arXiv:2305.01881v1 [math.DG] 3 May 2023

(ε, δ)–拟负曲率与典范丛的正性

KYLE BRODER 和 KAI TANG

ABSTRACT. Diverio–Trapani 和 Wu–Yau 的一项近期定理指出，具有拟负全纯截面曲率的紧致 K¨ahler 流形，若其带有一个 K¨ahler 度量，则它是射影的且典范极化。这证实了 Yau 长期以来的一个猜想。我们考察 (ε, δ)–拟负性的概念，这是对拟负性的推广，并根据实双截曲率和加权正交 Ricci 曲率，得到关于 $\int_X c_1(K_X)^n > 0$ 的间隙型定理。这些定理还推广了 Zhang-Zheng 在 [34] 中的结果，以及 Chu-Lee-Tam 在 [11] 中的结果。

1. INTRODUCTION

Wu–Yau 定理 [9, 26, 16, 27, 28, 25]断言，具有负全纯截面曲率的紧致 K¨ahler 流形是射影的，并且典范极化。特别地，典范丛 K_X 是丰沛的，并且存在唯一的不变 K¨ahler–Einstein 度量 [1, 31]。Diverio–Trapani [15]将全纯截面曲率的严格负性放宽为拟负性（处处非正且在一点为负）。论证的关键在于顶交数的正性

$$\int_X c_1(K_X)^n \ > \ 0. \tag{1.1}$$

事实上，由 [14, 定理 0.5], (1.1) 可知，若假设 K_X 数值有效，则典范丛 K_X 是大丛。因此， X 是 Moishezon 流形；根据 Moishezon 定理 [19]， X 是射影流形且为一般型。没有有理曲线的一般型射影流形，其典范丛是丰沛的（参见 [15, 引理 2.1] 或 [12, 第 219] 页）。

关键词：Hermitian 流形、Kähler 流形、Wu–Yau 定理、双曲复流形、丰正典范丛、全纯截面曲率、实双截曲率、Moishezon 流形、一般型流形。第一位署名作者获得了澳大利亚政府通过澳大利亚研究理事会探索项目资助计划（项目编号 DP220102530）提供的资助。第二位署名作者获得了国家自然科学基金委员会的资助（项目编号：12001490）。

在近期的工作中，Zhang-Zheng [34] 研究了几乎拟负全纯截面曲率这一自然概念，并将这些定理推广到具有几乎拟负全纯截面曲率的紧致 K¨ahler 流形上。他们还针对紧致 K $\int_X c_1(K_X)^n > 0$ ähler 流形上的全纯截面曲率，得到了一个关于不等式 ¨的间隙型定理。我们将把 Diverio–Trapani[15] 和 Zhang-Zheng [34] 的这些结果推广到厄米范畴。提醒读者，对于非 K¨ahler 厄米度量，全纯截面曲率自然由实双截曲率取代

$$\mathrm{RBC}_\omega(\xi) := \frac{1}{|\xi|^2}\sum_{i,j,k,\ell} R_{i\bar{j}k\bar{\ell}}\xi^{i\bar{j}}\xi^{k\bar{\ell}},$$

其中 ξ 是一个非负的 (1, 1)–张量。Yang–Zheng [30] 以依赖标架的方式引入了实双截曲率。上述定义也归功于 Lee–Streets [17], ，他们将其称为“复曲率算子”。

当度量为 K¨ahler（或更一般地，具有 K¨ahler-like 性质 [29]）时，实双截曲率等价于 [8], 中形式化定义的修正全纯截面曲率；二者具有可比性，因为它们的符号始终相同。然而，一般而言，实双截曲率强于全纯截面曲率。不过，它还不足以控制里奇曲率（见 [30]）。关于比陈联络更一般的联络，即 Gauduchon联络下的这些曲率，敬请读者参见 [6]。

为陈述主要结果，我们引入以下术语（基于[34]）：对于正常数 $\delta > 0$ 和非空开集 $\mathcal{U} \subset X$，若存在充分小的 $\varepsilon > 0$，使得 $\mathrm{RBC}_\eta \le \varepsilon$ 在 X 上成立，且 $\mathrm{RBC}_\eta \le -\delta$ 在$\mathcal{U}$上成立，则称厄米度量 η 具有（ε，δ）-准负实双截曲率（相对于 $\mathcal{U}$）。对于正常数 δ_1、$\delta_2 > 0$，若紧致 K¨ahler 流形（X，ω）上的厄米度量 η 满足：（i）存在光滑函数 ψ：$X \to \mathbb{R}$，使得 $\eta \le \delta_1\omega + dd^c\psi$，则称其为 δ_1-有界；（ii）若 $\eta^n \ge \delta_2\omega^n$，则称其在开集 $\mathcal{U} \subset X$上为 δ_2-体积非塌缩。若厄米度量同时满足 δ_1-有界和 δ_2-体积非塌缩，则称 η 具有（δ_1，δ_2）-有界几何。

本文的第一个主要定理如下：

定理 1.1. 设 X 是一个紧致 K¨ahler 流形。假设存在一个 Hermit-ian 度量 η，具有 (δ_1, δ_2)–有界几何和 (ε, δ)–准负实双截面

曲率。然后

$$\int_X c_1(K_X)^n \ > \ 0$$

如果进一步假设 K_X 是数值有效的，那么 K_X 是大且 X 是射影的。

上述定理是这一方向上的一个结果，它不要求厄米度量的曲率具有定号性。此外，还有许多有趣的结果[32, 33, 34, 23] 无需假设逐点定号曲率条件。进一步地，我们强调，尽管 δ_1–有界性是逐点性质，但它可以解释为度量所代表的 Bott–Chern类上的一个界，而非度量层面上的界。另一方面， δ_2–体积不塌缩是一种局部加权体积不塌缩条件；例如，若 $\eta^n \geq \delta_2\omega_0^n$ 在 $\mathcal{U}$上成立，则该条件成立。

鉴于全纯截面曲率与里奇曲率之间令人困惑的关系（参见 [5]），可以考虑以下曲率约束，尝试在这两种曲率之间进行插值：在 [7] （另见 [11]）中，作者针对 α, $\beta \in \mathrm{R}$ 引入了加权正交 Ricci 曲率

$$\mathrm{Ric}^{\perp}_{\alpha,\beta}(v) \ := \ \frac{\alpha}{|v|^2_{\omega_0}}\mathrm{Ric}_{\omega_0}(v,\overline{v}) + \beta\mathrm{HSC}_{\omega_0}(v),$$

对于 (1, 0)–切向量 $v \in T^{1,\,0}X$。

根据 Siu 对 Grauert–Riemenschneider猜想的解决方案，具有拟负里奇曲率的紧致 K¨ahler 流形具有大典范丛。另一方面，Diverio–Trapani 对 Wu–Yau 定理的推广表明，具有拟负全纯截面曲率的紧致 K¨ahler 流形具有大典范丛。下面的定理表明，这些结果可以通过加权正交 Ricci 曲率进行插值，并且更一般地，可推广到 (ε, δ)–拟负情形：

定理 1.2. 设 (X, ω) 是一个紧致 K¨ahler 流形，其具有 (ε, δ)–拟负加权正交 Ricci 曲率，其中 $\alpha, \beta \in \mathrm{R}_{\geq 0}$ 至少有一个为正。那么

$$\int_X c_1(K_X)^n \ > \ 0$$

如果进一步假设 K_X 是数值有效的，那么 K_X 是大且 X 是射影的。 .

定理 1.2 还推广了 Chu–Lee–Tam [11], 的一个结果，他们证明了若紧 K¨ahler 流形 X 具有一条加权正交 Ricci 曲率准负的 K¨ahler 度量

Ricci 曲率（对 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_{>0}$），则 $\int_X c_1(K_X)^n > 0$。

Ni 描述了一种在全纯截面曲率和里奇曲率之间进行插值的另一种方法 [20]：所谓的 k–里奇曲率，是 K¨ahler 度量在$_{T^{1,\,0}}X$的 k 维全纯子空间上的里奇曲率。借助 [11]，中的一个结果，证明定理 1.1 和定理 1.2 所用的方法还可得出以下结论（另见 [23]）：

定理 1.3. 设 (X, ω) 是一个紧致 K¨ahler 流形，其具有 (ε, δ)–拟负k–里奇曲率。那么

$$\int_X c_1(K_X)^n \ > \ 0$$

若进一步假设 K_X 数值有效，则 K_X 为大，且 X 为射影。

致谢。第一作者谨向其博士导师 Ben Andrews 和 Gang Tian 致谢，感谢他们给予的支持与鼓励。他还要感谢 Simone Diverio、Jeffrey Streets、Finnur L´arusson、Ramiro Lafuente 和 James Stanfield，感谢他们进行的诸多宝贵讨论与交流。作者谨向 Yashan Zhang 致谢，感谢他的支持，以及许多极具价值的讨论和建议。

2. Proof of Theorem 1.1

要证明 $\int_X c_1(K_X)^n > 0$，只需得到以下估计

$$\int_X (-\mathrm{Ric}_{\omega_0})^n = (2\pi)^n \int_X c_1(K_X)^n > 0. \tag{2.1}$$

令 $\rho : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为由 $\rho(t) = \frac{1}{n}$（当 $t \leq 0$ 时）和 $\rho(t) = 1$（当 $t > 0$ 时）定义的函数。对于定理 1.1 陈述中的厄米度量 η，令 $\kappa_\eta : X \to \mathbf{R}$ 为函数

$$\kappa_\eta(x) \ := \ \rho\left(\max_{(\vartheta, v_x) \in \mathcal{F}_X \times \mathbf{R}^n} \mathrm{RBC}_\eta(\vartheta, v_x) \right) \cdot \max_{(\vartheta, v_x) \in \mathcal{F}_X \times \mathbf{R}^n} \mathrm{RBC}_\eta(\vartheta, v_x),$$

其中 ϑ 是一个酉标架（即酉标架丛 $\mathcal{F}_X$ and$v_x \in \mathbf{R}^n$ 的一个截面）。

我们还引入以下记号

$$\mu_\eta \ := \ \max_{x \in X} \max_{(\vartheta, v_x) \in \mathcal{F}_X \times \mathbf{R}^n} \mathrm{RBC}_\eta(\vartheta, v_x). \tag{2.2}$$

To e建立（2.1）后，我们将证明存在常数 $\varepsilon, c_3, c_4 > 0$，使得

$$\begin{aligned} \int_X (-\mathrm{Ric}_{\omega_0})^n &\geq \int_X (n\delta_1 \kappa_\eta \omega_0 - \mathrm{Ric}_{\omega_0})^n - c_4\varepsilon \qquad (2.3) \\ &\geq c_3 - c_4\varepsilon, \qquad (2.4) \end{aligned}$$

其中， $\varepsilon > 0$ 可以选择为使得 $c_3 - c_4\varepsilon > 0$。

为此，考虑扭曲的 Wu–Yau 连续性方法，其由复 Monge–Amp`ere 方程给出

$$(t(\omega_0 + \delta_1^{-1} dd^c\psi) - \mathrm{Ric}_{\omega_0} + dd^c\varphi_t)^n = e^{\varphi_t}\omega_0^n. \qquad (2.5)$$

根据 δ_1–有界性的假设，我们可知

$$\omega_0 + \delta_1^{-1} dd^c\psi \geq \delta_1^{-1}\eta. \qquad (2.6)$$

令 $\omega_t := t(\omega_0 + \delta_1^{-1} dd^c\psi) - \mathrm{Ric}_{\omega_0} + dd^c\varphi_t$，从而可将（2.5）写为

$$\omega_t^n = e^{\varphi_t}\omega_0^n.$$

由 (2.6)，度量 ω_t 满足下界

$$\mathrm{Ric}_{\omega_t} \geq -\omega_t + t\delta_1^{-1}\eta.$$

我们将用到 Yang–Zheng 关于 Hermite 流形之间全纯映射的以下 Schwarz 引理 [30] (另见 [21, 3, 4])：

引理 2.1.（Yang–Zheng）设 $f\colon (X, \omega_g) \to (Y, \eta)$ 是从 K¨ahler 流形到 Hermite 流形的全纯映射。若存在常数 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$，使得 $\mathrm{Ric}_{\omega_g} \geq -C_1\omega + C_2 f^*\omega_h$ 且 RBC $_\eta \leq \mu_\eta$，则

$$\Delta_{\omega_g} \log \mathrm{tr}_{\omega_g}(f^*\eta) \geq -C_1 + \left(-\mu_\eta + \frac{C_2}{n}\right) \mathrm{tr}_{\omega_g}(f^*\eta).$$

在引理 2.1 中取 f 为恒等映射， $C_1 = 1$，并令 $C_2 = t\delta_1^{-1}$，我们得到

$$\Delta_{\omega_t} \log \mathrm{tr}_{\omega_t}(\eta) \geq (-\mu_\eta + t(n\delta_1)^{-1})\mathrm{tr}_{\omega_t}(\eta) - 1. \qquad (2.7)$$

由极大值原理，

$$\sup_X \mathrm{tr}_{\omega_t}(\eta) \leq \frac{n\delta_1}{t - \mu_\eta n\delta_1}. \qquad (2.8)$$

对于 $t > n\delta_1\mu_\eta$，估计式 (2.8) 与 t 无关。因此，连续性方法保证存在一个关于 $t > n\delta_1\mu_\eta$ 的光滑解（参见 [25, 32]）。引入 the

势函数 $u_t := \varphi_t + t\delta_1^{-1}\psi$。论证的关键在于从下方估计 $\sup_{\mathcal{U}} u_t$，并从上方估计 $\sup_X u_t$。事实上，(2.4) 中的常数 c_3 定义为

$$c_3 \;:=\; \liminf_{t\to n\delta_1\mu_\eta} \int_X e^{u_t}\omega_0^n,$$

其中 μ_η 定义于（2.2）中。正性 c_3 要求 u_t 不恒等于$-\infty$，而 u_t 的有限性要求 $\sup_X u_t$具有上界。在获得 $\sup_X u_t$的上界之前，我们首先指出，与 Wu–Yau [27]、Tosatti–Yang [25] 和 Diverio–Trapani [15] 所考虑的情形不同，我们并没有一个具有带符号曲率的度量。为了处理正曲率的贡献，我们利用Tian 的 α–不变量[24]（另见 [34]）：

命题 2.2.（Tian 的 α–不变量）。设 (X,ω) 是一个紧致 K¨ahler 流形。存在一个正数 $\alpha = \alpha(X,[\omega])$，仅依赖于 X 和 K¨ahler 类$[\omega]$，使得对于任意 $\beta \in (0,\alpha)$ 以及任意 $u \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{R})$，满足 $\omega + dd^c u > 0$ 和 $\sup_X u = 0$，存在一个常数 $C_\beta = C_\beta(\omega)$，使得

$$\int_X e^{-\beta u}\omega^n \;\le\; C_\beta.$$

现在我们得到 $\sup_X u_t$ 的上界：

引理 2.3. 对于 $t \in (n\delta_1\mu_\eta, 2n\delta_1\mu_\eta]$，我们有

$$\sup_{x\in X} u_t(x) \;\le\; \log(2n\delta_1\varepsilon + b_0)^n \;\le\; \log(c_0+b_0)^n, \tag{2.9}$$

其中 $c_0 > 0$ 满足 Tian 的 α–不变量，即 $\alpha(X, c_0\omega_0) \ge 2$，且 $\varepsilon \le c_0/(2n\delta_1)$。

证明。由于 $u_t = \varphi_t + t\delta_1^{-1}\psi$，（2.7）可写为

$$e^{u_t - t\delta_1^{-1}\psi}\omega_0^n \;=\; e^{\varphi_t}\omega_0^n \;=\; (t\omega_0 - \mathrm{Ric}_{\omega_0} + dd^c u_t)^n. \tag{2.10}$$

由于度量 ω_0 是光滑的，且 X 是紧致的，因此存在某个 $b_0 \ge 0$，使得

$$\mathrm{Ric}_{\omega_0} \;\ge\; -b_0\omega_0. \tag{2.11}$$

由（2.10）、（2.11）以及在 u_t 达到其最大值的点 $x \in X$ 处 $\psi \le 0$ 这一事实可得。

$$\sup_{x\in X} u_t(x) \;\le\; \sup_X \left(t\delta_1^{-1}\psi + \log \frac{(t\omega_0 - \mathrm{Ric}_{\omega_0} + dd^c u_t)^n}{\omega_0^n} \right) \;\le\; \log(t_0+b_0)^n.$$

由于 $t \le 2n\delta_1\mu_\eta \le 2n\delta_1\varepsilon$，这就证明了（2.9）。

□

现在我们想从下方估计 $\sup_{\mathcal{U}} u_t$ 。

引理 2.4.

$$\sup_{\mathcal{U}} u_t \quad \geq \quad n\log(n) + \log\left(\frac{-\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta e^{t(n\delta_1)^{-1}\psi}\left(\frac{\eta^n}{\omega_0^n}\right)^{\frac{1}{n}}\omega_t^n}{\int_X \omega_t^n}\right). \tag{2.12}$$

证明。首先对 X 关于体积形式 ω_t^n 积分。根据散度定理,

$$\begin{aligned}\int_X \omega_t^n &\geq \int_X (-\kappa_\eta + t(n\delta_1)^{-1})\mathrm{tr}_{\omega_t}(\eta)\omega_t^n \\ &\geq \int_{\mathcal{U}} (-\kappa_\eta + t(n\delta_1)^{-1})\mathrm{tr}_{\omega_t}(\eta)\omega_t^n \;\geq\; -\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta \mathrm{tr}_{\omega_t}(\eta)\omega_t^n,\end{aligned}$$

利用 $(-\kappa_\eta + t(n\delta_1)^{-1})\mathrm{tr}_{\omega_t}(\eta) > 0$ 这一事实。根据算术-几何平均不等式,

$$\begin{aligned}-\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta \mathrm{tr}_{\omega_t}(\eta)\omega_t^n &\geq -n\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta \left(\frac{\eta^n}{\omega_t^n}\right)^{\frac{1}{n}}\omega_t^n \\ &= -n\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta \left(\frac{\omega_0^n}{\omega_t^n}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\eta^n}{\omega_0^n}\right)^{\frac{1}{n}}\omega_t^n.\end{aligned} \tag{2.13}$$

将（2.10）代入（2.13），我们得到如下估计式

$$\begin{aligned}\int_X \omega_t^n &\geq -n\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta e^{-\frac{1}{n}(u_t - t\delta_1^{-1}\psi)}\left(\frac{\eta^n}{\omega_0^n}\right)^{\frac{1}{n}}\omega_t^n \\ &\geq -ne^{-\frac{1}{n}\sup_{\mathcal{U}} u_t}\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta e^{t(n\delta_1)^{-1}\psi}\left(\frac{\eta^n}{\omega_0^n}\right)^{\frac{1}{n}}\omega_t^n.\end{aligned} \tag{2.14}$$

于是 (2.12) 由 (2.14) 得出。 □

由上述引理，只需估计

$$\frac{-\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta e^{t(n\delta_1)^{-1}\psi}\left(\frac{\eta^n}{\omega_0^n}\right)^{\frac{1}{n}}\omega_t^n}{\int_X \omega_t^n} \tag{2.15}$$

从下方。下面的引理给出了分子的估计：

引理 2.5. 存在正常数 $c_1, \delta_2 > 0$ 使得

$$-\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta e^{t(n\delta_1)^{-1}\psi} \left(\frac{\eta^n}{\omega_0^n}\right)^{\frac{1}{n}} \omega_t^n \;\geq\; \delta_2 \delta \int_{\mathcal{U}} e^{u_t^*} \omega_0^n \;\geq\; \frac{c_1 \delta_2^{\frac{1}{n}} \delta}{n}. \tag{2.16}$$

证明。记 $u_t^* := u_t - \sup_X u_t$，使得 $\sup_X u_t^* \leq 0$。在此记号下，读作 (2.15)

$$\begin{aligned} \frac{-\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta e^{t(n\delta_1)^{-1}\psi} \left(\frac{\eta^n}{\omega_0^n}\right)^{\frac{1}{n}} \omega_t^n}{\int_X \omega_t^n} &= \frac{-\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta e^{u_t} e^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)t\delta_1^{-1}\psi} \left(\frac{\eta^n}{\omega_0^n}\right)^{\frac{1}{n}} \omega_0^n}{\int_X e^{u_t} e^{-t\delta_1^{-1}\psi} \omega_0^n} \\ &= \frac{-\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta e^{u_t^*} e^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)t\delta_1^{-1}\psi} \left(\frac{\eta^n}{\omega_0^n}\right)^{\frac{1}{n}} \omega_0^n}{\int_X e^{u_t^*} e^{-t\delta_1^{-1}\psi} \omega_0^n} \end{aligned} \tag{2.17}$$

由于 $\psi \leq 0$，且 $t \in (n\delta_1\mu_\eta, 2n\delta_1\mu_\eta]$，我们有

$$\begin{aligned} -\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta e^{u_t^*} e^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)t\delta_1^{-1}\psi} \left(\frac{\eta^n}{\omega_0^n}\right)^{\frac{1}{n}} \omega_0^n &\geq -\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta e^{u_t^*} e^{(1-n)\kappa_\eta \psi} \left(\frac{\eta^n}{\omega_0^n}\right)^{\frac{1}{n}} \omega_0^n \\ &\geq \delta \int_{\mathcal{U}} e^{u_t^*} e^{(1-n)\kappa_\eta \psi} \left(\frac{\eta^n}{\omega_0^n}\right)^{\frac{1}{n}} \omega_0^n, \end{aligned} \tag{2.18}$$

其中，最后一个不等式由 $\mathcal{U}$ 上的负曲率估计 $\mathrm{RBC}_\eta \leq -\delta_3$ 得出。令

$$c_1 \;:=\; \inf\left\{ \int_{\mathcal{U}} e^v \omega_0^n \;:\; v \in \mathrm{PSH}_{(c_0+b_0)\omega_0}(X),\ \sup_X v = 0 \right\}. \tag{2.19}$$

那么 c_1 是一个仅依赖于 $\mathcal{U}$ 和 ω_0 的正数。由于 η 具有 (δ_1, δ_2)–有界几何，我们有

$$-\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta e^{u_t^*} e^{-(n-1)\mu_\eta \psi} \left(\frac{\eta^n}{\omega_0^n}\right)^{\frac{1}{n}} \omega_0^n \;\geq\; \frac{\delta_2^{\frac{1}{n}} \delta}{n} \int_{\mathcal{U}} e^{u_t^*} \omega_0^n \;\geq\; \frac{c_1 \delta_2^{\frac{1}{n}} \delta}{n}.$$

由 (2.18) 和 (2.19)，可得 (2.17) 中分子的所需下界。□

现在我们完成对 $\sup_{\mathcal{U}} u_t$ 下界的估计：

引理 2.6. 存在常数 $c_1, c_2, \delta_1, \delta_2 > 0$ 使得

$$\sup_{\mathcal{U}} u_t \;\geq\; n\log(n) + \log\left(\frac{c_1 \delta_2 \delta}{c_2}\right).$$

证明。 对于 (2.17) 中的分母，我们将再次使用 Tian 的 α–不变量 [24]。事实上，首先注意到，由于 $0 < t \leq 2n\delta_1\mu_\eta \leq c_0$，(2.6) 推出

$$c_0\omega_0 + t\delta_1^{-1}dd^c\psi \;\geq\; t\omega_0 + t\delta_1^{-1}dd^c\psi \;\geq\; t\delta_1^{-1}\eta \;>\; 0.$$

换言之， $t\delta_1^{-1}\psi$ 是 $c_0\omega_0$–拟次调和的。因此，由于选择 $c_0 > 0$ 使得 Tian 的 α–不变量满足 $\alpha(X, c_0\omega_0) \geq 2$，我们有

$$\int_X e^{u_t^*}e^{-t\delta_1^{-1}\psi}\omega_0^n \;\leq\; \int_X e^{-t\delta_1^{-1}\psi}\omega_0^n \;=\; c_0^{-n}\int_X e^{-t\delta_1^{-1}\psi}(c_0\omega_0)^n \;\leq\; c_2, \qquad (2.20)$$

对于某个常数 $c_2 > 0$ ，它仅依赖于 c_0 和 ω_0。结合 (2.15)、(2.17)、(2.16) 和 (2.20)，可得

$$\frac{-\int_{\mathcal{U}} \kappa_\eta e^{t(n\delta_1)^{-1}\psi}\left(\frac{\eta^n}{\omega_0^n}\right)^{\frac{1}{n}}\omega_t^n}{\int_X \omega_t^n} \;\geq\; \frac{c_1\delta_2^{\frac{1}{n}}\delta}{nc_2}. \qquad (2.21)$$

将 (2.21) 代入 (2.12)，

$$\sup_{\mathcal{U}} u_t \;\geq\; n\log(n) + \log\left(\frac{c_1\delta_2^{\frac{1}{n}}\delta}{nc_2}\right).$$

□

现在我们完成证明：令 $c_4 > 0$ 为满足下式的常数

$$\int_X \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(2n\delta_1\varepsilon\omega_0)^k \wedge (-\mathrm{Ric}_{\omega_0})^{n-k} \;\leq\; c_4\varepsilon.$$

Then

$$\begin{aligned}
\int_X (2\pi c_1(K_X))^n \;=\; \int_X (-\mathrm{Ric}_{\omega_0})^n \;&\geq\; \int_X (2n\delta_1\varepsilon\omega_0 - \mathrm{Ric}_{\omega_0})^n - c_4\varepsilon \\
&\geq\; \lim_{t\searrow n\delta_1\mu_\eta}(t\omega_0 - \mathrm{Ric}_{\omega_0} + dd^c u_t)^n - c_4\varepsilon \\
&=\; \lim_{t\searrow n\delta_1\mu_\eta}\int_X e^{u_t}e^{-t\delta_1^{-1}\psi}\omega_0^n - c_4\varepsilon \\
&\geq\; \liminf_{t\searrow n\delta_1\mu_\eta}\int_X e^{u_t}\omega_0^n - c_4\varepsilon \\
&=\; c_3 - c_4\varepsilon.
\end{aligned}$$

取 $\varepsilon \leq \min\left\{\frac{c_3}{2c_4}, \frac{c_0}{2n\delta_1}\right\}$ 即完成证明。

□

回忆一下，若紧致复流形 X 与射影流形双有理等价，则称其为 Moishezon 流形。任何带有大线丛 $\mathcal{L} \to X$ 的紧致复流形都是 Moishezon 流形，其线性系 $|\mathcal{L}|$ 给出了该双有理映射。特别地，一般型紧致复流形 X （即典范丛 K_X 是大线丛）是 Moishezon 流形。特别地，我们有：

推论 2.7. 设 (X, ω) 是一个紧致 K¨ahler 流形，具有 (δ_1, δ_2)–有界几何以及 (ε, δ)–拟负全纯截面曲率。若进一步假设 K_X 数值有效，则 X 为一般型，因此尤其是 Moishezon。

Moishezon 定理 [19] 断言，一个 Kähler Moishezon 流形是射影的。进一步，根据极小模型纲领的最新进展， [2,推论 1.4.6], 没有有理曲线的 Moishezon 流形是射影的。特别地，由 [14, 定理 0.5], 我们得到如下结论：

推论 2.8. 设 X 是一个紧致 K¨ahler 流形，其上赋有一个具有 (δ_1, δ_2)–有界几何且具有 (ε, δ)–拟负全纯截面曲率的厄米度量。若进一步假设 K_X 数值有效且 X 是 Kobayashi 双曲的，则 X 是射影的，且其典范丛丰沛。

注 2.9. 鉴于 Tian 不变量在代数几何中的地位，进一步探究其所发挥的作用将是很有意义的。事实上，我们提醒读者，Tian 的不变量是对数典范阈值的一种渐近形式（参见 [24, 13,10]）。

3. Proof of Theorem 1.2

为了证明定理 1.2，我们首先运用 Li– Ni–Zhu[18] 的方法证明一个有用的引理。令

$$\lambda_{\omega_0} := \max_{x \in X} \max_{v \in T^{1,0}_x X} \mathrm{Ric}^{\perp}_{\alpha,\beta}(v).$$

定义

$$\tau_{\omega_0}(x) := \rho\left(\max_{v \in T^{1,0}_x X} \mathrm{Ric}^{\perp}_{\alpha,\beta}(v) \right) \cdot \max_{v \in T^{1,0}_x X} \mathrm{Ric}^{\perp}_{\alpha,\beta}(v),$$

其中 $\rho : \mathbb{R} \to \{n+1, 2n\}$ 是一个函数，满足 $\rho(s) = n+1$ 当 $s \leq 0$ 时，以及 $\rho(s) = 2n$当 $s > 0$时。

引理 3.1. 设 (X^n, ω_0) 是一个紧致 K¨ahler 流形。我们考虑关于 φ_t的以下复 Monge-Amp`ère 方程:

$$(t\omega_0 - \mathrm{Ric}_{\omega_0} + dd^c\varphi_t)^n = e^{(1+\frac{\alpha}{2\beta})\varphi_t}\omega_0^n \tag{3.1}$$

(a) 如果 $\lambda_{\omega_0} \geq 0$，那么方程 (3.1) 的解 φ_t 对于 $t \in \left(\frac{2n\lambda_{\omega_0}}{n+1}()\alpha, +\infty\right)$ 存在；(b) 如果 $\lambda_{\omega_0} < 0$，那么方程 (3.1) 的解 φ_t 对于 $t \in [0, +\infty$ 存在。

证明。我们考虑如下关于 φ_t的复 Monge–Amp`ère 方程:

$$(t\omega_0 - \mathrm{Ric}_{\omega_0} + dd^c\varphi_t)^n = e^{(1+\frac{\alpha}{2\beta})\varphi_t}\omega_0^n. \tag{3.2}$$

如果 t 足够大，那么 $t\omega_0 - \mathrm{Ric}_{\omega_0} > 0$。由奥宾–丘定理 [1, 31], ，对于 $t \in (T, +\infty)$，方程 (3.2) 存在唯一的光滑解 φ_t ，其中 T 是 φ_t的最小存在时间。我们假设引理 3.1(a)不成立，即 $T > \frac{2n\lambda_{\omega_0}}{(n+1)\alpha} \geq 0$。不失一般性，我们只考虑 $t \in (T, A]$，其中 A 是足够大的固定正数。令 $\omega_t := t\omega_0 - \mathrm{Ric}_{\omega_0} + dd^c\varphi_t$。那么对于 $t \in (T, A]$，我们有

$$\omega_t = t\omega_0 - \mathrm{Ric}_{\omega_0} + dd^c\varphi_t > 0, \tag{3.3}$$

且（3.2）等价于

$$\mathrm{Ric}_{\omega_t} = -\omega_t + t\omega_0 - \frac{\alpha}{2\beta}dd^c\varphi_t. \tag{3.4}$$

为简化记号，我们将 ω_t 的分量记为 $g_{i\bar{j}}$ ，将 ω_0 的分量记为 $h_{\alpha\bar{\beta}}$。令 $G = \mathrm{tr}_{\omega_t}\omega_0 = \mathrm{tr}_g h$，由引理 2.1 可得

$$\Delta_{\omega_t}\log G \geq \frac{1}{G}(\mathrm{Ric}^g_{i\bar{j}}g^{i\bar{q}}g^{p\bar{j}}h_{p\bar{q}} - g^{i\bar{j}}g^{k\bar{l}}R^h_{i\bar{j}k\bar{l}}). \tag{3.5}$$

由 [18, 引理 2.2], 可得

$$\frac{1}{G}g^{i\bar{j}}g^{k\bar{l}}R^h_{i\bar{j}k\bar{l}} \leq \frac{\lambda}{2\beta}G + \frac{\lambda}{2\beta G}|h|^2_g - \frac{\alpha}{\beta}\mathrm{tr}_g\mathrm{Ric}^h + \frac{\alpha}{2\beta G}(G\cdot\mathrm{tr}_g\mathrm{Ric}^h - \langle\omega_h, \mathrm{Ric}^h\rangle_g). \tag{3.6}$$

选择局部坐标，使得 $g_{i\bar{j}} = \delta_{i\bar{j}}$, $h_{i\bar{j}} = h_{i\bar{i}}\delta_{ij}$，那么

$$\begin{aligned} G\cdot\mathrm{tr}_g\mathrm{Ric}^h - \langle\omega_h, \mathrm{Ric}^h\rangle_g &= \sum_i \mathrm{Ric}^h_{i\bar{i}}(\sum_j h_{j\bar{j}} - h_{i\bar{i}}) = \sum_i(\mathrm{Ric}^h_{i\bar{i}}(\sum_{j\neq i} h_{j\bar{j}})) \\ &\leq \sum_i (t\cdot h_{i\bar{i}} + \sqrt{-1}\varphi_{t,i\bar{i}})(\sum_j h_{j\bar{j}} - h_{i\bar{i}}) \\ &= tG^2 - t|h|^2_g + G\Delta_g\varphi_t - \langle dd^c\varphi_t, h\rangle_g. \end{aligned} \tag{3.7}$$

这里我们使用了（3.3）。结合（3.6）和（3.7），得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{G}g^{i\bar{j}}g^{k\bar{l}}R^{h}_{i\bar{j}k\bar{l}} \leq\ & \frac{\lambda+\alpha t}{2\beta}G+\frac{\lambda-\alpha t}{2\beta}\frac{|h|_g^2}{G}-\frac{\alpha}{\beta}\mathrm{tr}_g\mathrm{Ric}^h\\ &+\frac{\alpha}{2\beta}\Delta_g\varphi_t-\frac{\alpha}{2\beta}\frac{1}{G}\langle dd^c\varphi_t,h\rangle_g. \end{aligned}\tag{3.8}$$

利用 (3.4)，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{G}\mathrm{Ric}^g_{i\bar{j}}g^{i\bar{q}}g^{p\bar{j}}h_{p\bar{q}} &= \frac{1}{G}\langle\mathrm{Ric}^g,h\rangle_g = \frac{1}{G}\langle -g+th-\frac{\alpha}{2\beta}dd^c\varphi_t,h\rangle_g\\ &= \frac{1}{G}\langle -g+th,h\rangle_g-\frac{1}{G}\frac{\alpha}{2\beta}\langle\varphi_t,h\rangle_g. \end{aligned}\tag{3.9}$$

结合 (3.5)、(3.8) 和 (3.9)，我们得到

$$\begin{aligned}\Delta_{\omega_t}\left(\log G-\frac{\alpha}{2\beta}\varphi_t\right) \geq\ & -\frac{\lambda+\alpha t}{2\beta}G-\frac{\lambda-\alpha t}{2\beta}\frac{|h|_g^2}{G}+\frac{\alpha}{\beta}(\mathrm{tr}_g\mathrm{Ric}^h-\Delta_g\varphi_t)\\ &+\frac{1}{G}\langle -g+th,h\rangle_g. \end{aligned}\tag{3.10}$$

若 $\lambda\geq 0$，由于 $t>T>0$, $n|h|_g^2\geq G^2$, $|h|_g^2\leq G^2$,

$$\Delta_g\varphi_t = n-tG+\mathrm{tr}_g\mathrm{Ric}^h,\tag{3.11}$$

and

$$\frac{1}{G}\langle -g+th,h\rangle_g = -1+\frac{t}{G}|h|_g^2 \geq -1.\tag{3.12}$$

因此我们有

$$\Delta_{\omega_t}\left(\log G-\frac{\alpha}{2\beta}\varphi_t\right) \geq \left(\frac{(n+1)\alpha t-2n\lambda}{2\beta n}\right)G-\left(\frac{\alpha n}{\beta}+1\right).\tag{3.13}$$

现在我们应用极大值原理，得到 ω_t 的一致下界估计。对于任意固定的 $t\in(T,A]$, 在 φ_t 的最大值点 x_1 处，我们有 $dd^c\varphi_t\leq 0$，因此可以得到

$$0 < g = \omega_t\,|_{x_1} \leq t\omega_0-\mathrm{Ric}_{\omega_0}(x_1),\tag{3.14}$$

and

$$e^{(1+\frac{\alpha}{2\beta})\sup_X\varphi_t(x)} = e^{(1+\frac{\alpha}{2\beta})\varphi_t(x_1)} \leq \frac{(t\omega_0-\mathrm{Ric}_{\omega_0}))^n}{\omega_0^n} \leq C,\tag{3.15}$$

其中 C i 与 t 无关。因此，φ_t 有一致上界，并且我们还得到

$$\omega_t^n \leq C'\omega_0^n.\tag{3.16}$$

再次对 log $G-\frac{\alpha}{2\beta}\varphi_t$ 应用极大值原理。在 x_2 处，log $G-\frac{\alpha}{2\beta}\varphi_t$ 取得最大值。由于 $t>T>\frac{2n\lambda_{\omega_0}}{(n+1)\alpha}\geq 0$，根据 (3.13)，我们有

$$G(x_2)\ \leq\ C'', \tag{3.17}$$

其中，C'' 也与 t无关。注意到

$$G\cdot\left(\frac{\omega_0^n}{\omega_t^n}\right)^{\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}}\ =\ G\cdot\left(e^{-(1+\frac{\alpha}{2\beta})\varphi_t}\right)^{\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}}\ =\ G\cdot e^{-\frac{\alpha}{2\beta}\varphi_t}. \tag{3.18}$$

因此，$\sup_X G\cdot\left(\frac{\omega_0^n}{\omega_t^n}\right)^{\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}}$ 也在 x_2处取得。由算术-几何平均不等式，在 x_2处，有 $G\cdot\left(\frac{\omega_0^n}{\omega_t^n}\right)^{\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}}\leq G\cdot(\frac{G}{n})^{\frac{\alpha n}{2\beta+\alpha}}$。由（3.17），有 $\sup_X G\cdot(\frac{\omega_0^n}{\omega_t^n})^{\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}}\ \leq\ C'''$。再次由（3.16），得到

$$\omega_t\ \geq\ \widetilde{C}\omega_0, \tag{3.19}$$

其中 $\widetilde{C}$ 为一个正数，且与 t无关。结合（3.16）和（3.19），对于某个与 t无关的正数 $C>0$，有

$$C^{-1}\omega_0\ \leq\ \omega_t\ \leq\ C\omega_0. \tag{3.20}$$

因此，我们得到了高阶估计（参见 [25]）。此外，ω_t 收敛到一个光滑的 K¨ahler 形式，当 $t\to T$时成立。这与 T 是 φ_t的最小存在时间矛盾。因此，必有 $T\leq\frac{2n\lambda}{(n+1)\alpha}$。引理 3.1 (a) 的证明至此完成。

若 $\lambda<0$，由 ((3.10)) 可容易得到

$$\Delta_{\omega_t}\left(\log G-\frac{\alpha}{2\beta}\varphi_t\right)\ \geq\ \left(\frac{(n+1)\alpha t-(n+1)\lambda}{2\beta n}\right)G-\left(\frac{\alpha n}{\beta}+1\right). \tag{3.21}$$

按照引理 3.1 (a) 的证明，我们可以容易地证明引理 3.1 (b)。□

定理 1.2 的证明：定理 1.2 的证明与定理 1.1 的证明类似。为完整起见，我们给出详细证明。我们考虑以下关于 φ_t的复 Monge- Amp`ère 方程：

$$(t\omega_0-\mathrm{Ric}_{\omega_0}+dd^c\varphi_t)^n=e^{(1+\frac{\alpha}{2\beta})\varphi_t}\omega_0^n. \tag{3.22}$$

令 $\omega_t=t\omega_0-\mathrm{Ric}_{\omega_0}+dd^c\varphi_t$。由引理 3.1 可知，蕴含

$$\Delta_{\omega_t}\left(\log(\mathrm{tr}_{\omega_t}\omega_0)-\frac{\alpha}{2\beta}\varphi_t\right)\ \geq\ \left(\frac{(n+1)\alpha t-\tau_{\omega_0}}{2\beta n}\right)\mathrm{tr}_{\omega_t}(\omega_0)-\left(\frac{\alpha n}{\beta}+1\right). \tag{3.23}$$

并且存在光滑解 φ_t，其满足 $t \in \left(\frac{2n\lambda_{\omega_0}}{n+1}(\)\alpha、 +\infty\right)$。下文中我们只考虑 $t \in \left(\frac{2n\lambda_{\omega_0}}{n+1}(\)\alpha、 \frac{4n\lambda_{\omega_0}}{(n+1)\alpha}\right]$。对（3.23）积分得

$$\begin{aligned}\left(\frac{\alpha n}{\beta}+1\right)\int_X \omega_t^n &\geq \int_X \left(\frac{(n+1)\alpha t}{2\beta n}-\frac{\tau_{\omega_0}}{2\beta n}\right)(\mathrm{tr}_{\omega_t}\omega_0)\omega_t^n \\ &\geq -\frac{1}{2\beta n}\int_{\mathcal{U}} \tau_{\omega_0}(\mathrm{tr}_{\omega_t}\omega_0)\omega_t^n \\ &\geq -\frac{1}{2\beta}\int_{\mathcal{U}} \tau_{\omega_0}\cdot\left(\frac{\omega_0^n}{\omega_t^n}\right)^{\frac{1}{n}}\omega_t^n \\ &= -\frac{1}{2\beta}\int_{\mathcal{U}} \tau_{\omega_0}\cdot e^{-\frac{1}{n}(1+\frac{\alpha}{2\beta})\varphi_t}\omega_t^n \\ &\geq -\frac{1}{2\beta}e^{-\frac{1}{n}(1+\frac{\alpha}{2\beta})\sup_X\varphi_t}\int_{\mathcal{U}}\tau_{\omega_0}\omega_t^n \end{aligned} \tag{3.24}$$

现在我们来估计以下分式的界:

$$\frac{-\int_{\mathcal{U}}\tau_{\omega_0}\omega_t^n}{\int_X\omega_t^n} = \frac{-\int_{\mathcal{U}}\tau_{\omega_0}e^{(1+\frac{\alpha}{2\beta})\varphi_t}\omega_0^n}{\int_X e^{(1+\frac{\alpha}{2\beta})\varphi_t}\omega_0^n} = \frac{-\int_{\mathcal{U}}\tau_{\omega_0}e^{(1+\frac{\alpha}{2\beta})\varphi_t^*}\omega_0^n}{\int_X e^{(1+\frac{\alpha}{2\beta})\varphi_t^*}\omega_0^n}, \tag{3.25}$$

其中 $\varphi_t^* := \varphi_t - \sup_X\varphi_t$。我们固定一个非负数 $b_0 \geq 0$，使得 $\mathrm{Ric}_{\omega_0} \geq -b_0\omega_0$。对 φ_t应用极大值原理，由 (3.22) 可得

$$\begin{aligned}\sup_X\varphi_t &\leq \frac{2\beta}{\alpha+2\beta}\log\left(\frac{4n\varepsilon}{(n+1)\alpha}+b_0\right)^n \\ &\leq \frac{2\beta}{\alpha+2\beta}\log(c_0+b_0)^n \end{aligned} \tag{3.26}$$

对于 $t \in \left(\frac{2n\lambda_{\omega_0}}{n+1}(\)\alpha, \frac{4n\lambda_{\omega_0}}{(n+1)\alpha}\right]$，其中 c_0 是一个正数，使得 α–不变量$\alpha(X, c_0\omega_0) \geq 2$，并且我们取 $\varepsilon \leq \frac{(n+1)^{\alpha c_0}}{4n}$。令

$$c_1 := \inf\left\{\int_{\mathcal{U}} e^u\omega_0^n | u \in \mathrm{PSH}(X,(c_0+b_0)\omega_0),\ \sup_X u = 0\right\},$$

这是一个正数，仅取决于 $\mathcal{U}, \omega_0, c_0, b_0$，因此也仅取决于 $\mathcal{U}, \omega_{0}$。于是，对于 $t \in \left(\frac{2n\lambda_{\omega_0}}{n+1}(\)\alpha, \frac{4n\lambda_{\omega_0}}{(n+1)\alpha}\right]$，我们有

$$-\int_{\mathcal{U}}\tau_{\omega_0}e^{(1+\frac{\alpha}{2\beta})\varphi_t^*}\omega_0^n \geq (n+1)\delta\int_{\mathcal{U}} e^{(1+\frac{\alpha}{2\beta})\varphi_t^*}\omega_0^n \geq (n+1)\delta c_1$$

由于 $\sup_X \varphi_t^* = 0$，因此我们得到

$$\int_X e^{(1+\frac{\alpha}{2\beta})\varphi_t^*}\omega_0^n \leq \int_X \omega_0^n =: c_2,$$

其中， c_2 是一个仅依赖于 ω_0 的正数。综上，对于$t \in \left(\begin{smallmatrix}2n\lambda_{\omega_0}\\ n+1\end{smallmatrix}()\alpha, \begin{smallmatrix}4n\lambda_{\omega_0}\\ (n+1)\alpha\end{smallmatrix}\right]$，我们得到

$$\frac{-\int_{\mathcal{U}} \tau_{\omega_0}\omega_t^n}{\int_X \omega_t^n} \geq \frac{(n+1)\delta c_1}{c_2}.$$

结合（3.24）可得

$$\sup_{\mathcal{U}} \varphi_t \geq \frac{2\beta n}{\alpha+2\beta}\log\frac{(n+1)\delta c_1}{(2\alpha n+2\beta)c_2}.$$

现在我们定义

$$c_3 := \inf\left\{\int_X e^v\omega_0^n \mid v \in \mathrm{PSH}(X, c_0b_0\omega_0),\ n\log\frac{(n+1)\delta c_1}{(2\alpha n+2\beta)c_2} \leq \sup_X v \leq \log(c_0+b_0)^n\right\},$$

这是一个仅依赖于 U、ω_0、δ 的正数。因此，

$$\begin{aligned}\int_X\left(\frac{2n\lambda_{\omega_0}}{(n+1)\alpha}\omega_0 - \mathrm{Ric}_{\omega_0}\right)^n &= \lim_{t\to\frac{2n\lambda_{\omega_0}}{(n+1)\alpha}}\int_X (t\omega_0 - \mathrm{Ric}_{\omega_0} + dd^c\varphi_t)^n \\ &= \lim_{t\to\frac{2n\lambda_{\omega_0}}{(n+1)\alpha}}\int_X e^{(1+\frac{\alpha}{2\beta})\varphi_t}\omega_0^n \\ &\geq \liminf_{t\to\frac{2n\lambda_{\omega_0}}{(n+1)\alpha}}\int_X e^{(1+\frac{\alpha}{2\beta})\varphi_t}\omega_0^n \\ &\geq c_3 \end{aligned} \tag{3.27}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\int_X\left(\frac{2n\lambda_{\omega_0}}{(n+1)\alpha}\omega_0 - \mathrm{Ric}_{\omega_0}\right)^n &= \lim_{t\to\frac{2n\lambda_{\omega_0}}{(n+1)\alpha}}\int_X (t\omega_0 - \mathrm{Ric}_{\omega_0} + dd^c\varphi_t)^n \\ &\leq \int_X\left(\frac{4n\varepsilon}{(n+1)\alpha}\omega_0 - \mathrm{Ric}_{\omega_0}\right)^n \\ &\leq \int_X(-\mathrm{Ric}_{\omega_0})^n + c_4\varepsilon \\ &= \int_X(2\pi c_1(K_X))^n + c_4\varepsilon \end{aligned} \tag{3.28}$$

其中 c_4 是 仅依赖于 ω_0的正数。由 (3.27) 和 (3.28)，我们有

$$\int_{\omega_0} (2\pi c_1(K_X))^n \geq c_3 - c_4\varepsilon.$$

因此，若 $\varepsilon \leq \min\{\frac{c_3}{2c_4}, \frac{1}{(n+1)4n}\}$，则有 $\int_X (2\pi c_1(K_X))^n \geq \frac{c_3}{2} > 0$。 □

定理 1.3 的证明。注意，这一论证几乎无需改变即可重复使用，从而证明定理 1.3。唯一的修改是需要 [18,引理 2。1]。

References

[1] Aubin, T., ´紧致 K`ähler 流形上的 Monge–Amp`ère 型方程，巴黎科学院通讯 283 (1976)，第 119–121 页。[引自第 1 页和第 11 页。[2] Birkar, C., Cascini, P., Hacon, C., McKernan, J.，对数一般型簇的极小模型的存在性。《美国数学会杂志》23(2):405–468，2010 年。[引自第 10 页。[3] Broder, K.，K¨ähler 几何与非 K¨ähler 几何中的 Schwarz 引理，arXiv:2109.06331，即将发表于《亚洲数学杂志》。[引自第 5 页。[4] Broder, K.，Schwarz 引理：一段奥德赛，arXiv:2110.04989，《落基山数学杂志》52 (2022)，第 4 期，1141–1155 页。[引自第 5 页。[5] Broder, K.，关于 Wu–Yau 定理的备注，（已投稿）。[引自第 3 页。[6] Broder, K., Stanfield, J.，Hermite 流形上的 Gauduchon 曲率，《国际数学杂志》，doi：https://doi.org/10.1142/S0129167X23500398 [引自第 2 页。[7] Broder, K., Tang, K.，关于加权正交 Ricci 曲率，《几何与物理杂志》，104783，doi：https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2023.104783。[引自第 3 页。[8] Broder, K., Tang, K.，Hermite 流形的修正全纯曲率，arXiv:2201.03666。[引自第 2 页。[9] Campana, F.，扭量空间与某些辛 K¨ähler 流形的非双曲性，载于《复分析》（伍珀塔尔 1991），Aspects Math.，E17，第 64–69 页。Friedr. Veiweg，布伦瑞克，1991 年。[引自第 1 页。[10] Cheltsov, I., Shramov, C.，光滑 Fano 三维簇的对数典范阈值（俄文），附 Jean-Pierre Demailly 的附录，《数学科学进展》63 (2008)，第 73–180 页；译文见《俄罗斯数学调查》63 (2008)，第 859–958 页。[引自第 10 页。[11] Chu, J. C., Lee, M. C., Tam L.-F.，K¨ähler 流形与混合曲率。《美国数学会汇刊》375 (2022)，第 11 期，7925–7944 页。[引自第 1、3 和 4 页。[12] Debarre, O.，《高维代数几何》，Universitext, Springer-Verlag，纽约，2001 年。MR 1841091 [引自第 1 页。[13] Demailly, J.-P., Koll´ár, J.，复奇异指数的半连续性与 Fano 轨形上的 K¨ähler–Einstein 度量，《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑）34 (2001)，525–556 页。[引自第 10 页。[14] Demailly, J.-P., Paun, M.，紧致 K¨ähler 流形的 K¨ähler 锥的数值刻画，《数学年刊》（第 2 辑）159 (2004)，第 3 期，1247–1274 页。[引自第 1 页和第 10 页。]

[15] Diverio, S., Trapani, S.，拟负全纯截面曲率与正典范丛，《微分几何杂志》111 (2019)，第 303–314 页。[引用于第 1、2、3 和 6 页。[16] Heier, G., Lu, S., Wong, B.，关于典范线丛与负全纯截面曲率，《数学研究快报》17 (2010)，第 06 期，第 1101–1110 [引用于第 1 页。[17] Lee, M. C., Streets, J.，具有负曲率算子的复流形，《国际数学研究通知》，arXiv: 1903.12645。[引用于第 2 页。[18] Li, C., Ni, L., Zhu, X.，复 Monge-Amp`ere 方程的 C^2-估计的一个应用，《国际数学杂志》32 (2021)，第 12 期，论文编号 2140007，共 13 页。[引用于第 10、11 和 16 页。[19] Moishezon, B. G.，具有 n 个代数无关亚纯函数的 n维紧致复流形。I.《苏联科学院学报：数学辑》30：133–174，1966。[引用于第 1 和 10 页。[20] Ni, L.，K¨ahler 流形之间全纯映射的刘维尔定理与 Schwarz 引理。《纯粹与应用数学通讯》2021，74：1100–1126。[引用于第 4 页。[21] Royden, H. L.，多复变数中的阿尔福斯–施瓦茨引理，《Comment. Math. Helvetici》55 (1980)，第 547–558 页。[引用于第 5 页。[22] Siu, Y.-T.，关于半正线丛在非 K¨ahler 流形上的一个消失定理，《微分几何杂志》19 (1984)，第 431–452 页。[引用于第 3 页。[23] Tang, K.，关于几乎非正 k-里奇曲率，《几何分析杂志》32 (2022)，第 12 期，论文编号 306，共 12 页。[引用于第 3 和 4 页。[24] Tian, G.，关于某些具有 $C_1(M) > 0$的 K¨ahler 流形上的 K¨ahler–Einstein 度量，《数学发明》89 (1987)，第 2 期，第 225–246 [引用于第 6、9 和 10 页。[25] Tosatti, V., Yang, X.-K.，吴–丘定理的一个推广，《微分几何杂志》107(3)：573–579 [引用于第 1、5、6 和 13 页。[26] Wong, B.，负曲率紧致 K¨ahler 曲面的统一化，《微分几何杂志》16 (1981)，第 3 期，407–420。[引用于第 1 页。[27] Wu, D., Yau, S.-T.，负全纯截面曲率与正典范丛，《数学发明》204 (2016)，第 2 期，595–604 [引用于第 1 和 6 页。[28] Wu, D., Yau, S.-T.，关于我们论文“负全纯曲率与正典范丛”的一条评注。《分析与几何通讯》24 (2016) 901–912。[引用于第 1 页。[29] Yang, B., Zheng, F.，关于 Hermitian 流形的曲率张量，《分析与几何通讯》第 26 卷 (2018)，第 5 期，第 1195–1222 [引用于第 2 页。[30] Yang, X., Zheng, F.，关于 Hermitian 流形的实双截曲率，《美国数学会汇刊》371 (2019)，第 4 期，2703–2718 [引用于第 2 和 5 页。[31] Yau, S.-T.，关于紧致 K¨ahler 流形的里奇曲率与复 Monge–Amp`ere 方程，I，《纯粹与应用数学通讯》31 (1978)，第 339–411 页。[引用于第 1 和 11 页。[32] Zhang, Y.，全纯映射的积分不等式及其应用，《美国数学会汇刊》374 (2021)，第 4 期，2341–2358 [引用于第 3 和 5 页。[33] Zhang, Y.，全纯截面曲率、数值有效性与宫冈–丘型不等式，《数学杂志》298 (2021)，第 3–4 期，953–974 [引用于第 3 页。]

[34]Zhang, Y., Zheng, T.，关于几乎拟负全纯截面曲率，arXiv:2010.01314v4。

<escape>Cited </escape>在第 1、2、3 和 6 页。
<escape></escape>

The University of Queensland, St. Lucia, QLD 4067, Australia
电子邮箱：k.broder@uq.edu.au

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jin-hua, Zhejiang, 321004, China
电子邮箱地址：kaitang001@zjnu.edu.cn