶的不变全测地子空间模空间之间的有理映射（参见 [KiMSe22]）。

对于紧对偶 X 中 Ω 的每个点 P，我们将经过 P的所有秩为 r 的特征子空间之并定义为一个复代数簇 $\mathscr{Z}_P^r \subset X$。若 P 是 Shilov边界上的一点，则我们可以将其子集 $\mathscr{S}_P^r \subset \mathscr{Z}_P^r$ 定义为所有秩为 r 且 P位于其闭包中的边界分支之并。我们证明，$\mathscr{S}_P^r$是 S_r(Ω) 中的一个 CR子流形，而 $\mathscr{Z}_P^r$是包含 $\mathscr{S}_P^r$的最小紧复代数簇。此外，若 f将 Shilov边界映至 Shilov边界，则 $\mathscr{S}_P^r$ 在 f 下的像由 f 限制在秩为 r 的边界轨道 S_r(Ω) 上的二阶喷射所确定。我们利用 Ω 和 Ω′ 的边界轨道上的 CR几何来分析 f 的 CR第二基本形式，进而证明 f 可分解为两个全纯映射的乘积，其中一个因子通过将模映射 $f_r^\sharp$ 沿着不变全测地子空间万有族的双纤维化进行提升和降推，从而有理地延拓到 P的一个邻域。

本文的结构如下。第 2 节介绍第一类厄米对称空间的不变全测地子空间的模空间和万有族。第 3 节定义由 f 诱导的模映射，进而得到模映射可提升至不变全测地子空间的万有族的条件。第 4 节考察 S_r(Ω) 和 $\mathscr{S}_P^r$ 的 CR 结构。接着，在第 5 节中，我们定义 f 的 CR第二基本形式，它描述了 $\mathscr{S}_P^r$ 经由 f 的像。除非另有说明，第 4 节和第 5 节均采用爱因斯坦求和约定。最后，在第 6 节中，我们证明定理1.2和推论 1.3。

致谢 作者受到基础科学研究院（IBS-R032-D1- 2021年-a00）的资助。

2. Preliminaries

本节将介绍第一类有界对称域的一些基本概念，并证明它们的一些基本性质。参考文献见 [KiMSe22], [M86] 和 [MTs92] 。

2.1. 第一类厄米对称空间。对于正整数 $p \geq q \geq 1$，定义基本形式 $\langle\,,\,\rangle = \langle\,,\,\rangle_{p,q}$ 于 $\mathbb{C}^{p+q}$ 上，如下所示:

$$\langle z, w\rangle = -\sum_{1\leq j\leq q} z_j\overline{w}_j + \sum_{q+1\leq j\leq p+q} z_j\overline{w}_j.$$

第一类非紧厄米对称空间 $D_{p,q}$ 是所有满足限制 $\langle\,,\,\rangle\big|_V$ 为负定的 q 维平面 $V \subset \mathbb{C}^{p+q}$的集合。在 Harish-Chandra 坐标下，复格拉斯曼流形 $Gr(p,q)$ 中的 $D_{p,q}$ 可表示如下:

记 $M^{\mathbb{C}}(p,q)$ 为系数属于 $\mathbb{C}$ 的 $p\times q$ 矩阵集合，并将 $\mathbb{C}^{p+q}$ 的标准基记为 $\{e_1,\ldots,e_{p+q}\}$。对于 $Z \in M^{\mathbb{C}}(p,q)$，记 v_k, $1\leq k\leq q$ 为其第 k 列向量

将 Z 视为 $\mathbb{C}^p = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_{1+q}, \ldots, e_{p+q}\}$ 中的一个向量时，我们把 Z 认作由 $\{e_k + v_k$ 张成的 $\mathbb{C}^{p+q}$ 中的 q 维平面：$1 \le k \le q\}$。于是有

$$D_{p,q} = \left\{ Z \in M^{\mathbb{C}}(p,q) : I_q - Z^* Z > 0 \right\},$$

其中，Z^* 表示 Z的共轭转置。在全文中，我们始终假设$D_{p,\,q}$ 按上述方式定义。

D_p的拓扑边界$\partial D_{p,\,q}$ 是边界轨道$S_{p,\,q,\,r}$，r =0，...，$q-1$的不交并，其中每个$S_{p,\,q,\,r}$由所有满足限制 $\langle\,,\,\rangle\big|_V$具有$r$ 个负特征值和 $q-r$ 个零特征值的 q-平面 $V \subset \mathbb{C}^{p+q}$组成。有界对称域 G 的双全纯自同构群 Aut($D_{p,\,q}$) 的连通单位分支，可与保持 $\langle\,,\,\rangle$的 $\mathbb{C}^{p+q}$ 的所有线性变换群的连通单位分支相识别。因此，每个$S_{p,\,q,\,r}$ 都是 $Gr(p,\,q)$中的一个 G-轨道。秩为$q-1$ 的边界轨道$S_{p,\,q,\,q-1}$ 称为超曲面边界，而秩为0的边界轨道$S_{p,\,q}$，0称为Shilov边界。我们注意到，$S_{p,\,q}$，0是$\overline{D}_{p,\,q}$的极值点集合。

对于一对满足 $V_1 \subset V_2$ 的线性子空间（V_1,V_2），将满足以下条件的所有元素 $x \in Gr(p,q)$ 的集合记为 $[V_1, V_2]_q$

$$V_1 \subset V_x \subset V_2, \tag{2.1}$$

其中，V_x 是 $\mathbb{C}^{p+q}$ 中对应于 $x \in Gr(p,q)$ 的 q 维子空间。对于线性子空间 $A \subset \mathbb{C}^{p+q}$，将 $\mathbb{C}^{p+q}$ 中满足以下条件的所有向量 v 构成的空间记为 A^*

$$\langle \cdot, v \rangle\big|_A = 0.$$

若 A 满足

$$\langle A, A \rangle = 0$$

或者等价地,

$$A \subset A^*.$$

若 A 是一个（$q-r$）维零空间，则 A^* 是一个包含 A 和$[A, A^*]_q \cap S_{p,\,q,\,r}$ 的（$p+r$）维子空间，且是 $\partial D_{p,\,q}$ 中与 $D_{p-q+r,\,r}$ 双全纯的极大复子流形，称为秩为 r 的边界分支。在 Aut($D_{p,\,q}$) 的作用下，秩为 r 的边界分支等价于一个标准边界分支

$$F_r = \left\{ \begin{pmatrix} I_{q-r} & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}, Z \in D_{p-q+r,r} \right\}.$$

我们注意到，$[A, A^*]_q$是$[A, A^*]_q \cap S_{p,\,q,\,r}$的紧对偶。反之，$\partial D_{p,\,q}$ 中的每个极大复子流形都具有这种形式。参见 [Wo72]。

2.2. 不变全测地子空间。$X = Gr(p,q)$ 中子图类型的不变全测地子空间是某些线性子空间 V_1 和 V_2 所对应的子格拉斯曼流形 $[V_1, V_2]_q$，使得 $V_1 \subset V_2$。因此，对于固定的正整数 $a \le b$，具有 $\dim V_1 = a$、$\dim V_2 = b$ 的子图类型不变全测地子空间的模空间是旗流形

$$\mathcal{F}_{a,b}(X) = \{(V_1, V_2) : \{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \mathbb{C}^{p+q}, \dim V_1 = a, \dim V_2 = b\}. \tag{2.2}$$

对于 $\sigma = (V_1, V_2) \in \mathcal{F}_{a,\ b}(X)$，我们有时将相应的子格拉斯曼流形 $[V_1, V_2]_q$ 记为 X_σ。

具有 $\dim\ V_1 = q - r$ 和 $\dim\ V_2 = p + r$ 的子格拉斯曼流形 $[V_1, V_2]_q \subset Gr(p, q)$ 称为秩为 r 的特征子空间。我们将 $r = 1, \ldots, q-1$ 中秩为 r 的特征子空间的模空间记为 $\mathcal{D}_r(X)$，即：

$$\mathcal{D}_r(X) = \{(V_1, V_2) : \{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \mathbb{C}^{p+q}, \dim V_1 = q - r,\ \dim V_2 = p + r\}. \tag{2.3}$$

于是，对于抛物子群 $P_r \subset G$，$\mathcal{D}_r(X)$ 与 G/P_r 双全纯，且当 $r > 0$ 时，自同构群为 $SL(p+q, \mathbb{C})$（见 [Ak95] 的第 3.3 节）。特别地，$\mathcal{D}_r(X)$ 是一个有理齐性流形。

对于给定的 $\Omega = D_{p,\ q}$ 及其紧对偶 $X = Gr(p, q)$，定义

$$\mathcal{D}_r(\Omega) := \{\sigma \in \mathcal{D}_r(X) \colon \Omega_\sigma := X_\sigma \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

这里，Ω_σ 是一个秩为 r 的第一类有界对称域。我们称 Ω_σ 为秩为 r 的特征子域。对于 Ω 的秩为 k 的边界轨道 $S_k = S_k(\Omega) = S_{p,\ q,\ k}$，其中 $k \geq r$，定义

$$\mathcal{D}_r(S_k) := \{\sigma \in \mathcal{D}_r(X) \colon \Omega_\sigma := X_\sigma \cap S_k \text{ is open in } X_\sigma\}.$$

那么，$\mathcal{D}_r(\Omega)$ 和 $\mathcal{D}_r(S_k)$、$k = r$、.....、$q - 1$ 是 G 在 $\mathcal{D}_r(X)$ 中的轨道，使得 $\mathcal{D}_r(S_k) \subset \partial\mathcal{D}_r(\Omega)$。此外，$\mathcal{D}_r(S_r)$ 是 G 的唯一闭轨道，使得 $\sigma \in \mathcal{D}_r(S_r)$ 当且仅当 Ω_σ 是一个秩为 r 的边界分支。

2.3. 伴随特征丛。若单位向量 $v \in T_xX$ 使得相对于典范 K¨ahler-Einstein 度量，X 的全纯截面曲率达到最大值，则称 $v \in T_xX$ 为特征向量。特征纤维丛 $\mathscr{C}(X)$ 是该丛

$$\mathscr{C}(X) = \bigcup_{x \in X} \{[v] \in \mathbb{P}T_xX : v \text{ is a characteristic vector}\}$$

这是一个以 X 为底空间的全纯纤维丛。当厄米对称域通过 X 中的 Harish-Chandra嵌入实现为有界对称域 Ω 时，纤维 $\mathscr{C}_x$ 在 Ω 上方相对于 Harish-Chandra 坐标是平行的。

对于每个特征向量 $v \in T_xX$，都存在一个正交分解

$$T_xX = \mathbb{C}v \oplus \mathscr{H}_v \oplus \mathscr{N}_v$$

分解为厄米形式的特征子空间

$$\mathcal{R}_v(\xi, \eta) := R_{v\bar{v}\xi\bar{\eta}}$$

对应于特征值 $R_{v\bar{v}v\bar{v}}$、$1/2R_{v\bar{v}v\bar{v}}$ 和 0，其中 R 是 X 上典范 K¨ahler–Einstein 度量的曲率张量。设 $\mathbb{P}_v$ 是 X 中与 v 相切、使全纯截面曲率达到最大值的射影直线。那么，存在唯一一个秩为 $q-1$、经过 x 的特征子空间 X_σ，使得 X_σ 在 x 处的切空间为

$$T_xX_\sigma = \mathscr{N}_v.$$

反过来，对于每个秩为 $q-1$、经过 x 的特征子空间 X_σ，在相差一个常数倍的意义下，存在唯一一个 x 处的特征向量 v_x，使得

$$T_x X_\sigma = \mathscr{N}_{v_x}.$$

此外，对于 $x, y \in X_\sigma \cap \Omega, \overline{v_x}$ 和 v_y 在 Harish-Chandra 坐标中平行。在两种情况下，对于 $v = v_x$ 或 $v = v_y$，$\mathbb{P}_v \times X_\sigma$ 都是 X 中的全测地子流形。定义

$$\mathscr{N}_{q-1}(X) = \bigcup_{[v]\in\mathscr{C}(X)} \mathscr{N}_v = \{T_x X_\sigma : \sigma \in \mathcal{D}_{q-1}(X), x \in X_\sigma\}.$$

它是一个以 X 为底空间的复齐性纤维丛，称为秩为 $q-1$ 的伴随特征丛。同样，我们可以如下定义秩为 r 的伴随特征丛：

$$\mathscr{N}_r(X) = \{T_x X_\sigma : \sigma \in \mathcal{D}_r(X), x \in X_\sigma\}, \quad r = 1, \dots q-1,$$

它们是以 X 为底空间的复齐性纤维丛。

设 $A \subset \mathscr{C}_x(X)$ 是 x 处的一个特征方向集合。记

$$\mathscr{N}_A = \bigcap_{[v]\in A} \mathscr{N}_v.$$

于是，存在唯一一个经过 x 的不变全测地子空间 X_A，使得

$$T_x X_A = \mathscr{N}_A.$$

此外，存在唯一一个具有子图类型的、经过 x的不变全测地子空间 Y_A，使得

$$\mathscr{N}_A = \mathscr{N}_{\mathcal{C}_x(X)\bigcap \mathbb{P}T_x Y_A}.$$

Let

$$\mathscr{C}_x(X_A) := \{[v] \in \mathscr{C}_x(X) : v \in T_x X_A\}.$$

Then

$$T_x Y_A = \mathscr{N}_{\mathscr{C}_x(X_A)}.$$

我们将 $T_x Y_A + \mathscr{N}_A.$ 的正交补记为 $\mathscr{H}_A$。于是有正交分解

$$T_x X = T_x Y_A \oplus \mathscr{H}_A \oplus \mathscr{N}_A. \tag{2.4}$$

2.4. 特征子空间的万有族。对于给定的 $r > 0$，定义

$$\mathcal{U}_r(X) := \{(x, \sigma) \in X \times \mathcal{D}_r(X) \colon x \in X_\sigma\}.$$

于是存在一个典范双纤维化

$$\rho_r \colon \mathcal{U}_r(X) \to \mathcal{D}_r(X), \quad \pi_r \colon \mathcal{U}_r(X) \to X$$

给出为

$$\rho_r(x, \sigma) = \sigma, \quad \pi_r(x, \sigma) = x.$$

注意到

$$X_\sigma = \pi_r\left(\rho_r^{-1}(\sigma)\right).$$

定义 $\imath_r\colon\ \mathcal{U}_r(X) \to \mathcal{G}(n_r, TX)$，其中 $n_r = \dim X_\sigma$ by $\imath_r(x,\sigma) = T_xX_\sigma$，其中 $\mathcal{G}(n_r, TX)$ 是位于 TX 上的格拉斯曼丛。那么，$\imath_r$ 是一个 G-等变全纯嵌入。因此，我们可以将 $\mathcal{U}_r(X)$ 视为 $\mathcal{G}(n_r, TX)$ 中的一个复流形。对于每个 $x \in X$，定义

$$\mathcal{Z}_x^r := \rho_r(\pi_r^{-1}(x)).$$

类似地，我们可以定义一个 G-等变全纯嵌入 $j_r\colon\ \mathcal{U}_r(X) \to \mathcal{G}(m_r, T\mathcal{D}_r(X))$，其中 $m_r = \dim \mathcal{Z}_x^r$ 由 $j_r(x,\sigma) = T_\sigma \mathcal{Z}_x^r$ 给出，并且我们可以将 $\mathcal{U}_r(X)$ 视为 $\mathcal{G}(m_r, T\mathcal{D}_r(X))$ 中的复流形（参见 [HoNg21]）。

对于复子流形 $M \subset X$，定义

$$\mathcal{Z}_M^r := \{\sigma \in \mathcal{D}_r(X) : M \subset X_\sigma\}, \quad \mathcal{S}_M^r := \mathcal{Z}_M^r \cap \mathcal{D}_r(S_r),$$

$$\mathscr{Z}_M^r := \pi_r\left(\rho_r^{-1}(\mathcal{Z}_M^r)\right), \quad \mathscr{S}_M^r := \mathscr{Z}_M^r \cap S_r.$$

为简便起见，对于 $M = X_\sigma$ 和 $M = \{x\}$，我们分别用 $\mathcal{Z}_\sigma^r$ 和 $\mathcal{Z}_x^r$表示 $\mathcal{Z}_M^r$。我们指出，如果 $M = [A, B]_q$，那么

$$\mathcal{Z}_M^r = \{\sigma = (V, W) \in \mathcal{D}_r(X) : V \subset A,\ B \subset W\}$$

and

$$\mathscr{Z}_M^r = \{x \in X : \dim V_x \cap A \geq q - r,\ \dim(V_x + B) \leq p + r\}. \tag{2.5}$$

对于给定的 r，若不会引起混淆，我们将省略上标 r。

引理 2.1. 设 $M \subset X$ 为一个子格拉斯曼流形。那么，$\mathcal{Z}_M^r$ 是一个由有限个欧几里得坐标图覆盖的射影代数流形，而 $\mathscr{Z}_M^r$ 是 X中的一个复代数簇。此外，若 M 是一个秩为 s 的边界分支的紧对偶，即 $M = X_\sigma$ 满足 $\sigma \in \mathcal{D}_s(S_s)$，则 $\mathcal{S}_M^r$ 和 $\mathscr{S}_M^r$ 是光滑流形。

证明。设 $M = [V_M, W_M]_q$是 X中的一个子格拉斯曼流形。那么，$\sigma = (A, B) \in \mathcal{D}_r(X)$ 包含于 $\mathcal{Z}_M^r$ 当且仅当

$$A \subset V_M, \quad W_M \subset B.$$

因此，$\mathcal{Z}_M^r$与 $Gr(q - r, V_M) \times Gr(r - s, \mathbb{C}^{p+q}/W_M)$ 双全纯。由于 π_r是真全纯映射，$\mathscr{Z}_M^r = \pi_r(\rho_r^{-1}(\mathcal{Z}_M^r))$ 是 X 中的一个复解析簇。

现在，设 M 具有如下形式

$$M = [V_M, V_M^*]_q$$

其中 V_M是一个 $(q - s)$ 维零空间。于是

$$\mathcal{S}_M^r = \{(A, A^*) : A \in Gr(q - r, V_M)\}$$

and

$$\mathscr{S}_M^r = \{x \in S_r : \dim V_x \cap V_M = q - r\},$$

由此完成证明。 □

引理 2.2. 假设 Ω 是管型，即 $\Omega = D_{q,q\cdot}$ 那么对于一个 Shilov 边界点 $P \in S_0$，$\mathcal{S}_P^r$ 是 $\mathcal{Z}_P^r$的极大全实子流形。

证明。设 $\sigma = (A, B) \in \mathcal{Z}_P^r$。则 A 是 V_P 的一个子空间，这意味着

$$\langle A, A\rangle = 0$$

当且仅当

$$B = A^*.$$

因此，在双全纯等价 $\mathcal{Z}_P \simeq Gr(q-r, V_P) \times Gr(q-r, \mathbb{C}^{2q}/V_P)$ 下，$\mathcal{S}_P$ 被视为与

$$\{(A, A^*/V_P) : A \in Gr(q-r, V_P)\} \subset Gr(q-r, V_P) \times Gr(q-r, \mathbb{C}^{2q}/V_P).$$

因此，存在一个全实嵌入 $\imath : Gr(q-r, V_P) \to \mathcal{Z}_P$，其定义为 $\imath(A) = (A, A^*)$，且其像与 $\mathcal{S}_P$ 重合，这就完成了证明。□

我们将 $X = Gr(p, q)$ 视为射影空间 $\mathbb{P}^N$ 中的一个子流形，其中通过第一典范嵌入 $\imath : X \to \mathbb{P}^N$。那么，对于每个子图类型为 X_σ 的不变全测地子空间，都存在唯一一个 ℓ 维射影空间 $\mathbb{P}^\ell_\sigma \subset \mathbb{P}^N$，使得

$$\imath(X_\sigma) = \imath(X) \cap \mathbb{P}^\ell_\sigma.$$

$\mathbb{P}^\ell_\sigma$ 是 $\mathbb{P}^N$ 中包含 $\imath(X_\sigma)$的最小射影空间。因此，该流形 d

$$\mathcal{U}_{a,b}(X) := \{(x, \sigma) \in X \times \mathcal{F}(a, b; \mathbb{C}^{p+q}) : x \in X_\sigma\}$$

可视为 $\mathbb{P}^N \times \mathscr{G}(\ell, N)$中的一个子流形，其中 $\mathscr{G}(\ell, N)$是 $\mathbb{P}^N$中所有 ℓ维射影空间的集合。

Let

$$\mathcal{M} = \{(x, L) \in \mathbb{P}^N \times \mathscr{G}(\ell, N) : x \in L\}$$

典范 $\mathbb{P}^\ell$在 $\mathscr{G}(\ell, N)$上的丛。于是，$\mathcal{M}$ 由一个二次方程局部定义

$$Q(x, L) = (Q_1, \ldots, Q_{N-\ell})(x, L) = 0$$

具有如下性质

$$\{x \in \mathbb{P}^N : Q(x, L) = 0\} = L.$$

对于点 $P \in \mathbb{P}^N$，定义

$$\mathcal{M}_P := \{P\} \times \{L \in \mathscr{G}(\ell, N) : P \in L\}.$$

那么，$\mathcal{M}_P$ 是一个局部由以下方程定义的射影代数流形。

$$Q(P, \cdot) = 0.$$

选择一个开集 $O \subset \mathbb{P}^N \times \mathscr{G}(\ell, N)$，在该开集上 $Q = 0$ 可以表示为

$$Q_j(x, L) = \sum_{k=0}^{N} a_{j,k} x_k = 0, \quad j = 1, \ldots, N-\ell,$$

其中 $x = [x_0;\ x_1;\ \cdots;\ x_N] \in \mathbb{P}^N$且 $(a_{j,k})_{j,k}$是一个大小为 $(N-\ell) \times (N+1)$ 的矩阵。我们可以假设$x_0 = 1$ 且 $(a_{j,k})_{j}^{N-\ell}{}_{,k=1}$ 是一个单位矩阵。复流形 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_P \cap O$ 在局部定义为

通过 $\{(P, h(\zeta)) \in \mathcal{M}_P \colon \zeta \in U\}$，其中 $h \colon U \to \mathcal{G}(\ell, N)$ 是某个全纯嵌入，且 U是复欧几里得空间中的一个连通开集。于是 $h(\zeta) = (h_{j,k}(\zeta))$ 满足

$$A_j(P;\zeta) := Q_j(P, h(\zeta)) = \sum_{k=0}^{N} h_{j,k}(\zeta) P_k = 0, \quad j = 1, \dots, N-\ell.$$

对 $\zeta_0 \in U$处的 ζ 求导，得到由下式定义的仿射方程组$A^{(m)}(\cdot;\, \zeta_0) = ((\partial_\zeta^\alpha A_j)(\cdot;\, \zeta_0) : j = 1, \dots, N-\ell,\ |\alpha| \le m)$

$$(\partial_\zeta^\alpha A_j)(P;\zeta_0) = \sum_{k=0}^{N} (\partial_\zeta^\alpha h_{j,k})(\zeta_0) P_k, \quad j = 1, \dots, N-\ell$$

其系数全纯地依赖于 ζ_0，其中对于满足 $d = \dim\, U$ 的 $a \in \mathbb{N}^d$，

$$\partial_\zeta^\alpha = \partial_{\zeta_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{\zeta_d}^{\alpha_d}$$

and

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d.$$

利用线性代数，我们得到以下引理。

引理 2.3. 设 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_P \cap O$ 为一个复流形。那么

$$\bigcap_{L \in \mathcal{N}} L = \{P\}$$

当且仅当存在一个整数 m 和一个点 $(P, h(\zeta_0)) \in \mathcal{N}$，使得 $A^{(m)}(\cdot;\, \zeta_0)$ 的秩为最大。

3. Induced moduli maps

我们通过第一典范嵌入，将 $X' = Gr(p', q')$ 与其在射影空间 $\mathbb{P}^{N'}$ 中的像等同。对于每个 $r > 0$，都存在一对整数 $(a, b) = (a_r, b_r)$，它们仅依赖于 r，使得对于一般的 $\sigma \in \mathcal{D}_r(\Omega)$，包含 $f(\Omega_\sigma)$ 的 X' 中最小的子格拉斯曼流形具有形式 $[A_\sigma, B_\sigma]_{q'}$，且 $\dim\, A_\sigma = a$，$\dim\, B_\sigma = b$。定义映射 $f_r^\sharp \colon \mathcal{D}_r(\Omega) \to \mathcal{F}_{a,\, b}(X)$，如下：

$$f_r^\sharp(\sigma) = (A_\sigma, B_\sigma).$$

于是，当 在 [KiMSe22] 中， $f_r^\sharp$ 可延拓为有理映射 $f_r^\sharp \colon \mathcal{D}_r(X) \to \mathcal{F}_{a,\, b}(X')$。定义

$$\mathcal{U}'_{a,b} := \{(y, L) \in X' \times \mathcal{F}_{a,b}(X') : y \in L\}.$$

于是存在一个典范双纤维化

$$\rho'_{a,b} \colon \mathcal{U}'_{a,b} \to \mathcal{F}_{a,b}(X'), \quad \pi'_{a,b} \colon \mathcal{U}'_{a,b} \to X'.$$

映射 $\mathcal{F}_r \colon \mathcal{U}_r(\Omega) \to \mathcal{U}'_{a,\, b}$ 由 $\mathcal{F}_r(x, \sigma) = (f(x)\ f_r^\sharp(\sigma))$ 定义，保持双纤维化，即

$$\pi'_{a,b} \circ \mathcal{F}_r = f \circ \pi_r, \quad \rho'_{a,b} \circ \mathcal{F}_r = f_r^\sharp \circ \rho_r,$$

其中

$$\rho_r : \mathcal{U}_r(X) \to \mathcal{D}_r(X), \quad \pi_r : \mathcal{U}_r(X) \to X$$

is t X 上万有特征丛的典范双纤维化 .

我们将把 $\mathcal{U}'_{a,b}$ 视为 $\mathbb{P}^{N'} \times \mathcal{G}(\ell, N')$ 的一个子流形，其中 ℓ 和 N' 满足某些条件。与万有特征丛的情形类似，对于一个复子流形 $M \subset X'$，我们定义

$$\mathcal{Z}'_M{}^{a,b} := \{(A,B) \in \mathcal{F}_{a,b}(X') : M \subset [A,B]_{q'}\}$$

and

$$\mathscr{Z}'_M{}^{a,b} = \pi'_{a,b}\left(\left(\rho'_{a,b}\right)^{-1}\left(\mathcal{Z}'_M{}^{a,b}\right)\right).$$

若无歧义，我们将省略上标 a, b 。

在本节的其余部分，我们将证明以下引理，其证明可通过对 [MTs92] 中命题 2.6 的证明略作修改而得到。为使本文自成一体，我们将给出证明。

引理 3.1. 设 $f : \Omega \to \Omega'$ 是一个真全纯映射。假设存在一个点 $x \in \Omega$，以及有限个经过 x 且满足 $\sigma_j \in Dom(f_1^\sharp)$、 $j = 1$、...、 k 的秩 1 特征子域 Ω_{σ_1}、...、Ω_{σ_k}。

$$\bigcap_j X'_{f_1^\sharp(\sigma_j)} = \{f(x)\}, \tag{3.1}$$

其中

$$X'_{f_1^\sharp(\sigma)} = \pi'_{a,b}\left((\rho'_{a,b})^{-1}(f_1^\sharp(\sigma))\right)$$

^对于（a， b）=（a_1， b_1）。那么， f具有一个有理延拓 f： $X \to X'$.

我们可以假设 $x = 0 \in \Omega$。令 $\mathcal{N}$为 $f_1^\sharp(\mathcal{Z}_0 \cap Dom(f_1^\sharp))$ 的闭包的正则轨迹。则 $\mathcal{N}$是 $\mathcal{Z}'_{f(0)}$ 中的一个复流形。由于 $f_1^\sharp$是有理的， $\mathcal{N} \cap f_1^\sharp(\mathcal{Z}_0 \cap Dom(f_1^\sharp))$ 在$f_1^\sharp(\mathcal{Z}_0 \cap Dom(f_1^\sharp))$ 中稠密。因此，由条件 (3.1)，我们得到

$$\bigcap_{L \in \mathcal{N}} L = \{f(0)\}.$$

根据引理 2.3，存在一个整数 $m > 0$ 和 $\sigma_0 \in Dom(f_1^\sharp) \cap \mathcal{Z}_0$，使得 $A^{(m)}(\cdot;\, \sigma_0)$ 具有最大秩，其中 $A^{(m)}(\cdot;\, \cdot)$ 是引理 3.1 中针对 $h = f_1^\sharp$ 给出的系统。我们将证明 f 亚纯地延拓到 $X_{\sigma_0} \subset X$。

设 $y \in X_{\sigma_0}$。则 $\sigma_0 \in \mathcal{Z}_y$。考虑方程。

$$Q(u, f_1^\sharp(\sigma)) = 0, \quad (u,\sigma) \in \mathbb{P}^{N'} \times Dom(f_1^\sharp),$$

其中， Q 是 $\mathcal{G}(\ell, N')$上典范 $\mathbb{P}^\ell$丛的二次定义方程。然后，上述方程关于 $\sigma \in \mathcal{Z}_y \cap Dom(f_1^\sharp)$在 σ_0 处的导数全纯地依赖于 $f_1^\sharp$ 在 σ_0 处的有限阶喷以及 $\mathcal{Z}_y$ 在 σ_0处的切向量。令

$$h_y := f_1^\sharp\big|_{\mathcal{Z}_y}$$

并令 $A_y^{(m)}(\cdot,\sigma_0)$ 为相对于 h_y 在第 2.4 节中定义的仿射系统。注意，$A_y^{(m)}(\cdot;\sigma_0)=0$ 的解亚纯地依赖于系统 $A_y^{(m)}(\cdot;\sigma_0)$ 的系数。由于 $\mathcal{U}_1(X)$ 与之双全纯。

$$\{(\sigma, T_\sigma \mathcal{Z}_y) : (y,\sigma) \in \mathcal{U}_1(X)\} \subset Gr(m, T\mathcal{D}_1(X)), \quad m = \dim \mathcal{Z}_y,$$

$T_{\sigma_0}\mathcal{Z}_y$全纯地依赖于 y_0。此外，$f_1^\sharp\big|_{\mathcal{Z}_y}$亚纯地依赖于 f 在 y处的有限阶喷。因此，$A_y^{(m)}(\cdot;\sigma_0)$的系数亚纯地依赖于 y，这意味着解

$$A_y^{(m)}(\cdot,\sigma_0)=0$$

亚纯地依赖于 $y \in X_{\sigma_0}$。

注意，关于 $A_y^{(m)}(\cdot;\sigma)$的秩的条件是一般性的。因此，存在一个稠密开集 $\mathscr{W}_0 \subset \mathcal{D}_1(\Omega)$，使得对所有 $\sigma \in \mathscr{W}_0$，f 都能延拓为 X_σ 上的亚纯映射。

引理 3.2. f 有理地延拓到 X。

证明. 设

$$W_1 := \bigcup_{\sigma\in\mathscr{W}_0} X_\sigma.$$

首先，我们将证明 f 可亚纯地延拓到 W_1。固定一个点 $\sigma_0 \in \mathscr{W}_0$，并选取一个点$y_0 \in \Omega^c \cap X_{\sigma_0}$。只需证明该方程的解

$$Q(\cdot, L) = 0, \quad L \in f_1^\sharp(\mathscr{W}_0 \cap \mathcal{Z}_y)$$

在 y_0 的某个开邻域上关于 y 亚纯地依赖。选取一个以 y_0 为中心的小球 $B \subset X$，并选取一个全纯截面 $s: B \to \mathcal{U}_1(X)$，使得 $s(y_0) = (y_0, \sigma_0)$。如有必要，缩小B 后，我们可以假设 $\rho_1 \circ s(B) \subset \mathscr{W}_0$。记

$$\sigma(y) = \rho_1 \circ s(y), \quad y \in B.$$

由于 $f_1^\sharp$ 是有理的，$f_1^\sharp$ 在 $s(y)$ 处的 m-阶喷射关于 y 亚纯地依赖。因此，系统 $A_y^{(m)}(\cdot;\sigma)$ 在 $\sigma = \sigma(y)$ 处的系数关于 y 亚纯地依赖。这意味着该系统的唯一解

$$Q(\cdot, L) = 0, \quad L \in f_1^\sharp(\mathscr{W}_0 \cap \mathcal{Z}_y)$$

应为 f 在 B 上的亚纯延拓。

假设定义了 $W_{i-1} \subset X$ 和 $\mathscr{W}_{i-1} \subset \mathcal{D}_r(X)$，使得 f 在W_{i-1} 上亚纯延拓，且对于所有 $\sigma \in \mathscr{W}_{i-1}$，$A^{(m)}(\cdot;\sigma)$ 都具有最大秩，其中令 $W_0 = \Omega$。定义

$$W_i := \bigcup_{\sigma\in\mathscr{W}_{i-1}} X_\sigma.$$

那么，如上所述，f 在 W_i 上亚纯延拓。定义 $\mathscr{W}_i$ 为 $\mathcal{Z}_y$ 中满足 $A_y^{(m)}(\cdot;\sigma)$ 在 σ 处具有最大秩的点 σ 的集合。由于 $y \in W_i$，根据定义，存在一点属于

$\mathcal{Z}_y$，在该点处，$A_y^{(m)}(\cdot;\sigma)$ 的秩为最大。由于秩条件是泛型的，$\mathscr{W}_i \cap \mathcal{Z}_y$ 在 $\mathcal{Z}_y$ 中稠密。特别地，

$$\mathscr{W}_{i-1} \subsetneq \mathscr{W}_i,$$

若 W_{i-1} 是 W_i 的真子集。

最后，我们将证明存在 i，使得 $W_i = X$。注意，根据多球面定理（[M89]），对于任意两个点 x、$y \in X$，存在一条由 X_σ、$\sigma \in \mathcal{D}_1(X)$ 构成的链，其长度为 $\leq q$，连接 x 和 y。令 $x \in \Omega$ $y \in \Omega^c$。选取一条连接 x 和 y 的链 X_{σ_1}，....., X_{σ_a}。令

$$\mathscr{W} := \{\sigma \in \mathcal{D}_r(X) : A_z^{(m)}(\cdot;\sigma) \text{ is of maximal rank for some } z \in X_\sigma.\ \}.$$

那么，$\mathscr{W}$ 在 $\mathcal{D}_1(X)$ 中扎里斯基稠密。注意，[HoNg21] 中的投影映射是一个全纯满射。因此，通过将 σ_j 移动得足够小，我们可以在 $\mathscr{W}$ 中选取另一些特征子空间 $\widetilde{\sigma}_1$，.....，$\widetilde{\sigma}_a$，使其链连接 y 和一个点 $\widetilde{x} \in \Omega$，即 $y \in W_a$。因此，f 可亚纯地延拓到 y 的一个邻域上，从而完成证明。□

4. 边界轨道的 CR 结构

有界对称域 Ω 的秩 r 边界轨道 $S_r = S_r(\Omega)$ 是一个齐性 CR 流形，其由秩为 r 的边界分支所叶状分解。本节中，我们研究第一类有界对称域 $\Omega = D_{p,q}$ 的 $S_r = S_r(\Omega)$ 的 CR 结构及其内部的子流形。我们参考 [KiZ15] 作为参考文献。

4.1. S_r的 CR 结构。对于每个 $x \in S_r = S_{p,q,r}$，存在唯一一个维数为 $q-r$ 的极大子空间$Z_0(x) \subset V_x$，使得

$$\langle Z_0(x), Z_0(x)\rangle = 0.$$

~我们将 $Z_0(x)$ 称为 V_x 的极大零空间。选择 $Z_0(x)$ 的一个补子空间 $Z \subset V_x$。我们将用 x 表示。

$$x = Z_0(x) \oplus \widetilde{Z}.$$

一个适配的 S_r-标架，或简称 S_r-标架，是一个向量集合

$$Z_1, \ldots, Z_{q-r}, \widetilde{Z}_1, \ldots, \widetilde{Z}_r, X_1, \ldots, X_{p-q+r}, Y_1, \ldots, Y_{q-r}$$

其中 $\mathbb{C}^{p+q}$ 对应的基本形式 $\langle\ 、\ \rangle = \langle\ 、\ \rangle_{p,\ q}$ 由矩阵给出

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I_{q-r} \\ 0 & -I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{p-q+r} & 0 \\ I_{q-r} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，我们有

$$Z_0(x) = \operatorname{span}\{Z_1, \ldots, Z_{q-r}\}, \quad V_x = Z_0 \oplus \operatorname{span}\{\widetilde{Z}_1, \ldots, \widetilde{Z}_r\}.$$

记

$$\widetilde{Z} := \operatorname{span}\{\widetilde{Z}_1, \ldots, \widetilde{Z}_r\}, \quad X := \operatorname{span}\{X_1, \ldots, X_{p-q+r}\}, \quad Y := \operatorname{span}\{Y_1, \ldots, Y_{q-r}\}.$$

则基本形式 $\langle$ 、 $\rangle$ 定义了自然对偶配对

$$Z_0(x) \times Y \to \mathbb{C}, \quad \widetilde{Z} \times \widetilde{Z} \to \mathbb{C}, \quad X \times X \to \mathbb{C}.$$

将 $\mathcal{B}_r = \mathcal{B}_{p,q,r} \to S_r$ 记为适配的 S_r-标架丛，将 π 记为 $\mathcal{B}_r$ 上的 Maurer-Cartan（联络）形式，它满足结构方程 $d\pi = \pi \wedge \pi$。于是我们可以写成

$$\begin{pmatrix} dZ_\alpha \\ d\widetilde{Z}_u \\ dX_k \\ dY_\alpha \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} Z_\beta \\ \widetilde{Z}_v \\ X_j \\ Y_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_\alpha{}^\beta & \widetilde{\theta}_\alpha{}^v & \theta_\alpha{}^j & \phi_\alpha{}^\beta \\ \widetilde{\sigma}_u{}^\beta & \widetilde{\omega}_u{}^v & \delta_u{}^j & \widetilde{\theta}_u{}^\beta \\ \sigma_k{}^\beta & \delta_k{}^v & \omega_k{}^j & \theta_k{}^\beta \\ \xi_\alpha{}^\beta & \widetilde{\sigma}_\alpha{}^v & \sigma_\alpha{}^j & \widetilde{\psi}_\alpha{}^\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\beta \\ \widetilde{Z}_v \\ X_j \\ Y_\beta \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

接下来，与 [KiZ15], 一样，我们将 $\mathcal{B}_r$ 上的形式与通过标架丛 $\mathcal{B}_r \to S_r$的局部截面拉回到 S_r 上的形式视为相同。基于这一约定，形式 $\phi_\alpha{}^\beta$构成了所有接触形式的空间的一组基，即

$$T_x^{1,0} S_r = \{\phi_\alpha{}^\beta = 0, \forall \alpha, \beta\}$$

而右上角分块中的形式

$$\begin{pmatrix} \theta_\alpha{}^j & \phi_\alpha{}^\beta \\ \delta_u{}^k & \widetilde{\theta}_u{}^\beta \end{pmatrix}$$

构成了 S_r上所有 (1, 0) 形式的一组基。我们将由 $\{\phi_\alpha{}^\beta,\ \forall \alpha, \beta\}$、 $\{\widetilde{\theta}_u{}^\beta, \theta_\alpha{}^j,\ \forall \alpha, \beta, u, j\}$ 和 $\{\delta_u{}^j,\ \forall u, j\}$分别张成的 1-形式空间记为 ϕ、 θ和 δ 。

标架变换有几种类型。

定义 4.1. 我们称一种标架变换为

i）位置变换，如果

$$Z'_\alpha = W_\alpha{}^\beta Z_\beta, \quad \widetilde{Z}'_u = W_u{}^\beta Z_\beta + W_u{}^v \widetilde{Z}_v, \quad Y'_\alpha = V_\alpha{}^\beta Y_\beta + V_\alpha{}^v \widetilde{Z}_v, \quad X'_j = X_j,$$

其中 $W_0 = (W_\alpha{}^\beta)$ 和 $V_0 = (V_\alpha{}^\beta)$ 是满足 $V_0^* W_0 = I_{q-r}$，$\sim$ $\sim$ $\sim$ 的 $(q-r) \times (q-r)$ 矩阵，$W = (W_u{}^v)$ 是满足 $W^*W = I_r$ 和 $V_\alpha{}^\beta W^*{}_\beta{}^\gamma + V_\alpha{}^v W^*{}_v{}^\gamma = 0$ 的 $r \times r$ 矩阵；ii）实向量变换，如果

$$Z'_\alpha = Z_\alpha, \quad \widetilde{Z}'_u = \widetilde{Z}_u, \quad X'_j = X_j, \quad Y'_\alpha = Y_\alpha + H_\alpha{}^\beta Z_\beta,$$

其中 $H = (H_\alpha{}^\beta)$ 是一个斜 Hermitian 矩阵；

iii）伸缩，如果

$$Z'_\alpha = \lambda_\alpha^{-1} Z_\alpha, \quad \widetilde{Z}'_u = \widetilde{Z}_u, \quad Y'_\alpha = \lambda_\alpha Y_\alpha, \quad X'_j = X_j,$$

其中 $\lambda_\alpha > 0$;

iv) 如果旋转

$$Z'_\alpha = Z_\alpha, \quad \widetilde{Z}'_u = \widetilde{Z}_u, \quad Y'_\alpha = Y_\alpha, \quad X'_j = U_j{}^k X_k,$$

其中，$(U_j{}^k)$ 是一个酉矩阵。

剩余的标架变换由下式给出。

$$Z'_\alpha = Z_\alpha, \quad \widetilde{Z}'_u = \widetilde{Z}_u, \quad X'_j = X_j + C_j{}^\beta Z_\beta, \quad Y'_\alpha = Y_\alpha + A_\alpha{}^\beta Z_\beta + B_\alpha{}^j X_j,$$

使得

$$C_j{}^\alpha + B_j{}^\alpha = 0$$

and

$$(A_\alpha{}^\beta + \overline{A_\beta{}^\alpha}) + B_\alpha{}^j B_j{}^\beta = 0,$$

其中

$$B_j{}^\alpha := \overline{B_\alpha{}^j}.$$

在每次标架变换下，联络一形式 π 的变化由 [KiZ15] 描述。

边界分支 Ω_σ 当且仅当包含 $x \in S_r$

$$\Omega_\sigma = [Z_0(x), Z_0^*(x)]_q \cap S_r.$$

因此，$\Omega_\sigma \subset S_r$ 是一个极大积分流形

$$dZ_\alpha = 0 \mod Z_0 \oplus \widetilde{Z}, \quad \forall \alpha$$

或者等价地说，是一个极大积分流形

$$\phi_\alpha{}^\beta = \widetilde{\theta}_u{}^\beta = \theta_\alpha{}^j = 0, \quad \forall \alpha, \beta, u, j.$$

引理4.2. 令 $A_x \subset \mathscr{C}_x(X)$为与 $T^{1,0}_x S_r$ 正交的特征方向集合，其中正交性是相对于典范Kähler-Einstein度量而言的。则

$$T_x[Z_0(x), Z_0(x)^*]_q = \mathscr{N}_{A_x},$$

其中，$\mathscr{N}_A$ 是第2.3节中定义的空间。

证明. 令 $\{Z_\alpha, \widetilde{Z}_u, X_j, Y_\alpha\}$ 为 x处的一个 S_r标架。由于 $\phi_\alpha{}^\beta$、α、$\beta = 1$、.....、$q-r$ 张成接触形式空间，经过适当的标架变换后，我们可以假设

$$\mathrm{span}\{A_x\} = \mathrm{Hom}(Z_0(x), Y).$$

取一个经过 x的 $q-r$ 维多球 $P_x = \prod_{\alpha=1}^{q-r} \mathbb{P}_\alpha$，其中 $\mathbb{P}_\alpha$ 是一条满足下列条件的射影直线

$$T_x \mathbb{P}_\alpha = \mathrm{Hom}(Z_\alpha, Y_\alpha).$$

那么，对于任意 $q-r$ 维零空间

$$V_0 = \mathrm{span}\{Z_\alpha + c_\alpha Y_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, q-r\}, \quad c_\alpha \in \mathbb{R},$$

以及 r 维负定空间

$$\widetilde{V} \subset \mathrm{span}\{\widetilde{Z}_u, X_j,\ u = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, p-q+r\},$$

~点 $V_0 \oplus V$包含于 S_r。因此，$\prod_{\alpha=1}^{q-r} \Delta_\alpha$ 是 Ω 中的一个全测地多圆盘，使得

$$\prod_{\alpha=1}^{q-r} \partial\Delta_\alpha \times \Omega_\sigma \subset S_r,$$

其中 $\Delta_\alpha = \mathbb{P}_\alpha \cap \Omega$ 和 $\Omega_\sigma = [Z_0(x)\ Z_0(x)^*]_q \cap S_r$，证毕 f. □

注意，由 (2.4) 可知，$T^{1,\ 0}S_r$ 具有正交分解

$$T_x^{1,0}S_r = \mathscr{H}_{A_x} \oplus \mathscr{N}_{A_x}.$$

对于每个固定的边界分支 $\Omega_\sigma \subset S_r$，空间 span$\{A_x\}$、$\mathscr{H}_{A_x}$ 和 $\mathscr{N}_{A_x}$ 沿着 Harish-Chandra 坐标中的 $x \in \Omega_\sigma$ 平行（参见 [MTs92]）。

4.2. $\mathscr{S}_M^r$ 的 CR 结构。设 M 是形如 $M = [V_M, V_M^*]_q$ 的子格拉斯曼流形，其中 V_M 是某个 $q-s$ 维零空间，且满足 $s < r$。那么，对任意 $x \in S_r$，x 包含于 $\mathscr{S}_M = \mathscr{S}_M^r$ 当且仅当 $Z_0(x) \subset V_M$，即，

$$\mathscr{S}_M = \{x \in S_r : \langle Z_0(x), V_M^* \rangle = 0\}.$$

因此

$$\operatorname{span}\{Z_0(x) : x \in \mathscr{S}_M\} = V_M$$

且 $\mathscr{S}_M \subset S_r$ 是一个极大积分流形

$$\langle dZ_\alpha, V_M^* \rangle = 0, \quad \alpha = 1, \dots, q-r.$$

由（2.5），$\mathscr{Z}_M = \mathscr{Z}_M^r$ 是如下形式的舒伯特簇

$$\{x \in X : \dim V_x \cap V_M \geq q-r,\ \dim V_x \cap V_M^* \geq q-r+s\}$$

当 $s > 0$ 时，以及如下形式

$$\{x \in X : \dim V_x \cap V_M \geq q-r\}$$

当 $s = 0$时。

引理4.3. $\mathscr{S}_M$ 是一个CR流形，满足

$$T_x^{1,0}\mathscr{S}_M = T_x^{1,0}[Z_0(x), Z_0(x)^*]_q.$$

此外，若Ω是管型且 $P \in S_0$，则对于 $x \in \mathscr{S}_P$，

$$\left\{v - \sqrt{-1}J(v) : v \in T_x\mathscr{S}_P\right\} = T_x^{1,0}\mathscr{Z}_P = T_x^{1,0}S_r,$$

其中 J 是 X的复结构。

~证明。令 $\{Z_\alpha, Z_u, X_j, Y_\alpha\}$ 为 x处的一个适配的 S_r(Ω)-标架，使得

$$dZ_\alpha = \widetilde{\theta}_\alpha^{\ u}\widetilde{Z}_u + \theta_\alpha^{\ j}X_j + \phi_\alpha^{\ \beta}Y_\beta \mod Z_0(x).$$

然后在 $T_x\mathscr{S}_M$ 上，我们得到

$$\widetilde{\theta}_\alpha^{\ u}\langle \widetilde{Z}_u, V_M^* \rangle + \theta_\alpha^{\ j}\langle X_j, V_M^* \rangle + \phi_\alpha^{\ \beta}\langle Y_\beta, V_M^* \rangle = 0, \quad \alpha = 1, \dots, q-r. \tag{4.2}$$

由于 V_M 是包含 Z_0（x）的零空间，经过标架变换后，我们可以假设

$$V_M = \operatorname{span}\{Z_\alpha, \widetilde{Z}_u - X_u,\ \alpha = 1, \dots, q-r,\ u = 1, \dots, r-s\}.$$

Then

$$V_M^* = V_M + \operatorname{span}\{\widetilde{Z}_u, X_j,\ u, j > r-s\}.$$

因此，由 (4.2) 可得

$$T_x\mathscr{S}_M = \{\phi_\alpha^{\ \beta} = \widetilde{\theta}_\alpha^{\ u} = \square_\alpha^{\ j} = 0,\ \alpha,\beta = 1,\dots,q-r,\ j = 1,\dots,p-q+r,\ u = r-s+1,\dots,r\},$$

where

$$\square_\alpha^{\ j} = \widetilde{\theta}_\alpha^{\ j} + \theta_\alpha^{\ j},\quad j = 1,\dots,r-s$$

and

$$\square_\alpha^{\ j} = \theta_\alpha^{\ j},\quad j = r-s+1,\dots,p-q+r.$$

设 $v \in T^{1,0}_x\mathscr{S}_M$。那么 $Re(v)$ 和 $Im(v)$ 应满足

$$\phi_\alpha^{\ \beta} = \widetilde{\theta}_\alpha^{\ u} = \square_\alpha^{\ j} = 0,\quad \alpha,\beta = 1,\dots,q-r,\ j = 1,\dots,n,\ u = r-s+1,\dots,r,$$

这意味着

$$\phi_\alpha^{\ \beta} = \widetilde{\theta}_u^{\ \beta} = \theta_\alpha^{\ j} = 0,\quad \forall\alpha,\beta,u,j.$$

因此

$$T^{1,0}_x\mathscr{S}_M = T_x[Z_0(x), Z_0(x)^*]_q.$$

若 $M = \{P\}$ 且 Ω 为管型，则 $s = 0$ 且 $V_P^* = V_P$。因此，在 $x \in \mathscr{S}_P$ 的一个邻域上，$\mathscr{Z}_P$ 由下式定义

$$\{x \in X : \dim V_x \cap V_P = q-r\},$$

这意味着

$$T^{1,0}_x\mathscr{Z}_M = \{\phi_\alpha^{\ \beta} = 0\} = T^{1,0}_x S_r,$$

证明完成。 □

~在引理4.3的证明中，我们证明了存在一个 S_r-标架 $\{Z_\alpha, Z_u, X_j, Y_\alpha\}$，使得在 x 处， $\mathscr{S}_M$ 是

$$\phi_\alpha^{\ \beta} = \widetilde{\theta}_\alpha^{\ u} = \square_\alpha^{\ j} = 0,\quad u = r-s+1,\dots,r,\ j = 1,\dots,p-q+r,$$

其中

$$\square_\alpha^{\ j} = \widetilde{\theta}_\alpha^{\ j} + \theta_\alpha^{\ j},\quad j = 1,\dots,r-s$$

and

$$\square_\alpha^{\ j} = \theta_\alpha^{\ j},\quad j = r-s+1,\dots,p-q+r.$$

我们将由 $\square_M$表示由 $\{\square_\alpha^{\ j}$、 $\forall\alpha$、 $j\}$. 张成的1-形式空间。如果 $M = P$，为简便起见，我们将$\square_M$ 记为 $\square_P$。于是，对于这样的标架，我们得到以下引理。

引理 4.4. 设 Ω_σ 是 Ω 的一个秩为 $r > s$ 的边界分支，且 $\Omega_\sigma \subset \mathscr{Z}^r_M$，并设 $x \in \Omega_\sigma$ 是 $\mathscr{Z}^r_M$ 的一个光滑点。那么 $T^{1,0}_x\mathscr{Z}^r_M$ 是由下式定义的 $T^{1,0}_x S_r$ 的一个子空间。

$$\widetilde{\theta}_u^{\ \beta} = \theta_\alpha^{\ j} = 0,\quad u, j > r-s.$$

证明。由于 x 是 $\mathscr{Z}_M$ 的光滑点， $\mathscr{Z}_M$ 在局部由以下定义：

$$\{y \in X : \dim V_y \cap V_M = q - r,\ \dim V_y \cap V_M^* = q - r + s\}$$

当 $s > 0$ 和

$$\{y \in X : \dim V_y \cap V_M = q - r\}$$

当 $s = 0$ 时，证明至此完成。 □

5. Second fundamental form of f

5.1. 横截性。在本小节中，我们证明全纯映射 f 在第一类有界对称域之间、于一般的 Shilov 边界点处具有横截性。更确切地说，我们将证明以下命题。

命题 5.1. 设 $f : \Omega \to \Omega'$ 是第一类不可约有界对称域之间的真全纯映射。假设存在一点 $P \in S_0(\Omega)$ 及其一个开邻域U，使得 f 延拓 C^2 到 U。进一步假设 f 将 $S_0(\Omega) \cap U$ 映到 $S_0(\Omega')$。那么，对于 Ω' 中的一般点 $x \in S_0(\Omega) \cap U$， $f_*(v)$ 的秩等于 Ω' 对一般 $v \in T_x X$ 的秩。

首先我们将证明以下结论。

引理 5.2. 设 $\Delta \subset \mathbb{C}$ 为单位圆盘，且 $h : \Delta \to \mathbb{B}^n, n \geq 2$ 是一个真全纯映射，C^2 延拓到边界的一个连通开集 U。则集合 $\{P \in U\colon\ h_*(\nu_P) \in T^c\partial\mathbb{B}^n\}$ 是 $\partial\Delta$ 的无处稠密子集，其中 ν_P 是 Δ 在 P 处的外法向量，且 $T^c\partial\mathbb{B}^n = T\partial\mathbb{B}^n \cap J(T\partial\mathbb{B}^n)$。

证明。由于证明中的一切都是纯粹局部的，我们不妨设 h 在左半平面 $\mathbb{H} = \{\zeta = r + \sqrt{-1}t : r < 0\}$ 上全纯，且 $\nu_P = \dfrac{\partial}{\partial r}$. 假设存在一个开集 $U \subset \partial\mathbb{H}$，使得 h 是 C^2 并且

$$h_*(\nu_P) \in T^c\mathbb{B}^n, \quad P \in U$$

或者等价地

$$h'(P) \cdot \overline{h(P)} = \sum_j h_j'(P)\overline{h_j(P)} = 0, \quad P \in U, \tag{5.1}$$

其中 $h = (h_1, \ldots, h_n)$ 且 $h_j' = \dfrac{dh_j}{d\zeta}$。应用 $\dfrac{\partial}{\partial t} = \mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\right)$ 可得

$$\sum_j h_j''(P)\overline{h_j(P)} - \sum_j |h_j'|^2(P) = 0, \quad P \in U. \tag{5.2}$$

撰写

$$h(r + it) = A_0(t) + A_1(t)r + A_2(t)r^2 + o(r^2).$$

于是，由 (5.1) 和 (5.2) 可得

$$A_1(t) \cdot \overline{A_0(t)} = 0, \quad A_2(t) \cdot \overline{A_0(t)} = \|A_1(t)\|^2, \quad t \in U.$$

因此，对于 $t \in U$,

$$\begin{aligned} \|h(r+it)\|^2 &= (A_0(t)+A_1(t)r+A_2(t)r^2)\cdot\overline{(A_0(t)+A_1(t)r+A_2(t)r^2)}+o(r^2) \\ &= 1+3\|A_1(t)\|^2r^2+o(r^2). \end{aligned}$$

由于 h 是适当的,

$$\|A_1(t)\|^2 \le 0, \quad t \in U.$$

Then

$$\|h'(P)\|^2 = 0, \quad P \in U,$$

这意味着 h 是常数，与 h 是适当映射的假设相矛盾。 □

命题 5.1 的证明：取一个全测地全纯圆盘 $\phi: \Delta \to \Omega$，使得$\phi(\partial\Delta) \subset S_0(\Omega)$ 且 $\phi(\partial\Delta) \cap U \neq \emptyset$。在 Harish-Chandra 坐标中写作 $F := f\circ\phi = (F_1,\ldots,F_{q'}): \Delta \to \Omega'$，其中 F_j 是一个向量值函数。由于 f 将 Shilov边界映射到 Shilov边界，在 $\partial\Delta$ 上，我们得到

$$F_j \cdot \overline{F}_k = \delta_{jk}, \quad j,k = 1,\ldots,q'. \tag{5.3}$$

根据引理 5.2，存在 $P \in \partial\Delta$ 使得

$$F_j'(P)\cdot\overline{F}_j(P) \neq 0, \quad j = 1,\ldots,q'.$$

复合 Ω' 的一个自同构后，我们可以假设

$$F(P) = (Id_{q'};0)^t.$$

记

$$F = (f_1;f_2)^t,$$

其中 f_1 是一个取值于 $q'\times q'$ 矩阵的全纯函数。沿着 $\partial\Delta$ 对 (5.3) 求导，可得

$$(f_1')(P) = (\overline{f_1'(P)})^t,$$

即，$(f_1'(P))$ 是一个 Hermitian矩阵，其每个对角元都非零。对于任何固定 $F(P)$ 的 Ω' 自同构，这一性质仍然成立。因此， f_1' 的秩为 q'，证明完毕。

现在令 $f:\Omega \to \Omega'$ 如定理1.2所述。将 f 限制在每个边界分支上，它是一个映入 Ω' 的某个边界分支的全纯映射，并可延拓至边界，将 Shilov边界映至 Shilov边界。因此，根据命题 5.1，我们得到以下引理。

从现在起，我们分别用 $S_r(\Omega)$ 和 $S_r(\Omega')$ 表示 Ω 和 Ω' 的秩为 r 的边界轨道。

引理 5.3. 假设存在 Ω 的一个 Shilov 边界点的非空开邻域 U，使得 f将 C^2延拓 U到 $f(S_1(\Omega)\cap U) \subset S_r(\Omega')$。那么存在 $P \in S_0(\Omega)\cap U$，使得 $f_*(\nu)$ 对一般的 $[\nu] \in \mathscr{C}_P(X)$具有 r 秩。

由于 f 在 Ω 中全纯，若 f 满足引理 5.3 中的条件，则 $f_*(\nu)$ 对一般的 Ω 中的 $P \in$ 以及一般的 $[\nu] \in \mathscr{C}_P(X)$具有 $\overline{r}$秩。从现在起，直到本节结束，我们假设 Ω 为管型，并且 $f_*(\nu)$ 对一般的 Ω 中的 $P \in$ 以及一般的 $[\nu] \in \mathscr{C}_P(X)$具有 r 秩。

令 $f_1^\sharp\colon\ \mathcal{D}_1(X) \to \mathcal{F}_{a,\ b}(X')$ 为由 f 诱导的模映射。由于对于一般的 $\nu \in \mathscr{C}(\Omega)$，$f_*(\nu)$ 的秩为 r，因此对 $\sigma \in \mathcal{D}_1(S_1(\Omega))$ $f_1^\sharp(\sigma)$，其形式为 $[A,B]_{q'}$，其中 A 是一个 $(q'-r)$ 维零空间。由于 $f_1^\sharp$ 是有理的，且 $\mathcal{D}_1(S_1(\Omega))$ 是一个 CR流形，不包含于 $\mathcal{D}_1(X)$ 的任何正余维复子簇中（见 [KiMSe22]），因此对于任意 $\sigma \in Dom(f_1^\sharp)$，$f_1^\sharp(\sigma)$ 的形式为 $[A,B]_{q'}$，其中 A 是一个 $(q'-r)$ 维子空间。也就是说，$f_1^\sharp$ 是到 $\mathcal{F}_{q'-r,\ b}(X')$ 的映射，其中 b。

Let

$$Pr : \mathcal{F}_{q'-r,b}(X') \to Gr(q'-r, \mathbb{C}^{p'+q'})$$

是质数 马会话题? jection 定义为 $Pr((A,B)) = A$。对于 Ω 中的一般点 $P \in S_0$，定义

$$\mathcal{L}_P := \{(A, A^*) \in \mathcal{D}_r(X') : A \in Pr(\overline{f_1^\sharp(\mathcal{S}_P) \cap Dom(f_1^\sharp)})\}$$

and

$$\mathscr{L}_P := \pi'_r\left((\rho'_r)^{-1}(\mathcal{L}_P)\right), \tag{5.4}$$

其中，$\pi'_r\colon\ \mathcal{U}_r(X') \to X'$, $\rho'_r : \mathcal{U}_r(X') \to \mathcal{D}_r(X')$ 是第 2.4 节中定义的秩为 r 、位于 X' 上的特征空间万有族的典范双纤维化。由于 f 是一个 CR 映射，对于每个一般的边界分支 $\Omega_\sigma \subset S_1(\Omega)$，都存在唯一一个秩为 r 的 Ω' 的边界分支，使得它包含 $f(\Omega_\sigma)$。这个边界分支由以下形式给出。

$$[Z_0(f(x)), Z_0(f(x))^*]_{q'} \cap S_r(\Omega'), \quad x \in \Omega_\sigma,$$

其中，我们用 $Z_0(y)$ 表示 V_y 关于 $y \in \partial\Omega'$的极大零空间。回想一下，$Z_0(f(x))$ 在每个边界分支上都是常数。因此

$$Z_0(f(\mathscr{S}_P \cap U))) \subset Pr(\overline{f_1^\sharp(\mathcal{S}_P) \cap Dom(f_1^\sharp)})$$

因此

$$f(\mathscr{S}_P \cap U) \subset \mathscr{L}_P. \tag{5.5}$$

由于秩为 r 的边界轨道上的每个点都有唯一的余维为 r 的极大零空间，我们可以定义光滑映射 $\Pi\colon\ S_r(\Omega')$ $\to Gr(q'-r, \mathbb{C}^{p'+q'})$，使得 $\Pi(y) = Z_0(y)$。于是对于任意一般的 $x \in \mathscr{S}_P \cap U$，存在 $f(x)$ 的 $U' \subset S_r(\Omega')$ 开邻域，使得

$$\mathscr{L}_P \cap U' = \Pi^{-1}\left(Z_0(f(\mathscr{S}_P^1 \cap U))\right) \cap U'.$$

对于 $x \in \mathscr{S}_P \cap U$处的一般点，我们可以假设 $\Pi \circ f$ 在 x 处是到其像上的满射，因此

$$T_{f(x)}\mathscr{L}_P = f_*(T_x\mathscr{S}_P^1(\Omega)) + ker(\Pi_*).$$

通过复化，我们得到

$$\{v - \sqrt{-1}Jv : v \in T_{f(x)}\mathscr{L}_P\} = f_*(T_x^{1,0}S_1) + T_{f(x)}[Z_0(f(x)), Z_0(f(x))^*]_{q'}. \tag{5.6}$$

设 $P \in S_0(\Omega) \cap \overline{\Omega}_\sigma$ 是某个秩一边界分支 Ω_σ，并设 $x = P + \lambda\nu_\sigma \in \Omega_\sigma \subset S_1(\Omega)$ 是 U 中的一般点，其中 $\nu_\sigma \in T_P X$ 是 X_σ 中 Ω_σ 在 P 处的外法向量，且 $\lambda < 0$ 是一个充分小的实数。那么

$$f(P + \lambda\nu_\sigma) = f(P) + \lambda f_*(\nu_\sigma) + O(\lambda^2) \in \Omega'_{\sigma'},$$

其中，$\Omega'_{\sigma'}$ 是包含 $f(\Omega_\sigma \cap U)$ 的 Ω' 的秩为 r 的边界分支。由于 $f_*(\nu_\sigma)$ 的秩为 r，且在 $f(P)$ 处与 $f(X_\sigma)$ 相切，我们可以假设，对于所有充分小的 $\lambda < 0$，$f(P + \lambda\nu_\sigma)$ 和 $f(P) + \lambda f_*(\nu_\sigma)$ 都包含在同一个边界分支 $\Omega'_{\sigma'}$ 中，即:

$$Z_0(f(x)) = Z_0(f(P) + \lambda f_*(\nu_\sigma)).$$

由于 $T_y\mathscr{L}_P$ 是平行的 沿着 Harish-Chandra 坐标中的 $y \in [Z_0(f(x))\ Z_0(f(x))^*]_{q'}$，它意味着 s

$$T_{f(x)}\mathscr{L}_P = T_{f(P)+\lambda f_*(\nu_\sigma)}\mathscr{L}_P$$

在平行平移下。

现在考虑秩一边界分支 $\Omega_{\sigma(t)}$, $t \in (-\epsilon,\ \epsilon)$ 的一个单参数族，使得

$$T_P X_{\sigma(t)} = (a + tb)^* \otimes (a + tb).$$

也就是说，经过适当的标架变换后，我们可以选取 $\mathbb{C}^{2q}$ 的一个 $S_1(\Omega)$-标架 $\{e_1, \ldots, e_q, e_1^*, \ldots, e_q^*\}$，使得

$$\langle e_i, e_j\rangle = \langle e_i^*, e_j^*\rangle = \langle e_i, e_j^*\rangle - \delta_{i,j} = 0$$

使得

$$V_P = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_q\}$$

and

$$X_{\sigma(t)} = [V_{\sigma(t)}, V_{\sigma(t)}^*]_q,$$

其中

$$V_{\sigma(t)} = \operatorname{span}\{e_1 + \sqrt{-1}te_q, e_2, \ldots, e_{q-1}\}, \quad V_{\sigma(t)}^* = \operatorname{span}\{e_q, e_q^* + \sqrt{-1}te_1^*\} + V_{\sigma(t)}.$$

取两条曲线

$$x(t) := f(P + \lambda\nu_{\sigma(t)}), \quad t \in (-\epsilon,\ \epsilon) \tag{5.7}$$

and

$$y(t) := f(P) + \lambda f_*(\nu_{\sigma(t)}) = f(P) + \lambda\left(f_*(\nu_a) + tf_*(v_{a,b}) + t^2 f_*(\nu_b)\right), \quad t \in (-\epsilon,\ \epsilon),$$

其中 ν_a、ν_b 和 $v_{a,\ b}$ 是 $T_P X$ 中的向量，且向量场

$$\nu_{\sigma(t)} := \nu_a + tv_{a,b} + t^2\nu_b, \quad t \in (-\epsilon,\ \epsilon)$$

满足

$$T_P X_{\sigma(t)} = \mathbb{C}\nu_{\sigma(t)}.$$

缩小（$-\epsilon$, ϵ）后，我们可以假设对于一个充分小的固定 $\lambda < 0$,

$$Z_0(x(t)) = Z_0(y(t)), \quad t \in (-\epsilon,\ \epsilon).$$

Set

$$\mathscr{L}_{a,b} := \bigcup_{t\in(-\epsilon,\ \epsilon)} [Z_0(y(t)), Z_0(y(t))^*]_{q'}.$$

由于 $f(P)$ 是一个 Shilov 边界点， $Z_0(y(t))$ 是 $V_{f(P)}$ 的一个子空间，即，

$$Z_0(y(t)) = V_{y(t)} \cap V_{f(P)}.$$

因此 $\mathscr{L}_{a,\ b}$ 是舒伯特簇的一个子流形

$$\mathcal{W}_P := \{y \in Gr(q', p') : \dim V_y \cap V_{f(P)} \geq q' - r\}.$$

此外， $y(0)$ 是 $\mathcal{W}_P$ 的一个光滑点。另一方面，由于 $y(t)$ 是一条次数为二的曲线，$\{y(t) : t \in (-\epsilon,\ \epsilon)\}$ 包含于

$$y(0) + \mathrm{span}\{\dot{y}(0), \ddot{y}(0)\} \subset y(0) + T_{y(0)}\mathcal{W}_P,$$

其中

$$\dot{y}(0) = \frac{dy}{dt}(0) = f_*(v_{a,b}), \quad \ddot{y}(0) = \frac{d^2y}{dt^2}(0) = 2f_*(\nu_b).$$

这里我们将 $y(0) + T_{y(0)}\mathcal{W}_P$ 视为 X' 中经过 $y(0)$ 的一个线性子集。因此，曲线$Z_0(y(t))$， $t \in(-\epsilon,\ \epsilon)$ 在 t 中次数为二，并包含于一个线性子空间

$$Z_0(y(0)) + \mathrm{span}\{\Pi_*(\dot{y}(0)), \Pi_*(\ddot{y}(0))\}.$$

这里我们将 $Z_0(y(0))$ + 张成空间$\{\Pi_*(\ \dot{y}(0))\ \Pi_*(\ddot{y}(0))\}$ 视为 $Gr(q'-r, V_{f(P)})$ 中经过 $Z_0(y(0))$ 的一个线性子集。由于

$$\Pi_*(\dot{y}(0)) = \frac{dZ_0(y(t))}{dt}(0), \quad \Pi_*(\ddot{y}(0)) = \frac{d^2Z_0(y(t))}{dt^2}(0),$$

我们得到

$$Z_0(x(t)) = Z_0(y(t)) \in Z_0(f(x)) + \mathrm{span}\left\{(Z_0)_*(\dot{x}(0)), \frac{d^2Z_0 \circ x(t)}{dt^2}(0)\right\}, \quad t \in (-\epsilon,\ \epsilon).$$

由于 a、 b 是任意的，我们得到

$$Z_0(f(\mathscr{S}_P \cap U)) \subset Z_0(f(x)) + T_{Z_0(f(x))}Z_0(f(\mathscr{S}_P)) + \mathbb{FF}^{(2)}_{Z_0(f(x))}Z_0(f(\mathscr{S}_P)),$$

其中， $\mathbb{FF}^{(2)}_{Z_0}$ $(f$ (x) $Z_0(f(\mathscr{S}_P))$ 是在大舒伯特胞腔中，相对于 T_{Z_0} $(f$ (x) $Gr(q'-r, V_{f(P)}) \subset Gr($ q' $-r, V_{f(P)})$ 的平坦（欧氏）联络， $Z_0(f(\mathscr{S}_P \cap U))$ 在 $Z_0(f(x))$ 处的第二基本形式的张成空间。

5.2. f 的第二基本形式： $S_1(\Omega) \cap U \to S_r(\Omega')$。我们将使用大写希腊字母$\Phi_\alpha^{\ \beta}$、 $\widetilde{\Theta}_U^{\ \beta}$、 $\Theta_\alpha^{\ J}$、 $\Delta_U^{\ J}$等表示 $\mathcal{B}_r(\Omega') = \mathcal{B}_{p',\, q',\, r}$ 上的联络一形式，并将其拉回到 $S_r(\Omega') = S_{p',\, q',\, r}$。由于 f 是一个CR映射， f 满足

$$\begin{aligned} f^*(\Phi_\alpha^{\ \beta}) &= 0 \mod \phi, \\ f^*(\Theta_\alpha^{\ J}) = f^*(\widetilde{\Theta}_U^{\ \beta}) &= 0 \mod \phi, \theta, \\ f^*(\Delta_U^{\ J}) &= 0 \mod \phi, \theta, \delta. \end{aligned} \tag{5.8}$$

由于本节中的一切都是纯粹局部的，并且 f 限制到 $S_1(\Omega)$ 是一个开集上的局部嵌入，我们可以省略 U并将 $T^{1,\, 0}_{\cdot,\, x} S_1(\Omega)$ 与 $f_*(T^{1,\, 0}_{\cdot,\, x} S_1(\Omega))$ 识别。然后，经由 f 的1-形式拉回就是将1-形式限制到 $T^{1,\, 0}_{\cdot,\, f(x)} f(S_1(\Omega))$。在下文中，如果不会引起混淆，我们将省略 f^*。

对于 $x \in S_1(\Omega)$， $f_*(T^{1,\, 0}_{\cdot,\, x} S_1(\Omega))$ 是 $\mathrm{Hom}(V_{f(x)}, \mathbb{C}^{p'+q'}/V_{f(x)})$ 中的一个子空间。我们分别在 $V_{f(x)}$ 和 $\mathbb{C}^{p'+q'}/V_{f(x)}$ 中定义子空间 K_x 和 R_x，定义如下：

$$K_x := \bigcap \left\{ \text{核}\ (proj(v)) : \ v \in f_*(T^{1,\, 0}_{\cdot,\, x} S_1(\Omega)) \right\}, \quad R_x := \text{张成空间}_{\mathbb{C}} \left\{ \text{像}\ (proj(v)) : \ v \in f_*(T^{1,\, 0}_{\cdot,\, x} S_1(\Omega)) \right\}.$$

其中， $proj$ 是关于典范K¨ahler-Einstein度量的 $T_{f(x)}[Z_0(f(x))\ Z_0(f(x))^*]_{q'} \subset T_{f(x)} X'$ 的正交补的投影。然后

$$Gr_x := \left\{ A \in \mathrm{Hom}\left(V_{f(x)}, R_x\right) : \mathrm{Ker}(A) \supset K_x \right\} \cap T^{1,0}_{f(x)} S_r(\Omega') + T_{f(x)}[Z_0(f(x)), Z_0(f(x))^*]_{q'}$$

是 T^1 中的一个线性子空间, $f^{\ 0}_{\cdot\, x()} S_r(\Omega')$，它包含 $f_*(T^{1,\, 0}_{\cdot,\, x} S_1(\Omega))$。

设 $P \in S_0(\Omega)$ 是一个点，使得 $x \in \mathscr{S}_P$。那么 $f(P)$ 是 $S_0(\Omega')$ 中的一个点，使得

$$f(\mathscr{S}_P) \subset \mathscr{S}'_{f(P)}. \tag{5.9}$$

经过旋转和位置变换后，我们可以假设

$$V_{f(P)} = Z_0(f(x)) + \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{V_U := \widetilde{Z}_U - X_U,\ U = 1, \ldots, r\}$$

and

$$T_{f(x)} \mathscr{Z}'_{f(P)} = \{\Phi_\alpha^{\ \beta} = \Theta_\alpha^{\ J} = 0,\ \alpha, \beta = 1, \ldots, q' - r,\ J > r\}.$$

由于 Ω 是管型的，因此

$$f_*(T^{1,0}_x S_1(\Omega)) = f_*(T_x \mathscr{Z}_P) \subset T_{f(x)} \mathscr{Z}'_{f(P)},$$

我们得到

$$\Theta_\alpha^{\ J} = 0 \mod \phi, \quad J > r.$$

因此

$$Gr_x \subset \{\Phi_\alpha^{\ \beta} = \Theta_\alpha^{\ J} = 0,\ J > r\}, \quad \forall \alpha, \beta, U.$$

经过旋转和位置变换后，我们可以假设

$$Gr_x = \{\Phi_\alpha^{\ \beta} = \Theta_\alpha^{\ J} = \widetilde{\Theta}_U^{\ \beta} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, q' - r,\ J > J_1,\ U > U_1\}$$

对于某些整数 $U_1, J_1 \leq r$。那么在 $f_*(T^{1,\, 0}_{\cdot,\, x} S_1(\Omega))$ 上，有：

$$\Theta_\alpha^{\ J} = \widetilde{\Theta}_U^{\ \beta} = 0 \mod \phi, \quad J > J_1,\ U > U_1.$$

另一方面，根据（5.9），我们得到

$$\widetilde{\Theta}_{\alpha}^{\ U}+\Theta_{\alpha}^{\ U}=0 \mod \phi,\Box_P.$$

因此，如果 $U>U_1$，那么

$$\Theta_{\alpha}^{\ U}=0 \mod \phi,\Box_P.$$

由于 f 是一个CR映射，因此它意味着

$$\Theta_{\alpha}^{\ J}=0 \mod \phi, \quad J>U_1.$$

同样地，我们得到

$$\widetilde{\Theta}_{\alpha}^{\ U}=0 \mod \phi, \quad U>J_1.$$

因此,

$$J_1=U_1$$

and

$$\Theta_{\alpha}^{\ J}=\widetilde{\Theta}_{U}^{\ \beta}=0 \mod \phi, \quad U,J>J_1. \tag{5.10}$$

因此，对于一般的 $x\in S_1$(Ω)，存在一个 S_r(Ω′)-标架的约化，使得

$$Gr_x=\{\Phi_{\alpha}^{\ \beta}=\Theta_{\alpha}^{\ J}=\widetilde{\Theta}_{U}^{\ \beta}=0, \quad \alpha,\beta=1,\dots,q'-r,\ J,U>J_1\}.$$

此外，根据 K_x 和 R_x的定义，对于每个固定的 $j\le J_1$ 和 $u\le J_1$，都存在 α 和 β，使得 $\Theta_{\alpha}^{\ j}$和 $\widetilde{\Theta}_{u}^{\ \beta}$模 ϕ不消失。从现在起，除非另有说明，小写指标 u、v、 j、 k均取值于 1 到 J_1，大写指标 U、V、 J、K均从 J_1+1开始。

利用结构方程对 (5.10) 求导，得到

$$\widetilde{\Theta}_{\alpha}^{\ v}\Delta_{v}^{\ J}+\Theta_{\alpha}^{\ k}\Omega_{k}^{\ J}=\widetilde{\Omega}_{U}^{\ v}\widetilde{\Theta}_{v}^{\ \beta}+\Delta_{U}^{\ k}\Theta_{k}^{\ \beta}=0 \mod \phi,\theta\wedge\overline{\theta}. \tag{5.11}$$

我们将证明

$$\Delta_{v}^{\ J}=\Delta_{U}^{\ k}=0 \mod \theta,\phi \tag{5.12}$$

and

$$\Omega_{k}^{\ J}=\widetilde{\Omega}_{U}^{\ v}=0 \mod \phi,\theta,\overline{\theta}. \tag{5.13}$$

固定 $J>J_1$。对 α 使用归纳法，我们可以选取一个仍满足 (5.10) 的位置变换，以及一列正整数 $v_1<v_2<\ldots<v_{q'-r}$，使得 $\Theta_{\alpha}^{\ v}$、 $v_{\alpha-1}<v\le v_\alpha$ 模 ϕ 线性无关，且对于 $v>v_\alpha$， $\Theta_{\alpha}^{\ v}$模 ϕ 消失，其中令 $v_0=0$。根据关于 J_1的条件，我们得到 $v_{q'-r}=J_1$.。因此，利用 (5.11) 对 α进行归纳，可得

$$\sum_{v_{\alpha-1}<v\le v_\alpha}\widetilde{\Theta}_{\alpha}^{\ v}\Delta_{v}^{\ J}=0 \mod \phi,\theta,$$

由嘉当引理和（5.8）可知,

$$\Delta_{v}^{\ J}=0 \mod \phi,\theta.$$

同样的论证也适用于其他情形。

选择一条形如 (5.7) 的曲线 $x\colon(-\epsilon,\ \epsilon)\to\mathscr{S}'_{f(P)}$，使得 $x(0)=f(x)$。我们可以假设的是

$$\dot{x}(0)\notin T_{f(x)}[Z_0(f(x)),Z_0(f(x))^*]_{q'}.$$

写作

$$Z_\alpha(x(t))=t\sum_{U=1}^{r}C_\alpha{}^UV_U+t^2\sum_{U=1}^{r}D_\alpha{}^UV_U+O(t^3)\mod Z_0(f(x_0)),\quad \alpha=1,\dots,q'-r,\tag{5.14}$$

其中

$$V_U=\widetilde{Z}_U-X_U,\ U=1,\dots,r$$

它们是向量，与 $Z_0(f(x))$ 一起张成 $V_{f(P)}$。写作

$$Z_\alpha(x(s))=Z_\alpha((x(t))+(s-t)V_\alpha(t)+O((s-t)^2),\quad s,t\in(-\epsilon,\ \epsilon)$$

对于某个形式如下的向量场 $V_\alpha(t)$

$$V_\alpha(t)=\sum_{U=1}^{r}C_\alpha{}^U(t)V_U\mod Z_0(f(x)),\quad t\in(-\epsilon,\ \epsilon).$$

于是，鉴于 (5.14),

$$C_\alpha{}^U(t)=C_\alpha{}^U$$

and

$$\sum_{U=1}^{r}C_\alpha{}^UV_U(t)=\sum_{U=1}^{r}C_\alpha{}^UV_U+2t\sum_{U=1}^{r}D_\alpha{}^UV_U+O(t^2).\tag{5.15}$$

由 (5.10),

$$C_\alpha{}^U=0,\quad U>J_1.$$

对 t求 (5.15) 的导数,

$$C_\alpha{}^u\dot{V}_u(0)=2\sum_{U=1}^{r}D_\alpha{}^UV_U.\tag{5.16}$$

另一方面，由于

$$dZ_\alpha=\frac{1}{2}(\widetilde{\Theta}_\alpha{}^u-\Theta_\alpha{}^u)V_u\mod\phi,\square_P,$$

张成空间$\{V_u(0)\ \ u=1,\ \ldots\ldots,\ J_1\}$由.....得到

$$dV_U=d\widetilde{Z}_U-dX_U=\sum_{W=1}^{r}(\widetilde{\Omega}_U{}^W-\overline{\Delta}_U{}^W)\widetilde{Z}_W+\sum_{J=1}^{p'-q'+r}(\Delta_U{}^J-\Omega_U{}^J)X_J\mod Z_0,Y.\tag{5.17}$$

定义

$$\widehat{V}_U=\widetilde{Z}_U+X_U,\quad U=1,\dots,r$$

从而

$$\langle V_U,\widehat{V}_W\rangle=-2\delta_U{}^W,\quad U,W=1,\dots,r$$

and

$$\langle \widehat{V}_U, X_J \rangle = 0, \quad U = 1, \dots, r, \ J > r.$$

通过代入

$$\widetilde{Z}_W = \frac{1}{2}(V_W + \widehat{V}_W), \quad X_W = \frac{1}{2}(V_W - \widehat{V}_W)$$

代入（5.17），我们得到

$$2dV_u = \sum_{W=1}^{r} (\widetilde{\Omega}_u{}^W + \Omega_u{}^W - \Delta_u{}^W - \overline{\Delta}_u{}^W)\widehat{V}_W + \sum_{r>J} (\Delta_u{}^J - \Omega_u{}^J) X_J \mod V_{f(P)},$$

这意味着

$$(\widetilde{\Omega}_u{}^W + \Omega_u{}^W - \Delta_u{}^W - \overline{\Delta}_u{}^W) = (\Delta_u{}^J - \Omega_u{}^J) = 0, \quad \mod \phi, \Box_P, \quad 1 \le W \le r, \ J > r \tag{5.18}$$

and

$$dV_u = \sum_{W=1}^{r} (\widetilde{\Omega}_u{}^W - \overline{\Delta}_u{}^W) V_W \mod \phi, \Box_P.$$

Let

$$L_P := \operatorname{span}\{Z_0(f(y)) : y \in \mathscr{S}_P\}. \tag{5.19}$$

则 L_P 是 $V_{f(P)}$ 的最小子空间，使得

$$\mathscr{L}_P \subset \pi'_r \left((\rho'_r)^{-1} (\{(A, B) \in \mathcal{D}_r(X') : A \subset L_P, L_P^* \subset B\}) \right), \tag{5.20}$$

其中， $\mathscr{L}_P$定义见 (5.4)。由 $\widetilde{\Theta}_u{}^\beta$、 $u = 1$、.....、 J_1 的非退化性及 (5.14)， L_P 包含 $\{V_u, \ u = 1, \dots, J_1\}$ 的张成空间。因此我们可以假设

$$L_P = Z_0(f(x)) + \operatorname{span}\{V_U, \ U = 1, \dots, J_P\}$$

and

$$L_P^* = L_P + \operatorname{span}\{\widetilde{Z}_U, X_J, \ U, J > J_P\}$$

对于某些 $J_1 \le J_P \le r$. 由于 $Z_0(f(y))$ 是固定零空间 $V_{f(P)}$ 中的子空间，

$$L_P^* := \bigcap_{y \in \mathscr{S}_P} Z_0^*(f(y)).$$

定义

$$M_P := [L_P, L_P^*]_{q'} = \bigcap_{y \in \mathscr{S}_P} [Z_0(f(y)), Z_0(f(y))^*]_{q'}.$$

根据定义，对于任意 $x \in \mathscr{S}_P$, $[Z_0(f(x)) \ Z_0(f(X))^*]_{q'}$包含 M_P，且 (5.20) 变为

$$\mathscr{L}_P \subset \pi'_r \left((\rho'_r)_r^{-1} (\mathscr{Z}'_{M_P}) \right) = \mathscr{Z}'_{M_P}.$$

如果 M_P 是一个点，那么

$$\bigcap_{\sigma \in \mathcal{S}_P \cap Dom(f_1^\sharp)} X'_{f_1^\sharp(\sigma)} = \{f(P)\}.$$

因此，应用引理 5.4，我们可以证明 f 有有理延拓。现在假设 M_P 是正维的。由于 L_P 是一个零空间， M_P 是 X' 中经过 f（P）的非平凡特征子空间，使得对于某个 $0 < s < r$, $M_P \cap S_s$（Ω′）是 Ω′ 的一个边界分支，并且

$$T_{f(P)}M_P = \bigcap_{y\in\mathscr{S}_P} T_{f(P)}[Z_0(f(y)), Z_0(f(y))^*]_{q'}.$$

根据引理4.2,

$$\bigcap_{y\in\mathscr{S}_P} T_{f(P)}[Z_0(f(y)), Z_0(f(y))^*]_{q'} = \bigcap_{y\in\mathscr{S}_P} \mathscr{N}_{A_y},$$

其中

$$A_y = \mathrm{Hom}(Z_0(f(y)), Y_y)$$

对于 $f(y)$ 处某个适当的 S_r(Ω′)-标架。这里，我们通过 Harish-Chandra 坐标中的平行平移，将 $\mathscr{N}_{A_y}$视为 $T_{f(P)}X'$中的一个子空间。设 $\widehat{L}_P$ 是 $\mathbb{C}^{p'+q'}$ 中的一个子空间，使得

$$\bigcap_{y\in\mathscr{S}_P} \mathscr{N}_{A_y} = \mathscr{N}_A$$

for

$$A = \mathrm{Hom}(L_P, \widehat{L}_P/L_P).$$

也就是说,

$$\widehat{L}_P = \mathrm{span}\{Y_y,\ y \in \mathscr{S}_P\} \mod L_P.$$

由于 Y_y 是 Z_0（y）在基本形式 〈 下的对偶， 〉，我们得到

$$\widehat{L}_P = \mathrm{span}\{\widehat{V}_U,\ U = 1, \ldots, J_P\} \mod Y_{f(x)} + L_P.$$

and

$$T_{f(P)}M_P = \sum_{U,J>J_P} \Delta_U{}^J X_J.$$

因此

$$\langle dV_u, \widetilde{Z}_W\rangle = \langle d\widehat{V}_u, X_J\rangle = 0 \mod \phi, \Box_P, \quad W, J > J_P,$$

这意味着

$$\Delta_U^{\ j} = \Delta_u{}^J = 0 \mod \phi, \quad U, J > J_P$$

and

$$\widetilde{\Omega}_u{}^W = \Omega_u{}^J = 0 \mod \phi, \Box_P, \quad W, J > J_P.$$

此外，由于

$$\langle V_u, \widetilde{Z}_W\rangle = \langle V_u, X_J\rangle = 0, \quad W, J > J_P$$

在 $\mathscr{L}_P$ 上，通过复化以及（5.6），我们得到

$$\langle dV_u, \widetilde{Z}_W\rangle = \langle dV_u, X_J\rangle = 0, \quad W, J > J_P$$

在 $T^1_{,x}{}^0 S_1$(Ω)，即,

$$\langle dV_u, \widetilde{Z}_W\rangle = \langle d\widehat{V}_u, X_J\rangle = 0 \mod \phi, \bar{\theta}, \quad W, J > J_P,$$

从而

$$\widetilde{\Omega}_u{}^W = \Omega_u{}^J = 0 \mod \phi, \bar{\theta}, \quad W, J > J_P.$$

由于 $\square_P$ 和 θ 线性无关，结合 (5.18)，我们得到

$$\widetilde{\Omega}_u{}^W = \Omega_u{}^J = 0 \mod \phi, \quad W, J > J_P. \tag{5.21}$$

此外，由于 L_P 是满足 (5.20) 的最小子空间，根据二次曲线的性质，我们得到，对于每个 $W \leq J_P$，都存在 u 使得

$$\widetilde{\Omega}_u{}^W - \overline{\Delta}_u{}^W \neq 0 \mod \phi, \square_P,$$

这意味着

$$\widetilde{\Omega}_u{}^W \neq 0 \mod \phi, \bar{\theta}.$$

此条件仅取决于 $\Omega_u{}^W$，而与 P的选择无关。因此，我们可以选取一个整数 $J_2 = J_P$，并进一步约化 $S_r(\Omega')$-标架，使得

$$V_U = \widetilde{Z}_U \mod X, \quad U = J_1 + 1, \ldots, J_2$$

满足上述关于 $\widetilde{\Omega}_u{}^W$模 $\phi, \bar{\theta}$ 的非退化条件。也就是说，若令

$$\widetilde{\Omega}_u{}^W = h_u{}^{W,\alpha}\theta_\alpha \mod \phi, \bar{\theta}$$

and

$$h_u{}^a := \sum_{W=J_1+1,\ldots,J_2} h_u{}^{W,a} V_W,$$

then

$$\operatorname{span}\{V_u,\ u = 1, \ldots, J_1\} + \operatorname{span}\{h_u{}^a : a = 1, \ldots, q-1,\ , u = 1, \ldots, J_1\} = L_P \mod Z,$$

其中，θ_a, $a = 1, \ldots, q-1$ 是与 $\Theta_\alpha{}^J$对应的 $S_1(\Omega)$的(1, 0)-形式。

假设 对 X_W, $J_1 < W \leq J_2$进行旋转后，存在 $W_0 \leq J_2$ 使得

$$\Omega_u{}^{W_0} - \Delta_u{}^{W_0} = 0 \mod \phi, \square_P \quad \forall u.$$

由(5.18)可得,

$$\widetilde{\Omega}_u{}^{W_0} = 0 \mod \phi, \bar{\theta}, \quad \forall u,$$

这与关于 J_2的假设矛盾。因此，对于每个 $W = J_1 + 1, \ldots, J_2$，都存在 u使得

$$\Omega_u{}^W - \Delta_u{}^W \neq 0 \mod \phi, \square_P,$$

这意味着

$$\Omega_u{}^W \neq 0 \mod \phi, \theta.$$

因此， L_P 的选择与 P无关。

综上，我们得到一个 $S_r(\Omega')$-标架的约化，使得

$$\widetilde{\Theta}_U^\beta = \Theta_\alpha{}^J = 0 \mod \phi, \quad U, J > J_1,$$

$$\widetilde{\Omega}_u{}^W = \Delta_U^j = \Delta_u{}^J = \Omega_k{}^J = 0 \mod \phi, \quad U, W, J > J_2$$

and

$$T_{f(P)}M_P = \sum_{U,J>J_2} \Delta_U^J X_J$$

对于所有满足 $x \in \mathscr{S}_P$ 的 $P \in S_0(\Omega)$。这里，我们通过在 Harish-Chandra 坐标中进行平行移动，将 $T_{f(P)}M_P$ 视为 $T^{1,f\ 0}_{x\ ()}S_r(\Omega')$ 中的一个子空间。利用 $S_r(\Omega')$-标架的约化，我们将证明本文的以下主要技术引理。

引理 5.4. 设 Ω 为管型，且 $P \in S_0(\Omega)$ 为一个一般点。假设存在一个非平凡的子格拉斯曼流形 M，使得

$$f_1^\sharp(\mathcal{S}_P \cap Dom(f_1^\sharp)) \subset \mathcal{S}'_M.$$

那么第 th 存在一个唯一的形如 $M_P \subset X'$ 的极大特征子空间。

$$M_P = [L_P, L_P^*]_{q'}$$

对某个零空间 L_P，使得

$$f(\mathscr{S}_P) \subset \mathscr{S}'_{M_P}. \tag{5.22}$$

~此外，对于一般的 P，M_P与 $M_{\tilde{P}}$平行，$P \in S_0(\Omega)$。

证明。只需证明对于一般的 $P \in S_0(\Omega)$，M_P 彼此平行。设 $x \in S_1(\Omega)$ 是一个一般点。那么，对于所有满足 $x \in \mathscr{S}_P^1$ 的 $P \in S_0(\Omega)$，或者等价地，

$$P \in [Z_0(x), Z_0(x)^*]_q \cap S_0(\Omega),$$

M_P 彼此平行。由于 $S_0(\Omega)$ 中任意两点都可由 $[Z_0(x)\ Z_0(x)^*]_q \cap S_0(\Omega)$ $x \in S_1(\Omega)$ 的链连接，我们便完成了证明。□

推论 5.5。设 Ω'_1 和 Ω'_2 是 Ω' 的全测地子域，且 $\Omega'_1 \times \Omega'_2$ 是 Ω' 中经过 $f(0)$ 的最大秩全测地子空间，并且对于 $P \in S_0(\Omega)$，$T_{f(0)}\Omega'_2$ 与 $T_{f(p)}M_p$ 平行。那么

$$f(\Omega) \subset \Omega'_1 \times \Omega'_2. \tag{5.23}$$

此外，如果 我们将 $f = f_1 \times f_2$ 分解为：$\Omega \to \Omega'_1 \times \Omega'_2$，那么 f_1 是一个适当的有理映射。 $p.$

证明。由于

$$S_0(\Omega'_1 \times \Omega'_2) = S_0(\Omega'_1) \times S_0(\Omega'_2),$$

为证明（5.23），只需证明 that

$$f(S_0(\Omega)) \subset S_0(\Omega'_1) \times S_0(\Omega'_2).$$

设 $P \in S_0(\Omega)$ 为一个一般点，设 M_P 为引理 5.4 中的极大特征子空间。由于 $T_{f(P)}M_P$ 与 $T_{f(0)}\Omega'_2$ 平行，因此 M_P 具有如下形式

$$M_P = \{A_P\} \times M,$$

其中 M 是 Ω'_2 的紧对偶，而 A_P 是 $S_0(\Omega'_1)$中的一个点。由于 P 是任意的，我们得到

$$f(P) \in S_0(\Omega'_1) \times S_0(\Omega'_2), \quad \forall P \in S_0(\Omega).$$

现在只需证明 f_1 是适当的，并证明对于某个 $P \in S_0(\Omega)$，引理 5.4 中关于 f_1 的特征子空间 M_P 是一个点。假设 f_1 是适当的。在推论 5.5 的证明中，对于 f 的 M_P对一般的 $P \in S_0(\Omega)$具有 $\{A_P\} \times M$ 的形式。因此根据定义，引理 5.4 中关于 f_1 的 M_P就是 $\{A_P\}$，这意味着 f_1 是有理的。为了证明 f_1 是适当的，只需证明$f_1(S_{q-1}(\Omega)) \subset \partial\Omega'_1$. 。反之，假设并非如此。由于 f 是适当的，并且

$$\partial(\Omega'_1 \times \Omega'_2) = (\partial\Omega'_1 \times \Omega'_2) \cup (\Omega'_1 \times \partial\Omega'_2) \cup (\partial\Omega'_1 \times \partial\Omega'_2),$$

我们得到

$$f_2(S_{q-1}(\Omega)) \subset \partial\Omega'_2,$$

也就是说， $f_2 : \Omega \to \Omega'_2$ 是一个真全纯映射。现在假设 f_2 是真映射。那么根据推论 5.5，存在进一步的分解 $f_2 = g \times h : \Omega \to \Omega'_3 \times \Omega'_4 \subset \Omega'_2$，并且引理 5.4 中的 M_P 对于 f_2具有如下形式: $\{B_P\} \times N$，其中 $B_P \in S_0(\Omega'_3)$。由于 $\Omega'_1 \times \Omega'_2$是全测地的，这意味着$M_P$对于 f应具有如下形式: $\{A_P \times B_P\} \times N$，这与 f的 $M_P = \{A_P\} \times M$唯一性矛盾。□

6. Proof of Theorem 1.2 and Corollary 1.3

首先假设 Ω 是管型的。此时推论 5.5 即可完成证明。现在假设 Ω 是非管型的。此时下面的引理即可完成证明。

引理 6.1. 设 $P \in S_0(\Omega)$，并设 M_P 是经过 $f(P)$ 的特征子空间，使得

$$f(\mathscr{S}^1_P) \subset \mathscr{S}'_{M_P}. \tag{6.1}$$

那么，对于一般的 $P \in S_0(\Omega)$， M_P 是一个点。

证明。设 $P \in S_0(\Omega)$ 为一个一般点。假设 M_P 不是一个点。那么 M_P 是一个正维特征子空间。选取一个秩一边界分支 Ω_σ，使得 $P \in \partial\Omega_\sigma$。由于 Ω 是非管型的，$\Omega_\sigma$ 是一个维数至少为 2 的球。令 $x \in \Omega_\sigma$。选取一个全测地极大管型子域 $\Omega_x \subset \Omega$，使得 $x \in S_1(\Omega_x)$ 且 $P \in S_0(\Omega_x)$。由于 M_P是非平凡的，根据推论 5.5，存在非平凡管型子域 $\Omega'_1(x)$ 和一个特征子域 $\Omega_2(x)'$，使得

$$f(\Omega_x) \subset \Omega'_1(x) \times \Omega'_2(x).$$

此外，由（5.19）可知，$\Omega'_2(x)$ 完全由 $Z_0(f(\mathscr{S}^1_P(\Omega_x)))$. 决定。由于 $Z_0(f)$ 在每个边界分支上为常数，对所有 $x \in \Omega_\sigma$，$\Omega'_2(x)$ 都是平行的。由于 $\Omega'_1(x) \times \Omega'_2(x)$ 是全测地的，对所有 $x \in \Omega_\sigma$·，$\Omega'_1(x)$ 也都是平行的。因此，存在一个具有形式 $\Omega'_1(\sigma) \times \Omega'_2(\sigma) \subset \Omega'$、秩最大的全测地子空间，使得 $\Omega'_1(\sigma)$ 为管型，$\Omega'_2(\sigma)$ 是一个特征子空间，并且

$$f(\Omega_\sigma) \subset \partial(\Omega'_1(\sigma) \times \Omega'_2(\sigma)).$$

由于 Ω_σ 是一个维数至少为 2 的球， f 将 Shilov 边界映射到 Shilov 边界，且 Ω'_1 是管型，这意味着。

$$f(\partial\Omega_\sigma) \subset \{A_P\} \times \partial\Omega'_2(\sigma)$$

对于某个 $A_P \in S_0(\Omega_1')$ 仅依赖于 $f(P)$。由于 Ω_σ 在 $\mathscr{S}_P^1$ 中任意，且对于 $x, y \in \mathscr{S}_P^1(\Omega_x)$，$\Omega_2'(y)$ 与 $\Omega_2'(x)$ 平行，因此对于 $\Omega_\sigma, \Omega_{\tilde{\sigma}} \subset \mathscr{S}_P^1$，$\Omega_2'(\sigma)$ 与 $\Omega_2'(\tilde{\sigma})$ 平行，并且

$$f(\mathscr{S}_P) \subset \{A_P\} \times \Omega_2'.$$

由于 P 是一般的，我们得到

$$f(S_1(\Omega)) = f_1(\Omega) \times f_2(\Omega) \subset \Omega_1' \times \Omega_2'.$$

特别地， f_1 是常数。由于 $f(S_0(\Omega)) \subset S_0(\Omega')$，我们得到 $f_1(\Omega)$是 $S_0(\Omega_1')$中的一个点，这与 f 是适当映射的假设相矛盾。□

推论 1.3 的证明：设 $f(S_0(\Omega) \cap U) \subset S_m(\Omega')$，其中 U 是某个开集。如果 $m = 0$，那么根据定理1.2， f 具有如下形式。

$$f = f_1 \times f_2 : \Omega \to \Omega_1' \times \Omega_2' \subset \Omega'$$

其因子 $f_1 : \Omega \to \Omega_1'$ 是一个有理真映射。如果Ω_2' 是平凡的，那么 f 是有理的。如果Ω_2' 是非平凡的，那么秩$(\Omega_1') < 2q - 1$. 因此，根据 [Ki21]的推论1.2， f_1 具有一个标准嵌入因子。假设 $m \geq 1$. 那么，根据 f 的真性，在必要时缩小 U之后， $f(S_1(\Omega) \cap U)$包含于某个 $r > m \geq 1$的 $S_r(\Omega')$中，这意味着

$$q' - r < 2(q-1)$$

并且在 $S_1(\Omega)$ 的一个开集上， f 是横截的，即

$$f_*(\nu) \notin T^{1,0}_{f(x)} S_r(\Omega') + T^{0,1}_{f(x)} S_r(\Omega')$$

对于所有与 $T^{1,}{}_x{}^0 S_1(\Omega) + T^{0,}{}_x{}^1 S_1(\Omega)$ 横截的实向量 $\nu \in T_x S_1(\Omega)$。于是根据[Ki21]的推论1.2， f 具有一个标准嵌入因子，从而完成了证明。

References

[Ak95] Akhiezer, Dmitri N.《复分析中的李群作用》。数学概论丛书，E27。Friedr. Vieweg & Sohn，不伦瑞克，1995年。viii+201 页。ISBN：3-528-06420-X[Al74] Alexander, H. 从球和多圆盘出发的全纯映射。《数学年刊》209（1974），249–256。[Ch20] Chan, S.T. 有界对称域之间的真全纯映射。《美国数学会会刊》148（2020），第1期，173—184。[Ch21] Chan, S.T. I型不可约有界对称域之间真全纯映射的刚性。《国际数学研究通知》；DOI：https://doi.org/10.1093/imrn/rnaa373[CiSu90] Cima, H.; Suffridge, T.H. 有理真映射的边界行为。《杜克数学杂志》60（1990），135–138。[D88a] D'Angelo, J.P. 不同维数的球之间的真全纯映射。《密歇根数学杂志》35（1988），第1期，83–90。[D88b] D'Angelo, J.P. 球之间的多项式真映射。《杜克数学杂志》57（1988），第1期，211–219。[D91] D'Angelo, J.P. 球之间的多项式真全纯映射。II。《密歇根数学杂志》38（1991），第1期，53–65。[D03] D'Angelo, J.P. 真全纯映射、正性条件与等距嵌入。《韩国数学会会刊》40（2003），第3期，341–371。[DKoRi03] D'Angelo, J.P. Kos, ˇS; Riehl, E. 球之间真单项式映射次数的精确上界。《几何分析杂志》13（2003），第4期，581–593。

[DL09] D'Angelo, J.P.; Lebl. 球之间的正规全纯映射的复杂性. 《复变函数与椭圆方程》54 (2009), 第3–4期, 187–204.[DL16] D'Angelo, J.P.; Lebl. 正规全纯映射的同伦等价. 《数学进展》286 (2016), 160–180.[E13] Ebenfelt, P. 退化CR嵌入到球面中的部分刚性. 《数学进展》239(3) (2013) 72–96.[Fa86] Faran J.H. 低余维情形下球之间真映射的线性性. 《微分几何杂志》24 (1986), 15–17.[Fo86] Forstnerič, F. 球之间的真全纯映射. 《杜克数学杂志》53 (1986), 427–440.[Fo89] Forstnerič, F. 正余维正规全纯映射的延拓. 《数学发明》95 (1989), 31–61.[G87] Globevnik, J. 真全纯映射的边界插值. 《数学杂志》194 (1987), 第3期, 365–373.[HeNo84] Henkin, G.M.; Novikov, R.G. 经典域的正规映射，载于《线性与复分析问题集》，341–343，《数学讲义》，第1043卷，施普林格，柏林，1984年.[HeTum82] Henkin, G.M.; Tumanov, A.E. 经典域解析自同构的局部刻画（俄文）. 《苏联科学院院报》267 (1982), 第4期, 796–799.[HoNg21] Hong, H.; Ng, S.-C. 有理齐性空间上保持齐性子空间的局部全纯映射. 《数学年刊》380 (2021), 第1–2期, 885–909.[Hu99] Huang, X. 关于不同维复空间中球之间真全纯映射的线性问题. 《微分几何杂志》51 (1999), 13–33.[Hu03] Huang, X. 关于全纯映射的半刚性性质. 《亚洲数学杂志》7 (2003), 第4期, 463–492.[HuJ01] Huang, X.; Ji, S.: 将 B^n 映射到 B^{2n-1}. 《数学发明》145 (2) (2001), 219–250.[HuJXu06] Huang, X.; Ji, S.; Xu, D. 从 B^n 到 B^N的真全纯映射的一种新间隙现象. 《数学研究快报》13 (2006), 第4期, 515–529.[Ki21] Kim, S.-Y. 格拉斯曼流形上闭 $SU(\ell, m)$轨道之间的全纯映射. 《数学研究快报》28 (2021), 第3期, 729—783.[KiMSe22] Kim, S.-Y.; Mok, N.; Seo, A. 小秩差的有界对称域之间的真全纯映射，预印本[KiZ13] Kim, S.-Y.; Zaitsev, D. 有界对称域的希洛夫边界之间CR映射的刚性. 《数学发明》193 (2013), 第2期, 409–437.[KiZ15] Kim, S.-Y.; Zaitsev, D. 有界对称域之间真全纯映射的刚性. 《数学年刊》362 (2015), 第1–2期, 639–677.[M86] Mok, N. 厄米局部对称空间上的度量刚性定理. 《美国国家科学院院刊》83 (1986), 第8期, 2288–2290.[M89] Mok, N. 厄米局部对称流形上的度量刚性定理. 《纯数学丛书》，第6卷. 世界科学出版公司，新泽西州蒂内克，1989年.[M08] Mok, N. 某些经典有界对称域之间不存在真全纯映射. 《中国数学年刊B辑》29 (2008), 第2期, 135–146.[M22] Mok, N. 有界对称域到全测地复子流形上的全纯收缩.
https://www.math.hku.hk/imrwww/IMRPreprintSeries/2022/IMR2022-01.pdf[MNgTu10] Mok, N.; Ng, S.-C.; Tu, Z. 秩为 ≥ 2的不可约有界对称域上真全纯映射的分解. 《中国科学：数学》53 (2010), 第3期, 813–826.[MTs92] Mok, N.; Tsai, I.-H. 秩2不可约有界对称域的凸实现的刚性. 《纯粹与应用数学杂志》431 (1992), 91–122[Ng13] Ng, S.-C. 射影空间上 $SU(p, q)$型旗域之间的真全纯映射. 《密歇根数学杂志》62, (2013), 第4期, 769–777.[Ng15a] Ng, S.-C. 关于秩至少为2的不可约有界对称域之间的真全纯映射. 《美国数学会会刊》143, (2015), 第1期, 219–225.

[Ng15b] Ng, S.-C. 经典域的全纯双纤维化与映射问题。《国际数学研究通知》2015年 (2015年)，第2期，291–324页。[P7] Poincar´e, H. 二元解析函数与保角表示，Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 23 (1907)，185–220页。[ReSo22] Reiter, M.; Son, D.N. 从球面到覆盖未来光锥的管域的CR映射，《数学进展》410 (2022年)[Se15] Seo, A. 对称域之间真全纯映射的新例子。《密歇根数学杂志》64 (2015年)，第2期，435–448页。[Se16] Seo, A. 经典型有界对称域之间的真全纯多项式映射，《美国数学会会刊》144 (2016年)，第2期，739–751页。[Se18] Seo, A. 关于可约有界对称域之间真全纯映射的评注。《台湾数学杂志》22 (2018年)，第2期，325–337页。[St96] Stensønes, B. 在边界处保持Lipschitz连续的真映射。《几何分析杂志》6 (1996年)，第2期，317–339页。[Ts93] Tsai, I.-H. 对称域之间真全纯映射的刚性。《微分几何杂志》37 (1993年)，第1期，123–160页。[Tu02a] Tu, Z. 等维有界对称域之间正规全纯映射的刚性。《美国数学会会刊》130 (2002年)，第4期，1035–1042页。[Tu02b] Tu, Z. 非等维有界对称域之间正规全纯映射的刚性。《数学杂志》240 (2002年)，第1期，13–35页。[We79] Webster, S. 球面中C-R超曲面的刚性。《印第安纳大学数学杂志》28(3) (1979)，405–416页。[Wo72] Wolf, J.A. 厄米对称空间的精细结构，载于《对称空间》（短期课程，圣路易斯华盛顿大学，密苏里州，1969–1970），第271–357页。纯粹与应用数学，第8卷，Dekker，纽约，1972年。[XiY20] Xiao, M.; Yuan, Y. 从复单位球到IV型经典域的全纯映射，《纯粹与应用数学杂志》133 (2020)，139–166页。

—

S.-Y. Kim: Center for Complex Geometry、 Institutue for Basic Science、55、 Expo-ro、 Yuseong-gu、 Daejeon、 Korea、34126 电子邮箱地址：sykim8787@ibs.re.kr