arXiv:2305.01892v1 [cs.CG] 3 May 2023

关于小规模几何集合覆盖和小 k 离散 k-中心的细粒度复杂性

Timothy M. Chan ！ 美国伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校计算机科学系
Qizheng He ！ 美国伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校计算机科学系

YuanchengYu ！

计算机科学系，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，美国

摘要

我们研究离散 k-中心问题及相关（精确）几何集合覆盖问题在 k 或覆盖规模较小时的时间复杂度。我们获得了大量新结果：

- 我们给出了首个用于二维离散直角线性 3-中心的次二次时间算法，运行时间为$\widetilde{O}(n^{3/2})$。在关于稀疏图中三角形检测的标准假设下，我们证明，对于任意常数$\delta > 0$，四维离散直角线性 3-中心问题的下界为 $\Omega(n^{4/3-\delta})$。给定二维中的 n 个点和 n 个加权轴对齐单位正方形，我们给出了首个次二次时间算法，用 3 个单位正方形覆盖这些点并求出最小权覆盖，运行时间为$\widetilde{O}(n^{8/5})$。在广为人知的全点对最短路径假设下，我们还证明了二维中同一问题的下界为 $\Omega(n^{3/2-\delta})$。对于二维中的任意轴对齐矩形，我们的上界为$\widetilde{O}(n^{7/4})$。在超团~假设下，我们证明了 13 维欧几里得离散 2-中心问题的下界为 $\Omega(n^{2-\delta})$。若矩阵乘法指数 ω 等于 2，这一下界几乎匹配直接得到的上界 $O(n^{\omega})$。
- 类似地，在超团假设下，对于任意常数 $k \geq 3$，我们证明欧几里得离散 k-中心问题在 $O(k)$ 维中的下界为 $\Omega(n^{k-\delta})$。若 $\omega = 2$，这一界同样几乎匹配已知上界。我们还证明了一个下界 $\Omega(n^{2-\delta})$：给定 12 维空间中的 n 个点和 n 个盒子，寻找 2 个盒子以覆盖尽可能多的点。该下界与直接得到的近二次上界相匹配。

2012 年 ACM 学科分类 计算理论 → 计算几何

关键词和短语离散几何集合覆盖 k-中心，条件下界

资助 *Timothy M. Chan*：工作获得 NSF 基金 CCF-2224271 资助。

1 引言

1.1 小 k 的离散 k-中心问题

该欧几里得 k-中心问题在计算几何中广为人知，且历史悠久：给定集合 P 中的 n 个 $\mathbb{R}^d$ 点，以及一个数 k，我们希望找到 k 个全等球，使其覆盖 S，同时使半径最小。对于任意常数维度，欧几里得 1-中心都可以通过低维线性规划或 LP 型问题的标准技术在线性时间内求解 d [21, 24, 27, 41, 50]。在 SoCG'96 的一篇著名论文中，Sharir [44] 首次给出了 $\widetilde{O}(n)$时间[1] 算法，用于求解 $\mathbb{R}^2$中的欧几里得 2-中心问题，这代表了重大

[1] 该 $\widetilde{O}$ 符号隐藏了多对数因子。

对先前近二次时间算法的改进（此后，一系列后续工作已降低了隐藏的对数因子 [29, 17, 49, 23]）。高维情况下，问题更难：欧几里得 2-中心在 $\mathbb{R}^d$ 中的最佳时间界约为 n^d(参见 [3, 2] 关于 $\mathbb{R}^3$ 情形的一些结果），Cabello 等人 [15] 证明了一个条件下界，在指数时间假设（ETH）成立的前提下，排除了 $n^{o(d)}$时间算法。据我们所知，目前尚无专门研究欧几里得 3-中心问题的工作。

k-中心问题也在不同度量下得到过研究。欧几里得度量之外，最流行的版本是 L_∞，即直角距离 k-中心问题：我们要找到覆盖 P 的 k 个全等超立方体，同时使超立方体的边长最小。[2] 正如预期，直角距离版本比欧几里得版本略容易。Sharir 和 Welzl 在 SoCG' 96 [45]证明，$\mathbb{R}^2$ 中的直角距离 3-中心问题可以在线性时间内求解，而 $\mathbb{R}^2$ 中的直角距离 4-中心和 5-中心可以在 $O(n)$ 时间内求解（Nussbaum [42]随后改进了其中的对数因子）。Katz 和 Nielsen 在 SoCG'96 [35] 的工作得出了适用于任意常数维度 d的直角距离 2-中心近线性时间算法，而 Cabello 等人在 SODA'08 [15] 给出了一个时间复杂度为 $O(n\log\ n)$ 的算法，用于求解任意常数维度 d中的直角距离 3-中心问题。Cabello 等人还证明了直角距离 4-中心问题的条件下界，排除了在指数时间假设下运行时间为 $n^{o(\sqrt{d})}$ 的算法。

在本文中，我们关注一个称为离散 k-中心的自然变体，该问题也受到了广泛关注：给定 $\mathbb{R}^d$ 中的 n 个点组成的集合 P 以及一个数 k，我们希望找到覆盖 P 的 k 个全等球，同时使半径最小，并额外要求所选球的中心属于 P。[3] 欧几里得离散 1-中心问题可以通过直接应用最远点 Voronoi 图，在 $\mathbb{R}^2$ 中以 $O(n\log\ n)$ 时间求解；通过更多努力 [16],，也可以在 $\mathbb{R}^3$ 中以 $O(n\log\ n)$ 时间（随机化）求解；对于 $d \geq 4$，则可以利用标准范围搜索技术 [4, 40]，在次二次 $\widetilde{O}(n^{2-2/(\lceil d/2\rceil+1)})$ 时间内求解。Agarwal、Sharir 和 Welzl 在 SoCG'97 [7] 上给出了首个欧几里得离散 2-中心的次二次时间算法，其运行时间为 $\mathbb{R}^2$ 中的 $\widetilde{O}(n^{4/3})$。

有人可能会想，能否也通过范围搜索技术，在次二次时间内求解高维常数维空间中的欧几里得离散 2-中心问题。目前尚无相关结果~，但不难得到一个运行时间为 $O(n^\omega)$ 的算法，其中 $\omega < 2.373$ 表示矩阵乘法指数：通过二分搜索，该问题可归约为寻找两个半径为 r 、中心位于 S 且能够覆盖 S的球。这等价于寻找一对 p，$q \in S$，使得 $c_{pq} = \bigvee_{z\in S}(a_{pz} \wedge a_{zq})$为假；其中 a_{pz} 当且仅当 p 且 z 与r的距离大于r时为真——这一计算可归约为布尔矩阵乘积。这种方法适用于任意（不一定是几何的）距离函数。主要问题在于，在高维欧几里得空间中，几何性质能否帮助获得更快的算法，正如 Agarwal、Sharir 和 Welzl 在 $\mathbb{R}^2$中成功做到的那样：

▶**问题1**。 在更高的常数维度中，是否存在一种运行时间快于 n^ω 的欧几里得离散 *2*-中心问题算法?

我们还可以研究离散 k中心问题的直角线性版本，该版本可能更容易求解。例如，正如多篇论文⌣$O(n)$ 时间内，利用正交范围查询的直接应用，即可在任意常数维度 d下求解离散直角线性2-中心问题 [11, 12, 34]。这种方法似乎无法用于

[2] 本文中的所有正方形、矩形、超立方体和盒子均为轴对齐。[3] 有些作者对该问题的定义稍微更为一般：其约束是中心必须取自第二个输入集合；换言之，输入由两个点集（“需求点”和“供给点”）组成。本文的结果适用于这两种问题版本。

k	欧几里得	直角线性	离散欧几里得	离散直角线性
1	$O(n)$	$O(n)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
2	$\widetilde{O}(n)$ [44]	$O(n)$ [45]	$\widetilde{O}(n^{4/3})$ [7]	$\widetilde{O}(n)$
3		$\widetilde{O}(n)$ [45]		$\widetilde{O}(n^{3/2})$ **(新)**

Table 1 k 取较小值时的中心问题结果概要 在 $\mathbb{R}^2$ 中。

直角坐标离散 3-中心问题。朴素地，直角坐标离散 3-中心问题可以归约为 n 个（某种形式的）直角线型离散 2-中心问题实例，并在 $\widetilde{O}(n^2)$ 时间内求解。然而，目前尚未发表更优的研究结果，因此引出了以下问题：

▶**问题2**。 是否存在一种解决直角线离散 *3*-中心问题的次二次时间算法？

▶**问题3**。 是否存在下界，能够证明直角线离散 *3*-中心问题不存在近线性时间算法（从而严格难于直角坐标离散 *2*-中心或直线型连续*3*-中心）？

对于 $k \geq 4$的直角坐标离散 k-中心，也可以提出类似的问题。在这里，该问题的复杂度上界为 $\widetilde{O}(n^{\omega(\lfloor k/2 \rfloor, 1, \lceil k/2 \rceil)})$，其中 $\omega(a,b,c)$ 表示将一个 $n^a \times n^b$矩阵与一个 $n^b \times n^c$矩阵相乘的指数：通过二分搜索，该问题归约为寻找边长为 r 、中心位于 S 中的 k 个超立方体，使其覆盖 S；这等价于在顶点集为 S 的图中寻找大小为 k 的支配集，其中当且仅当 p 与 z 之间的距离大于 r时，存在一条边 pz ——支配集问题可归约为矩形矩阵乘法，并得到上述时间界，正如 Eisenbrand 和 Grandoni [28]所指出的。注意，根据已知的矩阵乘法界 [25] ，差值 $\omega(\mathrm{b}k/2\mathrm{c}, 1, \mathrm{d}k/2\mathrm{e}) - k$会在 $k \to \infty$时收敛于 0（如果 $\omega = 2$，则恰好为 0）。

随着 k 相较于 d增大时，对于欧几里得距离度量和直角距离度量下的连续与离散 $n^{O(dk^{1-1/d})}$ -中心问题，已知更优的 k-中心问题上界 [6, 31, 32]。最近，在 SoCG'22 上，Chitnis 和 Saurabh [22] （扩展了 Marx [38] 在 $\mathbb{R}^2$ 情形下的早期工作）证明了离散 k-中心问题在 $\mathbb{R}^d$中的一个几乎匹配的条件下界，排除了 ETH 下运行时间为 $n^{o(k^{1-1/d})}$ 的算法。然而，这些界并未回答我们关于极小 k的问题。相比之下，Cabello 等人 [15] 此前提及的条件下界针对的是极小 k ，因此与我们的研究更加相关，但它们仅适用于 k-中心问题的连续版本。（连续版本的表现与离散版本不同；参见表 1–2。）

1.2 小规模 k 的几何集合覆盖问题

离散 k中心问题的判定版本（判断最小半径是否不超过给定值）可归约为一个几何集合覆盖问题：给定一个由 P 个 n 点组成的集合，以及一个由 R 个 n 对象组成的集合，找出 R 中能够覆盖P所有点的最小对象子集。几何集合覆盖在文献中得到了广泛研究，尤其是从近似算法的角度（因为对于大多数类型的几何对象，集合覆盖仍然是 NP难问题）；例如，参见 [19]中的参考文献。本文关注的是当最优解的规模为小时的 k 精确算法。

对于欧几里得/直角线性 k-中心问题，对象是全等球/超立方体，或者通过缩放变为单位球/超立方体；但也可以考虑其他类型的对象，例如任意矩形或盒子。

k	欧几里得	直角线性	离散欧几里得	离散直角线性
1	$O(n)$	$O(n)$	$\widetilde{O}(n^{2-2/(\lceil d/2\rceil+1)})$	$O(n)$
2	$n^{O(d)}$ 条件下界： $n^{\Omega(d)}$ [15]	$\widetilde{O}(n)$ [35]	$\widetilde{O}(n^{\omega})$ 条件下界：$\Omega(n^{2-\delta})$ **(新)**	$\widetilde{O}(n)$
3		$\widetilde{O}(n)$ [15]	$\widetilde{O}(n^{\omega(1,1,2)})$ 条件下界：$\Omega(n^{3-\delta})$ **(新)**	$\widetilde{O}(n^2)$ 条件下界：$\Omega(n^{4/3-\delta})$ **(新)**
4		$n^{O(d)}$ 条件下界： $n^{\Omega(\sqrt{d})}$ [15]	$\widetilde{O}(n^{\omega(2,1,2)})$ 条件下界：$\Omega(n^{4-\delta})$ **(新)**	$\widetilde{O}(n^3)$

表2 任意常数 d 下， $\mathbb{R}^d$ 中小 k 的 k-中心问题的结果总结。（CLB 代表“条件下界”。）

我们也可以考虑该问题的加权 版本：给定一组 n 个点、一组 n 个加权对象以及一个较小的常数 k，我们希望在 R 中找到一个对象子集，使其覆盖 P中的所有点，同时使所选对象的总权重最小。

一个“对偶”问题是几何击中集，其加权情形如下：给定一组 P 个 n 加权点、一组 R 个 n 对象，以及一个较小的常数 k，找出 P 中的一组 k 点，使其击中 R中的所有对象，同时使所选点的总权重最小化。（连续的非加权版本中，所选点可以位于任意位置，这通常称为刺穿问题。）对于单位球/超立方体，由于自对偶性，击中集等价于集合覆盖。

对于 $\mathbb{R}^2$ 中的矩形或 $\mathbb{R}^d$中的盒子，大小为2的几何集合覆盖问题（无权或加权）可以在 $O(n)$ 时间内通过正交范围查询求解，与离散直角2-中心问题 [11, 12, 34], 类似。对于矩形/盒子上的大小为3的几何集合覆盖问题，也可以提出类似于问题 2–3的问题。

令人惊讶的是，小规模精确几何集合覆盖问题的复杂性 k 尚未受到太多关注，但就在最近的 SODA’23 会议上，Chan [18]首次开始研究几何独立集在小规模情况下的类似问题，例如，针对盒子中的大小为 4 的独立集，提出了次二次算法并给出了条件下界。

对于较大的 k，Marx 和 Pilipczuk [39]以及 Bringmann 等人 [14]的困难性结果排除了在指数时间假设下针对 $\mathbb{R}^2$ 中的矩形和 $\mathbb{R}^4$中的单位超立方体（或正交象限）求解大小为k 的几何集合覆盖问题的 $n^{o(k)}$ 时间算法，也排除了在$\mathbb{R}^3$ 中求解单位立方体（或正交象限）的 $n^{o(\sqrt{k})}$ 时间算法。然而，与提及的其他固定参数难解性结果类似，这些证明似乎无法推出针对 $k=3$ 这类极小 k 的任何非平凡下界。

1.3 新结果

新算法。本文对问题2 在维度$d=2$上给出了肯定回答，提出了首个用于离散直角线性 3-中心的次二次时间算法，其时间复杂度为 $\mathbb{R}^2$；更一般地，还针对单位正方形的（无权和加权）几何 3-集合覆盖，以及 $\mathbb{R}^2$中的任意矩形，提出了次二次时间算法。具体而言，我们算法的时间复杂度为：

- $\widetilde{O}(n^{3/2})$： $\mathbb{R}^2$ 中的直角坐标离散 3-中心和 $\mathbb{R}^2$中的无权 3-集合覆盖（单位正方形）；
- $\widetilde{O}(n^{8/5})$： $\mathbb{R}^2$中的加权 3-集合覆盖（单位正方形）；$\widetilde{O}(n^{5/3})$： $\mathbb{R}^2$中的无权 3-集合覆盖（矩形）；$\widetilde{O}(n^{7/4})$： $\mathbb{R}^2$中的矩形的加权大小为 3 的集合覆盖。

对象	无权	加权
单位正方形	$\widetilde{O}(n^{3/2})$ **(新)**	$\widetilde{O}(n^{8/5})$ **(新)** 条件下界：$\Omega(n^{3/2-\delta})$ **(新)**
矩形	$\widetilde{O}(n^{5/3})$ **(新)**	$\widetilde{O}(n^{7/4})$ **(新)** 条件下界：$\Omega(n^{3/2-\delta})$ **(新)**

表3 $\mathbb{R}^2$ 中大小为3的几何集合覆盖的结果汇总。

新的条件下界。我们还证明了直角坐标离散 3-中心及相关大小为3的几何集合覆盖问题时间复杂度的首个非平凡条件下界。更确切地说，我们的下界为：[4]

- 在 APSP 假设下， $\mathbb{R}^2$ 中单位正方形的加权 3-集合覆盖（或命中集）的 $\Omega(n^{3/2-\delta})$ 下界；
- 在稀疏三角形假设下， $\mathbb{R}^4$ 中直角线性离散 3-center 以及 $\mathbb{R}^4$ 中单位超立方体的无权 3-集合覆盖（或命中集）的 $\Omega(n^{4/3-\delta})$ 下界；在稀疏三角形假设下， $\mathbb{R}^3$ 中盒子的无权 3-集合覆盖的 $\Omega(n^{4/3-\delta})$ 下界。

第一条中的下界尤其引人注目，因为它意味着，有条件地说，我们的 $\widetilde{O}(n^{8/5})$-时间算法用于 $\mathbb{R}^2$ 中单位正方形的加权 3-集合覆盖，其性能与最优值相差一个很小的因子（接近 $n^{0.1}$），而且我们的 $\widetilde{O}(n^{7/4})$-时间算法用于 $\mathbb{R}^2$ 中矩形的加权大小为 3 的集合覆盖，其性能与最优值相差一个接近 $n^{0.25}$ 的因子。第二条回答了问题 3，这意味着，至少当维度为 4 或更高时，直角坐标离散 3-中心严格难于直线型离散2-中心和直角坐标（连续）3-中心。（相比之下，当常数维度足够大时，直角坐标（连续）4-中心严格难于直角坐标离散 4-中心 [15]；见表 2。）

此外，我们证明了以下条件下界：

- 假设超团假设，欧几里得离散 2-中心的复杂度为 $\Omega(n^{2-\delta})$，且 $\mathbb{R}^{13}$ 中单位球的无权 3-集合覆盖（或命中集）的复杂度为 $\Omega(\mathbb{R}^{13})$；假设超团假设，对于任意常数 $k \geq 3$， $\mathbb{R}^{7k}$ 中欧几里得离散 k-中心的复杂度为 $\Omega(n^{k-\delta})$，且 $\mathbb{R}^{7k}$ 中单位球的无权 size-k 集合覆盖的复杂度为 $\Omega(n^{k-\delta})$。

特别是，当 1 时，这以否定的方式回答了问题 $\omega = 2$ （正如一些研究人员所猜想的那样）：当维度是足够大的常数时，几何性质并不能帮助解决欧几里得离散 2-中心问题。类似地，第二个要点表明，对于欧几里得离散 $\widetilde{O}(n^{\omega(\lfloor k/2 \rfloor, 1, \lceil k/2 \rceil)})$ -中心问题，在足够大的常数维度下，对于任意固定的 $k \geq 3$，如果 $\omega = 2$，那么该上界 1–3基本上是紧的。（参见表

最后，我们证明了一个标准集合覆盖变体的下界，该变体称为最大覆盖：给定一个由 P 个 n 点组成的集合，以及一个由 R 个 n 对象组成的集合，并给定一个较小的常数 k，求出 k个 R 中的对象，使其覆盖 P中的点数尽可能多（而非覆盖所有点）。从近似算法的角度出发，先前已有研究探讨了最大覆盖问题的几何版本（例如，参见 [10]）。它还与 k中心问题的“离群点”变体有关（这类问题允许一定数量的点不被覆盖），这些问题也曾在小

[4] 在本文中， δ 表示一个任意小的正常数。

的情况下得到研究（例如，参见 k ）。回想一下，在 $\mathbb{R}^d$ 中的盒子上的大小为 2 的几何集合覆盖问题可以在 $\widetilde{O}(n)$ 时间内求解（因此我们的注意力转向了大小为 3 的情形）。相比之下，我们证明，即使大小为 $k = 2$，盒子上的最大覆盖问题也无法在近线性时间内求解。更准确地说，我们得到以下下界：

- 在假设超图团假设的前提下，单位超立方体的大小为 2 的最大覆盖问题在 $\mathbb{R}^{12}$ 中的复杂度为 $\Omega(n^{2-\delta})$。

值得注意的是，无论 ω 如何，这个下界都是紧的（相差 $n^{o(1)}$ 因子），因为对于 $\mathbb{R}^d$ 中的盒子，有一种显然的 $\widetilde{O}(n^2)$ 时间算法，只需回答 n^2 正交范围计数查询即可——我们的结果表明，这种显然的算法无法改进！

关于细粒度复杂性的假设。我们简要陈述所用的假设。

- 全点对最短路径假设 是细粒度复杂性领域中最流行的三个假设之一 [46] （另外两个是 3SUM 假设和强指数时间假设）：它断言，对于具有 $O(n^{3-\delta})$个顶点（且整数权重为 n 位）的任意带权图，不存在能在 $O(\log n)$ 时间内解决全点对最短路径问题的算法。该假设在算法文献中得到了广泛应用（但在计算几何领域应用较少）。

- 该稀疏三角形假设断言，不存在 $O(m^{4/3-\delta})$时间算法，能够在含有 m 条边的稀疏无权图中检测三角形（即 3-环）。目前三角形检测的最佳上界来自 Alon、Yuster 和 Zwick 三十年前发表的一篇论文 [9], , 为 $\widetilde{O}(m^{2\omega/(\omega+1)})$；当 $\widetilde{O}(m^{4/3})$ 时，该上界为 $\omega = 2$。（事实上，该假设的一个更强版本断言，不存在 $O(m^{2\omega/(\omega+1)-\delta})$时间算法。）作为支持证据，已知三角形检测问题的某些“枚举”或“所有边”变体在 3SUM 假设或全点对最短路径假设下具有 $O(m^{4/3-\delta})$ 下界 [43, 48, 20]。有关稀疏三角形假设的更多讨论，见 [1, 33] ；关于其在计算几何中的一项近期应用，见 [18] 。

- 超团假设断言，不存在 O（$n^{k-\delta}$）时间的算法，用于检测大小为k 的超团，该超团位于一个 ℓ一致超图中，该超图具有 n 个顶点，其中 $k > \ell \geq 3$为任意固定值。参见 [37] 对该假设的讨论，以及 [13, 18, 36] 计算几何领域中的一些最新应用，包括 Künnemann 关于 Klee 测度问题条件下界的突破性成果 [36]。

技术。传统上，在计算几何中，运行时间指数介于 1 和 2 之间的“中间”次二次算法，往往源自非正交范围搜索（Agarwal、Sharir 和 Welzl 的 $\widetilde{O}(n^{4/3})$ 时间算法就是一个例子，它用于 $\mathbb{R}^2$ [7] 中的欧几里得离散 2-中心）。我们针对 $\mathbb{R}^2$ 中的离散直角线性 3-中心及相关集合覆盖问题设计的次二次算法则有所不同，这些问题涉及“正交”或轴对齐对象。一个自然的第一步是使用 $g \times g$ 网格划分情形，同时仔细选择参数 g。事实上，Chan [18]近期的一些次二次算法就采用了基于网格的方法：用于任意常数维中盒子的大小为 4 的独立集问题，以及 $\mathbb{R}^2$ 中矩形的大小为 5 的独立集问题（运行时间分别为 $\widetilde{O}(n^{3/2})$ 和 $\widetilde{O}(n^{4/3})$）。然而，离散 3-中心或矩形集合覆盖比独立集难得多（其中一个原因是，解中的 3 个矩形可能彼此相交）。要让网格方法奏效，我们需要新的原创思路（特别是，需要一种精巧的论证，将网格单元分配给矩形，并针对二维情形量身设计）。尽管如此，整个算法的描述不到 3 页。

我们通过从图中的无权或加权三角形查找问题进行归约，证明了直角线离散 3-中心问题以及相应的单位超立方体集合覆盖问题的条件下界。事实证明，通过利用权重，可以在 $\mathbb{R}^2$ 中得到一个简单的归约。然而，无权情形下的下界（因此也包括原始的直角线离散 3-中心问题）则棘手得多。我们能够在 $\mathbb{R}^6$ 中手工设计出一种巧妙而简单的归约，但将维度降低至 4 远非显而易见。有趣的是，我们最终采用了计算机辅助搜索。最终的构造仍然很简单，因此也很容易通过手工验证。

我们针对离散欧几里得 2-中心，以及更一般的离散 k-中心所给出的条件下界证明，受到 Bringmann 等人最近在 SoCG'22 上针对另一个问题提出的条件困难性证明的启发。[13] 具体而言，他们证明了：在超团假设下，判定 n 维单位超立方体的交图 $\mathbb{R}^{12}$ 直径是否为 2 需要近二次时间。乍一看，这个直径问题似乎与离散 k-中心无关；此外，它是一个直角线性问题，而非欧几里得问题（并且我们知道，与之相反，离散直角线性 2-中心有近线性上界！）。出人意料的是，我们发现 Bringmann 等人的方法也适用于离散欧几里得 2-中心和k-中心。不过，要使证明成立，我们还需要一些新的技术思路（特别是，$k = 2$ 情形需要一个额外维度，而更大的 k则需要多个额外维度，并且要精心设计坐标值）。尽管如此，最终的证明并不难理解。

我们针对大小为 2 的盒子最大覆盖问题的条件下界也采用类似的技术进行证明，但这一改编同样并非易事；此外，我们还引入了一些有趣的计数论证，其过程与 Bringmann 等人针对直径问题（该问题不涉及计数）的原始证明略有不同。

2 平面中矩形的大小为 3 的集合覆盖次二次算法

在本节中，我们将介绍用于求解 $\mathbb{R}^2$ 中带权矩形的大小为3的几何集合覆盖问题的最基本次二次时间算法。其运行时间为$\widetilde{O}(n^{16/9})$。我们将在第 3 节介绍该算法的改进版本，进一步将时间复杂度提升至 $\widetilde{O}(n^{7/4})$；对于无权情形和单位正方形情形，甚至还能取得更好的结果。通过标准技术，$\mathbb{R}^2$ 中的直角线离散 3-中心问题可归约为无权单位正方形情形 [16, 30]（见第 3 节）。

我们先给出一个有用的几何数据结构引理：

▶**引理 1. </style}对于一组 点和一组 带权矩形，均位于 中，我们可以在 (**n*) </style}*时间和空间内构建一个数据结构，以支持如下查询：给定一对矩形 $r_1, r_2 \in R$，我们可以在 *O(1) </style}*时间内找到一个最小权重矩形 $r_3 \in R$ （如果存在）$^{\sim}$，使得 P被 $r_1 \cup r_2 \cup r_3$覆盖。

证明。通过对 [4, 26] 上的 P 进行正交范围查询，我们可以在 O 中 $r_1 \cup r_2$ 的补集内的 P 各点中，找到最小/最大 x-$^{\sim}$ 值和 y 值，所需时间为 $O(1)$（因为该补集可以表示为 $O(1)$ 个正交范围的并集）。因此，我们得到一个包含 $P \setminus (r_1 \cup r_2)$ 的最小包围盒 b。最后，我们在 R 中找到一个包含 b 的最小权重矩形 $^{\sim}$；这是针对 R 的"矩形包围"查询，由于它同样可以归约为正交范围查询，因此可在 $O(1)$ 时间内解决（当且仅当点 (x^-, x^+, y^-, y^+) 位于 $\mathbb{R}^4$ 中的盒子 $(-\infty, \xi^-] \times [\xi^+, \infty) \times (-\infty, \eta^-] \times [\eta^+, \infty)$ 内时，矩形 $[x^-, x^+] \times [y^-, y^+]$才包含矩形 $[\xi^-, \xi^+] \times [\eta^-, \eta^+]$）。◀

▶**定理 2**。 给定一组 n 个 P 点和一组 n 个 $\mathbb{R}^2$中的带权矩形 R，我们可以在 $\widetilde{O}(n^{16/9})$ 时间内找到 3 个矩形 $r_1^*, r_2^*, r_3^* \in R$，使其总权重最小（如果存在），且 P 被 $r_1^* \cup r_2^* \cup r_3^*$覆盖。

证明。设 B_0 为包含 P 的最小包围盒（它与 4 个点相切）。如果一个 R 矩形有一条边位于 B_0之外，我们可以通过延伸该矩形消去这条边，使其变为无界。

设 g 为稍后确定的参数。构造一个 $g \times g$（非均匀）网格，使每列/行包含 $O(n/g)$ 个矩形顶点。

步骤 1。对于每一对矩形 r_1， $r_2 \in R$，如果它们的垂直边位于同一列，或水平边位于同一行，则查询引理1 中的数据结构，以找到一个最小权重矩形 $r_3 \in R$（如果存在），使得 $P \subset r_1 \cup r_2 \cup r_3$，并将三元组 $r_1 r_2 r_3$ 加入列表 L。查询的矩形对数量 $r_1 r_2$ 为 $O(g \cdot (n/g)^2) = O(n^2/g)$，因此此步骤总共需要 $\widetilde{O}(n^2/g)$ 时间。

步骤 2。对于每个矩形 $r_1 \in R$ 及其每条水平（分别为垂直）边 e_1，定义 $\gamma^-(e_1)$ 和 $\gamma^+(e_1)$ 分别为与 e_1 相交且包含 P 中未被 r_1 覆盖的某个点的最左和最右（分别为最下和最上）网格单元。我们可以通过枚举与 e_1 相交的 $O(g)$ 个网格单元，并执行 $O(g)\widetilde{}$ 次正交范围查询，以朴素方式求出 $\gamma^-(e_1)$ 和 $\gamma^+(e_1)$；这需要总计 $O(gn)$ 的时间。对于每个边与 $\gamma^-(e_1)$ 或 $\gamma^+(e_1)$ 相交的矩形 $r_2 \in R$，我们查询引理 1 中的数据结构，以找到一个满足 $P \subset r_1 \cup r_2 \cup r_3$ 的最小权重矩形 $r_3 \in R$（如果存在），并将三元组 $r_1 r_2 r_3$ 添加到列表 L 中。被查询的矩形对总数为 $O(n \cdot n/g) = O(n^2/g)$，因此该步骤同样需要总计 $\widetilde{O}(n^2/g)$ 的时间。（整个步骤 2，以及 $\gamma^-(\cdot)$ 和 $\gamma^+(\cdot)$ 的定义，起初可能显得神秘，但其意义将在步骤 3 中揭示。）

步骤 3。 我们猜测包含以下各矩形垂直边的列：r_1^*， r_2^*， r_3^* 以及包含以下各矩形水平边的行： r_1^*， r_2^*， r_3^*；边最多有 12 条，因此$O(g^{12})$ 种选择。实际上，扩展后 12 条边中有 4 条被消除，因此选择数可以降至 $O(g^8)$。

猜测之后，我们知道哪些网格单元完全位于 r_1^*， r_2^*， r_3^* 内部，以及哪些网格单元与 r_1^*， r_2^*， r_3^* 的哪些边相交。我们可以假设，集合 $\{r_1^*, r_2^*, r_3^*\}$ 中不同矩形的垂直边位于不同的列中，而集合 $\{r_1^*, r_2^*, r_3^*\}$ 中不同矩形的水平边位于不同的行中：否则， $r_1^* r_2^* r_3^*$ 就已经在步骤 1 中找到。特别地，我们从组合意义上知道 r_1^*， r_2^*， r_3^* 的排列形态，尽管我们不知道 r_1^*， r_2^*， r_3^* 的精确坐标和具体身份。

我们将每个网格单元划分为以下类型 γ（见图 1）：

- A 类： γ 完全包含在某个 r_j^*（$j \in \{1, 2, 3\}$）中。在此，我们为每个这样的 r_j^*分配 γ。
- B 类： γ 不属于 A 类，且与恰好一个矩形 r_j^* 的一条边相交。我们将 γ 分配给这个 r_j^*。注意， $P \cap \gamma$ 中的点只能由 r_j^*覆盖。
- C 类： γ 不属于 A 类，且与 $\{r_1^*、r_2^*、r_3^*\}$ 中两个不同矩形的边相交。不失一般性，假设 γ 与 r_1^* 的一条水平边 e_1^* 以及 r_2^* 的一条垂直边 e_2^* 相交；注意交点 $v^* = e_1^* \cap e_2^*$ 位于并集 $r_1^* \cup r_2^* \cup r_3^*$ 的边界上（因为 γ 不属于 A 类）。通过检查 $\{r_1^*、r_2^*、r_3^*\}$ 的排列，我们知道以下情况至少有一种成立：(i) 我们可以沿水平方向从 v^* 走到 e_1^* 的一个端点（或一个无穷远点），并始终停留在 the

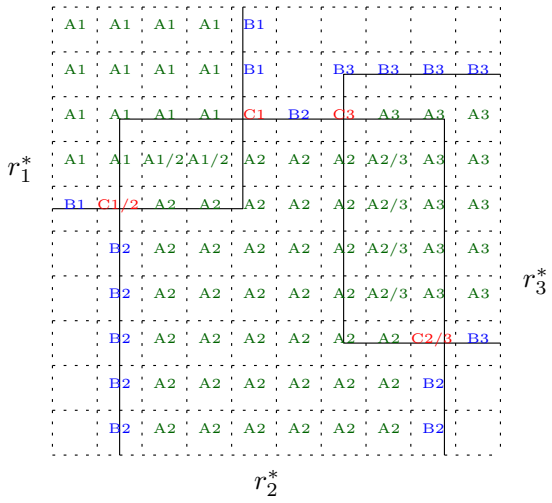


图1 定理 2的证明：步骤 3 中的网格单元。单元中的字母表示其类型（A、B 或 C），单元中的数字（一个或多个）表示该单元所分配到的矩形的索引（一个或多个） $j \in \{1,2,3\}$ r_j^*。

$r_1^* \cup r_2^* \cup r_3^*$的边界，或者（ii）我们可以沿竖直方向从 v^* 移动到 e_2^* 的一个端点（或一个无穷远点），同时始终位于 $r_1^* \cup r_2^* \cup r_3^*$ 的边界上。

如果 (i) 为真，我们将分配 γ 给 r_1^*。注意，如果 $P \cap \gamma$ 中存在一个未被 r_1^* 覆盖的点（且猜测正确），那么 γ 必须等于 $\gamma^-(e_1^*)$ 或 $\gamma^+(e_1^*)$（如步骤 2 中所定义），因此 $r_1^* r_2^* r_3^*$ 在步骤 2 中就已经被找到。这是因为除 γ 外，从 v^* 走到 e_1^* 的那个端点时遇到的网格单元只能与 r_1^* 相交，因此这些单元中的点只能被 r_1^*覆盖。如果 (ii) 为真，出于类似原因，我们将分配 γ 给 r_2^*。

注意，C 类网格单元至多有 $O(1)$ γ 个；而 B 类网格单元 γ 构成 $O(1)$ 个连续块。令 ρ_j 为分配给 r_j^*的所有网格单元的并集。则 ρ_j是复杂度为 $O(1)$ 的直角多边形。我们通过正交范围查询，在 $O(1)$ 时间内计算 $P \cap \rho_j$中各点的最小/最大 x-值和y-值。由此，我们得到包围 $P \cap \rho_j$的最小包围盒 b_j。通过矩形包围查询（如前所述，该查询可归约为正交范围查询），我们找到包围 b_j的最小权重矩形 $r_j \in R$。如果 $P \setminus (r_1 \cup r_2 \cup r_3) = \emptyset$（可通过正交范围查询进行检验），我们就将三元组 $r_1 r_2 r_3$（如果之前尚未找到且猜测正确，它应当与 $r_1^* r_2^* r_3^*$重合）加入 L。所有猜测的总时间为 $\tilde{O}(g^8)$。

最后，我们返回 L 中的一个最小权重三元组。总运行时间为$\tilde{O}(g^8 + n^2/g + gn)$。令 $g = n^{2/9}$ 即可得到该定理。◀

3 针对 $\mathbb{R}^2$ 中矩形的大小为 3 的集合覆盖及相关问题的改进次二次时间算法

Con继续第 2 节，我们介绍对基本次二次时间算法的改进，以获得更优性能。在相同情形下证明的时间界。

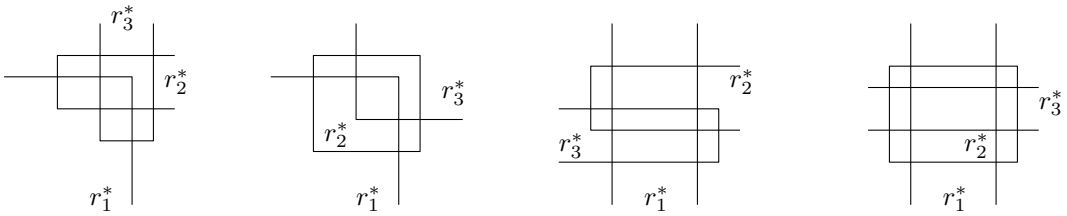


图 2 定理 5 的证明：情形 III 的子情况，其中不存在隐藏边。

3.1 无权矩形的改进

▶ **引理 3**。 给定网格 $\{1,\ldots,g\}^d$ 中的点集 S，极大点的数量（即 S 中不被其中任何其他点严格支配的点）为 $O(g^{d-1})$。

证明。 沿着每条形如 $\{(t,\ c_1+t,\ \ldots\ldots,\ c_{d-1}+t)\colon t\in\mathbb{R}\}$ 的“对角线”，至多有一个 S 中的点。网格可以用 $O(g^{d-1})$ 条这样的直线覆盖。◀

▶**定理 4**。 定理 2 中的运行时间可以改进为 $\widetilde{O}(n^{5/3})$，如果 R 中的矩形是无权的。

证明。 在无权情形下，只需保留那些极大矩形，即不被其他矩形严格包含的矩形。（可以通过矩形包围查询，在$\sim O(1)$ 时间内测试一个矩形是否为极大矩形；该查询可归约为正交范围查询。）我们运行定理 2 证明中的算法。

对于一个 p边矩形 r_j^*（其中 $p\in\{1,\ldots,4\}$），包含 r_j^* 的垂直边/水平边的列/行的选择数现在为 $O(g^{p-1})$ 而非 $O(g^p)$，根据引理 3，因为这些列/行索引的 p元组对应于集合 $\{1,\ldots,g\}^p$的极大点，这是通过将 p边矩形映射为 p维度点得到的。

这样，3 个矩形 r_1^*, r_2^*, r_3^* 的猜测数量可以从 $O(g^8)$ 进一步降低到 $O(g^5)$，整体运行时间变为 $\widetilde{O}(g^5+n^2/g+gn)$。令 $g=n^{1/3}$ 即可得到该定理。◀

3.2 带权矩形的改进

▶**定理 5.** 定理 2 中的运行时间可改进为 $\widetilde{O}(n^{7/4})$ 对于带权矩形。

证明。 我们沿用定理 2 的证明中的步骤 1–2，但会修改步骤 3。

- 情形 I：$\{r_1^*、\ r_2^*、\ r_3^*\}$中的两个矩形不相交。不失一般性，设这两个矩形为 r_2^* 和 r_3^*，且它们在垂直方向上分离，其中 r_2^* 位于左侧。我们猜测 r_1^*的身份；共有 $O(n)$种选择。我们猜测一条将 r_1^* 和 r_2^*分隔开的网格垂直线 ℓ^*；共有 $O(g)$种选择。（如果不存在分隔它们的网格线，则答案已在步骤 1 中找到。）我们通过正交范围查询，找出包围 ℓ^* 左侧 $P\setminus r_1^*$ 中所有点的最小包围盒 b_2，然后通过矩形包围查询，找出包围 b_2的最小权重矩形 $r_2\in R$。接着，我们查询引理 1 中的数据结构，以找出满足 $P\subset r_1^*\cup r_2\cup r_3$的最小权重矩形 $r_3\in R$（如果存在），并将三元组 $r_1^*r_2r_3$ 加入列表 L。查询总数为$\widetilde{\ }\ O(gn)$，因此此情形需要 $O(gn)$时间。

- 情形 II：r_1^*、r_2^*、r_3^* 的边总数至多为 7，或者边总数为 8，但至少有一条边是隐藏的，也就是说，它没有出现在并集$r_1^* \cup r_2^* \cup r_3^*$的边界上。
不失一般性，设这条隐藏边为 e_3^*，由 r_3^* 定义。我们沿用步骤 3 中的先前方法，不过无需猜测包含 e_3^* 的列/行；因此，猜测次数从 $O(g^8)$ 降至 $O(g^7)$。我们知道分配给 r_1^* 和 r_2^* 的 A、B、C 类网格单元（但不一定是 r_3^*），因此可以像之前一样计算候选矩形 r_1 和 r_2。然后，我们查询引理 1 中的数据结构，找出一个最小权重矩形 $r_3 \in R$（如果存在），使得 $P \subset r_1 \cup r_2 \cup r_3$，并将三元组 $r_1 r_2 r_3$ 加入列表 L。查询总数为 $O(g^7)$，因此此情况需要 $\widetilde{O}(g^7)$ 时间。

- 情形 III：r_1^*，r_2^*，r_3^* 有公共交集，共有 8 条边，且没有一条被隐藏。

某个矩形，例如 r_1^*，至多有 2 条边（即由一条垂直射线和一条水平射线定义，或由两条平行线定义）。通过枚举所有情况，我们发现只剩下 4 个主要子情况，如图 2 所示（所有其他子情况均具有对称性）。在这些子情况中，某个矩形，例如 r_3^*，至多有一条边与$\partial r_1^* \setminus (r_2^* \cup r_3^*)$接触。将这条边记为 e_3^*（如果存在）。

我们猜测 r_2^* 的身份；共有 $O(n)$ 种选择。一旦已知 r_2^*，我们就将经过 r_2^* 的边的垂直线和水平线加入网格。我们猜测包含 r_1^* 的每条水平边/垂直边的行/列，以及包含 r_3^* 的水平边/垂直边 e_3^*（如果存在）的行/列；共有 $O(g^3)$ 种这样的选择。这样，我们就有足够的信息来确定分配给 r_1^* 的 A、B 和 C 类网格单元（尽管不一定是 r_3^*）。因此，我们可以像之前一样计算候选矩形 r_1。接着，我们查询引理 1 中的数据结构，以找到满足 $P \subset r_1 \cup r_2^* \cup r_3$ 的最小权重矩形 $r_3 \in R$（如果存在），并将三元组 $r_1 r_2^* r_3$ 添加到列表 L 中。查询总数为 $O(g^3 n)$，因此此情况需要 $\widetilde{O}(g^3 n)$ 时间。

我们事先并不知道哪种情形成立，但可以尝试所有情形对应的算法，并返回 L 中最优的三元组。总运行时间为 $\widetilde{O}(g^7 + g^3 n + n^2/g)$。令$g = n^{1/4}$，即可得到该定理。◀

3.3 加权单位正方形的改进

▶**定理 6.** 定理 2 中的运行时间 $\widetilde{O}(n^{8/5})$ 若 R 中的矩形为加权单位正方形，则。

证明。 我们沿用定理2证明中的方法，但会修改步骤 3。不失一般性，假设 r_1^*，r_2^*，r_3^* 的中心从左到右排列。对于单位正方形，除对称性外有 3 种可能情形：

- 情形 I：{r_1^*}、{r_2^*}、{r_3^*}中的两个正方形不相交。~与定理 5 的证明类似，这种情况可以在 $O(gn)$ 时间内处理。情形 II：r_1^*、r_2^*、r_3^* 具有公共交集，且 r_1^* 的中心位置
- 低于 r_2^*，而 r_2^*的中心位置又低于 r_3^*。（见图 3（左）。）我们猜测 r_2^*的身份；共有 $O(n)$种选择。令 $\hat{}r_2^*$ 表示位于 r_2^*的右上顶点下方且左侧的所有点所构成的区域。注意到，$r_1^* \setminus r_2^*$ 包含于 $\hat{}r_2^*$中，而$r_3^* \setminus r_2^*$ 位于 $\hat{}r_2^*$之外。我们通过正交范围查询，找到包围 $P \cap \hat{}r_2^* \setminus r_2^*$的最小包围盒 b_1，并通过矩形包围查询，找到包围 b_1 的最小权重正方形 $r_1 \in R$。然后，我们查询引理 1 中的数据结构，以找到一个最小权重正方形 $r_3 \in R$（如果存在），使得 $P \subset r_1 \cup r_2^* \cup r_3$，并将该三元组加入。

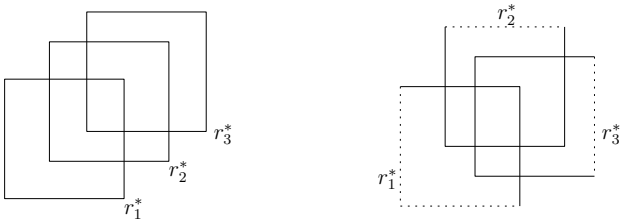


图 3 定理6的证明：情况 II（左）和情形 III（右）。

$\sim r_1 r_2^* r_3$ 到列表 L。查询的总数为 $O(n)$，因此这种情况需要 $O(n)$ 时间。

- 情形 III： r_1^*、r_2^*、r_3^* 具有公共交集，并且 r_1^* 的中心低于 r_3^*，而后者的中心低于 r_2^*。（见图 3 （右）。）
  将正方形延伸为无界矩形后， r_1^* 有 2 条边，而 r_2^* 和 r_3^* 各有 3 条边。

  我们猜测包含 r_1^*的垂直边/水平边的列/行，以及包含 r_2^*的两条垂直边的列和包含 r_3^*的两条水平边的行；共有 $O(g^6)$种选择。无需猜测 r_2^* 的底部水平边和 r_3^*的左侧垂直边，因为这两条边是隐藏边。无需知道隐藏边，我们便可以像之前一样为 B 类和 C 类网格单元进行分配。对于 A 类，完全包含于 r_1^* 中的每个网格单元都可以分配给 r_1^*；严格位于包含 r_2^* 的两条垂直边的列之间，且位于包含 r_1^* 的顶部水平边所在行之上或其上的每个网格单元，都可以分配给 r_2^*；严格位于包含 r_3^* 的两条水平边的行之间，且位于包含 r_1^* 的右侧垂直边所在列的右侧或其上的每个网格单元，都可以分配给 r_3^*。算法的其余部分相同。

  注意，包含 r_2^* 中两条垂直边且它们相距单位距离的列对数量实际上是 $O(g)$，而不是 $O(g^2)$（要看出这一点，可以设想用两条相距单位距离的垂直线扫描网格，从而产生 $O(g)$ 个事件）。类似地，包含 r_3^* 中两条水平边且它们相距单位距离的行对数量为 $O(g)$。由此可见，猜测的数量可进一步降至 $O(g^4)$。

  总运行时间为 $\widetilde{O}(g^4 + gn + n^2/g)$。令 $g = n^{2/5}$，即可得到该定理。 ◀

3.4 无权单位正方形与直角线性离散 3-中心在 $\mathbb{R}^2$中的改进

▶**定理 7**。 定理 2 中的运行时间 $\widetilde{O}(n^{3/2})$ 若 R 中的矩形均为无权单位正方形，则可以改进。

证明。 在无权情形下，只需保留极大的矩形（如定理 4的证明中所述）。我们运行定理 6 证明中的算法。

在情形 III 中，猜测包含 r_1^* 的垂直边/水平边的列/行的次数现在为 $O(g)$ 而不是 $O(g^2)$，根据引理 3。总运行时间变为$\widetilde{O}(g^3 + gn + n^2/g)$。令 $g = \sqrt{n}$ 即可得到该定理。 ◀

▶**推论 8**。 给定 $\mathbb{R}^2$ 中的 n 点集合 P，我们可以在 $\widetilde{O}(n^{3/2})$时间内解决直角线离散 3-中心问题。

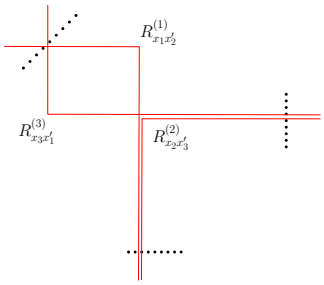


图 4 从最小权三角形问题到加权 3-集合覆盖的归约 for ort大象在 $\mathbb{R}^2$。

证明。判定问题——判断最优半径是否至多为给定值 r——相当于在 P中，从 n 个中心位于 P 且边长为 $2r$的正方形中，找出覆盖 3 个正方形的方案。因此，该判定问题可根据定理 $\widetilde{O}(n^{3/2})$ 在4时间内解决（先缩放使边长为单位长度）。然后，我们可以用Frederickson和Johnson的方法 [30], 求解原始优化问题，但会多出一个对数因子（或者改用Chan的随机化方法， [16], 则不会多出对数因子）。◀

4 盒子 3-集合覆盖的条件下界

本节将证明某些维度下盒子的 3-集合覆盖问题的条件下界（直角坐标离散 3-中心与单位超立方体的 3-集合覆盖有关）。我们先讨论加权版本，该版本更直接，证明也很简单，并可为后文更具挑战性的无权版本作铺垫。

4.1 $\mathbb{R}^2$ 中单位正方形的加权 3-集合覆盖

正交象限（也称为支配范围）是指 $\mathbb{R}^d$ 中沿每个 d 维度无界的 d 边盒子。（请注意，正交象限可以有 2^d 种朝向。）要为单位正方形或单位超立方体情形获得下界，只需为正交象限情形获得下界，因为我们只需将每个正交象限替换为边长 M 足够大的超立方体，然后按 $1/M$ 比例缩放。

▶**定理 9**。 给定一组 P n 个点和一组 R n 个带权正交象限（位于 $\mathbb{R}^2$ 中），找出 R 中覆盖 P 的 *3* 个最小总权重正交象限，在假设全点对最短路径假设成立的前提下，对于任意常数$\delta > 0$, 需要 $\Omega(n^{3/2-\delta})$ 时间。

证明。 已知，全点对最短路径假设等价于以下假设：在一个包含 [47] 个顶点的带权图中，寻找最小权三角形需要 n 个顶点的 $\Omega(n^{3-\delta})$ 运行时间，其中 $\delta > 0$ 为任意常数。我们将把一个包含 n 个顶点和 m 条边的图（$m \in [n, n^2]$）上的最小权三角形问题，归约为针对$O(m)$ 个点和正交象限的 $\mathbb{R}^2$ 中的加权 3-集合覆盖问题。因此，如果后一个问题存在一个运行时间为 $O(m^{3/2-\delta})$ 的算法，那么前一个问题就存在一个运行时间为$O(m^{3/2-\delta})$ $\leq O(n^{3-2\delta})$ 的算法，从而推翻该假设。

设 $G = (V, E)$ 为给定的带权图，其中包含 n 个顶点和 m 条边。不失一般性，假设所有边权均属于 $[0, 0.1]$，且 $V \subset [0, 0.1]$，即顶点标记为经过缩放后位于 $[0, 0.1]$ 内的数字。假设 $0 \in V$且 $0.1 \in V$。

归约。对于每个顶点 $t \in V$，我们创建三个点（t，$1+t$）、（2，t）和（$1+t$，-1）（分别称为类型 1、2 和 3 的点）。

在 $\mathbb{R}^2$ 中创建以下正交象限：

$$\begin{aligned}
\forall x_1x_2' \in E:\ R^{(1)}_{x_1x_2'} &= (-\infty, 1+x_2') \times (-\infty, 1+x_1] && \text{(type 1)}\\
\forall x_2x_3' \in E:\ R^{(2)}_{x_2x_3'} &= [1+x_2, \infty) \times (-\infty, x_3') && \text{(type 2)}\\
\forall x_3x_1' \in E:\ R^{(3)}_{x_3x_1'} &= (x_1', \infty) \times [x_3, \infty) && \text{(type 3)}
\end{aligned}$$

每个正交象限的权重设为其覆盖的点数加上它所代表的边的权重。点和正交象限的总数分别为 $O(n)$ 和 $O(m)$。归约如图 4所示。

正确性。我们证明，在 G 中，最小权三角形的权重为 w（其中 $w \in [0, 0.3]$），当且仅当最优加权 3-集合覆盖的权重为 $3n + w$。

任何可行解（如果存在）都必须使用每种类型的一个正交象限，因为类型 1 的点 (0，1)（以及类型 2 的点 (2，0．1) 和类型 3 的点 (1．1，-1）只能由类型 1（分别为类型 3 和类型 2）的正交象限覆盖。因此，最优解中的三个正交象限必须分别具有形式 $R^{(1)}_{x_1x_2'}$、$R^{(2)}_{x_2x_3'}$ 和 $R^{(3)}_{x_3x_1'}$，其中 x_1x_2'，x_2x_3'，$x_3x_1' \in E$。

如果 $x_1 < x_1'$，则某个（类型 1 的）点将未被覆盖；另一方面，如果 $x_1 > x_1'$，则某个（类型 1 的）点将被覆盖两次，此时总权重至少为 $3n + 1$。因此，$x_1 = x_1'$。类似地，$x_2 = x_2'$ 和 $x_3 = x_3'$。所以，$x_1x_2x_3$ 在 G 中构成一个三角形。我们得出，最小权解 $R^{(1)}_{x_1x_2}$、$R^{(2)}_{x_2x_3}$ 和 $R^{(3)}_{x_3x_1}$ 对应于 G 中的最小权三角形 $x_1x_2x_3$。◀

4.2 R3 中盒子的无权 3-集合覆盖

我们之前的归约利用权重来确保表示顶点的两个变量相等。对于无权情形，这种方法并不奏效。我们提出了一种通过使用额外维度和额外边来强制相等的不同方法（即使用盒子而不是正交象限），并结合精心选择的坐标值。

▶**定理 10**。给定一个包含 P 个 n 点的集合，以及一个包含 R 个 n 无权轴对齐盒子的集合，其中$\mathbb{R}^3$，判断是否存在 *3* 个 R 中的盒子覆盖 P，对任意常数 $\delta > 0$，在稀疏三角形假设下，都需要$\Omega(n^{4/3-\delta})$ 时间。

证明。我们将把具有 m 条边的图上的三角形检测问题归约为 $O(m)$ 中的 $\mathbb{R}^3$个点和盒子的无权 3-集合覆盖问题。因此，如果后一个问题存在一个$O(m^{4/3-\delta})$时间算法，那么前一个问题将存在一个运行时间为 $O(m^{4/3-\delta})$的算法，从而推翻该假设。

设 $G = (V, E)$ 为给定的无权稀疏图，包含 n 个顶点和 m 条边（$n \le m$）。不失一般性，假设 $V \subset [0, 0.1]$，且 $0 \in V$ 和 $0.1 \in V$。

归约。对于每个顶点 $t \in V$，创建六个点

$$\begin{aligned}
(-1+t,\ &0,\ &2+t) && \text{(type 1)}\\
(1+t,\ &0,\ &-2+t) && \text{(type 2)}\\
(2+t,\ &-1+t,\ &0) && \text{(type 3)}\\
(-2+t,\ &1+t,\ &0) && \text{(type 4)}\\
(0,\ &2+t,\ &-1+t) && \text{(type 5)}\\
(0,\ &-2+t,\ &1+t) && \text{(type 6)}
\end{aligned}$$

在 $\mathbb{R}^3$ 中创建以下盒子：

$$\begin{array}{lrcccccc}
\forall x_1x_2' \in E\colon & R^{(1)}_{x_1x_2'} & = & (-1+x_1, 1+x_1) & \times & [-2+x_2', 2+x_2'] & \times & \mathbb{R} \\
\forall x_2x_3' \in E\colon & R^{(2)}_{x_2x_3'} & = & [-2+x_3', 2+x_3'] & \times & \mathbb{R} & \times & (-1+x_2, 1+x_2) \\
\forall x_3x_1' \in E\colon & R^{(3)}_{x_3x_1'} & = & \mathbb{R} & \times & (-1+x_3, 1+x_3) & \times & [-2+x_1', 2+x_1']
\end{array}$$

（分别称为类型 1、2 和 3。）

正确性。我们证明，存在一个 3-集合覆盖，当且仅当 G 中存在一个三角形。

任何可行解（若存在）都必须使用每种类型的一个盒子，因为类型 1 的点 $(-1, 0, 2)$（以及类型 3 的点 $(2, -1, 0$ 和类型 5 的点 $(0, 2, -1)$）只能由类型 3（分别为类型 2 和类型 1）的盒子覆盖。因此，可行解中的三个盒子必须具有 $R^{(1)}_{x_1x_2'}$、$R^{(2)}_{x_2x_3'}$ 和 $R^{(3)}_{x_3x_1'}$ 的形式，其中 $x_1x_2', x_2x_3', x_3x_1' \in E$。

考虑形式为 $(-1+t, 0, 2+t)$ 的类型 1 的点。由于第三个维度，盒子 $R^{(2)}_{x_2x_3'}$ 无法覆盖其中任何一个。盒子 $R^{(1)}_{x_1x_2'}$ 覆盖所有对应于 $t > x_1$ 的此类点，而盒子 $R^{(3)}_{x_3x_1'}$ 覆盖所有对应于 $t \le x_1'$ 的此类点。因此，当且仅当 $x_1 \le x_1'$ 时，所有类型 1 的点都被覆盖。类似地，当且仅当 $x_1' \le x_1$ 时，所有类型 2 的点都被覆盖。因此，当且仅当 $x_1 = x_1'$ 时，所有类型 1–2 的点都被覆盖。根据对称性，所有类型 3–4 的点都被覆盖，当且仅当 $x_3 = x_3'$；所有类型 5–6 的点都被覆盖，当且仅当 $x_2 = x_2'$。由此可知，存在可行解，当且仅当 G 中存在三角形 $x_1x_2x_3$。◀

我们指出，可以将上述盒子做成胖盒子，使其边长介于 1 和某个常数之间（方法是将 $\mathbb{R}$ 替换为一个长度足够大的常数区间）。

4.3 R $\mathbb{R}^4$中的单位超立方体的无权 3-集合覆盖

我们之前关于 $\mathbb{R}^3$ 中盒子的无权 3-集合覆盖的下界，立即推出了 $\mathbb{R}^6$中正交象限（进而单位超立方体）的下界，因为点 (x, y, z) 被 $\mathbb{R}^3$中的盒子 $[a^-, a^+] \times [b^-, b^+] \times [c^-, c^+]$覆盖，当且仅当点 (x, x, y, y, z, z) 被正交象限 $[a^-, \infty) \times (-\infty, a^+] \times [b^-, \infty) \times (-\infty, b^+] \times [c^-, \infty) \times (-\infty, c^+]$ in $\mathbb{R}^6$ 覆盖。

还有一个问题：能否降低维度 6？直观上看，上述构造似乎存在一些浪费：点的坐标中有好几个 0，盒子的定义中也有好几个 $\mathbb{R}$，经过变换到 6 维后，这些都翻了一倍。不过，目前还不清楚如何重新排列坐标来消除这些浪费：我们不得不放弃构造中这种优美的对称性，而且可尝试的组合太多了。最后，我们编写了一个计算机程序，穷举尝试所有这些不同的组合，最终找到了一个能将维度降至 4 的构造！找到构造后，正确性很容易验证，正如下文的证明所示。

▶**定理 11**。给定一个包含 P 个 n 点的集合，以及一个包含 R 个 n 无权正交象限的集合（位于 $\mathbb{R}^4$ 中），在假设稀疏三角形假设成立的情况下，对于任意常数$\delta > 0$，判定是否存在一个 3-集合覆盖需要 $\Omega(n^{4/3-\delta})$ 时间。

证明。我们将把图上三角形检测问题归约为 m 条边的无权 3-集合覆盖问题，该问题针对 $O(m)$ 个点和正交象限，位于 $\mathbb{R}^4$中。

令 $G = (V, E)$ 为给定的无权图，其具有 n 个顶点和 m 条边（$n \le m$）。不失一般性，假设 $V \subset [0, 0.1]$，且 $0 \in V$和 $0.1 \in V$。

归约。 对于每个顶点 $t \in V$，创建六个点

$$
\begin{array}{llll}
(0+t, & 2+t, & -0.5, & -0.5) \\
(2-t, & 0-t, & -0.5, & -0.5) \\
(1-t, & 0.5, & 1+t, & 1.5) \\
(0.5, & 1+t, & 0.5, & 2-t) \\
(-0.5, & -0.5, & 2-t, & 0-t) \\
(-0.5, & -0.5, & 0+t, & 1+t)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(\text{type } 1) \\
(\text{type } 2) \\
(\text{type } 3) \\
(\text{type } 4) \\
(\text{type } 5) \\
(\text{type } 6)
\end{array}
$$

在 $\mathbb{R}^4$ 中创建以下正交象限：

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1x_2' \in E\colon\ R^{(1)}_{x_1x_2'} = [0+x_1,+\infty) \times [0-x_1,+\infty) \times (-\infty,1+x_2') \times (-\infty,2-x_2') \\
&\forall x_2x_3' \in E\colon\ R^{(2)}_{x_2x_3'} = (-\infty,1-x_2] \times (-\infty,1+x_2] \times (0+x_3',+\infty) \times (0-x_3',+\infty) \\
&\forall x_3x_1' \in E\colon\ R^{(3)}_{x_3x_1'} = (-\infty,2-x_1') \times (-\infty,2+x_1') \times (-\infty,2-x_3] \times (-\infty,1+x_3]
\end{aligned}
$$

（分别称为类型 1、2 和 3）。

正确性。 我们证明，当且仅当 G 中存在一个三角形时，存在一个 3-集合覆盖。

任何可行解（如果存在）都必须使用每种类型的一个正交象限，这一点很容易验证（与之前一样）。因此，可行解中的三个正交象限必定分别为 $R^{(1)}_{x_1x_2'}$、$R^{(2)}_{x_2x_3'}$ 和 $R^{(3)}_{x_3x_1'}$，其中 $x_1x_2', x_2x_3', x_3x_1' \in E$。

考虑形式为 $(0+t, 2+t, -0.5, -0.5)$ 的类型 1 点。由于第三维，正交象限 $R^{(2)}_{x_2x_3'}$ 无法覆盖其中任何一点。正交象限 $R^{(1)}_{x_1x_2'}$ 覆盖所有对应于 $t \geq x_1$ 的此类点，而正交象限 $R^{(3)}_{x_3x_1'}$ 覆盖所有对应于 $t < x_1'$ 的此类点。因此，当且仅当 $x_1 \leq x_1'$ 时，所有类型 1 的点都被覆盖。通过类似论证，可以验证当且仅当 $x_1 \geq x_1'$ 时，所有类型 2 的点都被覆盖；当且仅当 $x_2 \leq x_2'$ 时，所有类型 3 的点都被覆盖；当且仅当 $x_2 \geq x_2'$ 时，所有类型 4 的点都被覆盖；当且仅当$x_3 \leq x_3'$时，所有类型 5 的点都被覆盖；当且仅当 $x_3 \geq x_3'$ 时，所有类型 6 的点都被覆盖。由此得出，当且仅当 G 中存在一个三角形 $x_1x_2x_3$ 时，存在可行解。◀

在计算机搜索中，我们基本上尝试了不同的点选取方式，其坐标值为 $c \pm t$ 或 c（其中某个常数 c），以及由形如$[c \pm x_j, +\infty)$ 或 $(-\infty, c \pm x_j]$（闭或开）的区间定义的正交象限，其中某个变量为 x_j（或 x_j'）。这些约束不太容易准确写出，但模拟上述正确性证明时，它们显而易见。朴素地计算，情况数的量级为 10^{14},，但通过一些优化并仔细剪枝搜索空间，可以大幅减少到约 10^7。C++ 代码不长（不到 150 行），并且在加入剪枝后，运行时间不到一秒。

现在，只需对 $\mathbb{R}^4$ 中的无权正交象限（或单位超立方体）下界证明稍作修改，即可将其推广到 $\mathbb{R}^4$中的直角坐标离散 3-中心问题；参见第5.1节。在第5.2节中，我们还证明了 $\mathbb{R}^2$中矩形的加权 6 元集合覆盖存在一个更高的条件下界。

盒子小规模集合覆盖及相关问题的另外 5 个条件下界

接续第 4 节，我们将针对相关问题再证明几个条件下界。

5.1 $\mathbb{R}^4$ 中的直角线性离散 3 中心问题

我们很容易修改 $\mathbb{R}^4$（定理 11）中针对正交象限的 3-集合覆盖所给出的条件下界证明，从而为 $\mathbb{R}^4$ 中的直角坐标离散 3-中心问题获得一个下界。

首先回顾一下，$\mathbb{R}^4$ 中正交象限的下界会自动推出 $\mathbb{R}^4$中单位超立方体的下界。在我们的构造中，我们可以将每个正交象限替换为边长为 10（即半径为 5）的超立方体，同时保持角顶点不变，然后再进行缩放。

对于 $\mathbb{R}^4$ 中的离散直角线性 3-中心，新点集由构造出的点、边长为 10 的构造超立方体的中心（缩放前），以及三个辅助点组成：$(9.5, 9.5, -8.5, -7.5), (-8.5, -8.5, 9.5, 9.5), (-7.5, -7.5, -7.5, -8.5)$。这些辅助点的作用是确保解中的 3 个中心来自构造出的超立方体的中心。

▶ **推论 12.** 假设稀疏三角形假设成立，则对于任意常数 $\delta > 0$，不存在用于求解 $\mathbb{R}^4$ 中离散直角坐标 *3*-中心问题的 $O(n^{4/3-\delta})$-时间算法。

5.2 $\mathbb{R}^2$ 中矩形的加权 6-集合覆盖

在第4节中，我们为 $\mathbb{R}^2$中的矩形加权 3-集合覆盖问题得到了超线性条件下界。另一种研究方向是探讨最小的 k，使得我们能够为加权k -集合覆盖问题得到近二次下界。我们证明了 $k = 6$的这一结果。

对于固定的 $\ell \geq 3$，加权 ℓ-团假设 [46] 断言，对于一个具有 n个顶点的图，不存在 $O(n^{\ell-\delta})$时间算法，能够在权重为 $O(\log n)$位整数权重的图中，找到总边权最小的 ℓ-团。

▶**定理 13.** 给定一个包含 n 个点的集合 P，以及一个包含 n 个 $\mathbb{R}^2$ 中带权矩形的集合 R，假设加权 *4*-团假设成立，则对于任意常数 $\delta > 0$，任何计算最小权重 *6*-集合覆盖的算法都需要 $\Omega(n^{2-\delta})$ 时间。

证明。 我们将把具有 n 个顶点和 m 条边（$m \in [n, n^2]$）的图上的最小权重 4-团问题归约到 $O(m)$ 个 $\mathbb{R}^2$中的点和矩形的加权 6-集合覆盖问题。因此，如果后一个问题存在运行时间为 $O(m^{2-\delta})$的算法，那么前一个问题就存在运行时间为 $O(m^{2-\delta}) \leq O(n^{4-2\delta})$的算法，从而推翻该假设。

设 $G = (V, E)$ 为给定的带权图，其有 n 个顶点和 m 条边。不失一般性，假设所有边权均属于 $[0, 0.1]$，且 $V \subset [0, 0.1]$。假设 $0 \in V$ 且 $0.1 \in V$。

归约。 对于每个顶点 $t \in V$，创建 8 个点

$(0, 2-t)$	（类型 1）
$(t, 0)$	（类型 2）
$(2, t)$	（类型 3）
$(2-t, 2)$	（类型 4）
$(1, t)$	（类型 5）
$(1, 2-t)$	（类型 6）
$(t, 1)$	（类型 7）
$(2-t, 1)$	（类型 8）

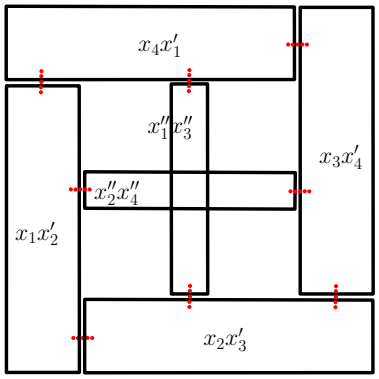


图 5 从最小权重 4-团问题到 $\mathbb{R}^2$ 中矩形的加权 6 元集合覆盖问题的归约。

在 $\mathbb{R}^2$ 中创建以下矩形:

$$
\begin{aligned}
\forall x_1x_2' \in E:\ R^{(1)}_{x_1x_2'} &= [0, x_2') \times [0, 2-x_1] && \text{(type 1)}\\
\forall x_2x_3' \in E:\ R^{(2)}_{x_2x_3'} &= [x_2, 2] \times [0, x_3') && \text{(type 2)}\\
\forall x_3x_4' \in E:\ R^{(3)}_{x_3x_4'} &= (2-x_4', 2] \times [x_3, 2] && \text{(type 3)}\\
\forall x_4x_1' \in E:\ R^{(4)}_{x_4x_1'} &= [0, 2-x_4] \times (2-x_1', 2] && \text{(type 4)}\\
\forall x_1''x_3'' \in E:\ R^{(5)}_{x_1''x_3''} &= [1, 1.1] \times [x_3'', 2-x_1''] && \text{(type 5)}\\
\forall x_2''x_4'' \in E:\ R^{(6)}_{x_2''x_4''} &= [x_2'', 2-x_4''] \times [1, 1.1] && \text{(type 6)}
\end{aligned}
$$

每个矩形的权重设为它覆盖的点数加上它所代表的边的权重。点和矩形的总数分别为 $O(n)$ 和 $O(m)$。归约如图所示：5。

正确性。我们证明，G 中的最小权重 4-团的权重为 w （其中$w \in [0, 0.6]$），当且仅当最优加权大小为 6 的集合覆盖的权重为 $8n + w$。

任何可行解（若存在）都必须包含每种类型的一个矩形，因为类型 1 的点 (0,1.9)（以及类型 2 的点 (0.1,0)、类型 3 的点 $(2, 0.1)$、类型 4 的点 $(1.9, 2)$、类型 5 的点 $(1, 0.1)$ 和类型 7 的点 (0.1,1)）只能由类型 1 的矩形（以及类型 2、3、4、5 和 6 的矩形）覆盖。因此，可行解中的六个矩形必须具有形式 $R^{(1)}_{x_1x_2'}$, $R^{(2)}_{x_2x_3'}$, $R^{(3)}_{x_3x_4'}$, $R^{(4)}_{x_4x_1'}$, $R^{(5)}_{x_1''x_3''}$and $R^{(6)}_{x_2''x_4''}$，其中 x_1x_2', x_2x_3', x_3x_4', x_4x_1',$x_1''x_3''$, $x_2''x_4'' \in E$ 为某些值。

如果 $x_1 > x_1'$，则会有某个点（类型 1）未被覆盖；另一方面，如果 $x_1 < x_1'$，则会有某个点（类型 1）被覆盖两次，此时总权重至少为$8n + 1$。因此，$x_1 = x_1'$。类似地，$x_1' = x_1''$、$x_2 = x_2' = x_2''$、$x_3 = x_3' = x_3''$ 和 $x_4 = x_4' = x_4''$。所以，$x_1x_2x_3x_4$ 在 G 中构成一个 4- 团。我们得出结论，最小权重解 $R^{(1)}_{x_1x_2}$、$R^{(2)}_{x_2x_3}$ $R^{(3)}_{x_3x_4}$ $R^{(4)}_{x_4x_1}$ $R^{(5)}_{x_1x_3}$ $R^{(6)}_{x_2x_4}$ 4 $x_1x_2x_3x_4$ 、 、 、 及 对应于 G中的最小权重 -团。◀

6 欧几里得离散 2-中心的条件下界

在本节中，我们将证明，在足够高的常数维度下，欧几里得离散 2-中心问题存在条件下界。我们的证明总体结构受到 Bringmann 等人最近关于 [13] 该问题的条件困难性证明的启发

即在 $\mathbb{R}^{12}$ 中计算盒相交图的直径，具体而言，是判断直径是否大于 2。（尽管这两个问题表面上差异很大，但我们最初怀疑其中的思路可能有所帮助，是因为这两个问题都涉及某些几何定义图中的长度为 2 的路径，而且在展开问题定义后，两者具有相似的“量词结构”。）我们还需要一些额外的思路，因为我们处理的是欧几里得度量，而不是盒子；最终，我们需要引入额外维度，并仔细调整坐标值，才能使证明成立。

▶ **定理 14.** 假设超团假设成立，则对于任意常数 $\delta > 0$，不存在一个能在 $\mathbb{R}^{13}$ 内以 $O(n^{2-\delta})$ 时间运行的欧几里得离散 *2*-中心算法。

证明。 我们将把在具有 n 个顶点的 3-均匀超图中检测 6-超团的问题，归约为在 $N = O(n^3)$ 个点上的 $\mathbb{R}^{13}$ 欧几里得离散 2- 中心问题。因此，如果后一个问题存在一个运行时间为 $O(N^{2-\delta})$ 的算法，那么前一个问题就存在一个运行时间为 $O(n^{6-3\delta})$的算法，从而推翻超团假设。

设 $G = (V, E)$ 为给定的 3-均匀超图。通过标准的颜色编码技术 [8],，我们可以假设 G 是 6-部的，即 V 被划分为 6 个部分 $V_1, \ldots, V_6$，且 E 中的每条边都由来自 3 个不同部分的 3 个顶点组成。目标是判定是否存在一个 6-超团，即存在 $(x_1, \ldots, x_6) \in V_1 \times \cdots \times V_6$，使得对于所有互不相同的 $i, j, k \in \{1, \ldots, 6\}$，均有 $\{x_i, x_j, x_k\} \in E$。

不失一般性，假设 $V \subset [0, 1]$，即顶点标记为数字，并经过缩放使其落在 $[0, 1]$ 中。令 f， g: $[0, 1] \to [0, 1]$ 为满足$f(x)^2 + g(x)^2 = 1$的一些单射函数。例如，我们可以取 $f(x) = \cos x$和 $g(x) = \sin x$；或者，为避免使用三角函数，取 $f(x) = x$ 和 $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$；又或者，为完全避免使用无理函数，取 $f(x) = 2x/(x^2 + 1)$ 和 $g(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$。（采用后两种方案时，将精度四舍五入到 $O(\log n)$ 位，就可以轻松地使我们的归约在标准整数字 RAM 模型中成立。）

归约。 我们构造以下集合 S，它由 $\mathbb{R}^{13}$ 中的 $O(n^3)$ 个点组成：

1. 对于每个 $(x_1, x_2, x_3) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ 满足 $\{x_1, x_2, x_3\} \in E$，创建点

$$p_{x_1x_2x_3} = (f(x_1), g(x_1), f(x_2), g(x_2), f(x_3), g(x_3), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\,.$$

2. Sim类似地，对于每个 $(x_4, x_5, x_6) \in V_4 \times V_5 \times V_6$ 满足 $\{x_4, x_5, x_6\} \in E$ 的情况，创建点

$$q_{x_4x_5x_6} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, f(x_4), g(x_4), f(x_5), g(x_5), f(x_6), g(x_6), -1)\,.$$

3. 对每个 $(v_i, v_j, v_k) \in V_i \times V_j \times V_k$，其中 i, j, k 互不相同，且 $\{v_i, v_j, v_k\} \notin E$，$\{i, j, k\} \neq \{1, 2, 3\}$，$\{i, j, k\} \neq \{4, 5, 6\}$，创建一个点 $z_{v_iv_jv_k}$：第$2i-1, 2i$ 维的坐标为 $-f(v_i)$ $-g(v_i)$，类似地，第 $2j-1, 2j, 2k-1, 2k$维的坐标分别为 $-f(v_j)$ $-g(v_j)$ $-f(v_k)$ $-g(v_k)$；第 13 个坐标是

$$\phi_{ijk} = |\{1, 2, 3\} \cap \{i, j, k\}| - 1.5 \in \{-0.5, 0.5\}\,;$$

且所有其他坐标均为 0。例如，如果 $i = 1, j = 2, k = 4$,

$$z_{v_1v_2v_4} = (-f(v_1), -g(v_1), -f(v_2), -g(v_2), 0, 0, -f(v_4), -g(v_4), 0, 0, 0, 0, 0.5)\,.$$

4. 最后，添加两个辅助点 $s_\pm = (0, \ldots, 0, \pm 3.5)$。

我们在上述点集 S上求解离散 2-中心问题，并且当且仅当最小半径严格小于 $\sqrt{10.25}$ 时返回 true。

正确性。假设存在一个 6-超团 $(x_1, \ldots, x_6) \in V_1 \times \cdots \times V_6$，它属于 G。我们声称，S 中的每个点到 $p_{x_1x_2x_3}$ 或 $q_{x_4x_5x_6}$ 的距离都严格小于 $\sqrt{10.25}$。因此，S 可以由以 $p_{x_1x_2x_3}$ 和 $q_{x_4x_5x_6}$ 为中心、半径小于 $\sqrt{10.25}$的 2 个球覆盖。为验证这一断言，考虑一个对应于三元组 $(v_1, v_2, v_4) \in V_1 \times V_2 \times V_4$且满足 $\{v_1, v_2, v_4\} \notin E$ 的点 $z_{v_1v_2v_4} \in S$。注意，在 $\mathbb{R}^2$ 中，点 $(f(v_\ell)\ g(v_\ell))$ 与 $(-f(x_\ell)\ -g(x_\ell))$ 之间的距离至多为 2，且当且仅当 $v_\ell = x_\ell$ 时等于 2。另一方面，$(f(v_\ell)\ g(v_\ell))$ 与 $(0, 0)$ 之间的距离为 1，而 $(0, 0)$ 与 $(-f(x_\ell)\ -g(x_\ell))$ 之间的距离为 1。因此，

$$\|z_{v_1v_2v_4} - p_{x_1x_2x_3}\|^2 \ \le\ 2^2 + 2^2 + 1 + 1 + 0 + 0 + (0.5 - 1)^2 \ \le\ 10.25,$$

当且仅当 $v_1 = x_1$ 和 $v_2 = x_2$ 相等时取等号。此外，

$$\|z_{v_1v_2v_4} - q_{x_4x_5x_6}\|^2 \ \le\ 1 + 1 + 0 + 2^2 + 1 + 1 + (0.5 + 1)^2 \ \le\ 10.25,$$

当且仅当 $v_4 = x_4$ 时取等号。由于 $\{x_1, x_2, x_4\} \in E$，我们不可能同时有 $v_1 = x_1$、$v_2 = x_2$ 和 $v_4 = x_4$。因此，$z_{v_1v_2v_4}$ 到 $p_{x_1x_2x_3}$ 或 $q_{x_4x_5x_6}$的距离严格小于 $\sqrt{10.25}$。类似地，对于 i, j, k 的所有其他取值，$z_{v_iv_jv_k} \in S$ 也成立。点 $p_{x'_1x'_2x'_3} \in S$ 到 $p_{x_1x_2x_3}$的距离至多为 $\sqrt{2 + 2 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0} < \sqrt{10.25}$；类似地，点$q_{x'_4x'_5x'_6} \in S$ 到 $q_{x_4x_5x_6}$的距离小于 $\sqrt{10.25}$。最后，辅助点 s_+ 到 $p_{x_1x_2x_3}$的距离至多为 $\sqrt{1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 2.5^2} < \sqrt{10.25}$；类似地，点 s_- 到 $q_{x_4x_5x_6}$的距离小于 $\sqrt{10.25}$。

反过来，假设在 S 上，离散 2-中心问题的最小半径严格小于 $\sqrt{10.25}$。注意，s_+ 与 $z_{v_iv_jv_k}$ 之间的距离至少为 $\sqrt{1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 3^2} > \sqrt{10.25}$，而 s_+ 与 $q_{x_4x_5x_6}$ 之间的距离至少为 $\sqrt{0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 4.5^2} > \sqrt{10.25}$。因此，为了覆盖 s_+，两个中心之一必须等于某个 $\{x_1, x_2, x_3\} \in E$ 中的 $p_{x_1x_2x_3}$。类似地，为了覆盖s_-，另一个中心必须等于某个 $\{x_4, x_5, x_6\} \in E$ 中的 $q_{x_4x_5x_6}$。于是，对于每个满足 $\{v_1, v_2, v_4\} \notin E$ 的 $(v_1, v_2, v_4) \in V_1 \times V_2 \times V_4$，点 $z_{v_1v_2v_4}$ 到 $p_{x_1x_2x_3}$ 或 $q_{x_4x_5x_6}$的距离都严格小于 $\sqrt{10.25}$。根据上述论证，不可能同时有 $v_1 = x_1$、$v_2 = x_2$ 和 $v_4 = x_4$。由此可得 $\{x_1, x_2, x_4\} \in E$。同理，对于 i、j、k 的所有其他取值，均有 $\{x_i, x_j, x_k\} \in E$。因此我们得出结论：$\{x_1, \ldots, x_6\}$ 是一个 6-超团。◀

通过同一证明（缩放后），我们立即得到一个近二次条件下界，适用于 $\mathbb{R}^{13}$ 中单位球的无权大小为 2 的几何集合覆盖问题。在第 7 节中，我们将证明扩展到更大的常数 k对应的离散欧几里得 k-中心问题，但需要更多技术工作，并且要更精细地处理额外维度。这很有意思：离散k-中心问题似乎与图直径相距更远，但从某种意义上说，我们的证明表明，离散 k-中心是一个更适合展示 Bringmann 等人技术全部威力的问题 [13]。

在第 8 节中，我们还调整了这一方法，以证明盒子的大小为 2 的最大覆盖问题存在条件下界。证明通过一种不同的方法来强制满足诸如$\{x_1, x_2, x_4\} \in E$这样的条件，并运用了一个有趣的计数论证。

7 欧几里得离散 k-中心的条件下界$k \ge 3$

继续第 6 节，我们将欧几里得离散 2-中心的条件下界证明扩展到更大 k 的欧几里得离散 k-中心。这需要一些额外的技术思路，特别是使用 k 额外维度（而非一个维度），并进行更精细的调整

坐标值。在下面的证明中，使用 k 表示另一个索引会更加方便，因此我们将 k 重命名为 κ。

▶ **定理15**。 对于任意常数 $\delta > 0$，在超团假设成立的前提下，不存在一个运行时间为 $O(n^{\kappa-\delta})$ 的算法，来求解 $\mathbb{R}^{7\kappa}$ 中的离散欧几里得 κ-中心问题。

证明。 我们将把检测以下对象的问题归约到 3κ：在一个具有 n 个顶点的 3-均匀超图中检测 3κ-超团；归约后的问题是在 $\mathbb{R}^{7\kappa}$ 中的 $N = O(n^3)$ 个点上求解 κ-中心问题（离散欧几里得） $O(N^{\kappa-\delta})$。因此，如果后一个问题存在一个运行时间为 $O(n^{3\kappa-3\delta})$ 的算法，那么前一个问题就存在一个运行时间为 $O(n^{3\kappa-3\delta})$ 的算法，这将推翻超团假设。

设 $G = (V, E)$ 是给定的 3-均匀超图。利用标准的颜色编码技术 [8],，我们可以假设 G 是 (3κ)-部的，即 V 被划分为 3κ 个部分 V_1、……、$V_{3\kappa}$，且 E 中的每条边都由来自 3 个不同部分的 3 个顶点组成。目标是判定是否存在一个 3κ-超团，即存在 $(x_1, \ldots, x_{3\kappa}) \in V_1 \times \cdots \times V_{3\kappa}$，使得对于所有互不相同的 i、j、$k \in \{1, \ldots, 3\kappa\}$，都有 $\{x_i, x_j, x_k\} \in E$。

与之前一样，假设 $V \subset [0,1]$，并令 f，$g\colon [0,1] \to [0,1]$ 为满足 $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ 的一些单射函数。

归约。我们构造如下由 O 个 n^3 点组成的集合 S，位于 $\mathbb{R}^{7\kappa}$ 中：

对于每个 $t \in 1 \ldots \kappa$ $x_{3t-2}\ x_{3t-1}\ x_{3t} \in V_{3t-2} \times V_{3t-1} \times V_{3t}$ $x_{3t-2}\ x_{3t-1}\ x_{3t} \in \{,,\}$ 以及满足 E (,,) 的组合，创建点 (,,)，其中 $p^{(t)}_{x_{3t-2}x_{3t-1}x_{3t}} = p_1 \ldots p_{7\kappa}$

$$
\begin{aligned}
p_{6t-5} &= f(x_{3t-2}), & p_{6t-4} &= g(x_{3t-2}),\\
p_{6t-3} &= f(x_{3t-1}), & p_{6t-2} &= g(x_{3t-1}),\\
p_{6t-1} &= f(x_{3t}), & p_{6t} &= g(x_{3t}),\\
p_{6\kappa+t} &= 2,
\end{aligned}
$$

且所有其他坐标均为 0。

对于每个 $(v_i, v_j, v_k) \in V_i \times V_j \times V_k$，其中 i, j, k 互不相同，且满足 $\{v_i, v_j, v_k\} \notin E$ 和 $\alpha = \lceil i/3 \rceil$ $\beta = \lceil j/3 \rceil$ $\gamma = \lceil k/3$*e </style}*不完全相同，创建一个点 $(, \ldots, z_{7\kappa})$，其中

$$
\begin{aligned}
z_{2i-1} &= -f(v_i), & z_{2i} &= -g(v_i),\\
z_{2j-1} &= -f(v_j), & z_{2j} &= -g(v_j),\\
z_{2k-1} &= -f(v_k), & z_{2k} &= -g(v_k).
\end{aligned}
$$

此外，如果 α、β、γ 互不相同，我们令

$$z_{6\kappa+\alpha} = z_{6\kappa+\beta} = z_{6\kappa+\gamma} = 2;$$

否则，不失一般性，假设 $\alpha = \beta$，我们令

$$z_{6\kappa+\alpha} = \mu, \qquad z_{6\kappa+\gamma} = \nu,$$

其中 $\mu = (5 + \sqrt{39})/4 \approx 2.8112$ 和 $\nu = (3 + \sqrt{39})/4 \approx 2.3112$ 满足方程$\mu^2 +(\nu - 2)^2 = 8$ 和 $(\mu - 2)^2 + \nu^2 = 6$。所有其他坐标均为 0。

最后，对于每个 $t \in \{1, \ldots, \kappa\}$，我们定义辅助点 $s^{(t)} = (s_1, \ldots, s_{7\kappa})$，其中 $s_{6\kappa+t} = 5.6$，且所有其他坐标均为 0。

我们在上述点集 S 上求解离散 κ-中心问题，当且仅当最小半径严格小于 4 时返回 true。

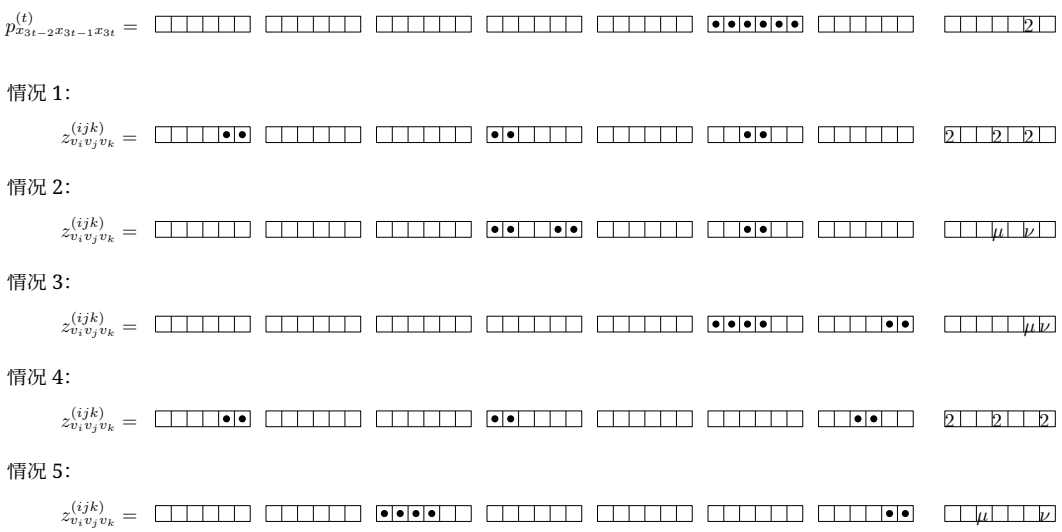


图 6 $p^{(t)}_{x_{3t-2}x_{3t-1}x_{3t}}$ 和 $z^{(ijk)}_{v_iv_jv_k}$ 的非零坐标。

正确性。假设存在一个 3κ-超团 $(x_1, \ldots\ldots, x_\kappa) \in V_1 \times \cdots \times V_\kappa$，位于 G 中。我们断言， S 中的每个点到某个 $t \in \{1, \ldots\ldots, \kappa\}$ 中的 $p^{(t)}_{x_{3t-2}x_{3t-1}x_{3t}}$ 的距离都严格小于 4。因此， S 可以由以 $p^{(t)}_{x_{3t-2}x_{3t-1}x_{3t}}$ 为中心、对应于 $t \in \{1, \ldots\ldots, \kappa\}$ 的 κ 个半径小于 4 的球覆盖。为验证这一断言，考虑点 $z^{(ijk)}_{v_iv_jv_k} \in S$，其对应三元组 $(v_i, v_j, v_k) \in V_i \times V_j \times V_k$，且满足 $\{v_i, v_j, v_k\} \notin E$。令 $\alpha = \mathsf{d}i/3\mathsf{e}$ $\beta = \mathsf{d}j/3\mathsf{e}$ $\gamma = \mathsf{d}k/3\mathsf{e}$。我们考虑以下情况，如图 6 所示（其余情况均具有对称性）：

- 情况 1：如果 $\{3t-2, 3t-1, 3t\} \cap \{i, j, k\} = \{k\}$ 且 α, β, γ 互不相同，那么

$$\|z^{(ijk)}_{v_iv_jv_k} - p^{(t)}_{x_{3t-2}x_{3t-1}x_{3t}}\|^2 \le 2^2 + 1 + 1 + 1 + 1 + (2-2)^2 + (2-0)^2 + (2-0)^2 \le 16,$$

  等号成立当且仅当 $v_k = x_k$。
- 情况 2：如果 $\{3t-2, 3t-1, 3t\} \cap \{i, j, k\} = \{k\}$ 且 $\alpha = \beta$，那么

$$\|z^{(ijk)}_{v_iv_jv_k} - p^{(t)}_{x_{3t-2}x_{3t-1}x_{3t}}\|^2 \le 2^2 + 1 + 1 + 1 + 1 + (\mu-0)^2 + (\nu-2)^2 \le 16,$$

  等号成立当且仅当 $v_k = x_k$。
- 情况 3：如果 $\{3t-2, 3t-1, 3t\} \cap \{i, j, k\} = \{i, j\}$ 且 $\alpha = \beta$，那么

$$\|z^{(ijk)}_{v_iv_jv_k} - p^{(t)}_{x_{3t-2}x_{3t-1}x_{3t}}\|^2 \le 2^2 + 2^2 + 1 + 1 + (\mu-2)^2 + (\nu-0)^2 \le 16,$$

  等号成立当且仅当 $v_i = x_i$ 且 $v_j = x_j$。
- 情形 4：若 $\{3t-2, 3t-1, 3t\} \cap \{i, j, k\} = \emptyset$ 和 α, β, γ 互不相同，

$$\|z^{(ijk)}_{v_iv_jv_k} - p^{(t)}_{x_{3t-2}x_{3t-1}x_{3t}}\|^2 = 1+1+1+1+1+1+(2-0)^2+(2-0)^2+(2-0)^2+(2-0)^2 > 16.$$

- 情形 5：若 $\{3t-2, 3t-1, 3t\} \cap \{i, j, k\} = \emptyset$ 和 $\alpha = \beta$，

$$\|z^{(ijk)}_{v_iv_jv_k} - p^{(t)}_{x_{3t-2}x_{3t-1}x_{3t}}\|^2 = 1+1+1+1+1+1+(\mu-0)^2+(\nu-0)^2+(2-0)^2 > 16.$$

由于 $\{x_i, x_j, x_k\} \in E$，我们不可能同时拥有 $v_i = x_i$、 $v_j = x_j$ 和 $v_k = x_k$。因此， $z_{v_iv_jv_k}$ 与某个 $p^{(t)}_{x_{3t-2}x_{3t-1}x_{3t}}$ 的距离严格小于 4。点 $p^{(t)}_{x'_{3t-2}x'_{3t-1}x'_{3t}} \in S$

与 $p^{(t)}_{x_{3t-2}x_{3t-1}x_{3t}}$ 的距离至多为 $\sqrt{2^2+2^2+2^2}+(2-2)^2<4$。最后，辅助点 $s^{(t)}$ 与 $p^{(t)}_{x_{3t-2}x_{3t-1}x_{3t}}$ 的距离至多为 $\sqrt{1+1+1}+(5.6-2)^2<4$。

反过来，假设在 S 上的离散 3κ-中心问题的最小半径严格小于 4。注意，$s^{(t)}$ 与 $z^{(ijk)}_{v_iv_jv_k}$ 之间的距离至少为 $\min\{\sqrt{1+1+1+(5.6-2)^2+(0-2)^2}+(0-2)^2,\ \sqrt{1+1+1+(5.6-\mu)^2+\nu^2}\}>4$，并且对于任意 $t'\neq t$，$s^{(t)}$ 与 $p^{(t')}_{x_{3t'-2}x_{3t'-1}x_{3t'}}$ 之间的距离至少为

$\sqrt{1+1+1+(5.6-0)^2+(0-2)^2}>4$。因此，为了覆盖 κ 个点 $s^{(t)}$，对于每个 $t\in\{1,\ldots,\kappa\}$，必须存在一个中心等于 $p^{(t)}_{x_{3t-2}x_{3t-1}x_{3t}}$，其中 $\{x_{3t-2},x_{3t-1},x_{3t}\}\in E$。于是，对于每个满足 $\{v_i,v_j,v_k\}\notin E$ 的 $(v_i,v_j,v_k)\in V_i\times V_j\times V_k$，点 $z^{(ijk)}_{v_iv_jv_k}$ 到这些点之一 $p^{(t)}_{x_{3t-2}x_{3t-1}x_{3t}}$ 的距离小于 4。根据上述情况分析，$v_i=x_i$、$v_j=x_j$ 和 $v_k=x_k$ 不可能同时成立。因此，$\{x_i,x_j,x_k\}\in E$。我们得出结论：$\{x_1,\ldots,x_{3\kappa}\}$ 是一个 3κ-超团。◀

根据同一证明（经过缩放后），我们立即得到：对于 $\mathbb{R}^{7\kappa}$中的单位球，大小为κ 的几何集合覆盖问题存在一个近似n^κ 条件下界。

为使证明简洁，我们没有优化维度数量 7κ。（进一步推导后，应该可以略微降低至 $6\kappa+O(1)$。）

8 盒子大小为 2 的最大覆盖问题的条件下界

继续第 6 节，并从欧几里得情形转回直角线性情形，我们将欧几里得 2-中心问题的条件下界证明改造为针对盒子大小为 2 的最大覆盖问题的证明。事实上，该证明对中的正交象限（以及单位超立方体）也成立 $\mathbb{R}^{12}$。

▶ **定理 16。** 对于任意常数 $\delta>0$，给定 $\mathbb{R}^{12}$中的 n 个点和 n 个正交象限，假设超团假设成立，则不存在一个用时为$O(n^{2-\delta})$的算法，能够找到覆盖点数最多的两个正交象限。

证明。 我们将把在一个具有 $6n$ 个顶点的 3-均匀超图中检测 6-超团的问题，归约为在 $N=O(n^3)$ 个$\mathbb{R}^{12}$中的 2 个正交象限最大覆盖问题。因此，如果后一个问题存在一个 $O(N^{2-\delta})$时间算法，那么前一个问题便存在一个$O(n^{6-3\delta})$时间算法，这将推翻超团假设。

设 $G=(V,E)$ 为给定的 3-均匀超图。通过标准的颜色编码技术 [8],，我们可以假设 G 是 6-部的，即 V被划分为 6 个部分 $V_1,\ldots,V_6$，且 E 中的每条边都由来自 3 个不同部分的 3 个顶点组成。不失一般性，假设每个部分恰好包含 n 个顶点；为此，可向每个部分添加一定数量的孤立顶点。目标是判断是否存在一个 6-超团，即存在 $(x_1,\ldots,x_6)\in V_1\times\cdots\times V_6$，使得对于所有互不相同的 $i,j,k\in\{1,\ldots,6\}$，都有 $\{x_i,x_j,x_k\}\in E$。

不失一般性，假设 $V\subset[0,1]$，即顶点标记为经过重新缩放后位于 $[0,1]$ 中的数字。

令 $d_{jk}(x_i)$ 表示包含 x_i 以及 V_j 和 V_k 中另外两个顶点的边数，并令 $d_k(x_ix_j)$ 表示包含顶点 x_i，x_j 以及 V_k 中另一个顶点的边数。

归约。 我们在 $\mathbb{R}^{12}$ 中构造如下 $O(n^3)$ 个点和正交象限：

1. 对于每个 $(x_1,\ x_2,\ x_3)\in V_1\times V_2\times V_3$ 满足 $\{x_1,\ x_2,\ x_3\}\in E$，创建正交象限

$$R_{x_1x_2x_3} = (-\infty, x_1] \times (-\infty, -x_1] \times (-\infty, x_2] \times (-\infty, -x_2] \times (-\infty, x_3] \times (-\infty, -x_3] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

2. 类似地，对于每个 $(x_4, x_5, x_6) \in V_4 \times V_5 \times V_6$ 满足 $\{x_4, x_5, x_6\} \in E$，创建正交象限

$$R_{x_4x_5x_6} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (-\infty, x_4] \times (-\infty, -x_4] \times (-\infty, x_5] \times (-\infty, -x_5] \times (-\infty, x_6] \times (-\infty, -x_6].$$

3. 对于每个 $(v_1, v_2, v_4) \in V_1 \times V_2 \times V_4$ 满足 $\{v_1, v_2, v_4\} \notin E$，创建点

$$p_{v_1v_2v_4} = (v_1, -v_1, v_2, -v_2, -\infty, -\infty, v_4, -v_4, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty).$$

4. 对于每个 $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$，创建 $d_4(v_1v_2)$ 个该点的副本

$$p_{v_1v_2} = (v_1, -v_1, v_2, -v_2, -\infty, -\infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty).$$

5. 对于每个 $v_4 \in V_4$，创建 $d_{12}(v_4)$ 个该点的副本

$$p_{v_4} = (\infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, v_4, -v_4, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty).$$

6. 重复步骤 3–5，但将 (1, 2, 4) 替换为所有其他满足以下条件的三元组 (i, j, k)：$i, j \in$ {1, 2, 3} 且 $k \in$ {4, 5, 6}，或者 $i, j \in$ {4, 5, 6} 且 $k \in$ {1, 2, 3}，其中点的定义方式类似。

我们在上述点和正交象限集合上求解大小为 2 的最大覆盖问题；当且仅当该解至少覆盖 $18(n^2 + n)$ 个点时，返回 true。

正确性。 考虑两个正交象限 $R_{x_1x_2x_3}$ 和 $R_{x_4x_5x_6}$，其中有 $x_1 \in V_1$、…、$x_6 \in V_6$，以及$\{x_1$、x_2、$x_3\}$、$\{x_4$、x_5、$x_6\} \in E$。点 $p_{v_1v_2v_4}$ 被覆盖，当且仅当（$v_1 = x_1$ 且 $v_2 = x_2$）或（$v_4 = x_4$）。因此，来自步骤 3 且满足 $\{v_1$、v_2、$v_4\} \notin E$ 的点中，被覆盖的点数恰好为

- $(n^2 - d_{12}(x_4)) + (n - d_4(x_1x_2))$ if $\{x_1, x_2, x_4\} \in E$;
- $(n^2 - d_{12}(x_4)) + (n - d_4(x_1x_2)) - 1$ if $\{x_1, x_2, x_4\} \notin E$;

点 $p_{v_1v_2}$ 被覆盖，当且仅当 $v_1 = x_1$ 且 $v_2 = x_2$。因此，来自步骤 4 且被覆盖的点数为 $d_4(x_1x_2)$。类似地，点 p_{v_4} 被覆盖，当且仅当 $v_4 = x_4$。因此，来自步骤 5 且被覆盖的点数为 $d_{12}(x_4)$。所以，来自步骤 3–5 且被覆盖的点总数为：当$\{x_1$、x_2、$x_4\} \in E$ 时为 $n^2 + n$，而当$\{x_1$、x_2、$x_4\} \notin E$ 时为 $n^2 + n - 1$。

我们得出结论：在所有 18 个三元组（i, j, k）中覆盖的点的总数至少为 $18(n^2 + n)$，当且仅当 $\{x_1, \ldots, x_6\}$ 是 G 中的一个 6-超团。◀

9 补充说明

对于“组合”算法（即避免使用快速矩阵乘法或代数技术的算法），我们的一些条件下界可以得到改进。例如，我们关于$n^{4/3}$ 盒子的无权 3-集合覆盖的近 $\mathbb{R}^3$ 以及 $\mathbb{R}^4$ （定理 10–11 和推论 12）中的离散直角线性 3-中心的下界可以提高到近$n^{3/2}$，前提是组合布尔矩阵乘法假设 [46]（该假设断言布尔矩阵乘法

两个 $n \times n$ 矩阵的乘法需要$\Omega(n^{3-\delta})$ 时间的组合算法）。这些结论来自相同的归约，因为组合布尔矩阵乘法假设等价于 [47]在具有 n 个顶点的图中进行三角形检测需要$\Omega(n^{3-\delta})$ 时间的组合算法这一假设。此外，我们针对欧几里得离散 2-中心在 $\mathbb{R}^{13}$ （定理14）中的近二次下界，在 $\mathbb{R}^9$ 组合团假设下仍然成立（该假设断言，在具有 ℓ个顶点的图中进行 n -团检测需要$\Omega(n^{\ell-\delta})$ 时间的组合算法），这是通过从图中的 4-团而非 3-均匀超图中的 6-超团进行归约得到的。类似地，欧几里得离散k-中心的近二次下界（定理15）在稍低的维度下也成立。注意，尽管“组合”算法这一概念较为模糊，但我们在第2 节和第3 节中的所有算法都是组合算法。（不过，据我们所知，在高维中用于欧几里得离散 2-中心的最佳组合算法比最佳非组合算法更慢，其时间界接近 $n^{3-1/O(d)}$ ，并使用范围搜索技术。）

将我们的条件下界证明与 Marx [38] 以及 Chitnis 和 Saurabh [22] 关于参数 k的固定参数难解性所给出的已知困难性证明进行比较很有意思。这些证明同样是通过归约自 k'-团得到的，其中某个函数将 k 和 k'关联起来。因此，原则上，通过令 $k' = 3$，它们应当能为离散 k-中心（以及相关的无权集合覆盖问题）给出超线性下界，其中某个特定常数 k对应的 k 值可能很大（远大于 3）。另一方面，Cabello 等人关于 d [15] 的固定参数难解性证明也给出了从 k'-团到欧几里得 2-中心和直角距离 4-中心的归约，但连续问题与离散问题并不相同。（尽管如此，Cabello 等人的证明似乎采用了一些类似的技巧，不过我们的方法更简单。）

我们研究小规模几何集合覆盖的细粒度复杂性的最初原因之一，是证明几何集合覆盖快速近似算法的近似难度。例如，定理10 （及其后续注释）表明，对于具有边长 $\widetilde{O}(n)$ 的 $\mathbb{R}^3$ 中的胖盒集合覆盖问题，不存在运行时间为$\Theta(1)$ 且近似因子严格小于 $4/3$ 的近似算法（否则，该算法就能够判定最优规模是3还是至少为4）。对于这类胖盒，利用已知技术可以得到具有某个（较大）常数近似因子的近线性时间近似算法 [5, 19] （因为 $\mathbb{R}^3$ 中相似尺寸的胖盒具有线性并集复杂度）。

10 结论

在本文中，我们针对计算几何中的一类基本问题，取得了大量非平凡的新结果。这类问题与小规模的离散 k中心和规模为 k 的几何集合覆盖有关，其中 k 取值较小。（参见表 1–3。）具体而言，我们有若干结果，其上界与条件下界十分接近：

- 对于 $\mathbb{R}^2$中的矩形的加权大小为 3 的集合覆盖，我们给出了首个次二次$\widetilde{O}(n^{7/4})$时间算法，并在全点对最短路径假设下证明了 $\Omega(n^{3/2-\delta})$ 下界。对于 $\mathbb{R}^{O(k)}$中的离散欧几里得 k-中心问题（或单位球的无权大小为k 的集合覆盖），我们在超团假设下证明了 $\Omega(n^{k-\delta})$ 下界；若 $\omega = 2$，该下界接近最优。对于足够高常数维空间中盒子的大小为 2 的最大覆盖，我们在超团假设下证明了 $\Omega(n^{2-\delta})$ 下界，且该下界接近最优。

对于我们所有的研究结果，我们都成功找到了简洁的证明（每个证明仅需 1–3 页）。我们认为证明的简洁性和易读性是一项优势——它们非常适合作为考试题目。

这些例子展示了计算几何中的细粒度复杂性技术。总的来说，过去十年里，算法领域更广泛的范围内，细粒度复杂性取得了长足发展 [46], ，但计算几何领域的发展相对有限。本文更广泛的目标是鼓励更多研究在这两个领域的交叉处展开。我们应当强调，尽管回过头来看，我们的条件下界证明可能显得简单，但想出这些证明并不一定容易；例如，请参阅我们一项需要计算机辅助搜索的证明（定理 11）。

由于本文研究的许多问题版本仍未获得匹配的上界和下界，我们的工作提出了许多有趣的开放问题。例如：

- 我们能否让我们针对 $\mathbb{R}^2$ 中的离散直角线性 3-中心问题提出的次二次算法适用于维度 3 或更高维度？我们能否让我们针对 $\mathbb{R}^4$ 中的离散直角线性 3-中心问题提出的条件下界证明适用于维度 2 或 3？我们能否让我们针对 $\mathbb{R}^{13}$ 中的离散欧几里得 2-中心问题提出的条件下界适用于维度 3？我们能否让我们针对 $\mathbb{R}^{12}$ 中盒子的大小为 2 的最大覆盖问题提出的条件下界适用于维度 2 或 3？尽管我们已经排除了 $\mathbb{R}^{13}$ 中离散欧几里得 2-中心问题存在次二次算法的可能性，但如果 $\omega > 2$，几何方法是否仍能帮助我们将时间复杂度降低到 n^ω 以下？

我们应该指出，其中一些问题可能相当困难。在细粒度复杂性领域，有许多基本问题至今仍没有紧确条件下界（举一个众所周知的几何学例子，Künnemann 最近发表于 FOCS'22 的论文 [36] 终于为 Klee 测度问题在 $\mathbb{R}^3$中取得了近乎最优的条件下界，但对于非组合算法，维度为 4 及以上时的紧确下界仍然未知）。尽管如此，我们希望这项工作能推动这一类丰富问题在上界和下界方面取得更多进展。

参考文献

1 Amir Abboud、Karl Bringmann、Seri Khoury 和 Or Zamir。通过移除短环研究 P 中的近似难度：环检测、距离预言机及其他问题。载于第 54 届 ACM计算理论研讨会年会论文集（STOC），第 1487–1500 页，2022 年。 doi:10.1145/3519935.3520066. 2 Pankaj K. Agarwal 、 Rinat Ben Avraham 和 Micha Sharir。三维空间中的 2-中心问题。《计算几何》，46(6):734–746，2013 年。初步版本发表于 SoCG'10。 doi:10.1016/j.comgeo.2012.11.005. 3 Pankaj K. Agarwal、Alon Efrat 和 Micha Sharir。三维排列中浅层的垂直分解及其应用。《SIAM计算杂志》，29(3):912–953，1999 年。doi:10.1137/S0097539795295936. 4 Pankaj K. Agarwal 和 Jeff Erickson。几何范围搜索及其相关问题。载于《离散与计算几何进展》，当代数学第 223 卷，第 1–56 页。AMS 出版社，1999 年。网址： http://jeffe.cs.illinois.edu/pubs/survey.html. 5 Pankaj K. Agarwal 和 Jiangwei Pan。几何击中集和集合覆盖的近线性算法。《离散与计算几何》，63(2):460–482，2020 年。 doi:10.1007/s00454-019-00099-6. 6 Pankaj K. Agarwal 和 Cecilia Magdalena Procopiuc。聚类的精确算法和近似算法。Algorithmica，33(2):201–226，2002 年。 doi:10.1007/s00453-001-0110-y. 7 Pankaj K Agarwal、Micha Sharir 和 Emo Welzl。离散 2-中心问题。《离散与计算几何》，20(3):287–305，1998 年。初步版本发表于 SoCG'97。

8 Noga Alon、Raphael Yuster 和 Uri Zwick。颜色编码。《美国计算机协会学报》，42(4):844–856，1995年。doi:10.1145/210332.210337。9 Noga Alon、Raphael Yuster 和 Uri Zwick。给定长度环的查找与计数。Algorithmica，17(3):209–223，1997年。doi:10.1007/BF02523189。10 Ashwinkumar Badanidiyuru、Robert Kleinberg 和 Hooyeon Lee。低维覆盖问题的近似求解。载于：第28届 ACM计算几何研讨会（SoCG）论文集，第161–170页，2012年。 doi:10.1145/2261250.2261274。11 Sergei Bespamyatnikh 和 David G. Kirkpatrick。直角坐标系2-中心问题。载于：第11届加拿大计算几何会议（CCCG）论文集，1999年。网址： http://www.cccg.ca/proceedings/1999/fp55.pdf。12 Sergei Bespamyatnikh 和 Michael Segal。直角坐标系静态与动态离散2-中心问题。载于：第6届算法与数据结构研讨会（WADS）论文集，第276–287页，1999年。 doi:10.1007/3-540-48447-7_28。13 Karl Bringmann、Sándor Kisfaludi-Bak、Marvin Künnemann、André Nusser 和 Zahra Parsaeian。几何相交图中次二次直径计算的探索。载于：第38届国际计算几何研讨会（SoCG）论文集，第21:1–21:16页，2022年。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2022.21。14 Karl Bringmann、Sándor Kisfaludi-Bak、Michal Pilipczuk 和 Erik Jan van Leeuwen。关于正交象限上的几何集合覆盖。载于：第27届欧洲算法年度研讨会（ESA）论文集，第26:1–26:18页，2019年。 doi:10.4230/LIPIcs.ESA.2019.26。15 Sergio Cabello、Panos Giannopoulos、Christian Knauer、Dániel Marx 和 Günter Rote。几何聚类：关于维度的固定参数可处理性与下界。《美国计算机协会算法汇刊》，7(4):43:1–43:27，2011年。初步版本发表于SODA'08。doi:10.1145/2000807.2000811。16 Timothy M. Chan。随机优化技术的几何应用。《离散与计算几何》，22(4):547–567，1999年。 doi:10.1007/PL00009478。17 Timothy M. Chan。更多平面二中心算法。《计算几何》，13(3):189–198，1999年。18 Timothy M. Chan。在几何相交图中查找三角形及其他小子图。载于：第34届ACM-SIAM离散算法研讨会（SODA）论文集，2023年。即将出版。网址： https://arxiv.org/abs/2211.05345。19 Timothy M. Chan 和 Qizheng He。更快的几何集合覆盖近似算法。载于：第36届国际计算几何研讨会（SoCG）论文集，第27:1–27:14页，2020年。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2020.27。20 Timothy M. Chan、Virginia Vassilevska Williams 和 Yinzhan Xu。在更具可信度的假设下，三角形问题的困难性：来自实数全点对最短路径、实数三数求和和正交向量的归约。载于：第54届ACM计算理论研讨会（STOC）论文集，第1501–1514页，2022年。 doi:10.1145/3519935.3520032。21 Bernard Chazelle 和 Jirı Matoušek。关于固定维度优化问题的线性时间确定性算法。《算法学报》，21(3):579–597，1996年。22 Rajesh Chitnis 和 Nitin Saurabh。 $\mathbb{R}^d$中近似与精确 k-中心问题的紧致下界。载于：第38届国际计算几何研讨会（SoCG）论文集，第28:1–28:15页，2022年。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2022.28。23 Jongmin Choi 和 Hee-Kap Ahn。高效平面二中心算法。《计算几何》，97:101768，2021年。doi:10.1016/j.comgeo.2021.101768。24 Kenneth L. Clarkson。当维度较小时，线性规划与整数规划的拉斯维加斯算法。《美国计算机协会学报》，42(2):488–499，1995年。25 Don Coppersmith。长方形矩阵的快速乘法。《SIAM计算杂志》，11(3):467–471，1982年。doi:10.1137/0211037。26 Mark de Berg、Otfried Cheong、Marc J. van Kreveld 和 Mark H. Overmars。《计算几何：算法与应用》。施普林格，第3版，2008年。

27 Martin E. Dyer。关于多维搜索技术及其在欧几里得单中心问题中的应用。《SIAM计算杂志》，15(3):725–738，1986。28 Friedrich Eisenbrand 和 Fabrizio Grandoni。关于固定参数团和支配集的复杂性。《理论计算机科学》，326(1-3):57–67，2004。 doi:10.1016/j.tcs.2004.05.009。29 David Eppstein。更快地构造平面双中心。载于第 8 届 ACM-SIAM离散算法研讨会（SODA）论文集，第 131–138 页，1997。网址： http://dl.acm.org/citation.cfm?id=314161.314198。30 Greg N. Frederickson 和 Donald B. Johnson。 $X + Y$ 和列已排序的矩阵中的选择与排序复杂性。《计算机与系统科学杂志》，24(2):197–208，1982。doi:10.1016/0022-0000(82)90048-4。31 R. Z. Hwang、R. C. Chang 和 Richard C. T. Lee。分隔符搜索策略：以亚指数时间求解若干 NP难问题。《Algorithmica》，9(4):398–423，1993。doi:10.1007/BF01228511。32 R. Z. Hwang、Richard C. T. Lee 和 R. C. Chang。条带划分方法：求解欧几里得 p中心问题。《Algorithmica》，9(1):1–22，1993。 doi:10.1007/BF01185335。33 Ce Jin 和 Yinzhan Xu。在基于 3SUM 的归约中消除加性结构。CoRR，abs/2211.07048，2022。 arXiv:2211.07048。34 Matthew J. Katz、Klara Kedem 和 Michael Segal。离散直角坐标系双中心问题。《计算几何》，15(4):203–214，2000。 doi:10.1016/S0925-7721(99)00052-8。35 Matthew J. Katz 和 Frank Nielsen。关于对象的刺穿集。载于第 12 届年度计算几何研讨会（SoCG）论文集，第 113–121 页，1996。 doi:10.1145/237218.237253。36 Marvin Künnemann。Klee 测度问题在三维中的紧（非组合）条件下界。载于第 63 届 IEEE计算机科学基础研讨会（FOCS）论文集，第 555–566 页，2022。 doi:10.1109/FOCS54457.2022.00059。37 Andrea Lincoln、Virginia Vassilevska Williams 和 R. Ryan Williams。稀疏图中最短环与路径问题的紧确困难性。载于第 29 届 ACM-SIAM离散算法研讨会（SODA）论文集，第 1236–1252 页，2018。 doi:10.1137/1.9781611975031.80。38 Dániel Marx。几何问题的高效近似方案？载于第 13 届欧洲算法研讨会（ESA）论文集，第 448–459 页，2005。 doi:10.1007/11561071_41。39 Dániel Marx 和 Michal Pilipczuk。利用沃罗诺伊图求解平面设施选址问题的最优参数化算法。载于第 23 届欧洲算法年度研讨会（ESA）论文集，第 865–877 页，2015。 doi:10.1007/978-3-662-48350-3_72。40 Jirí Matoušek。报告半空间中的点。《计算几何》，2:169–186，1992。 doi:10.1016/0925-7721(92)90006-E。41 Nimrod Megiddo。 R^3 中的线性规划及相关问题的线性时间算法。《SIAM计算杂志》，12(4):759–776，1983。42 Doron Nussbaum。直角线性 p穿刺问题。载于国际符号与代数计算研讨会（ISSAC）论文集，第 316–323 页，1997。 doi:10.1145/258726.258828。43 Mihai P˘atraşcu。迈向动态问题的多项式下界。载于第 42 届 ACM计算理论研讨会（STOC）论文集，第 603–610 页，2010。网址： https://doi.org/10.1145/1806689.1806772, doi:10.1145/1806689.1806772。44 Micha Sharir。平面双中心问题的近线性算法。《离散与计算几何》，18(2):125–134，1997。预备版本发表于 SoCG'96。45 Micha Sharir 和 Emo Welzl。直角线性与多边形 p穿刺及 p中心问题。载于第 12 届年度计算几何研讨会（SoCG）论文集，第 122–132 页，1996。doi:10.1145/237218.237255。46 Virginia Vassilevska Williams。关于算法与复杂性中的一些细粒度问题。载于国际数学家大会论文集，第 3 卷，第 3431–3472 页。世界科学出版社，2018。网址： https://people.csail.mit.edu/virgi/eccentri.pdf。

47 Virginia Vassilevska Williams 和 R. Ryan Williams。路径、矩阵和三角形问题之间的次立方等价关系。《美国计算机协会学报》，65(5):27:1–27:38，2018。预备版本发表于 FOCS'10。网址：https://doi.org/10.1145/3186893，doi:10.1145/3186893。48 Virginia Vassilevska Williams 和 Yinzhan Xu。单色三角形、三角形列表枚举与 APSP。载于第 *61* 届 *IEEE*计算机科学基础研讨会（*FOCS*）论文集，第 786–797 页，2020。网址：https://doi.org/10.1109/FOCS46700.2020.00078，doi:10.1109/FOCS46700.2020.00078。49 Haitao Wang。关于平面双中心问题与圆形凸包。载于第 *36* 届国际计算几何研讨会（*SoCG*）论文集，第 68:1–68:14 页，2020。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2020.68。50 Emo Welzl。最小包围圆盘（球和椭球）。载于计算机科学新结果与新趋势，第 359–370 页。施普林格，1991。