IEEE 版权声明

c○ 2025 IEEE。允许将本文用于个人用途。对于所有其他用途，无论是在当前还是未来的媒体中使用，包括为广告或促销目的重印或再版本文、创作新的合集、转售或再分发至服务器或列表，或在其他作品中重复使用本文中任何受版权保护的内容，均须事先获得 IEEE 的许可。

arXiv:2305.01903v4 [eess.SY] 12 Mar 2025

本文部分内容已被接受，将发表于 IEEE 自动控制汇刊。

引用格式:

S. An、D. Lee 和 G. Park，“非光滑和不完善反馈线性化下优先级输出跟踪控制的最终有界性与输出收敛”，IEEE 自动控制汇刊，2025，doi：10.1109/TAC.2025.3547538。

BibTeX:

```
@article{an2025tac,
title={Ultimate Boundedness and Output Convergence of Prioritized Output
Tracking Control Under Nonsmooth and Imperfect Feedback Linearization},
author={An, Sang-ik and Lee, Dongheui and Park, Gyunghoon},
journal={IEEE Transactions on Automatic Control},year={2025},publisher={IEEE},
doi={10.1109/TAC.2025.3547538}
```

保持任务优先级的输入输出反馈线性化：针对具有奇异输入增益矩阵的多变量非线性系统

Sang-ik An、Dongheui Lee 和 Gyunghoon Park *†‡

2025年3月13日

摘要

我们提出了一种输入输出反馈线性化的扩展方法，适用于一类无法通过经典方式实现输入输出线性化的多变量系统。其关键观察在于，通常的输入输出线性化问题可以解释为求解与输入增益矩阵相关的联立线性方程问题。因此，即使在输入增益矩阵变为奇异的点处，仍然可以求解部分线性方程，从而使一部分输入输出关系实现线性化或接近线性化。基于这一观察，我们在输入输出线性化问题中采用基于任务优先级的方法。首先，我们将经典的 Byrnes-Isidori 标准形推广为具有三角结构的优先化正规形，使得与低优先级任务相关的输入增益矩阵子块的奇异性不会直接传播到高优先级任务。接下来，我们通过采用字典序的多目标优化，提出一种优先级输入输出线性化方法，从而得到一种优先级半线性形式，该形式建立的输入输出关系中，优先级较高的子集具有线性或近似线性的特性。最后，我们给出了关于最终有界性和任务达成的 Lyapunov 分析，尤其针对所提出的优先级输入输出线性化方法应用于输出跟踪问题的情形。本研究通过为关键控制问题赋予更高的优先级，为同时具有关键和非关键控制问题的复杂系统引入了一种新的控制框架。

1 引言

奇异性是将输入-输出反馈线性化从单输入单输出（SISO）系统扩展到多输入多输出（MIMO）系统时复杂性的一个主要来源。SISO系统在某一点局部输入-输出可线性化，当且仅当系统在该点具有相对阶，即标量值输入增益函数在局部保持非零 [3, 4, 5, 6, 7]。这一概念的推广

*本文部分内容曾发表于第61届IEEE决策与控制会议，墨西哥坎昆，12月2022 [1] ，另有部分内容提交至第62届IEEE决策与控制会议， 2023 [2]。（通讯作者：Gyunghoon Park。）

†Sang-ik An 和 Gyunghoon Park 任职于韩国首尔市立大学电气与计算机工程学院（电子邮箱：S.An.Robots@gmail.com；gyunghoon.park@uos.ac.kr）。

‡Dongheui Lee 任职于奥地利维也纳工业大学电气工程与信息技术学院计算机技术研究所自主系统部门，同时任职于德国航空航天中心（DLR）机器人与机电一体化研究所（电子邮箱：dongheui.lee@tuwien.ac.at）。

到MIMO系统时，采用了基于矩阵值输入增益函数 [8] 定义的向量相对阶（之后又通过非线性结构算法 [9, 10, 11, 12] 进一步扩展）。MIMO扩展的一个关键部分是在每个状态下求解与输入增益矩阵相关的联立线性方程。从这一角度看，输入增益矩阵的非奇异性被视为系统实现输入-输出可线性化的必要条件，这也给输入-输出线性化的实际应用带来了根本性限制，相关研究已对此有所说明。

本文提出了一种输入-输出线性化的扩展方法，不预先假设输入增益矩阵具有非奇异性。我们观察到，即使在状态空间中的某些点上输入增益矩阵变为奇异矩阵，联立线性方程仍可在一定意义下得到部分求解，即至少可以使部分输入变量与输出变量之间的关系变为线性或接近线性。这一观察表明，推广输入-输出线性化，并将发展成熟的线性控制理论应用于部分不可线性化非线性系统是可行的。

此时自然会产生一个问题：应选择哪一部分输入输出关系进行线性化？为回答这一问题，优先级的概念进入了我们的研究视野。优先级分配是一种将有限资源分配给多个任务的策略。在控制工程语境下，每个任务都可以理解为决策者必须借助动力系统完成的一项工作，而任务的成功与系统的输出可控性直接相关；该系统带有一个称为任务变量的变量，通过这一变量可以完整地表示任务。在这种设置下，当与任务变量相关的矩阵子块不具有满秩时，输入增益矩阵的奇异性可能会破坏两个任务变量的输出可控性；这意味着同时完成这两个任务可能是不可能的。为处理这些不相容的任务，我们在任务之间引入优先级关系，首先保证高优先级任务的输出可控性。值得注意的是，基于任务优先级的方法已在机器人学界得到深入研究，例如优先级逆运动学（PIK） [13, 14, 15], 约束优先级逆运动学 [16, 17], 任务切换 [18, 19], 优先级控制 [20, 21], 优先级最优控制 [22, 23],优先级任务学习 [24, 25], 等。尽管如此，上述大多数研究主要聚焦于实际问题，而优先级的理论层面尚未得到充分理解。基于这一点，本文从理论角度出发，致力于在输入-输出线性化和基于优先级的方法这两项成功研究之间架起桥梁。本文的研究结果表明，通过所提出的基于任务优先级的方法，可以将输入-输出线性化扩展至不具备输入输出可线性化性质的系统；此外，还为机器人系统的基于任务优先级的控制提供了具体的理论基础。

本文其余部分安排如下。第 2 节中，我们通过对输入增益矩阵应用一种特定的 LQ 分解，提出一种结合任务优先级的 Byrnes-Isidori 标准形扩展，本文将其称为优先化正规形。接着，第 3 节分别通过典型方法和广义方法，介绍基于优先级的输入-输出线性化推广。最后，第 4 节基于优先级输入-输出线性化技术，探讨优先级输出跟踪控制问题。我们将看到，输入增益矩阵的奇异性会导致跟踪控制中两个不可避免的问题：输入增益矩阵的分解在某些点变为非光滑，且所执行的线性化并不完善。即使存在非光滑正交化和不完善的线性化，本研究仍致力于运用李雅普诺夫方法，对最终有界性和高优先级任务实现进行数学分析。

1.1 记号

对于给定的矩阵 $M \in \mathbb{R}^{a\times b}$，$\sigma_{\max}(M)$ 和 $\sigma_{\min}(M)$ 分别表示 M 的最大和最小奇异值；$\mathcal{R}(M)$ 和 $\mathcal{N}(M)$ 分别表示 M 的值域和零空间；M^+ 表示 M 的摩尔 - 彭若斯伪逆。结合 $c \in [0,\infty]$，M 的扩展阻尼伪逆 $M^{+(c)} \in \mathbb{R}^{b\times a}$ 表示为

$$M^{+(c)} = \begin{cases} M^+, & c = 0 \\ M^T(MM^T + c^2 I_a)^{-1}, & 0 < c < \infty \\ 0, & c = \infty. \end{cases}$$

对于块对角矩阵 $M = \mathsf{diag}(M_{11}, \ldots, M_{kk})$ 和向量 $c = (c_1, \ldots, c_k) \in [0,\infty]^k$，

$$M^{\oplus(c)} = \mathrm{diag}(M_{11}^{+(c_1)}, \ldots, M_{kk}^{+(c_k)}).$$

对于充分光滑函数 f、h 和 G，令 $L_f^j h(x) = (\partial(L_f^{j-1}h)/\partial x) f(x)$、$L_G L_f^j h(x) = (\partial(L_f^j h)/\partial x) G(x)$，以及 $L_f^0 h(x) = h(x)$。$\mathsf{int}(\mathcal{S})$、$\mathsf{bd}(\mathcal{S})$、$\mathsf{cl}(\mathcal{S})$ 和 $\mathsf{co}(\mathcal{S})$ 分别表示集合 $\mathcal{S}$ 的内部、边界、闭包和凸闭包，而 $\mathcal{B}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开单位球。

本文中，主要用下标 $i:j$ 或 $i:j, i':j'$ 表示论域中整体的一部分。例如，若 $u = u_1 + \cdots + u_k$, $v = \mathsf{col}(v_1, \ldots, v_k)$，且 $L = [L_{ab}]_{1\le a,b\le k}$，则 $u_{i:j} = u_i + \cdots + u_j$, $v_{i:j} = \mathsf{col}(v_i, \ldots, v_j)$，且 $L_{i:j,i':j'} = [L_{ab}]_{i\le a\le j, i'\le b\le j'}$，依此类推。有时，我们先定义个体 $\bullet_i = \bullet_{i:i}$，然后通过指定 $1:k$ 的含义，在之后构造整体 $\bullet = \bullet_{1:k}$。我们还用下标 $i:j$ 表示变量或函数，其定义与整体的一部分密切相关。例如，若 $\xi = \mathsf{col}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$，我们定义变量 $\eta_{1:i}$ 和函数 $\Phi_{1:i}(x)$，使得 $(\eta_{1:i}, \xi_{1:i}) = \Phi_{1:i}(x)$。若未作任何定义，$\bullet_{i:j}$ 表示 $\mathsf{col}(\bullet_i, \ldots, \bullet_j)$；否则，我们总会说明 $\bullet_{i:j}$ 的含义。如果需要考虑指标集 $\mathcal{I} = \{1, \ldots, k\}$ 的一个初始段，我们定义 $\mathcal{I}_0 = \{1, \ldots, i_0\} \subset \mathcal{I}$，并为简化记号，写作 $\bullet_0 = \bullet_{1:i_0}$ 或 $\bullet_0^c = \bullet_{i_0+1:k}$ 或 $\bullet_0 = \bullet_{1:i_0,1:i_0}$ 或 $\bullet_0^c = \bullet_{i_0+1:k,i_0+1:k}$。

2 优先级控制问题与优先化正规形

本节首先介绍动力系统的优先级控制问题及其相关概念。任务 $\mathfrak{T}$ 是决策者必须完成的一项工作，通常以一组陈述的形式表示。为了完成任务，决策者会构建一个动力系统 $\mathfrak{S}$，并为其输入变量 u 制定控制策略 $\mathfrak{C}$，也就是说，设法为 $\mathfrak{T}$ 找到 $\mathfrak{S}$ 的控制输入。对于给定的任务 $\mathfrak{T}$，相应的任务变量 $y_{\mathfrak{T}}$ 是动力系统 $\mathfrak{S}$ 的输出所构成的有序集合，任务 $\mathfrak{T}$ 可通过该集合表示（例如，最小化目标函数 $\pi(y_{\mathfrak{T}})$）。（下文中，若上下文明确，我们会省略 $y_{\mathfrak{T}}$ 中的下标 $\mathfrak{T}$。）此处不具体说明任务的内容，任务的选择留给决策者。当 $\mathfrak{T}$ 预先确定时，如果输入数量等于／大于／小于输出数量，我们分别称动力系统 $\mathfrak{S}$ 为方阵／冗余／欠定系统。

本文关注这样一种特定情形：决策者需要为单个动力系统 $\mathfrak{S}$ 同时完成多个相互关联的任务 $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_k$。由于控制资源不足，完成其中两个任务可能是不可能的，因此这给控制器设计带来了困难。一种解决办法是引入任务优先级的概念，并根据优先级分配可用资源。下文中，如果优先完成任务 $\mathfrak{T}_i$，并在仍有可能的情况下再完成任务 $\mathfrak{T}_j$，则称任务 $\mathfrak{T}_i$ 的优先级高于另一个任务 $\mathfrak{T}_j$。无优先级任务或没有优先级的任务（$\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_k$）是指多个任务之间不存在优先级关系

的任务。另一方面，优先级任务或具有优先级的任务 $[\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_k]$ 是指多个任务之间存在优先级关系的任务，并按升序排列，其中 $\mathfrak{T}_1$ 的优先级最高， $\mathfrak{T}_k$ 的优先级最低。

从概念上讲，我们主要关注的问题可以表述如下（任务被具体化为输出跟踪问题后，其详细版本将在第 4 节介绍）：

优先级控制问题：给定动力系统 $\mathfrak{S}$ 和具有优先级的任务 $[\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_k]$，优先级控制问题是寻找控制策略 $\mathfrak{C}$ ，该策略由分别针对 $\mathfrak{T}_1$、.....、 $\mathfrak{T}_k$ 的部分控制策略 $\mathfrak{C}_1$、.....、 $\mathfrak{C}_k$ 组成，并满足以下条件：

1.（依赖性）：针对 $\mathfrak{T}_i$ 的控制策略 $\mathfrak{C}_i$ 不会影响是否能够完成优先级更高的任务 $\mathfrak{T}_1$、.....、 $\mathfrak{T}_{i-1}$；

2.（表征性）：在满足依赖性性质的前提下， $\mathfrak{C}_i$ 使用可用的最大控制资源，但不超过 $\mathfrak{T}_i$ 实际所需的资源。

特别是，表征性质指出，为了完成任务 $\mathfrak{T}_i$ 并处理优先级较低的任务，不应对 $\mathfrak{T}_i$ 无所作为或做不必要的事情。另一方面，能够解决优先级控制问题的控制策略称为优先级控制，记为 $\mathfrak{C} = [\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_k]$。作为构建优先级控制 $\mathfrak{C}$ 的第一步，我们研究冗余系统的 Byrnes-Isidori标准形。

2.1 方形或冗余系统的标准形

我们考虑一个多变量非线性输入仿射系统

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \tag{1a}$$
$$y = h(x) \tag{1b}$$

其中 f： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$， G： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$，且 h： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 在 $\mathbb{R}^n$ 和 $p \le m \le n$ 上足够光滑（因此该系统是方形或冗余系统）。不失一般性， $f(0) = 0$ 且 $h(0) = 0$。对于 (1)，通常假设向量相对阶具有良定义性。

定义 2.1. *[8, §5.1]* 如果满足以下条件，则称系统 (1) 在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 处具有（向量）相对阶 $(r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{N}^p$：

1. $L_G L_f^j h_i(x) = 0$ 对所有 $1 \le i \le p$、所有 $0 \le j \le r_i - 2$ 以及 x_0 的某个邻域内的所有 x 均成立；

2. $p \times m$ 矩阵
$$J(x) = \operatorname{col}(L_G L_f^{r_1-1} h_1(x), \ldots, L_G L_f^{r_p-1} h_p(x)) \tag{2}$$
在 $x = x_0$ 处是非奇异的。 □

我们将 $r_1 + \cdots + r_p$ 称为总相对阶。

引理 2.2. *[8,* 引理 5.1.1、命题 5.1.2、注记 5.1.*3]* 假设系统 (1) 在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 处具有相对阶 $(r_1, \ldots, r_p)$。记 $\phi_i^j = L_f^{j-1} h_i$ 和 $d\phi_i^j = \partial \phi_i^j / \partial x$，并定义分布 $\Delta = \operatorname{span}\{g_1, \ldots, g_m\}$，其中 g_i 是 G 的第 i 列。于是，我们有

1. $r = r_1 + \cdots + r_p \le n$;

2. 存在一个微分同胚

$$\Phi(x) = \operatorname{col}(\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$$

在满足条件的 x_0 邻域上

$$(\phi_{n-r+1}, \ldots, \phi_n) = (\phi_1^1, \ldots, \phi_1^{r_1}, \ldots, \phi_p^1, \ldots, \phi_p^{r_p});$$

3. 若 $f(x_0) = 0$ 且 $h(x_0) = 0$，则可通过以下方式选取 Φ：使得 $\Phi(x_0) = 0$;

4. 若 $p = m$、$r < n$ 和 Δ 在 x_0附近是对合的，则可通过以下方式选取 Φ：对所有 $1 \le i \le n - r$ 以及 x_0附近的所有 x，均有 $L_G\phi_i(x) = 0$。□

证明。见附录 A □

假设动力系统 (1) 在 0 处具有相对阶 $(r_1, \ldots, r_p)$，并定义

$$\kappa(x) = \operatorname{col}(L_f^{r_1}h_1(x), \ldots, L_f^{r_p}h_p(x)). \tag{3}$$

令 $\Phi(x)$ 为引理 2.2 给出的微分同胚，令 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ 为相对阶和微分同胚有定义的 0 的一个邻域。我们将系统的新坐标定义为

$$z = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1:n-r}(x) \\ \phi_{n-r+1:n}(x) \end{bmatrix} = \Phi(x).$$

系统 (1) 被变换为（Byrnes-Isidori）正规形，如下所示（为简洁起见，我们将使用记号 $a[\eta, \xi] = a[z] = a(\Phi^{-1}(z))$ 表示定义在 $\mathcal{D}$ 上的函数 a）：

$$\dot{\eta} = f_\eta[\eta, \xi] + G_\eta[\eta, \xi]u \tag{4a}$$
$$\dot{\xi} = A\xi + B\left(\kappa[\eta, \xi] + J[\eta, \xi]u\right) \tag{4b}$$
$$y = C\xi \tag{4c}$$

其中，(A, B, C) 是积分器链的典型形式，[1] $f_\eta = L_f\phi_{1:n-r}$ 和 $G_\eta = L_G\phi_{1:n-r}$。我们假设 $\Phi(0) = 0$; 因此，$f_\eta(0) = f_\eta[0] = 0$，且 $\kappa(0) = \kappa[0] = 0$。

[1]典型形式的表征性如下:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i} \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_i \times 1} \qquad C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times r_i}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times p} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times r}.$$

2.2 系统冗余与内部动力学控制

在本小节中，我们讨论系统的冗余性如何提供额外的控制输入资源，以用于其他目的。为此，我们暂时假设系统（1）是冗余的（即，$p < m$），并将任务设定为使输出 $y(t)$ 稳定。假设稳定任务已完全实现；也就是说，$y(t) \equiv 0$。那么根据定义，只要 $x_\eta(t) := \Phi^{-1}(\eta(t), 0)$ 属于 $\mathcal{D}$，$\xi(t) \equiv 0$。于是，（输出归零）输入 $u_\eta(t)$ 需要满足

$$J(x_\eta(t))u_\eta(t) = -\kappa(x_\eta(t)). \tag{5}$$

如果 $J(x_\eta(t))$ 是非奇异的，则式 (5) 的解为

$$u_\eta(t) = -J^+(x_\eta(t))\kappa(x_\eta(t)) + N(x_\eta(t))u_f \tag{6}$$

其中 $u_f \in \mathbb{R}^m$ 是一个自由变量，并且

$$N(x) = I_m - J^+(x)J(x) \tag{7}$$

是关于 $J(x)$ 的零空间投影矩阵。将 (6) 应用于式 (4) 的内部动力学，即 $u = u_\eta$，得到

$$\dot{\eta}(t) = f_\eta^\circ[\eta(t), 0] + (G_\eta N)[\eta(t), 0]u_f \tag{8}$$

（这实际上是式 (1) 的零动态），对于 $x_\eta(t) \in \mathcal{D}$，其中 $f_\eta^\circ = f_\eta - G_\eta J^+\kappa$。应注意，式 (6) 中出现的 u_f 是一个自由变量，在实现 (5) 时不起任何作用。这是冗余系统的一个独特特征，为通过利用 u_f 作为额外的控制资源来实现额外任务（可能定义在 η 上）提供了机会。

此时，考虑到引理 2.2，人们可能会想知道，对于冗余系统，是否 $r = n$，或者是否存在满足 $L_G\phi_i(x) = 0$ 的特定微分同胚；在这两种情况下，u_f 都会从所得的正规形中消失；换言之，$G_\eta^\circ(x) = 0$。事实上，在温和的假设下，我们可以轻易排除这种可能性。通过在原坐标上推导零动态即可看出这一点。令 $y(t) = 0$ 对所有满足 $x(t) \in \mathcal{D}$ 的 t 成立。则系统必定在流形上演化

$$\mathcal{Z} = \{x \in \mathcal{D} : L_f^j h_i(x) = 0,\ 1 \le i \le p,\ 0 \le j \le r_i - 1\}, \tag{9}$$

它是光滑的，维数为 $n - r$。注意，$f(0) = 0$ 和 $h(0) = 0$ 意味着 $0 \in \mathcal{Z}$。使 x 位于 $\mathcal{Z}$ 上的状态反馈 $u = k(x)$ 必须具有以下形式

$$k(x) = -J^+(x)\kappa(x) + N(x)u_f \tag{10}$$

其中自由变量为 $u_f \in \mathbb{R}^m$，通过该变量，系统 (1) 在原坐标中变为

$$\dot{x} = f^\circ(x) + (GN)(x)u_f \tag{11}$$

其中 $f^\circ = f - GJ^+\kappa$。容易验证，对于所有 $x \in \mathcal{Z}$ 和 $u_f \in \mathbb{R}^m$，$f^\circ(x) + (GN)(x)u_f$ 都与 $\mathcal{Z}$ 相切。[2] 因此，方程 (11) 中从 $\mathcal{Z}$ 出发的每个解 $x(t)$ 在离开 $\mathcal{D}$ 之前始终位于 $\mathcal{Z}$ 上。

[2]由于对于所有 $1 \le i \le p$、所有 $0 \le j \le r_i - 1$以及所有 $x \in \mathcal{Z}$，均有 $L_f^j h_i(x) = 0$，因此我们有

$$\begin{aligned} dL_f^j h_i(x)(f^\circ(x) + (GN)(x)u_f) &= dL_f^j h_i(x)\left[f(x) - G(x)J^+(x)\kappa(x) + G(x)N(x)u_f\right] \\ &= L_f^{j+1}h_i(x) + L_G L_f^j h_i(x)\left[-J^+(x)\kappa(x) + N(x)u_f\right] = 0 \end{aligned}$$

引理 2.3。设 $\Phi(x)$ 是引理 2.2 中的微分同胚。那么，对于 $x \in \mathcal{D}$，有 $d\phi_{n-r+1:n}(x)(GN)(x) = 0$，并且

$$L_G\phi_{1:n-r}(x) = 0 \implies (GN)(x) = 0 \iff (G_\eta N)(x) = 0.$$

假设 $G(x)$ 在 $\mathcal{D}$ 上非奇异。那么，

$$r = n \implies p = m \iff (GN)(x) = 0$$

对于每个 $x \in \mathcal{D}$。 □

证明。参见附录 B。 □

引理 2.3 表明，只要 $G(x)$ 在 $\mathcal{D}$ 上是非奇异的，且系统是冗余的，我们就有 $r < n$，$(GN)(x) \neq 0$，以及 $(G_\eta N)(x) \neq 0$；换句话说，额外控制输入 u_f 不会消失，并且能够影响系统的内部部分。

在本小节的其余部分中，我们阐明 u_f 在求解 (8) 或 (11) 时的含义。当我们求解 (8) 时，对于每个 t，都应指定 u_f 的值；也就是说，u_f 实际上是 t 的一个函数，即 $u_f(t)$。由于 u_f 仍未确定，因此 $u_f(t)$ 的候选函数并不唯一，而是有无穷多个。考虑到 (8) 的可解性，我们将 $u_f(t)$ 限定为一个（勒贝格）可测函数，并满足对于某个紧集 $\mathcal{U}_f \subset \mathbb{R}^m$，有 $u_f(t) \in \mathcal{U}_f$ 几乎处处成立。然后，对于每个充分接近零的 η°，都存在一个满足 $\eta(0) = \eta^\circ$ [26, §1].[3] 的 (Carathéodory) 解 $\eta(t)$。

借助微分包含，可以将解的存在性推广到一组自由变量。事实上，在对 $u_f(t)$ 和 η° 作出相同假设的条件下，绝对连续函数$\eta(t)$ 是方程 (8) 的一个解，当且仅当 $\eta(t)$ 是该微分包含的一个解。

$$\dot\eta(t) \in \mathcal{F}_\eta^\circ[\eta(t), 0] = \bigcup_{u_f \in \mathcal{U}_f} \{f_\eta^\circ[\eta(t), 0] + (G_\eta N)[\eta(t), 0]u_f\} \tag{12}$$

对于所有 $1 \le i \le p$、$0 \le j \le r_i - 2$ 和所有 $x \in \mathcal{Z}$。此外，

$$\begin{bmatrix} dL_f^{r_1-1}h_1(x) \\ \vdots \\ dL_f^{r_p-1}h_p(x) \end{bmatrix} (f^\circ(x) + (GN)(x)u_f) = \begin{bmatrix} dL_f^{r_1-1}h_1(x) \\ \vdots \\ dL_f^{r_p-1}h_p(x) \end{bmatrix} [f(x) - G(x)J^+(x)\kappa(x) + G(x)N(x)u_f]$$

$$= \begin{bmatrix} L_f^{r_1}h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_p}h_p(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_GL_f^{r_1-1}h_1(x) \\ \vdots \\ L_GL_f^{r_p-1}h_p(x) \end{bmatrix} [-J^+(x)\kappa(x) + N(x)u_f] = \kappa(x) + J(x)[-J^+(x)\kappa(x) + N(x)u_f]$$

$$= \kappa(x) - J(x)J^+(x)\kappa(x) + J(x)N(x)u_f = 0$$

对所有 $x \in \mathcal{Z}$ 均成立。因此，

$$dL_f^j h_i(x)(f^\circ(x) + (GN)(x)u_f) = 0$$

对于所有 $1 \le i \le p$、所有 $0 \le j \le r_i - 1$、所有 $x \in \mathcal{Z}$。令 $x_1, x_2 \in \mathcal{Z}$。那么，

$$0 = L_f^j h_i(x_1) = L_f^j h_i(x_2) + dL_f^j h_i(x_2)(x_1 - x_2) + r(x_1 - x_2) = dL_f^j h_i(x_2)(x_1 - x_2) + r(x_1 - x_2)$$

and

$$\lim_{x_1 \to x_2} dL_f^j h_i(x_2) \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|} = -\lim_{x_1 \to x_2} \frac{r(x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|} = 0.$$

因此，对于所有 $x \in \mathcal{Z}$，$dL_f^j h_i(x)$ 都垂直于 $\mathcal{Z}$。由此可得，对于所有 $x \in \mathcal{Z}$ 和 $u_f \in \mathbb{R}^m$，$f^\circ(x) + (GN)(x)u_f$ 都切向于 $\mathcal{Z}$。

[3]微分方程 $\dot x = f(t, x)$ 的 Carath´eodory 解是定义在开区间或闭区间 l 上的函数 $x(t)$，满足 $x(t)$ 在每个闭区间 $[\alpha, \beta] \subset l$ 上绝对连续，且几乎处处满足 $\dot x(t) = f(t, x(t))$。

至少局部 [27, 定理 2.3，第 4 节。2]受目前讨论的启发，我们称 (12) 为冗余系统 (1) 的零动态（写成微分包含形式）。请注意，对于方形系统的情形，(12) 正是按传统方式定义的零动态（但采用微分包含形式），因为对于 $x \in \mathcal{D}$ 我们有

$$p = m \implies N(x) = 0 \implies \mathcal{F}_\eta^\circ(x) = \{f_\eta^\circ(x)\}.$$

按照相同的推理过程，我们也可以在原坐标中得到式 (12) 的对应形式

$$\dot{x} \in \mathcal{F}^\circ(x) = \bigcup_{u_f \in \mathcal{U}_f} \{f^\circ(x) + (GN)(x)u_f\} \quad (x \in \mathcal{Z}). \tag{13}$$

显然，式 (13) 对方阵系统成立，因为如果 $p = m$，那么对于所有 $x \in \mathcal{D}$，$\mathcal{F}^\circ(x) = \{f^\circ(x)\}$。我们在本小节最后指出，将内部动力学表示为上述微分包含，在接下来的章节中考虑具有优先级的多个任务时会很有用。

2.3 优先级正规形

我们考虑一个由任务集 $\mathfrak{T}_i$ 定义的动力系统 $\mathfrak{S}$，其形式为

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \tag{14a}$$
$$y_i = h_i(x) \quad (1 \le i \le k) \tag{14b}$$

其中 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$，且 $h_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{p_i}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 和 $p_i \le m \le n$ 上足够光滑。不失一般性，$f(0) = 0$，且 $h_i(0) = 0$。令 $p_{i:j} = p_i + \cdots + p_j$，并令 $\mathfrak{S}_{i:j}$ 为系统

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u$$
$$y_a = h_a(x) \quad (i \le a \le j).$$

假设任务变量 y_1、…、y_k 分别选取为表示相关任务 $\mathfrak{T}_1$、…、$\mathfrak{T}_k$。

本节中，我们提出一种类似正规形的表征方式，在其中考虑任务的优先级；本文将其称为式 (14) 的优先化正规形。求得式 (14) 的一种正规形的方法，是将所有任务合并为单个任务 $\mathfrak{T} = (\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_k)$，即无优先级任务，并配以任务变量 $y := y_{1:k}$。随后，在假设 $p = p_{1:k} \le m$ 且系统 (1) 在 $x = 0$ 处具有相对阶的条件下，可以求得式 (1) 的正规形 (4)。然而，我们并非总能假设这些条件；即便可以满足，定义系统 (1) 的向量相对阶和微分同胚的原点邻域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ 也可能非常有限。考虑到这一点，本文研究一类非线性系统 (14)，它们满足比上述条件更弱的条件，具体见下述定义。

定义 2.4。系统 (14) 在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 处称为可优先化，如果 $G(x_0)$ 满秩，并且每个子系统 $\mathfrak{S}_i$ 在 x_0 处具有向量相对阶 $(r_{i1}, \ldots, r_{ip_i}) \in \mathbb{N}^{p_i}$。□

从现在起，我们假设任务被优先化为 $[\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_k]$，且系统 (14) 在 0 处可优先化。那么，存在 0 的一个邻域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$，使得以下结论成立：

1. $G(x)$ 在 $\mathcal{D}$ 上是非奇异的；

2. 对于每个 i，都存在 0 的一个邻域 $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}$，使得其总相对阶为 r_i，并且存在一个坐标变换

$$z_i = \begin{bmatrix}\eta_i \\ \xi_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi_{i,1:n-r_i} \\ \phi_{i,n-r_i+1:n}\end{bmatrix} = \Phi_i(x)$$

定义在 $\mathcal{D}_i$ 上的子系统 $\mathfrak{S}_i$ 在 $\mathcal{D}_i$ 上具有如下正规形：

$$\dot{\eta}_i = f_i[\eta_i, \xi_i] + G_i[\eta_i, \xi_i]u \tag{15a}$$
$$\dot{\xi}_i = A_i\xi_i + B_i\left(\kappa_i[\eta_i, \xi_i] + J_i[\eta_i, \xi_i]u\right) \tag{15b}$$
$$y_i = C_i\xi_i \tag{15c}$$

（下文中，对于定义在 $\mathcal{D}_i$ 上的任意函数 $a(x)$，我们用符号 $a[\eta_i, \xi_i]$ 代替 $a(\Phi_i^{-1}(\eta_i, \xi_i))$）其中 $f_i(x) = L_f\phi_{i,1:n-r_i}(x)$ 且 $G_i(x) = L_G\phi_{i,1:n-r_i}(x)$；

3. 对所有 $1 \le i \le k$、$1 \le j \le p_i$、$0 \le \alpha \le r_{ij} - 2$ 和 $x \in \mathcal{D}$，$L_G L_f^\alpha h_{ij}(x) = 0$，其中 h_{ij} 是 h_i 的第 j 个分量。

注意到，子系统 (15b) 和 (15c)，亦称为 $\mathfrak{S}_i$ 的部分规范形，等价于

$$\operatorname{col}\left(\frac{d^{r_{i1}}y_{i1}}{dt^{r_{i1}}}, \ldots, \frac{d^{r_{ip_i}}y_{ip_i}}{dt^{r_{ip_i}}}\right) = \kappa_i(x) + J_i(x)u$$

其中 y_{ij} 是 y_i 的第 j 个分量；当定义 2.1 的第一项成立时，该结论不仅在 $\mathcal{D}_i$ 上成立，也在 $\mathcal{D}$ 上成立。因此，可以在某种意义上将 (15b) 和 (15c) 的定义域扩展至 $\mathcal{D}$，即将 (15b) 和 (15c) 替换为

$$\dot{\xi}_i = A_i\xi_i + B_i\left(\kappa_i(x) + J_i(x)u\right), \quad y_i = C_i\xi_i. \tag{16}$$

从几何角度来看，(16) 表明 $\mathcal{R}(J_i^T(x))$ 表示用于在 x 实现 $\mathfrak{T}_i$ 的可用控制输入u集合；也就是说，所有 $u \in \mathcal{N}(J_i(x)) = \mathcal{R}(J_i^T(x))^\perp$ 在 x 处都不会影响 (16)。因此，在对 $\mathfrak{T}_i$ 不作限制的情况下，如果 $J_i(x)$ 满秩，使得 $\dim(\mathcal{R}(J_i^T(x))) = p_i$，则实现 $\mathfrak{T}_i$ 的能力达到最大；同样，$\dim(\mathcal{R}(J^T(x))) = p$ 可确保实现所有可能的任务。对于可优先化的系统，通常无法实现 $\dim(\mathcal{R}(J^T(x))) = p$。具体而言，(16) 中的 $J_i(x)$ 在 $\mathcal{D}_i$ 上非奇异，但允许 $J(x)$ 在 $\mathcal{D}$ 中的任意点（可能包括原点）处奇异，尤其是在两个或多个任务发生冲突的点处。例如，假设在某个 $x \in \mathcal{D}$ 处，$\mathfrak{T}_i$ 与高优先级任务 $\mathfrak{T}_1$、.....、$\mathfrak{T}_{i-1}$ 不相容；换言之，

$$\operatorname{rank}(J_{1:i}(x)) < \operatorname{rank}(J_{1:i-1}(x)) + \operatorname{rank}(J_i(x)).$$

因此，$J_i(x)$ 的某些行与 $J_{1:i-1}(x)$ 的行线性相关，这意味着

$$\mathcal{V} = \mathcal{R}(J_{1:i-1}^T(x)) \cap \mathcal{R}(J_i^T(x)) \neq \{0\}.$$

子空间 $\mathcal{V}$ 是实现所有 $\mathfrak{T}_1$、.....、$\mathfrak{T}_{i-1}$ 和 $\mathfrak{T}_i$ 所必需的共享控制输入的集合。因此，$y_{1:i-1}$ 和 y_i 无法在 x 处同时且任意地受到控制，导致无法实现所有 $\mathfrak{T}_1$、.....、$\mathfrak{T}_i$。

为了解决 $[\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_i]$ 控制资源不足的问题，我们建议关注高优先级任务 $\mathfrak{T}_1, \cdots, \mathfrak{T}_{i-1}$，而较低优先级的任务 $\mathfrak{T}_i$ 至少在x这一时刻暂不考虑。在我们的案例中，这一策略可通过对 $\mathcal{D}$ 上的 $\mathcal{R}(J^T(x))$ 进行因式分解来实现，并考虑其优先级

。为此，我们引入零空间算子 $N_{1:i}(x)$ 和正交投影算子 $P_i(x)$，它们由以下递归关系构造：

$$N_{1:i} = I_m - J_{1:i}^{+} J_{1:i} \ \ (1 \le i \le k), \quad N_{1:0} = I_m \tag{17}$$

and

$$P_i = (J_i N_{1:i-1})^{+} (J_i N_{1:i-1}), \ \ (1 \le i \le k) \tag{18a}$$

$$P_{k+1} = I_m - P_{1:k}, \tag{18b}$$

其中，对于 $1 \le i \le j \le k+1$，有 $P_{i:j} := P_i + \cdots + P_j$。我们还将 $P_i(x)$ 的秩记为 $\rho_i(x) = \text{rank}(P_i(x)) \ge 0$（它取决于 x，因此可能在某些 x 处变为 0），以及 $\rho_{i:j} = \rho_i + \cdots + \rho_j$ 和 $\rho = \rho_{1:k}$。关于 P_i、$N_{1:i}$ 和 ρ_i 的一些有用性质总结如下。

引理 2.5。对于所有 $x \in \mathcal{D}$，以下陈述成立：

1. $P_i(x)P_j(x) = 0$ 如果 $i \ne j$;
2. $N_{1:i}(x) = I_m - P_{1:i}(x)$;
3. $J_i(x) = J_i(x)P_{1:i}(x)$;
4. $J_i(x)P_i(x) = J_i(x)N_{1:i-1}(x)$;
5. $\rho_i(x)$ 的秩为 $= \text{rank}(J_i(x)P_i(x)) \le p_i$;
6. $\rho_{1:i}(x)$ 的秩为 $= \text{rank}(P_{1:i}(x)) = \text{rank}(J_{1:i}(x)) \le p_{1:i}$;
7. 存在一个下三角矩阵 $L_e(x) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ 和一个正交矩阵 $Q_e(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$，使得

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_k \end{bmatrix}}_{J(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{k1} & \cdots & L_{kk} & 0 \end{bmatrix}}_{L_e(x) = [L_{ij}(x)]} \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_{k+1} \end{bmatrix}}_{Q_e(x)}, \tag{19}$$

$L_e^T(x)$ 为首项为正的行阶梯形，并且

$$\begin{aligned} J_i P_j &= L_{ij} Q_j \\ P_j &= Q_j^T Q_j \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 \le i \le k \\ 1 \le j \le k+1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

其中 $L_{ij}(x) \in \mathbb{R}^{p_i \times \rho_{j(x)}}$ 是 $L_e(x)$ 的第 (i,j) 个块，$Q_i(x) \in \mathbb{R}^{\rho_{i(x)} \times m}$ 是$Q_e(x)$ 的第 i 个行块，并且

$$\begin{aligned} L_{ij}(x) Q_j(x) &:= 0 \in \mathbb{R}^{p_i \times m} \\ Q_j^T(x) Q_j(x) &:= 0 \in \mathbb{R}^{m \times m} \end{aligned} \quad (\rho_j(x) = 0). \tag{21}$$

□

证明。见附录 C。 □

注 2.6. 注意，若 $\rho_j(x) = 0$，则 $L_{ij}(x)$、$1 \le i \le k$ 和 $Q_j(x)$ 在分解 (19) 中消失。不过，为保持符号的一致性，对于 $\rho_j(x) = 0$ 的情形，我们定义 (21)，这样 (19) 和 (20) 中的结构性质对所有 $\rho_j(x) \ge 0$ 均成立。□

令 $L = L_{1:k,\ 1:k}$ 和 $Q = Q_{1:k}$，得到约化分解 $J = LQ$，以及 $P := J^+J = Q^TQ = P_{1:k}$ 和 $N := I - J^+J = N_{1:k} = P_{k+1}$。为后续使用，我们还定义 $\Omega_{i:j} = \rho_{i\,j}^{-1}(p_{i:j})$。于是，每个 $\Omega_{1:i}$ 都是开集，并且由引理 2.5 的第 6) 项可知，$\Omega_{1:k} \subset \Omega_{1:k-1} \subset \cdots \subset \Omega_1 \subset \mathcal{D}$。

正交投影算子 $P_i(x)$ 将输入空间 $\mathbb{R}^m$ 分解为相互正交的子空间 $\mathcal{R}(P_i(x))$，即

$$\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(P_1(x)) + \mathcal{R}(P_2(x)) + \cdots + \mathcal{R}(P_{k+1}(x)).$$

我们现在断言，每个集合 $\mathcal{R}(P_i(x))$ 都满足

$$\mathcal{R}(J_{1:i}^T(x)) = \mathcal{R}(J_{1:i-1}^T(x)) + \mathcal{R}(P_i(x)), \tag{22a}$$

$$\mathcal{R}(J_{1:i-1}^T(x)) \perp \mathcal{R}(P_i(x)). \tag{22b}$$

事实上，由引理 2.5 可知，对于 $1 \le j \le i$,

$$\mathcal{R}(J_{1:j}^T(x)) = \mathcal{R}(Q_{1:j}^T(x)L_{1:j,1:j}^T(x)) = \mathcal{R}(P_{1:j}(x))$$

其中，最后一个等式由该引理的第 3 项以及 L_{ii} 满秩这一事实推导得出。由上述等式及 $j = i-1$ 和 $j = i$，可得 (22a)。另一方面，(22b) 由上述结果以及引理 2.5 的第 1 项推导得出。(22) 中的结论表明，每个集合 $\mathcal{R}(P_i(x))$ 都是可用于 $\mathfrak{T}_i$ 且不会影响对 $\mathfrak{T}_1$、.....、$\mathfrak{T}_{i-1}$ 的控制输入的最大可用集合。牢记这一点，我们将 $\mathbb{R}^m$ 中的输入 u 表示为一组两两正交向量之和。

$$u = u_1 + \cdots + u_{k+1}, \quad u_i = P_i(x)u \in \mathcal{R}(P_i(x)). \tag{23}$$

我们现在给出系统 (14) 的优先化正规形表征性，该系统由定义域扩展子系统 (16)、内部动力学 (15a) 以及输入的正交分解 (23) 组成。

定义 2.7. 对于在 0 处可优先化的给定系统 (14)，其优先化正规形定义为 (14)

$$\dot{\eta}_i = f_i(x) + G_i(x)u \tag{24a}$$

$$\dot{\xi}_i = A_i\xi_i + B_i\left(\kappa_i(x) + \sum_{j=1}^{i} L_{ij}(x)Q_j(x)u_j\right) \tag{24b}$$

$$y_i = C_i\xi_i \tag{24c}$$

其中 $1 \le i \le k$，u_i 定义于 (23)，(24a) 在 $\mathcal{D}_i$ 上成立，其中 $x = \Phi_i^{-1}(\eta_i, \xi_i)$，且 (24b)–(24c) 在 $\mathcal{D}$ 上成立。□

从现在起，我们将特别关注一类可优先排序系统，并将优先化正规形 (24) 视为待控制的系统。以下定理指出，对于具有良好定义的向量相对阶的通常情形，优先化正规形 (24) 结果就是传统正规形 (4)。

定理 2.8. 假设 $p \le m$，具有 $(\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_k)$ 的系统 (1) 在 0 处具有向量相对阶，且 $G(0)$ 非奇异。则相应的、具有 $[\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_k]$ 的系统 (14) 在 0 处可优先化。此外，对于给定的 (14) 的优先化正规形 (24)，存在 (1) 的正规形 (4)，它是 (24) 在 0 的某个邻域上的降阶模型。□

证明. 由于 $J(0)$ 的非奇异性蕴含 $J_i(0)$ 的非奇异性，因此每个系统 $\mathfrak{S}_i$ 在 0 处都有相对阶，而 $[\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_k]$ 的系统 (14) 在 0 处可优先化。因此，根据定义 2.7，存在 (14) 的优先化正规形 (24)。显然，该优先化正规形在 $\mathcal{D}_1$ 上约化为 $\mathfrak{S}_1$ 的正规形 (15)。根据引理 2.2，存在一个邻域 $\mathcal{D}_{1:2} \subset \mathcal{D}_1 \cap \Omega_{1:2}$，使得

$$\{d\phi_{2,n-r_2+1}, \ldots, d\phi_{2n}\} \subset \operatorname{span}\{d\phi_{11}(x), \ldots, d\phi_{1,n-r_1}(x)\}$$

对于所有 $x \in \mathcal{D}_{1:2}$。不失一般性，可以对 $\phi_{1:2}(x)$ 重新排序，使得 $\phi_{2,\ n-r_2+i}(x) = \phi_{1,\ n-r_1-r_2+i}(x)$ 对 $1 \le i \le r_2$ 在 $\mathcal{D}_{1:2}$ 上成立。因此，我们有 $\eta_1 = \operatorname{col}(\eta_{1:2}, \xi_2)$ 在 $\mathcal{D}_{1:2}$ 上，其中 $\eta_{1:2} = \phi_{1,\ 1:n-r_1-r_2}(x)$。由此可得，优先化正规形可以化简为正规形

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_{1:2} &= f_{1:2}[\eta_{1:2}, \xi_{1:2}] + G_{1:2}[\eta_{1:2}, \xi_{1:2}]u \\
\dot{\xi}_{1:2} &= A_{1:2}\xi_{1:2} + B_{1:2}\left(\kappa_{1:2}[\eta_{1:2}, \xi_{1:2}] + J_{1:2}[\eta_{1:2}, \xi_{1:2}]u\right) \\
y_{1:2} &= C_{1:2}\xi_{1:2}
\end{aligned}$$

$\mathfrak{S}_{1:2}$ 在 $\mathcal{D}_{1:2}$ 上且 $\xi_{1:2} = \operatorname{col}(\xi_1, \xi_2)$ 的正规形。按照相同的步骤，我们可以看到，对于每个 $\mathfrak{S}_{1:i}$，都存在一个邻域 $\mathcal{D}_{1:i} \subset \mathcal{D}_{1:i-1} \cap \Omega_{1:i}$，它包含 0，使得优先化正规形可以化简为 $\mathfrak{S}_{1:i}$ 的一个正规形。显然，$\mathfrak{S}_{1:k}$ 是系统 (1)。 □

注 2.9. 从定理 2.8 可以清楚地看出，优先化正规形 (24) 是传统正规形 (4) 的扩展。前者即使在状态空间中的奇异点处也适用；在这些点上，带有无优先级任务 $(\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_k)$ 的 (1) 不具有相对阶。此外，优先化正规形也适用于 $p > m$ 这种情况：也就是说，带有 $(\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_k)$ 的系统可以是欠定的。这种情况的一种可能用途，例如 $p_{1:k-1} = m$，是让最后一个任务 $\mathfrak{T}_k$采用一种控制策略，仅当系统处于奇异状态时才激活。□

我们以总结内部动力学 (24a) 的几个重要要点来结束本节。如果无需考虑优先化正规形的内部行为，那么只需处理称为部分优先化正规形的 (24b) 和 (24c) 即可。然而，一般而言，处理内部动力学不可避免，有时也很繁琐。由于单个 Φ_i 并未定义在整个定义域 $\mathcal{D}$ 上，因此在每个子集 $\mathcal{D}_i$ 上都有多个内部动力学方程 (24a)，而且在 $\mathcal{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{D}_i$ 中甚至不存在这样的方程。

处理这一问题的一种方法是选择适当的整数 i，使得 $z_{1:i_0} = (\eta_{1:i_0}, \xi_{1:i_0}) = \Phi_{1:i_0}(x)$ 在 0 的邻域 $\mathcal{D}_{1:i_0} \subset \Omega_{1:i_0}$ 上定义良好，在该邻域上，优先化正规形 (24) 化简为

$$\dot{\eta}_{1:i_0} = f_{1:i_0}[z_{1:i_0}] + G_{1:i_0}[z_{1:i_0}]u \tag{25a}$$

$$\dot{\xi}_i = A_i\xi_i + B_i\kappa_i[z_{1:i_0}] + B_i\sum_{j=1}^{i}(L_{ij}Q_j)[z_{1:i_0}]u_j \tag{25b}$$

$$y_i = C_i\xi_i \tag{25c}$$

其中 $1 \le i \le k$，且 (25a)–(25c) 在 $\Phi_{1:i_0}(\mathcal{D}_{1:i_0})$ 上成立。对于将范围限定在 $\Phi_{1:i_0}(\mathcal{D}_{1:i_0})$ 的紧子集内的情形，分析 (25) 而非 (24) 已足够。应注意，由于存在内部动力学 (25a)，优先化正规形 (25a)–(25c) 仍然是超定的（当 $i_0 < k$ 时），在某种意义上，ξ_{i_0+1}，……，ξ_k 由 $(\eta_{1:i_0}, \xi_{1:i_0})$ 支配。[4] 我们注意到

[4]通过求导，我们可以清楚地看到这一点。

$$\xi_i = \Xi_i(\eta_{1:i_1}, \xi_{1:i_1}) := \phi_{i,n-r_i+1:n}[\eta_{1:i_1}, \xi_{1:i_1}]$$

提前说明的是，尽管这会增加所提框架的复杂性，但正如第 4 节所讨论的，在处理优先级输出跟踪问题时，这种超定性为数学分析提供了有用的工具。

3 优先级输入-输出线性化

本节针对系统 (14) 提出优先级输入-输出线性化，并给定优先级任务 $[\mathfrak{T}_1, \cdots, \mathfrak{T}_k]$。在定理 2.8 的典型假设下，传统的输入-输出线性化问题可以表述为：寻找控制输入 u，使正规形 (4) 中的 ξ-子系统实现线性化。

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv, \quad y = C\xi$$

其中，$v \in \mathbb{R}^p$ 是一个待确定的控制命令，需在指定 $\mathfrak{T}_i$ 之后再行确定。该问题等价于在 u 上求解一组线性逆问题（其中 x 和 v 固定）。

$$e_i(x, v_i, u) \coloneqq v_i - \kappa_i(x) - J_i(x)u = 0, \quad (1 \le i \le k) \tag{26}$$

其中，e_i 被称为线性化的第 i个残差。如果输入增益矩阵 $J(x)$为满秩，则 $e = 0$ 可解为

$$u = J^+(x)(v - \kappa(x)) + N(x)u_f \tag{27}$$

（采用（7）中的零空间投影算子 $N(x)$），该算子作为一种线性化状态反馈控制输入，可使正规形（4）实现（部分）线性化，如下所示。

$$\dot{\eta} = f_\eta[\eta, \xi] + (G_\eta J^+)[\eta, \xi](v - \kappa[\eta, \xi]) + (G_\eta N)[\eta, \xi]u_f \tag{28a}$$

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv \tag{28b}$$

$$y = C\xi \tag{28c}$$

在 0 的邻域内。作为比较，在本文中，式（28）称为式（1）的传统（部分）线性形式。

在此，我们将输入-输出线性化扩展到一类更广泛的系统，这类系统在原点处可优先化，其中 $J(x)$ 在某些 x 处可能不是满秩的，因此无法像式 (28) 那样实现精确反馈线性化。我们提出的一种替代方法是以最小二乘意义使 $\|e_i\|$ 尽可能小，这种方法在本文中称为典范方法。受典范方法相关结果的启发，我们将在后续工作中给出该结果的一种推广。

3.1 典范方法

在典范方法中，我们力求使系统 (14) 的输入输出关系尽可能保持线性，同时考虑各任务的优先级。注意，线性化所需的线性逆问题 $e_i(x, v_i, u) = 0$ 在 $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_i$ 中可能无解。一种补救方法是计算式 (26) 的最小二乘解 $u_i^\varsigma (i = 1, \cdots, k)$，它是以下优化问题的解

$$\min_{u_i \in \mathcal{R}(P_i(x))} \|e_i(x, v_i, u)\|^2 + \lambda_i^2(x)\|u_i\|^2 \tag{29}$$

用于 $i_1 + 1 \le i \le k$，在 $\mathcal{D}_{1:i_0}$ 上，作为

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial \Xi_i}{\partial \eta_{1:i_1}} \dot{\eta}_{1:i_1} + \frac{\partial \Xi_i}{\partial \xi_{1:i_1}} \dot{\xi}_{1:i_1}.$$

这意味着，对于 $1 \le i \le k$，(25a) 并未与 (25b)–(25c) 留下的内部动力学完全一致，而是将其与部分 $\xi_{i_0+1:\,k}$ 动力学一并包含在内；$\xi_{i_0+1:\,k}$ 动力学的另一部分则包含在 $\xi_{1:i_0}$ 动力学中。

其中，$\lambda_i(x) \in [0,\infty]$ 表示阻尼项，它作为正则化项$\|u_i\|$的权重。由 (24) 中 $J(x)$ 的下三角结构可明显看出，一旦将 (29) 中的 u_1、……、u_{i-1} 设为 u_1^{c}、……、u_{i-1}^{c}，则关于 u_i 的优化问题 (29) 存在唯一解

$$u_i^{\mathsf{c}} = \left(Q_i^T L_{ii}^{+(\lambda_i)}\right)(x)\left(v_i - \kappa_i(x) - \sum_{j=1}^{i-1}(L_{ij}Q_j)(x)u_j^{\mathsf{c}}\right) \tag{30}$$

该表达式对所有 $(x, v_i) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^{p_i}$ 都有明确定义。（此处注意到 $(Q_i^T L_{ii}^{+(\lambda_i)})(x) := 0 \in \mathbb{R}^{m\times p_i}$ 对于满足 $\rho_i(x) = 0$ 的 x。由于我们处理的是（14）的线性化问题，因此该和

$$u^{\mathsf{c}} = u_1^{\mathsf{c}} + \cdots + u_{k+1}^{\mathsf{c}} \in \mathbb{R}^p \tag{31}$$

(30) 中的部分解 u_i^{c} 与 $\mathcal{R}(P_{1:k})^\perp = \mathcal{R}(N)$ 中的额外输入 $u_{k+1}^{\mathsf{c}} := Nu_f = N_{1:k}u_f$ 的线性化器称为 (14) 的典范优先级线性化器。下面的引理表明，(31) 中的典范优先级线性化器 $u^{\mathsf{c}} = u^{\mathsf{c}}(x, v, u_f)$ 既具有递归形式，也具有闭式形式。其中，前者在计算上更高效，而后者在分析中更易于处理。

引理 3.1。对于给定的 $(x, v, u_f) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$，式 (30) 和 (31) 中的典范优先级线性化器 $u^{\mathsf{c}}(x, v, u_f)$ 满足递归关系：

$$u^{\mathsf{c}} = u_{1:k}^{\mathsf{c}} + Nu_f, \tag{32a}$$

$$u_{1:i}^{\mathsf{c}} = u_{1:i-1}^{\mathsf{c}} + Q_i^T L_{ii}^{+(\lambda_i)}\left(v_i - \kappa_i - J_i u_{1:i-1}^{c}\right) \quad (1 \le i \le k), \tag{32b}$$

且 $u_{1:0} = 0$。此外，u^{c} 具有闭式形式

$$u^{\mathsf{c}} = J^{\oplus(\lambda)}(v - \kappa) + Nu_f \tag{33}$$

其中 $L_{\mathrm{D}} = \mathsf{diag}(L_{11}, \ldots, L_{kk})$、$L_{\mathrm{L}} = L - L_{\mathrm{D}}$，且

$$J^{\oplus(\lambda)} := Q^T L_{\mathrm{D}}^{\oplus(\lambda)}\left(I_p + L_{\mathrm{L}} L_{\mathrm{D}}^{\oplus(\lambda)}\right)^{-1}. \tag{34}$$

□

证明。参见附录 D。 □

可以看出，只要 J 满秩且 $\lambda = 0$, $J^{\oplus(\lambda)}$，式 (34) 就变为常规伪逆 J^+。事实上，若 $\rho(x) = \mathsf{rank}(J(x)) = \min\{p, m\}$，则相应矩阵$L_{\mathrm{D}} \in \mathbb{R}^{p\times\rho}$ 为满列秩，且 $I_p + L_{\mathrm{L}}L^{+}{}_{\mathrm{D}}$ 为满行秩，因此 $L^+ = (L_{\mathrm{D}} + L_{\mathrm{L}})^+ = \left((I_p + L_{\mathrm{L}}L^{+}{}_{\mathrm{D}})L_{\mathrm{D}}\right)^+ = L^{+}{}_{\mathrm{D}}(I_p + L_{\mathrm{L}}L^{+}{}_{\mathrm{D}})^{-1}$.[5] 由于 $L^{+}{}_{\mathrm{D}} = L^{\oplus(0)}{}_{\mathrm{D}}$ 成立（无论秩条件是否成立），因此我们有

$$J^+ = (LQ)^+ = Q^T L^+ = Q^T L_{\mathrm{D}}^+\left(I_p + L_{\mathrm{L}}L_{\mathrm{D}}^+\right)^{-1} = J^{\oplus(0)}. \tag{35}$$

在此背景下，式 (34) 中的 $J^{\oplus(\lambda)}$ 称为 J 的优先阻尼伪逆。

借助闭式表征性（33），控制输入 $u = u^{\mathsf{c}}(x, v, u_f)$ 下的残差 $e(x, v, u)$，即 $e^{\mathsf{c}}(x, v)$，可计算为

$$\begin{aligned} e^{\mathsf{c}}(x, v) &= v - \kappa(x) - J(x)(J^{\oplus(\lambda)}(x)(v - \kappa(x)) + N(x)u_f) \\ &= E^{\mathsf{c}}(x)(v - \kappa(x)) \end{aligned}$$

[5]对于矩阵 A 和 B，当 A 具有满列秩且 B 具有满行秩时、当 $A^*A = I$时、当 $BB^* = I$时、当 $B = A^*$时，或当 $B = A^+$ 时，$(AB)^+ = B^+A^+$ 成立，其中 A^* 表示 A [28]的共轭转置。

其中

$$E^{\mathsf{c}}(x) = [E^{\mathsf{c}}_{ij}(x)] \coloneqq I_p - J(x)J^{\oplus(\lambda)}(x) \tag{36}$$

（本文中统称为（规范）残差矩阵）是分块下三角矩阵，并且当 $p \leq m$, $J(x)$ 非奇异时，其消失，且 $\lambda(x) = 0$。由于根据定义 $\xi_i = A_i x_i + B_i v_i - B_i e_i(x, v_i, u)$，我们最终得到式（28）的规范优先化对应形式，即采用 u^{c} 作为用于线性化的控制输入 u 的优先化正规形（24）。

定义 3.2. 对于给定的在 0 处可优先化的系统 (14)，(14) 的规范优先化（部分）半线性形式定义为：对于 $1 \leq i \leq k$,

$$\dot{\eta}_i = f_i(x) + \left(G_i J^{\oplus(\lambda)}\right)(x)\,(v - \kappa(x)) + (G_i N)(x) u_f \tag{37a}$$

$$\dot{\xi}_i = A_i \xi_i + B_i v_i - B_i \sum_{j=1}^{i} E^{\mathsf{c}}_{ij}(x)\,(v_j - \kappa_j(x)) \tag{37b}$$

$$y_i = C_i \xi_i \tag{37c}$$

其中，$J^{\oplus(\lambda)}$ 和 E^{c} 分别由式（34）和式（36）给出，式（37a）在 $\mathcal{D}_i$上成立，而式（37b）–（37c）在$\mathcal{D}$上成立。□

我们强调，式（37）尽可能按照优先级顺序保持 v_i 和 y_i 之间的线性关系，因此我们将式（37）称为优先级半线性形式。显然，规范优先半线性形式（37）也是传统线性形式（28）的一种自然扩展，其中 $\lambda = 0$ （如果可能），如下所述。

定理 3.3. 假设定理 2.8 的条件成立。那么，对于式 (14) 的给定规范优先半线性形式 (37)，存在式 (1) 的传统线性形式 (28)，使其在 0 的某个邻域内是带有 $\lambda = 0$ 的 (37) 的降阶模型。□

证明。根据定理 2.8，式 (1) 的正规形 (4) 是式 (14) 的优先化正规形 (24) 的降阶模型。由于 $J^{\oplus}{}_{(0)}(x) = J^{+}(x)$，且 $J(x)$ 具有满秩，如式 (35) 所示，因此证明完成。

□

为了进一步讨论，根据 u^{c} 的递归形式 (32)，可以将残差 e^{c}_i 表示如下：

$$e^{\mathsf{c}}_i(x, v_{1:i}) = N^{\mathsf{c}}_i(x)\left(v_i - \kappa_i(x) - \sum_{j=1}^{i-1}(L_{ij}Q_j)u^{\mathsf{c}}_j(x, v_{1:i-1})\right) \tag{38}$$

其中 $P_{\mathsf{c}i} \coloneqq L_{ii}L^{+(\lambda_i)}{}_{ii}$ 且 $N^{\mathsf{c}}_i \coloneqq I_{p_i} - P_{\mathsf{c}i}$。由（38），我们得到 ξ_i-动力学的另一种表达式

as[6]

$$\dot{\xi}_i = A_i\xi_i + B_i v_i - B_i e_i^{\mathsf{c}}(x, v_{1:i}). \tag{39}$$

注 3.4。虽然 $\lambda_i = 0$ 在 $\rho_i(x) = p_i$ 时，$N_i^{\mathsf{c}}(x) = 0$ 是最佳选择（此时残差 $e_i^{\mathsf{c}}(x, v_{1:i})$ 为 0），但当 $\lambda_i = 0$ 时，控制输入（33）会在奇异性附近发散。注意，若 $L_{ii}Q_i$ 在 $\mathcal{D}$ 上连续且 $\rho_i(0) = p_i$，则 Ω_i 是开集，并且当满足 $x \in \Omega_i$ 的 x 趋近于 $\mathsf{bd}(\Omega_i)$ 中的一个点时，$\|(Q_i^T L_{ii}^{+})(x)\| \to \infty$：换言之，若要使控制输入 u 在 $\mathcal{D}$ 上有界，就不能令 $\lambda_i(x) = 0$ 对所有 $x \in \Omega_i$ 都成立。这一缺陷使得无法实际使用带有 $\lambda = 0$ 的规范优先半线性形式。

解决这一问题的一种方法是，使 $\lambda_i(x)$对于所有接近奇异点的 $x \in \mathcal{D}$ 均为正。这样可以缓解发散问题，但代价是解 (30) 对于$e(x, v, u) = 0$不够准确。事实上，可以证明，(38) 中的 $N_i^{\mathsf{c}}(x)$ 在 Ω_i 上不会消失，因此无法保证 (39) 中 v_i 与 y_i 之间的线性关系。这促使我们选择（非零但）足够小的 $\lambda_i(x)$，使得 $N_i^{\mathsf{c}}(x)$ 在 Ω_i 上 ≈ 0。然而，(39) 中的尾项 (38) 使得对规范优先半线性形式的分析并非易事，本文稍后将对此进行讨论。□

3.2 合适目标函数的刻画

作为第一步 ，为了进行推广，我们引入目标函数的一般形式

$$\pi_i : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^{p_i} \times \mathbb{R}^m \to [0, \infty] \quad (1 \le i \le k) \tag{40}$$

用于第 i 个任务 $\mathfrak{T}_i$，该形式预期以这样的方式选取：最小化 π_i 意味着残差 e_i的最小化。此时，$\pi_i(x, v_i, u)$ 并非一个特定函数，而是函数空间 $[0, \infty]^{\mathcal{D}\times\mathbb{R}^{p_i}\times\mathbb{R}^m}$ 上的一个变量。由于并非每个 π_i 都可接受，我们按照以下定义刻画适用于优先级输入输出线性化的 π_i 集合。

定义 3.5. 向量值目标函数

$$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k) : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to [0, \infty]^k \tag{41}$$

如果 π 同时具备/首先具备以下两个性质中的相应性质，则称其对于式（14）的优先级输入输出线性化是强适当的/弱适当的:

[6] ξ_i-动力学可以表示为:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_i &= A_i\xi_i + B_i\left(\kappa_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}Q_j u_j^{\mathsf{c}} + L_{ii}Q_i u_i^{\mathsf{c}}\right) \\
&= A_i\xi_i + B_i\left(\kappa_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}Q_j u_j^{\mathsf{c}}\right) + B_i L_{ii}Q_i Q_i^T L_{ii}^{+(\lambda_i)}\left(v_i - \kappa_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}Q_j u_j^{\mathsf{c}}\right) \\
&= A_i\xi_i + B_i\left(\kappa_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}Q_j u_j^{\mathsf{c}}\right) + B_i L_{ii}L_{ii}^{+(\lambda_i)} v_i - B_i L_{ii}L_{ii}^{+(\lambda_i)}\left(\kappa_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}Q_j u_j^{\mathsf{c}}\right) \\
&= A_i\xi_i + B_i L_{ii}L_{ii}^{+(\lambda_i)} v_i + B_i(I_{p_i} - L_{ii}L_{ii}^{+(\lambda_i)})\left(\kappa_i + \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}Q_j u_j^{\mathsf{c}}\right) \\
&= A_i\xi_i + B_i v_i - B_i(I_{p_i} - L_{ii}L_{ii}^{+(\lambda_i)})\left(v_i - \kappa_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}Q_j u_j^{\mathsf{c}}\right).
\end{aligned}$$

1.（依赖性）对于所有 $1 \le i \le k$、 $x \in \mathcal{D}$ 和 $v \in \mathbb{R}^p$,

$$\pi_i(x, v, u) = \pi_i(x, v_i, P_{1:i}(x)u) \quad (u \in \mathbb{R}^m) \tag{42}$$

并且存在唯一的 u_i^π 满足

$$u_i^\pi = \underset{u_i \in \mathcal{R}(P_i(x))}{\arg\min}\ \pi_i(x, v_i, u_{1:i-1}^\pi + u_i); \tag{43}$$

2.（表征性）：对于所有 $1 \le i \le k$ 和 $x \in \mathcal{D}$，从 $\mathcal{R}((L_{ii}Q_i)(x))$ 到$\mathcal{R}(P_i(x))$ 的映射 $v_i \mapsto u_i^\pi$ 是一一映射。□

我们注意到，在典范方法中， π_i 具有如下形式

$$\pi_i(x, v, u) = \|e_i(x, v, u)\|^2 + \lambda_i^2(x)\|P_i(x)u\|^2 \tag{44}$$

（稍后将详细讨论）。我们将在本小节余下部分看到，定义 3.5 中的各项与优先控制问题中的各项密切相关。

（依赖性）注意， $\mathbb{R}^m$ 中的任意 u 都可分解为

$$u = P_{1:i}(x)u + P_{i+1:k+1}(x)u = u_{1:i} + u_{i+1:k+1}.$$

那么，定义 3.5 的第一项意味着，在为 $\mathfrak{T}_i$最小化 π_i 时，只需要 $u_{1:i}$；而其余部分 $u_{i+1:k}$（为低优先级任务 $\mathfrak{T}_{i+1}$、.....、$\mathfrak{T}_k$构造）以及 u_{k+1} 不应影响 π_1、.....、π_i的最小化结果；从某种意义上说，这是对优先控制问题中第 1 项的形式化表述。另一方面，为了避免局部极小值问题，并消除 π_i 的一些无关紧要的选择（例如，对于所有$u \in \mathcal{R}(P_1(x))$， $\pi_1(x, v_1, u) = 0$ ），我们希望 u_i^π 具有唯一性。

（表征性）从概念上说，定义 3.5 的第 2 项可解释为这样一个条件：沿任意方向施加的控制作用量 v_i 不应在最终输入u_i^π中被抵消。为了深入理解，我们先提醒，最小化 π_i 旨在最小化第 i 个残差

$$e_i(x, v_i, u) = v_i - (L_{ii}Q_i)(x)u_i - \kappa_i(x) - \sum_{j=1}^{i-1}(L_{ij}Q_j)(x)u_j.$$

求解 e_i （或 π_i）的最小化问题时， $u_{1:i-1}$ 已预先选定，因此$-\kappa_i - \sum_{j=1}^{i-1}(L_{ij}Q_j)u_j$被视为固定值。另一方面， v_i是在之后为实现特定的 $\mathfrak{T}_i$而确定的，并且可以是 $\mathbb{R}^{p_i}$中的任意向量。因此，此时理想的情况是，$(L_{ii}Q_i)u_i^\pi$（按构造， $u_i^\pi \in \mathcal{R}(P_i)$）应能表示 $\mathcal{R}(L_{ii}Q_i)$中的所有元素，从而使 $\mathcal{R}(L_{ii}Q_i)$中的任意 v_i 都能在最终的 $e_i(x, v_i, u^\pi)$中得到精确补偿。定义 3.5 的第 2 项使这一点得以实现，因为根据引理 2.5， $\mathcal{R}((L_{ii}Q_i)(x))$ 到 $\mathcal{R}(P_i(x))$ 的映射 $v_i \mapsto u_i^\pi$自动是满射，因为 $\mathrm{rank}((L_{ii}Q_i)(x)) = \rho_i(x)$。

3.3 一般方法

现在，我们可以通过在定义 3.5 中采用合适的目标函数 π_i，将第 3.1 小节中的典范方法推广开来。由于我们无法总是在 Ω_i 上建立 v_i 与 y_i 之间的有界线性关系 u，因此没有理由拘泥于所提出的优化问题 (29)。

以最小二乘的方式。换句话说，将最小二乘问题（29）扩展为具有字典序 [29][30][7] 的多目标优化问题，似乎很自然。

$$\operatorname*{lex\,min}_{u\in\mathcal{R}(J^T)} \pi(x,v,u). \tag{45}$$

下述引理表明，π 的适定性确保了(45)的解 u^π 存在且唯一。

引理 3.6. 假设给定了(41)中的目标函数 π_i 。那么，对于任意 $x\in\mathcal{D}$ 和$v\in\mathbb{R}^p$，优化问题(43)的最小化解 u_i^π之和 $u_1^\pi+\cdots+u_k^\pi$，是采用字典序的多目标优化问题(45)的唯一最小化解。□

证明。见附录 E。 □

给定一个适定的目标函数 π，(45)的所有解都可以用自由变量 $u_f\in\mathbb{R}^p$ 参数化为

$$u^\pi(x,v,u_f) = \operatorname*{arg\,lex\,min}_{u\in\mathcal{R}(J^T)} \pi(x,v,u) + Nu_f \tag{46}$$

它对所有 $x\in\mathcal{D}$、 $v\in\mathbb{R}^p$和 $u_f\in\mathbb{R}^m$都有良好定义。关于(31)中的 u^{c} ，我们称(46)π-优先级线性化器；若无需指定 π ，则简称优先级线性化器。由定义 3.5 可知， $u_i^\pi = u_i^\pi(x,v_{1:i}) = P_i(x)u^\pi(x,v,u_f)$显然满足

$$u^\pi(x,v,u_f) = u_1^\pi(x,v_1) + \cdots + u_k^\pi(x,v_{1:k}) + u_{k+1}^\pi(x,u_f) \tag{47}$$

其中 $u_{k+1}^\pi = Nu_f$。因此，第 i 个残差 $e_i(x,v_i,u)$ 与 $u=u^\pi(x,v,u_f)$ 变为

$$e_i^\pi(x,v_{1:i}) = v_i - \kappa_i(x) - \sum_{j=1}^{i} (L_{ij}Q_j)(x)u_j^\pi(x,v_{1:j}). \tag{48}$$

由此，我们可以将π-优先级线性化器 $u=u^\pi(x,v,u_f)$ 应用于优先化正规形 (24)，从而得到规范优先半线性形式 (37) 的一种推广。

定义 3.7. 对于给定的在 0 处可优先化的系统 (14) 以及给定的强适当 / 弱适当目标函数 π （见 (41)），(14) 的强优先化 / 弱优先化（部分）半线性形式定义如下：对于 $1\le i\le k$,

$$\dot\eta_i = f_i(x) + G_i u^\pi(x,v,u_f) \tag{49a}$$
$$\dot\xi_i = A_i\xi_i + B_i v_i - B_i e_i^\pi(x,v_{1:i}) \tag{49b}$$
$$y_i = C_i\xi_i \tag{49c}$$

其中， u^π 和 e_i^π 分别定义于（46）和（48）式，（49a）在 $\mathcal{D}_i$上成立，而（49b）–（49c）在$\mathcal{D}$上成立。□

注意，经过对 π 的特定选择，优先级半线性形式 (49) 可按以下方式化为规范形式 (37)。

[7]对于给定的向量值目标函数 $\phi=\mathrm{col}(\phi_1,\dots,\phi_k):\mathbb{R}^m\to[0,\infty]^k$ 以及约束集 $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^m$，问题 $\operatorname{lex\,min}_{u\in\mathcal{U}}\phi(u)$ 是寻找一个最优解 $u^*\in\mathcal{U}$，使得对于所有 $1\le i\le k$， $\phi_i(u^*)=\min\{\phi_i(u): u\in\mathcal{U}$ 且 $\phi_j(u)=\phi_j(u^*)$ 对于 $1\le j\le i-1\}$ 均成立。

定理 3.8. 若目标函数 (41) 定义为 $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$，且满足 (44) 和 $\lambda_i(x) \in [0, \infty]$，则 π 为

- 在所有 (i, x) 的情况下均为强适当，当且仅当 $\lambda_i(x) \in [0, \infty)$；

若对于满足 $\rho_i(x) > 0$ 的某个 (i, x)，$\lambda_i(x) = \infty$，则 $\bullet$ 为弱适当。

此外，式 (46) 中的 π-优先级线性化器 $u^\pi(x, v, u_f)$ 等于式 (33) 中的 $u^{\mathrm{c}}(x, v, u_f)$. □

证明。由引理 2.5，π 满足 (42)。于是，优化问题 (43) 与 (29) 相同，并且对于 $1 \le i \le k$，(43) 有唯一解 u_i^*。因此，π 至少是弱适当的，而引理 3.6 给出 $u_i(x, v_{1:i}) = u_i^*$。由引理 3.1 可知，π-优先级线性化器与 (32) 和 (33) 相同。若 $\rho_i(x) = 0$，则 $\mathcal{R}((L_{ii}Q_i)(x)) = \{0\}$，且 $\mathcal{R}(P_i(x)) = \{0\}$。因此，对于所有满足 $\lambda_i(x) \in [0, \infty]$ 的情况，映射 $v_i \mapsto u_i^*$ 将 $\mathcal{R}((L_{ii}Q_i)(x))$ 映射到 $\mathcal{R}(P_i(x))$，且该映射为一一映射。假设 $\rho_i(x) > 0$，并令 v_i、$\bar{v}_i \in \mathcal{R}((L_{ii}Q_i)(x))$ 和 $v_i \neq \bar{v}_i$。令 u_i^* 和 $\bar{u}_i^*$ 分别为给定 v_i 和 $\bar{v}_i$ 时 (29) 的唯一解。由于对于 $1 \le j < i$，u_j^* 不依赖于 v_i 和 $\bar{v}_i$，由 (30) 得 $u_i^* - \bar{u}_i^* = \left(Q_i^T L^{+(\lambda_i)}{}_{ii}\right)(x)(v_i - \bar{v}_i)$。若 $\lambda_i(x) = \infty$，则 $L^{+(\lambda_i)}{}_{ii}(x) = 0$，且 $u_i = \bar{u}_i$。因此，若 $\lambda_i(x) = \infty$，映射 $v_i \mapsto u_i^*$ 不是一一映射。假设 $\lambda_i(x) > 0$，并令

$$L_{ii}(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}}_{U \in \mathbb{R}^{p_i \times p_i}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma \in \mathbb{R}^{p_i \times \rho_i(x)}} V^T = U_1 \Sigma_1 V^T$$

为奇异值分解，其中 $U_1 \in \mathbb{R}^{p_i \times \rho_{i(x)}}$ 以及 $\Sigma_1, V \in \mathbb{R}^{\rho_i(x) \times \rho_i(x)}$。那么，

$$(Q_i^T L_{ii}^{+(\lambda_i)})(x) = Q_i^T(x) \underbrace{V \Sigma_1 (\Sigma_1^2 + \lambda_i^2(x) I_{\rho_i(x)})^{-1}}_{M \in \mathbb{R}^{\rho_i(x) \times \rho_i(x)}} U_1^T.$$

由于秩$(Q_i(x))$ = 秩(M) = 秩(U_1) = $\rho_1(x)$,

$$\mathcal{R}((L_{ii}Q_i)(x)) = \mathcal{R}(U_1) \perp \mathcal{R}(U_2) = \mathcal{N}((Q_i^T L_{ii}^{+(\lambda_i)})(x)).$$

因此，$v_i - \bar{v}_i \notin \mathcal{N}((Q_i^T L_{ii}^{+(\lambda_i)})(x))$ 且 $u_i^* \neq \bar{u}_i^*$。因此，当$\lambda_i(x) > 0$时，映射 $v_i \mapsto u_i^*$ 是一一映射。 □

为了后续的控制器设计与分析，可能需要刻画所考虑的一类优先级线性化器 u^π。下文假设 u^π 具有以下形式，且其分块下三角矩阵为 $\Gamma(x)$:

$$u^\pi(x, v, u_f) = Q^T L_{\mathrm{D}}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{k1} & \cdots & \Gamma_{kk} \end{bmatrix}}_{\Gamma(x) = [\Gamma_{ij}(x)]} (v - \kappa) + N u_f. \tag{50}$$

应当强调的是，对于一大类 π，这一要求都能得到满足。例如，如果按照（44）选择 π_i，且 $\lambda_i(x) \in [0, \infty]$，那么所得的优先级线性化器（33）与（50）中的块下三角矩阵相同

$$\Gamma = \mathrm{diag}(L_{11}^{\star(\lambda_1)}, \ldots, L_{kk}^{\star(\lambda_k)})(I_p + L_{\mathrm{L}} L_{\mathrm{D}}^{\oplus(\lambda)})^{-1}$$

其中 $L^{\star(\lambda_i)}{}_{ii} = (L_{ii}L_{ii}^T + \lambda_i^2 I_{p_i})^+$ 当 $\lambda_i(x) < \infty$ 且 $L_{ii}^{\star(\infty)} = 0 \in \mathbb{R}^{p_i \times p_i}$ 时。注意，利用（50）中的 u^π，可以将（50）在（26）中的残差 e^π 重写为

$$e(x, v, u^\pi) = \underbrace{\begin{bmatrix} E_{11}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{k1}(x) & \cdots & E_{kk}(x) \end{bmatrix}}_{E(x)=[E_{ij}(x)]=(I_p - LL_{\mathrm{D}}^T\Gamma)(x)} (v - \kappa(x)) \tag{51}$$

其中，分块下三角矩阵

$$E(x) = I_p - L(x)L_{\mathrm{D}}^T(x)\Gamma(x)$$

称为残差矩阵。显然，带有 (50) 中 u^π 的优先级半线性形式 (49) 变为

$$\dot{\eta}_i = f_i(x) + (G_i Q^T L_{\mathrm{D}}^T \Gamma)(v - \kappa(x)) + (G_i N)u_f \tag{52a}$$

$$\dot{\xi}_i = A_i\xi_i + B_i v_i - B_i \sum_{j=1}^{i} E_{ij}(x)(v_j - \kappa_j(x)) \tag{52b}$$

$$y_i = C_i\xi_i \tag{52c}$$

其在某种意义上具有典型半线性形式 (37) 的一般结构，即将 (37) 中的 $J^{\oplus(\lambda)}$ 和 E^{c} 分别替换为 $Q^T L_{\mathrm{D}}^T \Gamma$ 和 E。

出于技术原因，作出以下假设。

假设 3.9。对于给定的 $(x, v, u_f) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$，(46) 中的 π-优先级线性化器 $u^\pi(x, v, u_f)$ 具有形式 (50)，并且对所有 $1 \le i \le k$ 满足以下陈述：

1) $\operatorname{rank}(L_{ii}L_{ii}^T\Gamma_{ii}(x)) = \rho_i(x)$;

2) $(L_{ii}L_{ii}^T\Gamma_{ii})(x) + (L_{ii}L_{ii}^T\Gamma_{ii})^T(x) \ge 0$. □

不难看出，任意强适当的 π 都满足该假设的第一项，而第二项则适用于 (44) 中 π 的典型形式。另一方面，根据 Γ 的结构性质，我们有

$$\dot{\xi}_i = A_i\xi_i + B_i L_{ii}L_{ii}^T\Gamma_{ii}v_i + B_i E_{ii}\kappa_i - B_i \sum_{j=1}^{i-1} E_{ij}(v_j - \kappa_j) \tag{53}$$

其中我们利用了这样一个事实：E 的 (i, j) 块由 $E_{ij} = 0$ 给出，其中 $i < j$, $E_{ij} = I_{p_i} - L_{ii}L_{ii}^T\Gamma_{ii}$

对于 $i=j$，以及对于 $i>j$ 的 $E_{ij}=-\sum_{a=j}^{i}L_{ia}L_{aa}^{T}\Gamma_{aj}$。[8] 那么，假设 3.9 中的两个要求可以解释为式 (53) 中非线性项 $(L_{ii}L_{ii}^{T}\Gamma_{ii})(x)$ 的一个条件，该条件将在接下来的分析中用到。

注 3.10. 迄今为止的讨论（包括定义 3.5、引理 3.6 和定义 3.7）引入了一种系统化的方法，用于定义各种优先级半线性形式 (49)。请注意，π决定了子系统 (49b)–(49c) 与线性系统 (A_i, B_i, C_i) 在式 (43) 意义下的接近程度，其中 $B_i e_i^{\pi}$ 被视为线性化误差。因此，我们可以通过构造合适的 π，获得一种能让任务表现更佳的优先级半线性形式；这将留待未来工作。□

4 优先输出跟踪控制

在本节中，在第 3 节优先级输入-输出线性化相关结果的基础上，我们研究具有优先级任务$[\mathfrak{T}_1,\ldots,\mathfrak{T}_k]$的系统 (14) 的输出跟踪问题。换言之，我们将第 i 个任务变量 y_i 对应的第 i 个任务 $\mathfrak{T}_i$ 指定为跟踪任务，其参考信号为 $y_i^{\star}$：$[0,\infty)\to\mathbb{R}^{p_i}$，并假设该信号具有足够的光滑性。

我们首先指出，在定理 2.8 的强假设下，与（$\mathfrak{T}_1$，...，$\mathfrak{T}_k$）相关联的系统（1）具有传统线性形式（28），由此可通过应用线性控制律来解决输出跟踪问题

$$v_i=-K_i(\xi_i-\xi_i^{\star})+\kappa_i^{\star},\quad i=1,\cdots,k \tag{54}$$

其中，$\xi_i^{\star}(t)$ 和 $\kappa_i^{\star}(t)$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\xi_i^{\star}&=\mathrm{col}(y_{i1}^{\star(0)},\ldots,y_{i1}^{\star(r_{i1}-1)},\ldots,y_{ip_i}^{\star(0)},\ldots,y_{ip_i}^{\star(r_{ip_i}-1)})\\ \kappa_i^{\star}&=\mathrm{col}(y_{i1}^{\star(r_{i1})},\ldots,y_{ip_i}^{\star(r_{ip_i})}),\end{aligned}$$

[8]残差矩阵可表示为:

$$\begin{aligned}E&=I_p-LL_D^{T}\Gamma\\&=I_p-\begin{bmatrix}L_{11}&0&\cdots&0\\L_{21}&L_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\L_{k1}&L_{k2}&\cdots&L_{kk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_{11}^{T}&0&\cdots&0\\0&L_{22}^{T}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&L_{kk}^{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Gamma_{11}&0&\cdots&0\\\Gamma_{21}&\Gamma_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\Gamma_{k1}&\Gamma_{k2}&\cdots&\Gamma_{kk}\end{bmatrix}\\&=I_p-\begin{bmatrix}L_{11}&0&\cdots&0\\L_{21}&L_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\L_{k1}&L_{k2}&\cdots&L_{kk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_{11}^{T}\Gamma_{11}&0&\cdots&0\\L_{22}^{T}\Gamma_{21}&L_{22}^{T}\Gamma_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\L_{kk}^{T}\Gamma_{k1}&L_{kk}^{T}\Gamma_{k2}&\cdots&L_{kk}^{T}\Gamma_{kk}\end{bmatrix}\\&=I_p-\begin{bmatrix}L_{11}L_{11}^{T}\Gamma_{11}&0&\cdots&0\\\sum_{a=1}^{2}L_{2a}L_{aa}^{T}\Gamma_{a1}&L_{22}L_{22}^{T}\Gamma_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\sum_{a=1}^{k}L_{ka}L_{aa}^{T}\Gamma_{a1}&\sum_{a=2}^{k}L_{ka}L_{aa}^{T}\Gamma_{a2}&\cdots&L_{kk}L_{kk}^{T}\Gamma_{kk}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}I_{p_1}-L_{11}L_{11}^{T}\Gamma_{11}&0&\cdots&0\\-\sum_{a=1}^{2}L_{2a}L_{aa}^{T}\Gamma_{a1}&I_{p_2}-L_{22}L_{22}^{T}\Gamma_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-\sum_{a=1}^{k}L_{ka}L_{aa}^{T}\Gamma_{a1}&-\sum_{a=2}^{k}L_{ka}L_{aa}^{T}\Gamma_{a2}&\cdots&I_{p_k}-L_{kk}L_{kk}^{T}\Gamma_{kk}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

并假设在 $[0,\infty)$ 上有界。然后，令误差变量

$$\tilde{\xi}_i = \xi_i - \xi_i^\star, \quad i = 1, \dots, k,$$

并且 $u_f = 0$，闭环误差动力学计算为

$$\dot{\eta} = (f_\eta - G_\eta J^+ \kappa)[\eta, \tilde{\xi} + \xi^\star] + G_\eta J^+ [\eta, \tilde{\xi} + \xi^\star](-K\tilde{\xi} + \kappa^\star) \tag{55a}$$

$$\dot{\tilde{\xi}} = (A - BK)\tilde{\xi} \tag{55b}$$

其中，只要 $A - BK$ 是赫尔维茨矩阵，所有跟踪误差变量 $\xi_i(t)$ 都将收敛到 0，其中$K =$为diag($K_1, \dots, K_k$)。[9]

如前所述，如果 $J(x)$ 在 $\mathcal{D}$ 上的某一点变为奇异，为了得到（55），我们应将自身限制在 0 的一个邻域 $\mathcal{D}_{1:k} \subset \Omega_{1:k}$ 内（该邻域可能过小，甚至为空）；否则，可能无法同时实现所有跟踪任务。作为替代方案，本文提出将 π-优先级线性化器（50）与线性控制律（54）结合起来作为控制器，以解决优先级输出跟踪问题。可以看到，即使 $J(x)$ 存在奇异性，所提出的控制器仍能实现较高优先级的输出跟踪任务（从而使部分 $\xi_i(t)$ 趋近于参考值 $\xi_i^\star(t)$）。

以下假设允许扩大我们的关注区域。

假设4.1. 存在一个整数 $1 \le i_0 \le k$ 和一个 0 的邻域 $\mathcal{D}_{1:i_0} \subset \Omega_{1:i_0}$，使得微分同胚 $\Phi_{1:i_0}(x)$ 在 $\mathcal{D}_{1:i_0}$ 上有定义，且式 (25) 在 $\Phi_{1:i_0}(\mathcal{D}_{1:i_0})$ 上成立。令 $\mathcal{C}_{1:i_0} \subset \Phi_{1:i_0}(\mathcal{D}_{1:i_0})$ 为 0 的一个紧邻域。□

为简便起见，在下文中，我们经常使用 $\bullet_0$ 代替 $\bullet_{1:i_0}$ 或 $\bullet_{1:i_0,\ 1:\ i_0}$，如第1.1小节所述。对于一个函数，我们也交替使用 $\bullet(x)$ 或 $\bullet[z_0] = \bullet[\eta_0, \xi_0] := \bullet(\Phi_0^{-1}(\eta_0, \xi_0))$ 表示。

$\bullet$ 定义在 $\mathcal{D}_0$ 上。如果 $\bullet[z_0]$ 在 $\mathcal{C}_0$ 上有界或满足利普希茨条件，则分别用 $\mathsf{M}_\bullet > 0$ 或 $\mathsf{L}_\bullet > 0$ 表示 $\|\bullet[z_0]\|$ 的一个上界或 $\bullet[z_0]$ 在 $\mathcal{C}_0$ 上的一个利普希茨常数。此外，$\mathsf{M}_{\xi_0^\star} > 0$ 和 $\mathsf{M}_{\kappa_0^\star} > 0$ 将分别表示 $\xi_0^\star$ 和 $\kappa_0^\star$ 在 $[0,\infty$ 上的上界:

$$\|\xi_0^\star(t)\| \le \mathsf{M}_{\xi_0^\star}, \quad \|\kappa_0^\star(t)\| \le \mathsf{M}_{\kappa_0^\star} \qquad (t \in [0,\infty)). \tag{56}$$

需要强调的是，只要 $i_0 < k$，集合 $\mathcal{D}_0$ 就可以视为定义域 $\mathcal{D}_{1:k}$ 针对（55）的扩展，因为 $\mathcal{D}_0$ 包含低优先级任务 $\mathfrak{T}_{i_0+1}$、 ..... 、 $\mathfrak{T}_k$ 上的奇异点。在扩展区域 $\mathcal{D}_0$ 中，与（ 25 ）类似，采用所提出的控制器（50）和（54）的整体系统在 $\mathcal{D}_0$ 上的误差动力学可推导为

$$\dot{\eta}_0 = f_0^\circ + G_0^\circ(-K_0\tilde{\xi}_0 + \kappa_0^\star) + G_0 u_{i_0+1:k+1}^\pi \tag{57a}$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_i = (A_i - B_i K_i)\tilde{\xi}_i + B_i \sum_{j=1}^{i} E_{ij}(K_j\tilde{\xi}_j - \kappa_j^\star + \kappa_j) \tag{57b}$$

对于所有 $1 \le i \le k$，其中 $G_0^\circ = G_0 Q_0^T L_{D0}^T \Gamma_0$、 $f_0^\circ = f_0 - G_0^\circ \kappa_0$ 和 $u^\pi = u_0^\pi + u_{i_0+1:k+1}^\pi = u_{1:i_0}^\pi + u_{i_0+1:\ k}^\pi + N u_f$ 其中

$$u_{a:b}^\pi := \sum_{i=a}^{b} Q_i^T L_{ii}^T \sum_{j=1}^{i} \Gamma_{ij}(-K_j\tilde{\xi}_j + \kappa_j^\star - \kappa_j), \quad 1 \le a, b \le k.$$

[9] 关于 $\eta(t)$ 的有界性，众所周知，如果 $\dot{\eta} = f_\eta^\circ[\eta, 0]$ 的原点渐近稳定，且 $A - BK$ 是赫尔维茨矩阵，那么对于任意足够小的 $\eta(0)$、 $\xi(0)$、 $\xi^\star(t)$ 和 $\kappa^\star(t)$，都存在 (55) 的唯一经典解 $\tilde{\eta}(\eta, \xi) : [0,\infty) \to \Phi(\mathcal{D})$，其初值为 $(\eta(0)\ \xi(0))$，并且 $\eta(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上有界，且 $\xi(t) \to 0$ 当$t \to \infty$。证明见附录 F。

4.1 线性化不完善时具有更高优先级的跟踪误差动力学的 Lyapunov分析

˜(57) 中一个值得注意之处是，由于线性化不完善（也由于 $J(x)$ 的奇异性），(57b) 中的 ξ-动力学并非线性系统。这意味着，仅像 (55) 中那样令 $A - BK$ 为赫尔维茨矩阵，可能不足以使误差动力学稳定。

我们的新方法，一种基于由线性化不完善引起˜的扰动存在时具有更高优先级（即 $i = 1$、.....、i_0）。本小节旨在给出设计参数（即 Γ 和 K）的基本原理和条件，详细证明可在第 4.3 小节中找到。关键思路是将式 (57b) 中的 ξ-动力学表示为 k 个相互隔离系统的互连。为此，我们首先作如下假设。

假设 4.2。式 (50) 中的矩阵 Γ 满足以下条件：

(a) 对于每个 $1 \leq i \leq i_0$，都存在满足以下条件的 $\varsigma_i > 0$

$$\frac{1}{2}\left(L_{ii}L_{ii}^T\Gamma_{ii} + (L_{ii}L_{ii}^T\Gamma_{ii})^T\right)[\eta_0, \xi_0] \geq \varsigma_i I_{p_i} \tag{58}$$

在 $\mathcal{C}_0$ 上；

(b) $\Gamma_{ij}(x)$、 $1 \leq i$、 $j \leq i_0$ 在 $\mathcal{D}_0$ 上足够光滑；

(c) $\|\Gamma(x)\|$ 在 $\mathcal{D}_0$的每个紧子集上有界。 □

备注 4.3。假设 4.2 对（50）中的大类 π-优先级线性化器 u^π in (50) 均成立。例如，假设 3.9 蕴含（58），且（33）中的规范优先级控制输入 u^{c} in (33) 配合充分光滑的阻尼函数 $\lambda_1(x) \ldots, \lambda_{i_0}(x)$ 以及在 $\mathcal{C}_0$ 上为正的阻尼函数 $\lambda_{i_0+1}(x) \ldots, \lambda_k(x)$ 满足后两项。□

利用 ς_i，我们将每个 $\tilde{\xi}_i$-动力学表示为线性系统[10]

$$\dot{\tilde{\xi}}_i = \left(A_i - \varsigma_i B_i K_i\right)\tilde{\xi}_i + B_i u_{\tilde{\xi}_i} + B_i w_{\tilde{\xi}_i}, \tag{59a}$$

$$y_{\tilde{\xi}_i} = K_i \tilde{\xi}_i, \tag{59b}$$

带有非线性反馈项

$$u_{\tilde{\xi}_i} = -\left(L_{ii}L_{ii}^T\Gamma_{ii} - \varsigma_i I_{p_i}\right) y_{\tilde{\xi}_i} \tag{60}$$

[10] $\tilde{\xi}_i$动力学可以重新表述为：

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\xi}}_i &= (A_i - B_iK_i)\tilde{\xi}_i + B_i\sum_{j=1}^{i} E_{ij}(K_j\tilde{\xi}_j - \kappa_j^\star + \kappa_j) \\
&= (A_i - B_iK_i)\tilde{\xi}_i + B_i(I_{p_i} - L_{ii}L_{ii}^T\Gamma_{ii})(K_i\tilde{\xi}_i - \kappa_i^\star + \kappa_i) + B_i\sum_{j=1}^{i-1} E_{ij}(K_j\tilde{\xi}_j - \kappa_j^\star + \kappa_j) \\
&= (A_i - \varsigma_i B_iK_i)\tilde{\xi}_i + B_i\underbrace{(-1)(L_{ii}L_{ii}^T\Gamma_{ii} - \varsigma_i I_{p_i})K_i\tilde{\xi}_i}_{u_{\tilde{\xi}_i}} + B_i\underbrace{\left(E_{ii}(\kappa_i - \kappa_i^\star) + \sum_{j=1}^{i-1} E_{ij}(K_j\tilde{\xi}_j - \kappa_j^\star + \kappa_j)\right)}_{w_{\tilde{\xi}_i}}.
\end{aligned}$$

以及互连项

$$w_{\tilde{\xi}_i} = E_{ii}(\kappa_i - \kappa_i^\star) + \sum_{j=1}^{i-1} E_{ij}(K_j\tilde{\xi}_j - \kappa_j^\star + \kappa_j). \tag{61}$$

注意，式 (59) 中从$^{u}\xi_i$ 到 $^{y}\xi_i$ 的传递函数为

$$H_i(s) = K_i(sI_{r_i} - A_i + \varsigma_i B_i K_i)^{-1}B_i \tag{62}$$

它满足以下 [2]。

引理 4.4. 对于任意 $\varsigma_i > 0$，存在 $K_i \in \mathbb{R}^{p_i \times r_i}$，使得 $(A_i - \varsigma_i B_i K_i, B_i)$ 可控，$(A_i - \varsigma_i B_i K_i, K_i)$ 可观，并且式 (62) 中的 $H_i(s)$ 严格正实。□

从现在起，作如下假设：

假设 4.5. 对于每个 K_i，$(A_i - \varsigma_i B_i K_i, B_i)$ 可控，$(A_i - \varsigma_i B_i K_i, K_i)$ 可观，并且$H_i(s)$ 严格正实。□

那么，卡尔曼-雅库波维奇-波波夫引理 [7, 引理 6.3] 指出，对于每个 $1 \le i \le i_0$，存在一个常数 $\vartheta_i > 0$ 以及矩阵 $X_i = X_i^T > 0$ 和 R_i，满足

$$\begin{aligned} X_i(A_i - \varsigma_i B_i K_i) + (A_i - \varsigma_i B_i K_i)^T X_i &= -R_i^T R_i - 2\vartheta_i X_i \\ X_i B_i &= K_i^T. \end{aligned} \tag{63}$$

With $\sim X_i$ 如上所述，我们为每个 ξ_i 采用如下李雅普诺夫函数候选：

$$V_{\tilde{\xi}_i}(\tilde{\xi}_i) \coloneqq \sqrt{\tilde{\xi}_i^T X_i \tilde{\xi}_i}. \tag{64}$$

然后，结合式（59）计算时间导数 $\dot{V}_{\tilde{\xi}_i}$ [11]

$$\dot{V}_{\tilde{\xi}_i} \le -\vartheta_i \sigma_{\min}^{1/2}(X_i)\|\tilde{\xi}_i\| + \frac{\sigma_{\max}(X_i)}{\sigma_{\min}^{1/2}(X_i)}\|w_{\tilde{\xi}_i}\| \tag{65}$$

~ ~（只要ξ_i 在 t 处可微，且 $\xi_i(t) \neq 0$），其中使用了式（58）和（63）。

在接下来的分析中，我们通过选择权重 w_i, $i = 1, \ldots, i_0$，来处理式（65）中的互连项$^{w}\tilde{\xi}_i$；这些权重用于李雅普诺夫函数之和

$$V_{\tilde{\xi}_0}(\tilde{\xi}_0) \coloneqq \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\mathsf{w}_i}{\vartheta_i \sigma_{\min}^{1/2}(X_i)} V_{\tilde{\xi}_i}(\tilde{\xi}_i). \tag{66}$$

为了给出关于 w_i 的条件，首先注意到式（65）中的$^{w}\tilde{\xi}_i$ 有界于

$$\|w_{\tilde{\xi}_i}\| \le \sum_{j=1}^{i-1} \|E_{ij}\|\|K_j\|\|\tilde{\xi}_j\| + \sum_{j=1}^{i} \|E_{ij}\|\big(\|\kappa_j^\star\| + \|\kappa_j\|\big)$$

[11]如果 $\tilde{\xi}_i$ 在 t an处可微 ~d $\xi_i(t) \neq 0$，那么 $V_{\tilde{\xi}}$ 在 t 处也可微，我们可以计算一个上界 o f

其中 $E_{ij}[z_0]$ 和 $\kappa_j[z_0]$ 满足

$$\|E_{ij}[z_0]\| \le \mathsf{M}_{E_{ij}}, \tag{68}$$
$$\|\kappa_i[z_0]\| \le \mathsf{L}_{\kappa_i}\|z_0\| \le \mathsf{L}_{\kappa_i}\left(\|\eta_0\| + \sum_{a=1}^{i_0}\|\tilde{\xi}_a\| + \|\xi_0^\star\|\right)$$

作为 $V_{\tilde{\xi}_i}$

$$\dot{V}_{\tilde{\xi}_i} = \frac{d(\tilde{\xi}_i^T X_i\tilde{\xi}_i)^{1/2}}{dt} = \frac{d(\tilde{\xi}_i^T X_i\tilde{\xi}_i)^{1/2}}{d(\tilde{\xi}_i^T X_i\tilde{\xi}_i)}\frac{d(\tilde{\xi}_i^T X_i\tilde{\xi}_i)}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\xi}_i^T X_i\tilde{\xi}_i}}\left(\tilde{\xi}_i^T X_i\dot{\tilde{\xi}}_i + \dot{\tilde{\xi}}_i^T X_i\tilde{\xi}_i\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\xi}_i^T X_i\tilde{\xi}_i}}\left(\tilde{\xi}_i^T X_i\big((A_i-\varsigma_i B_iK_i)\tilde{\xi}_i + B_iu_{\tilde{\xi}_i} + B_iw_{\tilde{\xi}_i}\big) + \big((A_i-\varsigma_i B_iK_i)\tilde{\xi}_i + B_iu_{\tilde{\xi}_i} + B_iw_{\tilde{\xi}_i}\big)^T X_i\tilde{\xi}_i\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\xi}_i^T X_i\tilde{\xi}_i}}\left(\tilde{\xi}_i^T \underbrace{\big(X_i(A_i-\varsigma_i B_iK_i) + (A_i-\varsigma_i B_iK_i)^T X_i\big)}_{-R_i^TR_i - 2\vartheta_i X_i}\tilde{\xi}_i + \tilde{\xi}_i^T\underbrace{(X_iB_i)}_{K_i^T}(u_{\tilde{\xi}_i}+w_{\tilde{\xi}_i}) + (u_{\tilde{\xi}_i}+w_{\tilde{\xi}_i})^T\underbrace{(X_iB_i)^T}_{K_i}\tilde{\xi}_i\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\xi}_i^T X_i\tilde{\xi}_i}}\left(\tilde{\xi}_i^T(-R_i^TR_i - 2\vartheta_iX_i)\tilde{\xi}_i + \tilde{\xi}_i^TK_i^Tu_{\tilde{\xi}_i} + u_{\tilde{\xi}_i}^TK_i\tilde{\xi}_i + \tilde{\xi}_i^TX_iB_iw_{\tilde{\xi}_i} + w_{\tilde{\xi}_i}^TB_i^TX_i^T\tilde{\xi}_i\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\xi}_i^T X_i\tilde{\xi}_i}}\left(\tilde{\xi}_i^T(-\underbrace{R_i^TR_i}_{\ge 0} - 2\vartheta_iX_i)\tilde{\xi}_i - \tilde{\xi}_i^TK_i^T\underbrace{\big(L_{ii}L_{ii}^T\Gamma_{ii} + (L_{ii}L_{ii}^T\Gamma_{ii})^T - 2\varsigma_iI_{p_i}\big)}_{\ge 0}K_i\tilde{\xi}_i + \tilde{\xi}_i^TX_iB_iw_{\tilde{\xi}_i} + w_{\tilde{\xi}_i}^TB_i^TX_i^T\tilde{\xi}_i\right)$$

$$\le -\vartheta_i\sqrt{\tilde{\xi}_i^T X_i\tilde{\xi}_i} + \frac{\|X_i\tilde{\xi}_i\|}{\sqrt{\tilde{\xi}_i^T X_i\tilde{\xi}_i}}\underbrace{\|B_i\|}_{=1}\|w_{\tilde{\xi}_i}\|$$

$$\le -\vartheta_i\sigma_{\min}^{1/2}(X_i)\|\tilde{\xi}_i\| + \frac{\sigma_{\max}(X_i)}{\sigma_{\min}^{1/2}(X_i)}\|w_{\tilde{\xi}_i}\|.$$

~事实上，如果 $\xi_i(t)$ 绝对连续，那么这个上界几乎处处成立。为此，设 $\xi_i(t)$ 在某个区间上绝对~连续，并注意到 $V_{\tilde{\xi}_i}(\xi_i)$ 是利普希茨函数，因此 $V_{\tilde{\xi}_i}(\xi_i(t))$ 在~该区间上也绝对连续。由此可知，$V_{\tilde{\xi}_i}(\xi_i(t))$ 几乎处处可微。设 $\xi(t)$ 和 $V_{\tilde{\xi}_i}(\xi_i(t))$ 在~t_0 处均可微（这几乎处处成立）。若 $\xi_i(t_0)\neq 0$，则如前所述，上界在 t_0 处成立。假设 $\xi_i(t_0)=0$。~由于对所有 t 都有 $V_{\tilde{\xi}_i}(\xi_i(t))\ge 0$，因此它在 t_0处必定 $V_{\tilde{\xi}_i}=0$；否则，在 t_0附近的某个 t处，$V_{\tilde{\xi}_i}(\xi_i(t))<0$。由于当 $\xi_i(t_0)=0$ 时，$V_{\tilde{\xi}_i}$ 的上界非负，因此上界在 t_0处成立。

对任意 $1 \le i$、 $j \le i_0$ 和 $z_0 \in \mathcal{C}_0$ 均成立。于是，对于每个 $1 \le i \le i_0$，可得[12]

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathsf{w}_i}{\vartheta_i \sigma_{\min}^{1/2}(X_i)} \dot{V}_{\tilde{\xi}_i} \\
&\le -\Big(\mathsf{w}_i \|\tilde{\xi}_i\| + \mathsf{w}_i \sum_{j=1}^{i-1} \mathsf{y}_{ji} \|\tilde{\xi}_j\| - \mathsf{w}_i \sum_{j=1}^{i_0} \mathsf{z}_{ji} \|\tilde{\xi}_j\| \Big) \\
&\quad + \frac{\mathsf{w}_i \tilde{\sigma}_i}{\vartheta_i} \sum_{j=1}^{i} \mathsf{M}_{E_{ij}} \big(\mathsf{L}_{\kappa_j} \|\eta_0\| + \mathsf{L}_{\kappa_j} \mathsf{M}_{\xi_0^\star} + \mathsf{M}_{\kappa_j^\star} \big)
\end{aligned} \tag{69}$$

其中 $\tilde{\sigma}_i \coloneqq \sigma_{\max}(X_i)/\sigma_{\min}(X_i)$，且对于 $1 \le i, j \le i_0$

$$\mathsf{y}_{ij} \coloneqq \begin{cases} 0, & i > j \\ 1, & i = j \\ -\dfrac{\tilde{\sigma}_j}{\vartheta_j} \mathsf{M}_{E_{ji}} \|K_i\|, & i < j \end{cases}, \quad \mathsf{z}_{ij} \coloneqq \frac{\tilde{\sigma}_j}{\vartheta_j} \sum_{a=1}^{j} \mathsf{M}_{E_{ja}} \mathsf{L}_{\kappa_a}.$$

[12]上界的计算方式为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathsf{w}_i}{\vartheta_i \sigma_{\min}^{1/2}(X_i)} \dot{V}_{\tilde{\xi}_i} &\le \frac{\mathsf{w}_i}{\vartheta_i \sigma_{\min}^{1/2}(X_i)} \Big(-\vartheta_i \sigma_{\min}^{1/2}(X_i) \|\tilde{\xi}_i\| + \frac{\sigma_{\max}(X_i)}{\sigma_{\min}^{1/2}(X_i)} \|w_{\tilde{\xi}_i}\| \Big) \\
&= -\mathsf{w}_i \|\tilde{\xi}_i\| + \frac{\mathsf{w}_i \tilde{\sigma}_i}{\vartheta_i} \Big(\sum_{j=1}^{i-1} \|E_{ij}\| \|K_j\| \|\tilde{\xi}_j\| + \sum_{j=1}^{i} \|E_{ij}\| (\|\kappa_j^\star\| + \|\kappa_j\|) \Big) \\
&\le -\mathsf{w}_i \|\tilde{\xi}_i\| + \frac{\mathsf{w}_i \tilde{\sigma}_i}{\vartheta_i} \Big(\sum_{j=1}^{i-1} \mathsf{M}_{E_{ij}} \|K_j\| \|\tilde{\xi}_j\| + \sum_{j=1}^{i} \mathsf{M}_{E_{ij}} \Big(\mathsf{M}_{\kappa_j^\star} + \mathsf{L}_{\kappa_j} \Big(\|\eta_0\| + \sum_{a=1}^{i_0} \|\tilde{\xi}_a\| + \mathsf{M}_{\xi_0^\star} \Big) \Big) \Big) \\
&= -\mathsf{w}_i \|\tilde{\xi}_i\| - \mathsf{w}_i \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{\Big(-\frac{\tilde{\sigma}_i}{\vartheta_i} \mathsf{M}_{E_{ij}} \|K_j\| \Big)}_{\mathsf{y}_{ji}} \|\tilde{\xi}_j\| + \mathsf{w}_i \underbrace{\Big(\frac{\tilde{\sigma}_i}{\vartheta_i} \sum_{j=1}^{i} \mathsf{M}_{E_{ij}} \mathsf{L}_{\kappa_j} \Big)}_{\mathsf{z}_{ai}} \sum_{a=1}^{i_0} \|\tilde{\xi}_a\| \\
&\quad + \frac{\mathsf{w}_i \tilde{\sigma}_i}{\vartheta_i} \sum_{j=1}^{i} \mathsf{M}_{E_{ij}} \big(\mathsf{L}_{\kappa_j} \|\eta_0\| + \mathsf{L}_{\kappa_j} \mathsf{M}_{\xi_0^\star} + \mathsf{M}_{\kappa_j^\star} \big) \\
&= -\Big(\mathsf{w}_i \|\tilde{\xi}_i\| + \mathsf{w}_i \sum_{j=1}^{i-1} \mathsf{y}_{ji} \|\tilde{\xi}_j\| - \mathsf{w}_i \sum_{j=1}^{i_0} \mathsf{z}_{ji} \|\tilde{\xi}_j\| \Big) + \frac{\mathsf{w}_i \tilde{\sigma}_i}{\vartheta_i} \sum_{j=1}^{i} \mathsf{M}_{E_{ij}} \big(\mathsf{L}_{\kappa_j} \|\eta_0\| + \mathsf{L}_{\kappa_j} \mathsf{M}_{\xi_0^\star} + \mathsf{M}_{\kappa_j^\star} \big).
\end{aligned}$$

注意到，此处 (69) 中大括号内各项之和可改写为[13]

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left(\mathsf{w}_i\|\tilde{\xi}_i\|+\mathsf{w}_i\sum_{j=1}^{i-1}\mathsf{y}_{ji}\|\tilde{\xi}_j\|-\mathsf{w}_i\sum_{j=1}^{i_0}\mathsf{z}_{ji}\|\tilde{\xi}_j\|\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{i_0}\left(\sum_{j=1}^{i_0}(\mathsf{y}_{ij}-\mathsf{z}_{ij})\mathsf{w}_j\right)\|\tilde{\xi}_i\|=\big((\mathsf{Y}-\mathsf{Z})\mathsf{w}\big)^T\begin{bmatrix}\|\tilde{\xi}_1\|\\ \vdots\\ \|\tilde{\xi}_{i_0}\|\end{bmatrix}$$

其中，$\mathsf{Y}:=[\mathsf{y}_{ij}]\in\mathbb{R}^{i_0\times i_0}$，$\mathsf{Z}:=[\mathsf{z}_{ij}]\in\mathbb{R}^{i_0\times i_0}$。最后，我们推导出$V_{\tilde{\xi}_0}$的时间导数如下:

$$\dot{V}_{\tilde{\xi}_0}\le-\big((\mathsf{Y}-\mathsf{Z})\mathsf{w}\big)^T\begin{bmatrix}\|\tilde{\xi}_1\|\\ \vdots\\ \|\tilde{\xi}_{i_0}\|\end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{i_0}\frac{\mathsf{w}_i\tilde{\sigma}_i}{\vartheta_i}\sum_{j=1}^{i}\mathsf{M}_{E_{ij}}\big(\mathsf{L}_{\kappa_j}\|\eta_0\|+\mathsf{L}_{\kappa_j}\mathsf{M}_{\xi_0^\star}+\mathsf{M}_{\kappa_j^\star}\big). \tag{70}$$

以下假设为存在满足 $(\mathsf{Y}-\mathsf{Z})\mathsf{w}\in(0,\infty)^{i_0}$ 的 $\mathsf{w}\in(0,\infty)^{i_0}$ 提供了一个充分条件。

假设 4.6。$\mathrm{sr}(\mathsf{Y}^{-1}\mathsf{Z})<1$. □

事实上，Y –Z 的所有非对角元素均为非正，因此根据定义，Y –Z 是一个 Z 矩阵。此外，由于 Y^{-1} 和 Z 均为非负矩阵，当且仅当假设 4.6 成立时，Y –Z 才是一个 M 矩阵； [31], 在此条件下，总能找到 $\mathsf{w}\in(0,\infty)^{i_0}$，使得 $(\mathsf{Y}-\mathsf{Z})\mathsf{w}\in(0,\infty)^{i_0}$。

注 4.7。还应指出，矩阵 Y 和 Z 取决于 $\mathsf{M}^{E_{ij}}$ for$\|E_{ij}\|$ 和 $\|K\|$的界限。如果残差矩阵 $\|E_0\|$（不能恒等于零，但）在 $\mathcal{C}_0$ 上足够小，则假设 4.6 成立，此时 Y^{-1} 和 Z 分别近似为 I_{i_0} 和 0。□

4.2 Ha处理非光滑正交化导致的问题 n

分析整体系统的主要困难在于，式 (57) 中的微分方程可能不光滑。从概念上讲，这一问题源于正交化 $J_iP_j=L_{ij}Q_j$通常并不光滑 [32][1] ，而根据定义 3.5 的表征性质， $L_{ij}Q_j$ 的非光滑性会传递到问题 (43) 的最优解u_i^π。（我们指出，作者此前关于优先级逆运动学问题[32]的研究也得出了类似结论。）由于证明这一非光滑性性质需要大量工作，我们在此不作详细讨论

[13]该和可表示为

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left(\mathsf{w}_i\|\tilde{\xi}_i\|+\mathsf{w}_i\sum_{j=1}^{i-1}\mathsf{y}_{ji}\|\tilde{\xi}_j\|-\mathsf{w}_i\sum_{j=1}^{i_0}\mathsf{z}_{ji}\|\tilde{\xi}_j\|\right)=\sum_{i=1}^{i_0}\left(\mathsf{w}_i\sum_{j=1}^{i_0}(\mathsf{y}_{ji}-\mathsf{z}_{ji})\|\tilde{\xi}_j\|\right)=\sum_{i=1}^{i_0}\left(\sum_{j=1}^{i_0}(\mathsf{y}_{ij}-\mathsf{z}_{ij})\mathsf{w}_j\right)\|\tilde{\xi}_i\|$$
$$=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{i_0}(\mathsf{y}_{1j}-\mathsf{z}_{1j})\mathsf{w}_j & \cdots & \sum_{j=1}^{i_0}(\mathsf{y}_{i_0j}-\mathsf{z}_{i_0j})\mathsf{w}_j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|\tilde{\xi}_1\|\\ \vdots\\ \|\tilde{\xi}_{i_0}\|\end{bmatrix}=\big((\mathsf{Y}-\mathsf{Z})\mathsf{w}\big)^T\begin{bmatrix}\|\tilde{\xi}_1\|\\ \vdots\\ \|\tilde{\xi}_{i_0}\|\end{bmatrix}.$$

本文。在严谨分析中，仍有必要考察这一不连续动力系统 (57) 的解是否存在。在本小节余下部分，我们将采用微分包含方法，作为替代方案，定义式 (57) 的 Krasovskii 解。在继续讨论之前，˜需要指出，关注域 $\mathcal{C}_0$ 定义为 (η_0, ξ_0) 的集合，而不是 (η_0, ξ_0)。因此，自然的做法是根据误差动力学 (57) 的解来定义

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_0 &= f_0^\circ + G_0^\circ(-K_0(\xi_0 - \xi_0^\star) + \kappa_0^\star) + G_0 u_{i_0+1:k+1}^\pi \\ \dot{\xi}_i &= A_i\xi_i + B_i(-K_i(\xi_i - \xi_i^\star) + \kappa_i^\star) \\ &\quad + B_i \sum_{j=1}^{i} E_{ij}(K_j(\xi_j - \xi_j^\star) - \kappa_j^\star + \kappa_j). \end{aligned} \tag{71}$$

在本文中，对于满足 (71) 的给定 $(\eta_0(t)\ \xi_0(t))$，我们称其对应的 $(\eta_0(t)\ \xi_0(t)\ -\xi_0^\star(t))$ 是误差动力学 (57) 的解。

注 4.8. 为简洁起见，我们在此不明确定义解空间，也不区分各个解，除非另有说明。此外，在定义 (57) 的解时，我们忽略 $i_0 + 1 \le i \le k$ 的 ξ_i 动力学，因为当 $i_0 < k$ 时，微分方程 (71) 是超定的。□

对自由变量 u_f 作出以下假设。

假设 4.9. 存在凸紧集 $\mathcal{U}_f \subset \mathbb{R}^m$，满足 $u_f(t,x) \in \mathcal{U}_f$，对于所有 $(t,x) \in [0,\infty) \times \Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0)$。□

这里需要澄清，只有 $u_{i_0+1:k+1}^\pi$ 在 η_0-动力学中是非光滑性的来源。事实上，Ω_0 是开集，且 $L_{ij}Q_j (1 \le i, j \le i_0)$ 在 Ω_0 [32] 上是光滑的。这意味着，在 (47) 中由 u^π 组成的两个分量中，$u_{1:i_0}^\pi$ 在 Ω_0 上是光滑的，且不连续性只出现在$u_{i_0+1:k+1}^\pi$中。牢记这一点，我们引入一个微分包含。

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_0 \in \mathcal{K}\big[& f_0^\circ + G_0^\circ(-K_0(\xi_0 - \xi_0^\star) + \kappa_0^\star) \\ & + G_0 u_{i_0+1:k}^\pi + G_0 N u_f\big] \end{aligned} \tag{72a}$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_0 = {} & A_0\xi_0 + B_0(-K_0(\xi_0 - \xi_0^\star) + \kappa_0^\star) \\ & + B_0 E_0(K_0(\xi_0 - \xi_0^\star) - \kappa_0^\star + \kappa_0). \end{aligned} \tag{72b}$$

这就是 $\mathcal{D}_0$ 上的总体动力学（71），其中将 η_0动力学改写为微分包含形式，其中

$$\mathcal{K}[\star](t,x) = \bigcap_{\delta>0} \overline{\mathrm{co}}(\star(t, x + \delta \mathrm{cl}(\mathcal{B}_n))) \tag{73}$$

是函数 $\star(t,x)$ [27][33]的 Krasovskii 正则化。在本文余下部分，若轨迹˜$(\eta_0(t)\ \xi_0(t))$是微分包含（72）的解，即 $z_0(t) = (\eta_0(t)\ \xi_0(t))$是其解，则称其为（57）的 Krasovskii 解。[14]

从现在开始，我们将看到，如果状态 $z_0(t)$从 $\mathcal{C}_0$的内部出发，则必定存在局部解。

引理 4.10. 假设所有条件均成立。那么对于每个 $z_0^\circ \in \mathrm{int}(\mathcal{C}_0)$，存在一个 Krasovskii 解 $z_0 : [0,T) \to \mathrm{int}(\mathcal{C}_0)$ of (71)，其初始条件为 $z_0(0) = z_0^\circ$，并且在区间 $[0,T)$ 上有定义，其中某个常数为 $T \in (0,\infty]$。此外，T 满足 $T = \infty$ 或 $z_0(T) \in \mathrm{bd}(\mathcal{C}_0)$。□

[14]微分包含 $\dot{x} \in \mathcal{F}(t,x)$的解是定义在区间 I 上的函数 $x(t)$，满足 $x(t)$在 I 上绝对连续，且几乎处处满足 $\dot{x}(t) \in \mathcal{F}(t, x(t))$。

证明。参见附录 4.10。 □

下面的引理介绍了内部动力学的另一种微分包含形式，这将使后续分析更加容易。

引理 4.11. 假设所有条件均成立。则存在一个上半连续[15]集值映射 $\mathcal{U}\colon \Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0) \to 2^{\mathbb{R}^m}$，使得以下结论成立：

(a) 对于每个 $x \in \Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0)$，$\mathcal{U}(x)$ 都是 0 的紧凸邻域；

(b) 存在一个正常数 $\mathsf{L}_{\mathcal{U}}$，使得

$$\mathcal{U}[\eta_0, \xi_0] \subset \mathcal{U}[\eta_0, 0] + \mathsf{L}_{\mathcal{U}}\|\xi_0\|\mathrm{cl}(\mathcal{B}_m) \tag{74}$$

对于所有 $(\eta_0, \xi_0) \in \mathcal{C}_0$；

(c) 集值映射 $\tilde{\mathcal{F}}_0^\circ := f_0^\circ + G_0 N_0 \mathcal{U}$ 和 $G_0^\circ(-K_0\xi_0 + \kappa_0^\star)$ 的加和是 (72a) 右端的超集，使得 (57) 的每个 Krasovskii 解都是该微分包含的解

$$\dot{\eta}_0 \in \mathcal{F}_0^\circ + G_0^\circ(-K_0\tilde{\xi}_0 + \kappa_0^\star) \tag{75a}$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_i = (A_i - B_iK_i)\tilde{\xi}_i + B_i\sum_{j=1}^{i} E_{ij}(K_j\tilde{\xi}_j - \kappa_j^\star + \kappa_j) \tag{75b}$$

其中，(75a) 和 (75b) 对 $1 \le i \le i_0$ 在 $\mathcal{C}_0$ 上成立。 □

证明。见附录 H。 □

我们将研究范围限制在一类特定的最小相位系统中，其含义是指下文所述的微分包含。

假设 4.12。存在正常数 $\bar{\mathbf{r}}_{\eta_0}$ 以及利普希茨函数 $V_{\eta_0}\colon \bar{\mathbf{r}}_{\eta_0}\mathcal{B}_{n-r_0} \to \mathbb{R}$，满足

$$\bar{\alpha}_1(\|\eta_0\|) \le V_{\eta_0}(\eta_0) \le \bar{\alpha}_2(\|\eta_0\|) \tag{76a}$$

$$D^+V_{\eta_0}(\eta_0, \tau_0) \le -\bar{\alpha}_3(\|\eta_0\|) \tag{76b}$$

对所有 $\|\eta_0\| < \bar{\mathbf{r}}_{\eta_0}$ 和 $\tau_0 \in \mathcal{F}_0^\circ[\eta_0, 0]$，其中 $\bar{\alpha}_i$、$1 \le i \le 3$ 是定义在 $[0, \bar{\mathbf{r}}_{\eta_0}]$ 上的 $\mathcal{K}$ 类函数，而 $D^+V_{\eta_0}(\eta_0, \tau_0)$ 是由下式定义的上 Dini 导数

$$D^+V_{\eta_0}(\eta_0, \tau_0) = \limsup_{h\downarrow 0,\, \tau \to \tau_0} \frac{V_{\eta_0}(\eta_0 + h\tau) - V_{\eta_0}(\eta_0)}{h}.$$

□

我们指出，(76) 意味着微分包含的平衡点 $0 \in \mathbb{R}^{n-r_0}$

$$\dot{\eta}_0 \in \mathcal{F}_0^\circ[\eta_0, 0] \tag{77}$$

是渐近稳定的 [27, 定理 8.2]。与微分方程的情形类似，我们将 (77) 称为微分包含 (75a)–(75b) 的零动态。

[15]若对每个包含 $\mathcal{F}(x)$ 的开集 $\mathcal{B} \subset \mathcal{Y}$，都存在 x 的一个邻域 $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$，使得 $\mathcal{F}(\mathcal{A}) := \bigcup_{z\in\mathcal{A}} \mathcal{F}(z) \subset \mathcal{B}$，则称集值映射 $\mathcal{F}\colon \mathcal{X} \to 2^{\mathcal{Y}}$ 在 $x \in \mathcal{X}$ 处上半连续。若集值映射 $\mathcal{F}\colon \mathcal{X} \to 2^{\mathcal{Y}}$ 对每个 $x \in \mathcal{X}$ 都在 $\mathcal{F}$ 处上半连续，则称其为上半连续。

注 4.13。综上所述，我们通过采用由微分包含导出的 Krasovskii 解，处理了 (57) 中的不连续性。这种方法的一个结果是，对于低优先级任务$\mathfrak{T}_{i_0+1}$、……、$\mathfrak{T}_k$，该微分包含的 Krasovskii 解几乎处处不满足 (75b)。尽管如此，我们将在下一小节看到，至少截至 i_0 个更高优先级的任务能够以误差动力学随时间推移而收敛至 0 附近的方式实现。因此，我们认为微分包含是处理优先控制问题中不连续性的合适工具。

另一方面，低优先级任务相关的问题可以通过（57）的 Carath ̀eodory 解来克服，因为该解对所有任务几乎处处满足（75b）。不过，推导 Carath ̀eodory 解的存在性定理并不容易，尤其是对于非光滑优先级系统，因为不连续性同时出现在时间和状态上（详情见 *[26]* ）。因此，本文不构造 Carath ̀eodory 解的存在性定理（我们此前在简单情形下的工作见 *[32]*）。相反，我们将着重讨论这样一种假设下的结果：Krasovskii 解对某些低优先级任务几乎处处满足（75b）。□

4.3 主要结果

我们给出关于优先级控制框架的两个理论结果。以下定理指出，在一定条件下，整体系统最终有界。

定理 4.14。考虑优先级闭环系统（57），并假设所有假设均成立。那么，对于任意充分小的 $\xi_0^\star$、$\kappa_0^\star$ 和 E_0，存在常数 $0<\varepsilon<\delta$（通过减小 $\xi_0^\star$、$\kappa_0^\star$ 和 E_0 的上界，可以使 ε 任意小）、$\alpha_1\le\alpha_2$ 类函数 $\mathcal{K}$，以及 β 类函数 $\mathcal{KL}$，使得对于每个满足 $\|\tilde z_0^\circ\|\le\alpha_2^{-1}(\alpha_1(\delta))$ 的 $\tilde z_0^\circ=(\eta_0^\circ,\tilde\xi_0^\circ)\in\mathbb{R}^n$

(a) Krasovskii 解 $z_0=(\eta_0,\xi_0)\colon[0,\infty)\to\mathcal{C}_0$ 由 $z_0(0)=\tilde z_0^\circ+(0,\xi_0^\star(0))$ 发起的 (57) 解存在；并且

(b) 存在 $T_0>0$（依赖于 $\tilde z_0^\circ$ 和 ε），使得 (57) 的每个 Krasovskii 解都满足

$$\|\tilde z_0(t)\|\le\begin{cases}\beta(\|\tilde z_0^\circ\|,t), & t\in[0,T_0]\\ \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\varepsilon)), & t\in[T_0,\infty).\end{cases}\tag{78}$$

□

证明。我们将确定 $\mathrm{M}^{\xi_0^\star}$、$\mathrm{M}^{\kappa_0^\star}$ 和 $\mathrm{M}^{E_{ij}}$ 关于 $1\le i,\ j\le i_0$ 的一个条件，在该条件下，对于所有满足 (56) 和 (68) 的 $\xi_0^\star$、$\kappa_0^\star$ 和 E_0，定理中的结论均成立。设 $0<\mathrm{r}_{\eta_0}\le\bar{\mathrm{r}}_{\eta_0}$ 且 $\mathrm{M}^{\xi_0^\star}<\mathrm{r}_{\tilde\xi_0}+\mathrm{M}^{\xi_0^\star}=\mathrm{r}_{\xi_0}$，使得

$$\tilde{\mathcal{E}}_0:=\mathrm{r}_{\eta_0}\mathcal{B}_{n-r_0}\times\mathrm{r}_{\tilde\xi_0}\mathcal{B}_{r_0}\subset\mathcal{E}_0:=\mathrm{r}_{\eta_0}\mathcal{B}_{n-r_0}\times\mathrm{r}_{\xi_0}\mathcal{B}_{r_0}\subset\mathcal{C}_0.$$

注意，$\mathrm{cl}(\mathcal{E}_0)$ 是 $\mathcal{C}_0$ 的一个紧子集，且 $\tilde z_0=(\eta_0,\xi_0)\in\mathcal{E}_0$ 蕴含 $z_0=(\eta_0,\xi_0)\in\mathcal{E}_0$。因此，引理 4.10 表明，对于每个 $\tilde z_0^\circ\in\mathcal{E}_0$，都存在一个局部 Krasovskii 解 $z_0\colon[0,T)\to\mathcal{E}_0$，它是从 $z_0(0)=\tilde z_0^\circ+(0,\xi_0^\star(0))$ 处出发的 (57) 的解，其中 $T>0$，并满足 $\tilde z_0(t)\in\mathcal{E}_0$ 对所有 $t\in[0,T)$ 均成立，且以下两个条件之一成立：$T=\infty$ 或 $\tilde z_0(T)\in\mathrm{bd}(\mathcal{E}_0)$。我们为整个系统 (75) 提出一个李雅普诺夫函数候选 $V\colon\mathcal{E}_0\to\mathbb{R}$，其形式如下：

$$V(\eta_0,\tilde\xi_0)=V_{\eta_0}(\eta_0)+V_{\tilde\xi_0}(\tilde\xi_0)\tag{79}$$

其中，V_{η_0} 在假设 4.12 中定义，$V_{\tilde\xi_0}$ 在（66）中给出。令 $\delta_0=\min\{\mathrm{r}_{\eta_0},\ \mathrm{r}_{\tilde\xi_0}\}$。注意，由于（79）中的 V 连续且正定，存在定义在 $[0,\delta_0]$ 上的 $\mathcal{K}$ 类函数 α_1 和 α_2，使得

$$\alpha_1(\|(\eta_0,\tilde\xi_0)\|)\le V(\eta_0,\tilde\xi_0)\le\alpha_2(\|(\eta_0,\tilde\xi_0)\|)$$

对所有（η_0，ξ_0），$\in \delta_0\mathcal{B}_n \subset \mathcal{E}_0$ [7, 引理 4.3]。

现在我们计算 η_0 的时间导数。首先注意到，$V_{\eta_0}(\eta_0)$ 在 $\delta_0\mathcal{B}_{n-r_0}$ 上是利普希茨的，利普希茨常数为 $\mathsf{L}_{V_{\eta_0}} > 0$；而 $\eta_0(t)$ 在 $[0,T)$ 上绝对连续。因此，映射 $t \mapsto V_{\eta_0}(\eta_0(t))$ 在 $[0,T)$ 上绝对连续且几乎处处可微。于是很容易看出，几乎处处有 $\dot{V}_{\eta_0}(\eta_0(t)) \leq D^+V_{\eta_0}(\eta_0(t)\ \dot{\eta}_0(t))$。[16]另一方面，根据引理 4.11，存在一个常数 $\mathsf{L}_{\mathcal{F}_0^\circ} > 0$ 满足[17]

$$\mathcal{F}_0^\circ[\eta_0,\xi_0] \subset \mathcal{F}_0^\circ[\eta_0,0] + \mathsf{L}_{\mathcal{F}_0^\circ}\|\xi_0\|\mathrm{cl}(\mathcal{B}_{n-r_0})$$

对所有 $(\eta_0,\xi_0) \in \mathcal{C}_0$ 均成立。这意味着，对于每个满足 (72) 的 $t \in [0,T)$，以及

$$\tau_3 \coloneqq G_0^\circ[z_0(t)](-K_0\tilde{\xi}_0(t) + \kappa_0^\star(t)),$$

(75a) 中 $\eta_0(t)$ 的时间导数 $\dot{\eta}_0(t)$ 满足

$$\dot{\eta}_0(t) = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$$

其中 τ_1 和 τ_2 满足以下条件：

$$\tau_1 \in \mathcal{F}_0^\circ[\eta_0(t),0], \quad \tau_2 \in \mathsf{L}_{\mathcal{F}_0^\circ}\|\xi_0(t)\|\mathrm{cl}(\mathcal{B}_{n-r_0}).$$

[16]由于 $\eta_0(t+h) = \eta_0(t) + \int_t^{t+h}\dot{\eta}_0(s)ds$ 对所有 t [34, 定理 7.20] 以及 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\dot{\eta}_0(s)ds = \dot{\eta}_0(t)$ 对几乎所有 t [34, 定理 7.11], V_{η_0} 的上界可计算为

$$\begin{aligned}\dot{V}_{\eta_0}(\eta_0(t)) &= \lim_{h\to 0}\frac{V_{\eta_0}(\eta_0(t+h)) - V_{\eta_0}(\eta_0(t))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[V_{\eta_0}\left(\eta_0(t) + h\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\dot{\eta}_0(s)ds\right) - V_{\eta_0}(\eta_0(t))\right] \\ &\leq \limsup_{h\downarrow 0,\tau\to\dot{\eta}_0(t)}\frac{V_{\eta_0}(\eta_0(t)+h\tau) - V_{\eta_0}(\eta_0(t))}{h} = D^+V_{\eta_0}(\eta_0(t),\dot{\eta}_0(t))\end{aligned}$$

几乎处处。

[17]由于 $\mathcal{U}[z_0]$ 在紧集 $\mathcal{C}_0$ 上是上半连续的，且每个 $\mathcal{U}[z_0] \subset \mathcal{B}_m$ 都是紧集，因此存在正常数 $\mathrm{M}_{\mathcal{U}}$，使得对所有 $z_0 \in \mathcal{C}_0$都有 $\mathcal{U}[z_0] \subset \mathrm{M}_{\mathcal{U}}\mathcal{B}_m$。为证明这一点，注意到对每个 $z_0 \in \mathcal{C}_0$，都存在紧集 $\mathcal{M}_{z_0} \subset \mathbb{R}^m$ 以及 z_0 的一个邻域 $\mathcal{N}_{z_0} \subset \mathbb{R}^n$，满足 $\mathcal{U}[\mathcal{N}_{z_0}] \subset \mathcal{M}_{z_0}$。由于 $\mathcal{M}_{z_0}$ 是紧集，对每个 $z_0 \in \mathcal{C}_0$，都存在正常数 M_{z_0}，满足 $\mathcal{M}_{z_0} \subset \mathrm{M}_{z_0}\mathcal{B}_m$。由于 $\{\mathcal{N}_{z_0} :\ z_0 \in \mathcal{C}_0\}$ 是紧集$\mathcal{C}_0$的一个开覆盖，因此存在有限子覆盖 $\{\mathcal{N}_1,\ldots,\mathcal{N}_N\}$，以及正常数 M_1、.....、M_N，满足 $\mathcal{C}_0 \subset \bigcup_{i=1}^N \mathcal{N}_i$，且对所有 $1 \leq i \leq N$都有 $\mathcal{U}[\mathcal{N}_i] \subset \mathrm{M}_i\mathcal{B}_m$。令 $\mathrm{M}_{\mathcal{U}}$ =为 M_1、.....、M_N}中的最大值，则有 $\mathcal{U}[\mathcal{C}_0] \subset \mathcal{U}[\bigcup_{i=1}^N \mathcal{N}_i] \subset \mathrm{M}_{\mathcal{U}}\mathcal{B}_m$。于是，$\mathcal{F}_0^\circ[\eta_0,\xi_0]$ 的上确界可表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0^\circ[z_0] &\subset f_0^\circ[\eta_0,0] + \mathsf{L}_{f_0^\circ}\|\xi_0\|\mathrm{cl}(\mathcal{B}_{n-r_0}) + (G_0N_0)[z_0]\big(\mathcal{U}[\eta_0,0] + L_{\mathcal{U}}\|\xi_0\|\mathrm{cl}(\mathrm{B}_m)\big) \\ &\subset \mathcal{F}_0^\circ[\eta_0,0] + \big((G_0N_0)[z_0] - (G_0N_0)[\eta_0,0]\big)\mathcal{U}[\eta_0,0] + (\mathsf{L}_{f_0^\circ} + \mathsf{M}_{G_0N_0}\mathsf{L}_{\mathcal{U}})\|\xi_0\|\mathrm{cl}(\mathcal{B}_{n-r_0}) \\ &\subset \mathcal{F}_0^\circ[\eta_0,0] + \mathsf{M}_{\mathcal{U}}\|(G_0N_0)[z_0] - (G_0N_0)[\eta_0,0]\|\mathrm{cl}(\mathcal{B}_{n-r_0}) + (\mathsf{L}_{f_0^\circ} + \mathsf{M}_{G_0N_0}\mathsf{L}_{\mathcal{U}})\|\xi_0\|\mathrm{cl}(\mathcal{B}_{n-r_0}) \\ &\subset \mathcal{F}_0^\circ[\eta_0,0] + (\mathsf{L}_{f_0^\circ} + \mathsf{M}_{G_0N_0}\mathsf{L}_{\mathcal{U}} + \mathsf{M}_{\mathcal{U}}\mathsf{L}_{G_0N_0})\|\xi_0\|\mathrm{cl}(\mathcal{B}_{n-r_0}).\end{aligned}$$

由于 $\tau_1' \to \tau_1$ 当且仅当 $\tau_1' + \tau_2 + \tau_3 \to \dot{\eta}_0(t)$，因此有[18]

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{\eta_0} &\le D^+ V_{\eta_0}(\eta_0(t), \dot{\eta}_0(t)) \\
&= \limsup_{h\downarrow 0,\, \tau_1' \to \tau_1} \frac{V_{\eta_0}(\eta_0(t) + h(\tau_1' + \tau_2 + \tau_3)) - V_{\eta_0}(\eta_0(t))}{h} \\
&\le D^+ V_{\eta_0}(\eta_0(t), \tau_1) + \mathsf{L}_{V_{\eta_0}}(\|\tau_2\| + \|\tau_3\|) \\
&\le -\bar{\alpha}_3(\|\eta_0(t)\|) + \mathsf{m}_1 \|\tilde{\xi}_0(t)\| + \mathsf{m}_2 \mathsf{M}_{\xi_0^\star} + \mathsf{m}_3 \mathsf{M}_{\kappa_0^\star}
\end{aligned} \tag{80}$$

其中

$$\mathsf{m}_1 = \mathsf{L}_{V_{\eta_0}}(\mathsf{L}_{\mathcal{F}_0^\circ} + \mathsf{M}_{G_0^\circ}\|K_0\|),\ \mathsf{m}_2 = \mathsf{L}_{V_{\eta_0}}\mathsf{L}_{\mathcal{F}_0^\circ},\ \mathsf{m}_3 = \mathsf{L}_{V_{\eta_0}}\mathsf{M}_{G_0^\circ}.$$

我们现在可以求出李雅普诺夫函数候选V时间导数的一个上界。根据假设 4.6，存在 $\mathsf{w}^\star \in (0,\infty)^{i_0}$，满足 $\mathsf{v}^\star := (\mathsf{Y} - \mathsf{Z})\mathsf{w}^\star \in (0,\infty)^{i_0}$。令 $\mathsf{v}_0^\star = \min\{\mathsf{v}_i^\star\}$，$\mathsf{w}_0 > 0$，$\mathsf{w} = \mathsf{w}_0\mathsf{w}^\star$，$\mathsf{v} = (\mathsf{Y} - \mathsf{Z})\mathsf{w}$，且 $\mathsf{v}_0 = \min\{\mathsf{v}_i\}$。显然，对于所有 $\mathsf{w}_0 > 0$，w 和 $(\mathsf{Y} - \mathsf{Z})\mathsf{w} \in (0,\infty)^{i_0}$，且 $\mathsf{v}_0 = \mathsf{w}_0\mathsf{v}_0^\star$。将 (80) 与 (70) 结合，可得

$$\begin{aligned}
\dot{V} \le\ & -\bar{\alpha}_3(\|\eta_0\|) + \left(\mathsf{w}_0 \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\mathsf{w}_i^\star \tilde{\sigma}_i}{\vartheta_i} \sum_{j=1}^{i} \mathsf{M}_{E_{ij}} \mathsf{L}_{\kappa_j}\right)\|\eta_0\| \\
& - (\mathsf{w}_0\mathsf{v}_0^\star - \mathsf{m}_1)\|\tilde{\xi}_0\| \\
& + \left(\mathsf{w}_0 \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\mathsf{w}_i^\star \tilde{\sigma}_i}{\vartheta_i} \sum_{j=1}^{i} \mathsf{M}_{E_{ij}} \mathsf{L}_{\kappa_j} + \mathsf{m}_2\right)\mathsf{M}_{\xi_0^\star} \\
& + \left(\mathsf{w}_0 \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\mathsf{w}_i^\star \tilde{\sigma}_i}{\vartheta_i} \sum_{j=1}^{i} \mathsf{M}_{E_{ij}} + \mathsf{m}_3\right)\mathsf{M}_{\kappa_0^\star}
\end{aligned}$$

对于所有 $\mathsf{w}_0 > 0$ 以及几乎所有 $t \in [0, T)$。最后，对于足够大的 $\mathsf{w}_0 > 0$ 以及足够小的 $\mathsf{M}^{E_{ij}}$、$\mathsf{M}^{\kappa_0^\star}$ 和 $\mathsf{M}^{\xi_0^\star}$，总能找到 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2 > 0$、$0 < \delta < \delta_0$ 和 $0 < \varepsilon < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(\delta)) \le \delta$，使其满足

$$\dot{V} \le -\mathsf{c}_1\bar{\alpha}_3(\|\eta_0\|) - \mathsf{c}_2\|\tilde{\xi}_0\| \quad (\varepsilon \le \|(\eta_0, \tilde{\xi}_0)\| \le \delta)$$

[18] $\dot{V}_{\eta_0}$ 的上界可求得为

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{\eta_0} &\le D^+ V_{\eta_0}(\eta_0(t), \dot{\eta}_0(t)) = \limsup_{h\downarrow 0, \tau \to \dot{\eta}_0(t)} \frac{V_{\eta_0}(\eta_0(t) + h\tau) - V_{\eta_0}(\eta_0(t))}{h} = \limsup_{h\downarrow 0, \tau \to \tau_1 + \tau_2 + \tau_3} \frac{V_{\eta_0}(\eta_0(t) + h\tau) - V_{\eta_0}(\eta_0(t))}{h} \\
&= \limsup_{h\downarrow 0, \tau - \tau_2 - \tau_3 \to \tau_1} \frac{V_{\eta_0}(\eta_0(t) + h\tau) - V_{\eta_0}(\eta_0(t))}{h} = \limsup_{h\downarrow 0, \tau_1' \to \tau_1} \frac{V_{\eta_0}(\eta_0(t) + h(\tau_1' + \tau_2 + \tau_3)) - V_{\eta_0}(\eta_0(t))}{h} \\
&\le \limsup_{h\downarrow 0, \tau_1' \to \tau_1} \frac{V_{\eta_0}(\eta_0(t) + h(\tau_1' + \tau_2 + \tau_3)) - V_{\eta_0}(\eta_0(t) + h\tau_1')}{h} + \limsup_{h\downarrow 0, \tau_1' \to \tau_1} \frac{V_{\eta_0}(\eta_0(t) + h\tau_1') - V_{\eta_0}(\eta_0(t))}{h} \\
&\le \limsup_{h\downarrow 0, \tau_1' \to \tau_1} \frac{\mathsf{L}_{V_{\eta_0}}\|h(\tau_2 + \tau_3)\|}{h} + D^+ V_{\eta_0}(\eta_0(t), \tau_1) = D^+ V_{\eta_0}(\eta_0(t), \tau_1) + \mathsf{L}_{V_{\eta_0}}(\|\tau_2\| + \|\tau_3\|) \\
&\le -\bar{\alpha}_3(\|\eta_0(t)\|) + \mathsf{L}_{V_{\eta_0}}\big(\mathsf{L}_{\mathcal{F}_0^\circ}(\|\tilde{\xi}_0\| + \mathsf{M}_{\xi_0^\star}) + \mathsf{M}_{G_0^\circ}(\|K_0\|\|\tilde{\xi}_0\| + \mathsf{M}_{\kappa_0^\star})\big) \\
&= -\bar{\alpha}_3(\|\eta_0(t)\|) + \underbrace{\mathsf{L}_{V_{\eta_0}}(\mathsf{L}_{\mathcal{F}_0^\circ} + \mathsf{M}_{G_0^\circ}\|K_0\|)}_{\mathsf{m}_1}\|\tilde{\xi}_0\| + \underbrace{\mathsf{L}_{V_{\eta_0}}\mathsf{L}_{\mathcal{F}_0^\circ}}_{\mathsf{m}_2}\mathsf{M}_{\xi_0^\star} + \underbrace{\mathsf{L}_{V_{\eta_0}}\mathsf{M}_{G_0^\circ}}_{\mathsf{m}_3}\mathsf{M}_{\kappa_0^\star}
\end{aligned}$$

几乎处处。通过类似的计算并应用 [7, 定理 4.18][19]，可得到一个 $\mathcal{KL}$ 类函数 β，使得对于每个 $\|(\eta_0(0)\ \tilde{\xi}_0(0))\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(\delta))$，都存在 $T_0 > 0$（取决于$(\eta_0(0)\ \tilde{\xi}_0(0))$和 ε），使得（57）的每个 Krasovskii 解都满足（78）。[20] 显然，（78）蕴含 $T = \infty$。 □

该定理的一个直接推论是，对于所有 $t \in [T_0, \infty)$，$\kappa_i[z_0]$ 在 $\mathcal{C}_0$ 上一致有界，正如

$$\|\kappa_i[z_0]\| \le \mathsf{L}_{\kappa_i}\|z_0\| \le \mathsf{L}_{\kappa_i}\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\varepsilon)).$$

因此，第 i 个误差动力学（75b）的分析可以与低优先级任务 $\mathfrak{T}_{i+1}$、.....、$\mathfrak{T}_k$ 的不可预测行为解耦。这使得对跟踪误差 ξ_i（t）的上界 ˜ 的求解得出了不同的结果。

推论 4.15. 假设定理 4.14 的所有假设均成立，$\|\tilde{z}_0^\circ\| \le \alpha_2^{-1}(\alpha_1(\delta))$，且存在 $i_0 \le i_1 \le k$ 和 $T_1 \in [T_0, \infty)$，使得对每个 $i_0 + 1 \le i \le i_1$，

1. (57) 的 Krasovskii 解 $z_0(t)$ 满足 $z_0(0) = \tilde{z}_0^0 + (0, \xi_0^\star(0))$，且几乎处处满足 (57b)（在 $[T_1, \infty$ 上）；

2. 存在正常数 ς_i 和 ϑ_i 以及矩阵 K_i、$X_i = X_i^T > 0$和 R_i，使得沿着轨迹 $z_0(t)$，几乎处处在 $[T_1, \infty)$ 上满足 (63)。 (58)

那么，对于 $1 \le j \le i \le i_1$，存在 a_{ij}、b_{ij}、$\mathsf{c}_i > 0$，使得

$$\|\tilde{\xi}_i(t)\| \le \sum_{j=1}^{i} \mathsf{a}_{ij}\|\tilde{\xi}_j(T_1)\|e^{-\mathsf{b}_{ij}(t-T_1)} + \mathsf{c}_i \tag{81}$$

对所有 $1 \le i \le i_1$ 和 $t \in [T_1, \infty)$ 均成立。此外，如果存在 $1 \le i \le i_1$，使得对于所有 $1 \le j \le i$ 和所有 $t \in [T_1, \infty)$，$E_{ij}[z_0(t)] = 0$，那么 (81) 在 $\mathsf{c}_i = 0$ 时成立。□

˜证明。定义 $\mathsf{M}^\circ_{E_{ij}} := \sup\{\|E_{ij}[z_0(t)]\| : t \in [T_1, \infty)\}$。根据推论的第 2) 项，我们对低优先级任务 $i_0 + 1 \le i \le i_1$ 取 (64) 中的 $V_{\tilde{\xi}_i}(\xi_i)$。由 (78)、Gr¨onwall 不等式、[32, 引理2], 以及 $\|\tilde{\xi}_i\| \le V_{\tilde{\xi}_i}(\tilde{\xi}_i)/\sigma^{1/2}_{\text{最小值}}(X_i)$，可得 $\|\tilde{\xi}_i(t)\|$ 的一个上界：

$$\|\tilde{\xi}_i(t)\| \le \sqrt{\tilde{\sigma}_i}\|\tilde{\xi}_i(T_1)\|e^{-\vartheta_i(t-T_1)} \tag{82a}$$

$$+ \tilde{\sigma}_i \sum_{j=1}^{i-1} \mathsf{M}^\circ_{E_{ij}}\|K_j\| \int_{T_1}^{t} \|\tilde{\xi}_j(s)\|e^{-\vartheta_i(t-s)}ds \tag{82b}$$

$$+ \frac{\tilde{\sigma}_i}{\vartheta_i} \sum_{j=1}^{i} \mathsf{M}^\circ_{E_{ij}}\big(\mathsf{L}_{\kappa_j}(\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\varepsilon)) + \mathsf{M}_{\xi_0^\star}) + \mathsf{M}_{\kappa_j^\star}\big) \tag{82c}$$

对所有 $1 \le i \le i_1$ 和所有 $t \in [T_1, \infty)$。其余部分的证明可通过利用数学归纳法证明（81）来完成：推导过程很直接，因此此处省略。[21] 相反，我们注意到，当 $i = 1$ 且 $\mathsf{a}_{11} = \sqrt{\tilde{\sigma}_1}$、$\mathsf{b}_{11} = \vartheta_1$ 和 c_1 等于（82c）时，（81）成立。最后，如果 $E_{ij}[z_0(t)] = 0$对所有 $1 \le j \le i$ 和 $t \in [T_1, \infty)$ 成立，那么 $\mathsf{c}_i = 0$，因为（82b）和（82c）均为零。 □

[19]事实上，[7, 定理 4.18] 要求 $V(\eta_0, \tilde{\xi}_0)$ 连续可微，但这一条件在某些 t 处可能不成立。然而，利用微积分基本定理 [34,定理 7.20]，可以轻松地调整这一条件以完成该证明。[20] 证明见附录 I。[21]证明中省略的部分见附录 J。

注 4.16。尽管用于定义零动态（77）的集值映射 $\mathcal{U}$ 总是存在，但并不保证存在满足（76）的利普希茨函数 $V_{\eta_0}(\eta_0)$。事实上，这种 V_{η_0} 的存在性与 $\mathcal{U}$ 直接相关。为此，令 $u_{i_0+1:\,k+1}[t,z_0]=0$ 对所有 $(t,z_0)\in[0,\infty)\times\mathcal{C}_0$ 成立，这是通过对所有 $i_0<i\le k$、$1\le j\le i$ 和 $z_0\in\mathcal{C}_0$ 选取 $\Gamma_{ij}[z_0]=0$ 和 $u_f[t,z_0]=0$ 得到的。于是，对于所有 $z_0\in\mathcal{C}_0$，可以将 $\mathcal{U}$ 选为 $\mathcal{U}[z_0]=\alpha\mathrm{cl}(\mathcal{B}_m)$，其中常数 $\alpha>0$ 可任意小。因此，假设 4.12 可归结为微分方程 $\dot\eta_0=f_0^\circ[\eta_0,0]$ 的平衡点 0 的渐近稳定性。注意，随着 $\mathcal{U}[z_0]$ 的规模增大，零动态 $\dot\eta_0=\mathcal{F}_0^\circ[\eta_0,0]$ 的稳定裕度会减小，这意味着可能存在一个允许（76）成立的 $\mathcal{U}[z_0]$ 最大规模。

从这一角度来看，定理 4.14 和推论 4.15 为所提出的控制框架在实际应用中的使用提供了设计指南。首先，我们设计 $u_{1:i_0}$，并找到一个集值映射 $\mathcal{U}$，使其满足 (76)。然后，可以设计 $u_{i_0+1:\,k+1}$，使得在 $[0,\infty)\times\mathcal{C}_0$ 上有 $\mathcal{U}_{i_0+1:k+1}[t,z_0]\subset\mathcal{U}[z_0]$。需要注意的是，由于奇异性，并非每个用于 $i_0<i\le k$ 的参考输出信号 $y_i^\star$ 都能通过输出 y_i 跟踪。因此，最理想的情况之一是存在 $i_0<i_1\le k$ 和 $T_1\ge T_0$，使推论 4.15 中的假设成立。为满足这一条件，我们需要在条件 $\mathcal{U}_{i_0+1:\,k+1}[t,z_0]\subset\mathcal{U}[z_0]$ 下，针对 $i_0<i\le k$ 尝试各种 Γ_{ij} 和 $y_i^\star$。这清楚地表明，优先级输出跟踪提供了一个框架，使我们能够尝试跟踪可能存在奇异性的低优先级任务 $\mathfrak{T}_{i_0+1}$，……，$\mathfrak{T}_k$ 的输出，同时保证对高优先级任务 $\mathfrak{T}_1$，……，$\mathfrak{T}_{i_0}$ 的输出跟踪。□

5 结论

本文提出了一种基于任务优先级的输入-输出线性化扩展方法。本工作的主要贡献有两点。首先，该方法使我们能够将成熟的输入-输出线性化理论应用于不可输入输出线性化的输入仿射多变量系统。其次，该方法提供了一个框架，用于构建同时存在关键和非关键控制问题的复杂控制系统，从而由高优先级任务处理关键部分，由低优先级任务处理非关键部分。因此，我们能够将输入-输出线性化应用于更复杂的实际问题。

作为首次尝试基于任务优先级将输入-输出线性化扩展到不可线性化系统，本文仍有一些尚未解决的问题：1）可以进一步利用非线性结构算法扩展基于任务优先级的方法；2）尚未充分理解由优先级引起的非光滑性；3）尚未充分研究满足非光滑误差动力学的轨迹是否存在；4）需要开发一种高效算法，以在条件 $\mathcal{U}_{i_0+1:\,k+1}[t,z_0]\subset\mathcal{U}[z_0]$ 下为 $i_0<i\le k$ 求取 Γ_{ij} 和 $y_i^\star$；5）优先级输出跟踪问题或许可以通过不具有式（50）和（54）形式的优先级控制输入来求解；6）需要将所提出的定理应用于实际问题。这些问题留待未来工作解决。

引理 2.2 的证明

我们为不熟悉多变量非线性系统输入输出反馈线性化的读者总结了 [8, 引理 5.1.1、命题 5.1.2、注 5.1.3] 。我们首先证明

行向量

$$
\begin{aligned}
&dh_1(x_0), dL_f h_1(x_0), \ldots, dL_f^{r_1-1} h_1(x_0),\\
&dh_2(x_0), dL_f h_2(x_0), \ldots, dL_f^{r_2-1} h_2(x_0),\\
&\ddots\\
&dh_p(x_0), dL_f h_p(x_0), \ldots, dL_f^{r_p-1} h_p(x_0)
\end{aligned}
$$

线性无关。然后，它还将证明 $r \le n$。不失一般性，假设 $r_1 \ge r_i$ 对于 $2 \le i \le p$。考虑以下矩阵。

$$
X_i = \begin{bmatrix} dh_i \\ \vdots \\ dL_f^{r_i-1} h_i \end{bmatrix}(x_0) \in \mathbb{R}^{r_i \times n} \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dh_1 \\ \vdots \\ dL_f^{r_1-1} h_1 \\ \vdots \\ dh_p \\ \vdots \\ dL_f^{r_p-1} h_p \end{bmatrix}(x_0) \in \mathbb{R}^{r \times n}
$$

and

$$
Y = \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m & \cdots & ad_f^{r_1-1} g_1 & \cdots & ad_f^{r_1-1} g_m \end{bmatrix}(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times m r_1}.
$$

我们需要下一个引理:

引理 A.1。 *[8,* 引理 4.1。*2]* 设 ϕ 为实值函数， f、g 为向量场，且它们都定义在 $\mathbb{R}^n$ 的开集 U 中。那么，对于任意选取的 s、j、$r \ge 0$,

$$
L_{ad_f^{j+r} g} L_f^s \phi(x) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} L_f^{r-i} L_{ad_f^j g} L_f^{s+i} \phi(x).
$$

因此，这两组条件

1. $L_g \phi(x) = L_g L_f \phi(x) = \cdots = L_g L_f^j \phi(x) = 0, \forall x \in U$
2. $L_g \phi(x) = L_{ad_f g} \phi(x) = \cdots = L_{ad_f^j} \phi(x) = 0, \forall x \in U$

等价。 □

根据引理 A.1 和相对阶，我们有

$$
L_{ad_f^a g_j} L_f^b h_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le a+b < r_i - 1 \\ (-1)^a L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x), & a+b = r_i - 1 \end{cases}
$$

对于所有 i、j、a、b。然后，我们可以构建[22]。

$$X_iY = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{r_i-1}j_i(x) & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -j_i(x) & \cdots & * & * & * \\ j_i(x) & * & \cdots & * & * & * \end{bmatrix}$$

其中 j_i 是 $J(x)$ 的第 i 行。因此，很容易看出，矩阵 XY 在可能对行重新排序后，呈现出分块三角结构，其中对角块由矩阵 (2) 的行组成。这表明矩阵 XY 的行线性无关，也就是说，矩阵 X 的行线性无关。

自从

$$J(x) = \begin{bmatrix} dL_f^{r_1-1}h_1(x) \\ \vdots \\ dL_f^{r_p-1}h_p(x) \end{bmatrix} G(x) \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

在 x_0 处是非奇异的根据相对阶的定义，存在 $g \in \{g_1, \ldots, g_m\}$ 使得向量 $g(x_0)$和

$$\begin{bmatrix} dL_f^{r_1-1}h_1(x_0) \\ \vdots \\ dL_f^{r_p-1}h_p(x_0) \end{bmatrix} g(x_0)$$

均非零，因此，分布 $\Delta = \text{span}\{g\}$在 x_0附近是非奇异的。由于该分布是一维的，它也是对合的。因此，根据弗罗贝尼乌斯定理，我们可以推得存在 $n-1$ 个实值函数 $\zeta_1(x) \ldots, \zeta_{n-1}(x)$，定义在 x_0的邻域 $\mathcal{D}$ 内，使得对所有 $x \in \mathcal{D}$，$d\zeta_1(x) \ldots, d\zeta_{n-1}(x)$ 均线性无关，且

$$\text{span}\{d\zeta_1, \ldots, d\zeta_{n-1}\} = \Delta^{\perp} \iff d\zeta_i(x)g(x) = 0,\ \forall x \in \mathcal{D},\ \forall i \in \overline{1, n-1}. \tag{83}$$

[22]

$$\begin{aligned}
X_iY &= \begin{bmatrix} dh_i(x) \\ \vdots \\ dL_f^{r_1-1}h_i(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(x) & \cdots & g_m(x) & \cdots & ad_f^{r_1-1}g_1(x) & \cdots & ad_f^{r_1-1}g_m(x) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} dh_i(x)g_1(x) & \cdots & dh_i(x)g_m(x) & \cdots & dh_i(x)ad_f^{r_1-1}g_1(x) & \cdots & dh_i(x)ad_f^{r_1-1}g_m(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ dL_f^{r_1-1}h_i(x)g_1(x) & \cdots & dL_f^{r_1-1}h_i(x)g_m(x) & \cdots & dL_f^{r_1-1}h_i(x)ad_f^{r_1-1}g_1(x) & \cdots & dL_f^{r_1-1}h_i(x)ad_f^{r_1-1}g_m(x) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_{g_1}h_i(x) & \cdots & L_{g_m}h_i(x) & \cdots & L_{ad_f^{r_1-1}g_1}h_i(x) & \cdots & L_{ad_f^{r_1-1}g_m}h_i(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1}L_f^{r_1-1}h_i(x) & \cdots & L_{g_m}L_f^{r_1-1}h_i(x) & \cdots & L_{ad_f^{r_1-1}g_1}L_f^{r_1-1}h_i(x) & \cdots & L_{ad_f^{r_1-1}g_m}L_f^{r_1-1}h_i(x) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & (-1)^{r_i-1}L_{g_1}L_f^{r_i-1}h_i(x) & \cdots & (-1)^{r_i-1}L_{g_m}L_f^{r_i-1}h_i(x) & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1}L_f^{r_i-1}h_i(x) & \cdots & L_{g_m}L_f^{r_i-1}h_i(x) & \cdots & L_{ad_f^{r_i-1}g_1}L_f^{r_i-1}h_i(x) & \cdots & L_{ad_f^{r_i-1}g_m}L_f^{r_i-1}h_i(x) & * & \cdots & * \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{r_i-1}L_GL_f^{r_i-1}h_i(x) & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & (-1)^{r_i-2}L_GL_f^{r_i-1}h_i(x) & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (-1)L_GL_f^{r_i-1}h_i(x) & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ L_GL_f^{r_i-1}h_i(x) & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

引理 A.2. 设 A_1 和 A_2 是 $\mathbb{R}^n$的子空间。则，$(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$。 □

证明。令 $v \in A_1^\perp \cap A_2^\perp$。那么，对于所有 $a_1 \in A_1$ 和所有 $a_2 \in A_2$，$v \cdot a_1 = v \cdot a_2 = 0$。由此可知，对于所有 $a_1 \in A_1$ 和所有 $a_2 \in A_2$，$v \cdot (a_1 + a_2) = v \cdot a_1 + v \cdot a_2 = 0$。因此，$v \in (A_1 + A_2)^\perp$ 且$A_1^\perp \cap A_2^\perp \subset (A_1 + A_2)^\perp$。令 $v \notin A_1^\perp \cap A_2^\perp$。不失一般性，$v \notin A_1^\perp$。那么，存在$a_1 \in A_1$ 满足 $v \cdot a_1 = v \cdot (a_1 + 0) \neq 0$。由于 $a_1 + 0 \in A_1 + A_2$，我们有 $v \notin (A_1 + A_2)^\perp$。因此，$(A_1 + A_2)^\perp \subset A_1^\perp \cap A_2^\perp$。所以，$(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$。

□

令 $S = \{dh_1, \ldots, dL_f^{r_1-1}h_1, \ldots, dh_p, \ldots, dL_f^{r_p-1}h_p\}$ 和 $S(x) = \{dh_1(x) \ldots, dL_f^{r_p-1}h_p(x)\}$。容易证明

$$\dim(\Delta^\perp + \text{span}S) = n \tag{84}$$

在 x_0处。因为，假设这不成立。那么，

$$\begin{aligned}
&\dim(\Delta^\perp(x_0) + \text{span}S(x_0)) < n \\
\iff &\Delta^\perp(x_0) + \text{span}S(x_0) \neq \mathbb{R}^n \\
\iff &(\Delta^\perp(x_0) + \text{span}S(x_0))^\perp \neq \{0\} \\
&\quad \downarrow \quad \text{Lemma A.2} \\
\iff &\Delta(x_0) \cap \text{span}S(x_0)^\perp \neq \{0\}
\end{aligned}$$

也就是说，向量 $g(x_0)$ 湮灭了

$$\text{span}\left\{ \begin{array}{l} dh_1(x_0), \ldots, dL_f^{r_1-1}h_1(x_0), \\ \ldots, \\ dh_p(x_0), \ldots, dL_f^{r_p-1}h_p(x_0) \end{array} \right\}.$$

但这与事实矛盾，因为 g 满足

$$\begin{bmatrix} dL_f^{r_1-1}h_1(x_0) \\ \vdots \\ dL_f^{r_p-1}h_p(x_0) \end{bmatrix} g(x_0) \neq 0.$$

由（83）、（84）以及 span$S$ 的维数为 r这一事实，根据证明的第一部分可知

$$\begin{pmatrix} \Delta^\perp = \text{span}\{d\zeta_1, \ldots, d\zeta_{n-1}\} \\ S = \{dh_1, \ldots, dL_f^{r_1-1}h_1, \ldots, dh_p, \ldots, dL_f^{r_p-1}h_p\} \\ \dim(\Delta^\perp) = n - 1 \\ \dim(\text{span}S) = r = pr \\ \dim(\Delta^\perp + \text{span}S) = n \end{pmatrix}$$

意味着

$$\text{span}\left\{ \begin{array}{l} dh_1, \ldots, dL_f^{r_1-1}h_1, \\ \ldots, \\ dh_p, \ldots, dL_f^{r_p-1}h_p, \\ d\zeta_1, \ldots, d\zeta_{n-1} \end{array} \right\} = \mathbb{R}^n.$$

因此，我们得出结论：在集合 $\{\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-1}\}$ 中，可以找到 $n-r$ 个函数，不失一般性，设为 ζ_1、...、ζ_{n-r}，它们具有这样的性质： n 微分

$$\begin{aligned}&d\zeta_1,\ldots,d\zeta_{n-r},\\&dh_1,\ldots,dL_f^{r_1-1}h_1,\\&\ldots,\\&dh_p,\ldots,dL_f^{r_p-1}h_p\end{aligned}$$

在 x_0 处线性无关。由于任何其他形式为 $\zeta_i'(x)=\zeta_i(x)+c_i$ 的函数组，其中 c_i 是一个常数，都满足相同的条件:

$$\begin{aligned}&\zeta_i'\in C^\bullet \iff \zeta_i\in C^\bullet\\&d\zeta_i'(x)=d\zeta_i(x)\\&\dim\{d\zeta_1'(x),\ldots,d\zeta_{n-1}'(x)\}=\dim\{d\zeta_1(x),\ldots,d\zeta_{n-1}(x)\}\\&L_g\zeta_i'(x)=d\zeta_i'(x)g(x)=d\zeta_i(x)g(x)=L_g\zeta_i(x)=0,\end{aligned}$$

这些函数在点 x_0 处的取值可以任意选取。

定义 $\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为

$$\Phi(x)=\operatorname{col}\begin{pmatrix}\zeta_1(x),\ldots,\zeta_{n-r}(x),\\h_1(x),\ldots,L_f^{r_1-1}h_1(x),\\\ldots,\\h_p(x),\ldots,L_f^{r_p-1}h_p(x)\end{pmatrix}$$

其中，当 $r=n$ 时省略 $\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-r}$。由于 Φ 连续可微且 $\Phi(x_0)$ 非奇异，因此 Φ 在 x_0 的某个邻域上是微分同胚。

设 $p=m$、$r<n$ 和分布 $\Delta=\{g_1,\ldots,g_m\}$ 在 x_0 附近是对合的。根据相对阶的定义， $J(x)$ 是非奇异的，因此我们有

$$p\le\operatorname{rank}(G(x_0))\le m\le n.$$

因此， $G(x_0)$是非奇异的， Δ也是如此。由于 Δ是非奇异且对合的，根据弗罗贝尼乌斯定理，存在 $n-m$ 个实值函数 $\zeta_1(x)\ldots,\zeta_{n-m}(x)$，定义在 x_0的邻域 $\mathcal{D}$ 中，使得对于所有 $x\in\mathcal{D}$， $d\zeta_1(x)\ldots,d\zeta_{n-m}(x)$均线性无关，并且

$$\operatorname{span}\{d\zeta_1,\ldots,d\zeta_{n-m}\}=\Delta^\perp \iff L_{g_j}\zeta_i(x)=0,\,\forall x\in\mathcal{D},\,\forall i\in\overline{1,n-m},\,\forall j\in\overline{1,m}.$$

现在考虑余分布。

$$\Omega=\operatorname{span}\{dL_f^jh_i:1\le i\le p,\,0\le j\le r_i-1\}$$

其维数为 r。

请注意,

$$\begin{aligned}&\Delta(x_0)\cap\Omega^\perp(x_0)=\{0\}\\\iff&(\Delta(x_0)\cap\Omega^\perp(x_0))^\perp=\mathbb{R}^n\\\iff&\Delta^\perp(x_0)+\Omega(x_0)=\mathbb{R}^n\\\iff&\dim(\Delta^\perp(x_0)+\Omega(x_0))=n.\end{aligned}\tag{85}$$

因为，如果这不成立，就会存在一个非零向量属于 $\Delta(x_0)$，即一个形如.....的向量

$$g = \sum_{i=1}^{p} c_i g_i(x_0) = G(x_0) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

that 将湮灭 $\Omega(x_0)$ 的所有向量，但这与事实矛盾，因为

$$\begin{bmatrix} dL_f^{r_1-1}h_1(x_0) \\ \vdots \\ dL_f^{r_p-1}h_p(x_0) \end{bmatrix} g = J(x) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} = 0$$

由 $J(x_0)$ 的非奇异性可推出 $c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0$。由于

$$\begin{aligned} \operatorname{span}\{d\zeta_1, \ldots, d\zeta_{n-m}\} &= \Delta^{\perp} \\ \dim(\Delta^{\perp}(x_0) + \Omega(x_0)) &= n \\ \dim(\Omega(x_0)) &= r, \end{aligned}$$

我们得出结论：在集合 $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m}\}$ 中，可以找到 $n-r$ 个函数，不妨设为 $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-r}$，它们具有如下性质： n 微分

$$d\zeta_1, \ldots, d\zeta_{n-r}, dh_1, \ldots, dL_f^{r_1-1}h_1, \ldots, dh_p, \ldots, dL_f^{r_p-1}h_p$$

线性相关于 在 x_0 处线性相关。按构造，函数 $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-r}$ 满足

$$d\zeta_i(x) g_j(x) = L_{g_j}\zeta_i(x) = 0$$

对 x_0 附近的所有 x、所有 $1 \le i \le n-r$ 以及所有 $1 \le j \le m$，均成立。

B 引理 2.3 的证明

根据相对阶的定义和 $N(x)$，我们有 $(d\phi_i^j GN)(x) = (L_G L_f^{j-1} h_i N)(x) = 0$，对所有 $1 \le i \le p$ 和 $1 \le j \le r_i - 1$ 以及

$$\big(\operatorname{col}(d\phi_1^{r_1}, \ldots, d\phi_p^{r_p})GN\big)(x) = (JN)(x) = 0.$$

因此，$(d\phi_{n-r+1:n}GN)(x) = 0$。如果 $L_G\phi_{1:n-r}(x) = 0$，那么

$$(d\Phi GN)(x) = \begin{bmatrix} L_G\phi_{1:n-r}N \\ d\phi_{n-r+1:n}GN \end{bmatrix}(x) = 0$$

并且 $(GN)(x) = 0$，因为 $d\Phi(x)$ 可逆。如果 $(GN)(x) = 0$，那么 $(G_\eta N)(x) = (d\phi_{1:n-r}GN)(x) = 0$。如果 $(GN)(x) \neq 0$，那么 $(d\Phi GN)(x) \neq 0$ 且 $(d\phi_{1:n-r}GN)(x) \neq 0$，因为 $d\Phi(x)$ 可逆且 $(d\phi_{n-r+1:n}GN)(x) = 0$。

假设 $G(x)$ 在 $\mathcal{D}$ 上非奇异。若 $p = m$，则 $N(x) = 0$ 且 $(GN)(x) = 0$。若 $p < m$，则 $(G^+GN)(x) = N(x) \neq 0$ 且 $(GN)(x) \neq 0$。因此，$(GN)(x) = 0$ 当且仅当 $p = m$。令 $r = n$。则流形 (9) 变为 $\mathcal{Z} = \{0\}$。因此，从 0 出发的 (11) 的每个解都应保持为 0。因此，对于任意 $u_f(t) \in \mathbb{R}^m$，$f^\circ(0) + (GN)(0)u_f(t) = 0$，这意味着 $(GN)(0) = 0$。

C 引理 2.5 的证明

1）记 $M_i = J_i N_{1:i-1}$，并令 $1 \le j < i \le k$。由于

$$\mathcal{R}(J_j^T) \subset \mathcal{R}(J_{1:i-1}^T) \perp \mathcal{N}(J_{1:i-1}) \subset \mathcal{N}(J_{1:j-1}),$$

我们有 $M_i M_j^T = J_i N_{1:i-1} J_j^T = 0$和

$$P_i P_j = M_i^+ M_i M_j^T (M_j M_j^T)^+ M_j = 0.$$

于是，$P_i P_j = 0$ 对于 $1 \le i \ne j \le k+1$ 成立，因为正交投影算子是对称且幂等的。

2–6) 根据 [35], $N_{1:i} = N_{1:i-1} - P_i$。于是，$N_{1:i} = I_m - P_{1:i}$ 和 $J_i - J_i P_{1:i} = J_i N_{1:i} = 0$。接下来，$M_i = J_i - J_i P_{1:i-1} = J_i P_{1:i} - J_i P_{1:i-1} = J_i P_i$和秩$(P_i)$ =秩$(M_i^+ M_i)$ =秩(M_i) =秩$(J_i P_i)$ ≤秩(J_i) $\le p_i$。最后，$\rho_{1:i}$ =秩$(P_{1:i})$ $= m$ –秩$(N_{1:i})$ =秩$(J_{1:i})$ $\le p_{1:i}$，由第一条性质和秩-零度定理可得。

~~算法 1 查找 $\begin{bmatrix} J(x) & 0 \end{bmatrix} = \bar{L}\bar{Q}$。~~

1: $V =$ col$(v_1, \ldots, v_p)$ $\leftarrow \begin{bmatrix} J(x) & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times \max\{p,m\}}$
2: $\bar{Q} =$ 列$(\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_p)$ $\leftarrow 0 \in \mathbb{R}^{p \times \max\{p,m\}}$
3: $\bar{L} = [l_{ij}] \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^{p \times p}$
4: </style}对 $j = 1$ 到 p 执行
5: $l_{jj} = \|v_j\|$
6: 如果 $l_{jj} > 0$ 则
7: $\bar{q}_j = v_j / l_{jj}$
8: 如果 $j < p$ 则
9: 对于 $i = j+1$ 到 p 执行
10: $l_{ij} = \langle v_i, \bar{q}_j \rangle$
11: $v_i = v_i - l_{ij} \bar{q}_j$

7）运行算法 1。于是，我们得到 $\begin{bmatrix} J(x) & 0 \end{bmatrix} = \bar{L}\bar{Q}$，其中 $\bar{L}$ 为下三角矩阵；当$1 \le i \le p$时，$l_{ii} \ge 0$；当 $l_{jj} = 0$时，$l_{ij} = 0$；$\bar{q}_i = 0$ 当且仅当 $l_{ii} = 0$；并且 Q 的非零行 ¯是正交归一的。注意，如果 $p > m$，那么根据算法 1 的第 7 行，有$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \hat{} Q & 0 \end{bmatrix}$，其中 ˆ $Q \in \mathbb{R}^{p \times m}$。此外，$\bar{L}$ 的非零对角元素总数等于$\rho =$ rank$(J(x))$ $\le$ min$\{p, m\}$。令 a_1，.....，a_ρ满足：当 $1 \le i \le \rho$时，$l_{a_i a_i} \ne 0$。

¯ ˆ 设 l_i 和 q_i 分别为 L 的第 i列和 Q的第 i行。定义

$$\tilde{L} = \mathrm{row}\left(l_{a_1}, \ldots, l_{a_\rho}, 0_{m \times (m-\rho)}\right) \in \mathbb{R}^{p \times m}$$
$$\check{Q} = \mathrm{col}\left(q_{a_1}, \ldots, q_{a_\rho}, 0_{(m-\rho) \times m}\right) \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

于是，我们有

$$\begin{bmatrix} J(x) & 0 \end{bmatrix} = \bar{L}\bar{Q} = \sum_{i=1}^{\rho} l_{a_i} \begin{bmatrix} q_{a_i} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{L}\check{Q} & 0 \end{bmatrix}$$

并且对于 $1 \le i \le k$，有 $J_i(x) = \sum_{j=1}^{i} \tilde{L}_{ij} \check{} Q_i$，其中 $\tilde{L}_{ij} \in \mathbb{R}^{p_i \times \rho_i}$ 是 $\tilde{L}$的第 (i, j) 个块；ˇ $Q_i \in \mathbb{R}^{\rho_i \times m}$ 是 ˇ Q的第 i个行块；rank$(\tilde{L}_{ii})$ $= \rho_i$；且 ˇ $Q_{k+1} = 0$。

$Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$通过将 ˇ Q中的零行替换为 $p_1, \ldots, p_{m-\rho}$ 的一组正交归一基。构造 $\tilde{Q}$ 是正交的。

若 $\rho < m$，则令 $\{p_1, \ldots, p_{m-\rho}\} \subset \mathbb{R}^m$ 为 $\mathcal{N}(J(x))$ 的一组正交归一基。构造 $\tilde{Q}$ 是正交的。 ˜ ˜令 $L_e(x) = L$ 且 $Q_e(x) = Q$，即可得到完整 LQ 分解 (19)。

由于 L_{ii} Q_i $L_{ii}Q_i + L_{ii}Q_i = Q_i^T L_{ii}^+ L_{ii} Q_i^T =$满秩且行正交 $Q_i^T Q_i$ $1 \le i \le k$ 19 21 $J_i\ x = \sum_{j=1}^{i} L_{ij} Q_j$ 归一，因此对于，我们有 ( ) ( )。根据分解 ( ) 和定义 ( )，对于 $1 \le i \le k$，( )。因此，$J_1 P_1 = J_1 = L_{11} Q_1$ 和 $P_1 = (L_{11}Q_1)^+ (L_{11}Q_1) = Q_1^T Q_1$。假设$J_j P_j = L_{jj} Q_j$且对于 $1 \le j \le i-1$，$P_j = Q_j^T Q_j$。那么，

$$J_i P_i = J_i - (L_{i1}Q_1 + \cdots + L_{i,i-1}Q_{i-1}) = L_{ii} Q_i$$

并且 $P_i = (L_{ii}Q_i)^+ (L_{ii}Q_i) = Q_i^T Q_i$。由于 $P_{k+1} = I_m - P_{1:k} = I_m - \sum_{i=1}^{k} Q_i^T Q_i = Q_{k+1}^T Q_{k+1}$，我们有$J_i P_j = (L_{i1}Q_1 + \cdots + L_{ii}Q_i) Q_j^T Q_j = L_{ij} Q_j$对所有 $1 \le i \le k$和 $1 \le j \le k+1$均成立。

D 引理 3.1 的证明

由于 $\sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} Q_j u_j^{\mathsf{c}} = J_i u_{1:i-1}^{\mathsf{c}}$，根据 (30) 和 (31)，我们有 $u^{\mathsf{c}}(x, v, u_f)$ 的递归形式 (32)。由于 $L_{ij} Q_j u_j^{\mathsf{c}} = L_{ij} Q_j u_{1:k}^{\mathsf{c}}$，我们可以表述为

$$\begin{aligned}
u_{1:k}^{\mathsf{c}} &= u_1^{\mathsf{c}} + \cdots + u_k^{\mathsf{c}} = \sum_{i=1}^{k} Q_i^T L_{ii}^{+(\lambda_i)} \left(v_i - \kappa_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} Q_j u_j^{\mathsf{c}} \right) \\
&= Q^T \begin{bmatrix} L_{11}^{+(\lambda_1)} (v_1 - \kappa_1) \\ L_{22}^{+(\lambda_2)} (v_2 - \kappa_2 - L_{21} Q_1 u_1^{\mathsf{c}}) \\ \vdots \\ L_{kk}^{+(\lambda_k)} \left(v_k - \kappa_k - \sum_{i=1}^{k-1} L_{ki} Q_i u_i^{\mathsf{c}} \right) \end{bmatrix} = Q^T L_D^{+(\lambda)} \begin{bmatrix} v_1 - \kappa_1 \\ v_2 - \kappa_2 - L_{21} Q_1 u_1^{\mathsf{c}} \\ \vdots \\ v_k - \kappa_k - \sum_{i=1}^{k-1} L_{ki} Q_i u_i^{\mathsf{c}} \end{bmatrix} \\
&= Q^T L_D^{+(\lambda)} \begin{bmatrix} v_1 - \kappa_1 \\ v_2 - \kappa_2 - L_{21} Q_1 u_{1:k}^{\mathsf{c}} \\ \vdots \\ v_k - \kappa_k - \sum_{i=1}^{k-1} L_{ki} Q_i u_{1:k}^{\mathsf{c}} \end{bmatrix} = Q^T L_D^{+(\lambda)} \left(v - \kappa - L_L Q u_{1:k}^{\mathsf{c}} \right)
\end{aligned}$$

and

$$Q u_{1:k}^{\mathsf{c}} = (I_\rho + L_D^{+(\lambda)} L_L)^{-1} L_D^{+(\lambda)} (v - \kappa).$$

由于 $L_D^{+(\lambda)} L_L$ 和 $L_L L_D^{+(\lambda)}$ 均为严格块下三角矩阵，我们有

$$\begin{aligned}
(I_\rho + L_D^{+(\lambda)} L_L)^{-1} L_D^{+(\lambda)} &= \left[I_\rho - L_D^{+(\lambda)} L_L + \cdots + (-L_D^{+(\lambda)} L_L)^{k-1} \right] L_D^{+(\lambda)} \\
&= L_D^{+(\lambda)} \left[I_p - L_L L_D^{+(\lambda)} + \cdots + (-L_L L_D^{+(\lambda)})^{k-1} \right] \\
&= L_D^{+(\lambda)} (I_p + L_L L_D^{+(\lambda)})^{-1}
\end{aligned}$$

并且我们以闭式形式 (33) 得到 $u^{\mathsf{c}}(x, v, u_f)$。

E 引理 3.6 的证明

固定 $x \in \mathcal{D}$ 和 $v \in \mathbb{R}^p$，并令 $\phi_i(u) = \pi_i(x, v_i, u)$，其中 $1 \le i \le k$。根据定义 3.5 的依赖性，存在唯一的 $u_1^*, \ldots, u_k^* \in \mathbb{R}^m$ 满足

$$\{u_i^*\} = \underset{u \in \mathcal{R}(P_i(\mathbf{x}))}{\arg\min}\ \phi_i(u_{1:i-1}^* + u) \quad (1 \le i \le k)$$

其中 $u^*_{i:j} = u^*_i + \cdots + u^*_j$。于是，根据 (42)，我们有

$$\begin{aligned}
\phi_1(u^*_{1:k}) &= \min\{\phi_1(u) : u \in \mathbb{R}^m\} && \text{(86a)}\\
\phi_2(u^*_{1:k}) &= \min\{\phi_2(u) : u \in u^*_1 + \mathcal{R}(I_m - P_1(x))\} \\
&= \min\{\phi_2(u) : u \in \mathbb{R}^m \text{ and } \phi_1(u) = \phi_1(u^*_1)\} && \text{(86b)}\\
&\vdots \\
\phi_k(u^*_{1:k}) &= \min\{\phi_k(u) : u \in u^*_{1:k-1} + \mathcal{R}(I_m - P_{1:k-1}(x))\} \\
&= \min\{\phi_k(u) : u \in \mathbb{R}^m \text{ and } \phi_i(u) = \phi_i(u^*_{1:k}) \text{ for } 1 \le i \le k-1\}. && \text{(86c)}
\end{aligned}$$

因此，$u^*_{1:k}$ 是（45）的唯一解。

F 脚注9的证明

尽管脚注 9 中提出的论断广为人知，并且可以在诸如[7, §13.4.2] 和 [8, §8], 等参考文献中找到，但我们仍在此给出证明，以介绍本研究的背景以及本文的主要结果，即定理 4.14 和推论 4.15。此外，脚注 9 中所述命题的证明与定理 4.14 的证明具有相似的逻辑思路，因此，在我们引入各种分析工具以处理优先级输出跟踪控制中的不完美求逆和不连续正交化之前，读者可以通过这一证明加深对定理 4.14 证明过程的理解。

由于我们假设 $\dot\eta = f^\circ_\eta[\eta, 0]$ 是渐近稳定的，因此存在一个 $\mathcal{KL}$ 类函数 β_η 和一个正常数 $\hat{\mathbf{r}}_\eta$，使得对于每个满足 $\|\eta(0)\| < \hat{\mathbf{r}}_\eta$ 的 η，都存在一个解 $[0,\infty) \to \mathbb{R}^{n-r}$，其初始值为 $\eta(0)$，并满足 $\|\eta(t)\| \le \beta_\eta(\|\eta(0)\|, t)$，对所有 $t \ge 0$ [7, 均成立。引理 4.5]。令 $0 < \bar{\mathbf{r}}_\eta < \hat{\mathbf{r}}_\eta$，使得 $\beta_\eta(\bar{\mathbf{r}}_\eta, 0) < \hat{\mathbf{r}}_\eta$。根据逆李雅普诺夫定理 [7, 定理 4.16]，存在一个连续可微函数 $V_\eta : \bar{\mathbf{r}}_\eta\mathcal{B}_{n-r} \to \mathbb{R}$，满足

$$\begin{aligned}
\bar\alpha_1(\|\eta\|) \le V_\eta(\eta) &\le \bar\alpha_2(\|\eta\|) \\
\frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} f_\eta[\eta, 0] &\le -\bar\alpha_3(\|\eta\|) \\
\left\| \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right\| &\le \bar\alpha_4(\|\eta\|)
\end{aligned}$$

对于所有 $\eta \in \bar{\mathbf{r}}_\eta\mathcal{B}_{n-r}$，其中 $\bar\alpha_i$ 对于 $1 \le i \le 4$ 是定义在 $[0, \bar{\mathbf{r}}_\eta]$上的 $\mathcal{K}$ 类函数。由于假设 $A - BK$ 为赫尔维茨矩阵，李雅普诺夫方程存在一个解 $X = X^T > 0$

$$X(A - BK) + (A - BK)^T X = -2I_r.$$

定义 $V_{\tilde\xi}(\tilde\xi) = \sqrt{\tilde\xi^T X \tilde\xi}$对于 $\tilde\xi \in \mathbb{R}^r$。

由于我们假设 $\xi^\star(t)$ 和 $\kappa^\star(t)$ 是有界的，因此存在正常数 $\mathbf{M}_{\xi^\star}$ 和 $\mathbf{M}_{\kappa^\star}$，使得对于所有 $t \in [0,\infty)$，$\|\xi^\star(t)\| < \mathbf{M}_{\xi^\star}$ 且 $\|\kappa^\star(t)\| < \mathbf{M}_{\kappa^\star}$。由于微分同胚 Φ 的定义域 $\mathcal{D}$ 是开集，且 Φ 和 Φ^{-1} 均连续，所以 $\Phi(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}^n$ 是开集。令 $\mathcal{C} \subset \Phi(\mathcal{D})$ 为 0 的紧邻域，$0 < \mathbf{r}_\eta \le \bar{\mathbf{r}}_\eta$，并令 $\mathbf{M}_{\xi^\star} < \mathbf{r}_{\tilde\xi} + \mathbf{M}_{\xi^\star} = \mathbf{r}_\xi$ 满足

$$\tilde{\mathcal{E}} \coloneqq \mathsf{r}_\eta\mathcal{B}_{n-r} \times \mathsf{r}_{\tilde\xi}\mathcal{B}_r \subset \mathcal{E} \coloneqq \mathsf{r}_\eta\mathcal{B}_{n-r} \times \mathsf{r}_\xi\mathcal{B}_r \subset \mathcal{C}.$$

注意到 $\mathsf{cl}(\mathcal{E})$ 是 $\mathcal{C}$的紧子集，且 $\tilde z = (\eta, \xi) \in \mathcal{E}$意味着 $z = (\eta, \xi) \in \mathcal{E}$。我们为整个系统（55）提出如下李雅普诺夫函数候选 $V : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$

$$V(\eta, \tilde\xi) = V_\eta(\eta) + \mathsf{w}V_{\tilde\xi}(\tilde\xi)$$

带有权重 $\mathsf{w} > 0$。令 $\delta_0 = \min\{\mathsf{r}_\eta, \mathsf{r}_{\tilde{\xi}}\}$。由于 V 是连续且正定的，存在定义在 $[0, \delta_0]$ 上的类 $\mathcal{K}$ 函数 α_1 和 α_2，满足

$$\alpha_1(\|(\eta, \tilde{\xi})\|) \leq V(\eta, \tilde{\xi}) \leq \alpha_2(\|(\eta, \tilde{\xi})\|)$$

~ ~对所有 (η, ξ), $\in \delta_0 \mathcal{B}_n \subset \mathcal{E}$ [7, 引理 4.3]。

假设 $f_\eta[z]$, $G_\eta[z]$, $J[z]$ 和 $\kappa[z]$ 在 $\Phi(\mathcal{D})$ 上连续可微。由于 $J[z]$ 在 $\Phi(\mathcal{D})$ 上满秩， $J^+[z]$ 在 $\Phi(\mathcal{D})$ 上保持 $J[z]$ 的光滑性。因此， $f_\eta^\circ = f_\eta - G_\eta J^+ \kappa$ 和 $G_\eta J^+$ 在 $\Phi(\mathcal{D})$ 上连续可微。由于 $\mathrm{cl}(\mathcal{E})$ 是 $\Phi(\mathcal{D})$ 的紧子集，存在正常数 M_{GJ^+} 和 $\mathsf{L}_{f_\eta^\circ}$ 满足

$$\|(G_\eta J^+)[z]\| \leq \mathsf{M}_{G_\eta J^+}$$
$$\|f_\eta^\circ[z_1] - f_\eta^\circ[z_2]\| \leq \mathsf{L}_{f_\eta^\circ}\|z_1 - z_2\|$$

对所有 $z, z_1, z_2 \in \mathcal{E}$均成立。此外，

$$\mathsf{M}_{\bar{\alpha}_4} = \max_{\|\eta\| < \mathsf{r}_\eta} \bar{\alpha}_4(\|\eta\|) < \infty.$$

然后，我们可以计算系统 (55) 的轨迹上的 V 的时间导数，得到

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} f_\eta^\circ[\eta, 0] + \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta}(f_\eta^\circ[\eta, \xi] - f_\eta^\circ[\eta, 0]) + \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} G_\eta J^+(-K\tilde{\xi} + \kappa^\star) \\
&\quad + \mathsf{w}\frac{\tilde{\xi}^T(X(A - BK) + (A - BK)^T X)\tilde{\xi}}{2\sqrt{\tilde{\xi}^T X \tilde{\xi}}} \\
&\leq -\bar{\alpha}_3(\|\eta\|) + \bar{\alpha}_4(\|\eta\|)\mathsf{L}_{f_\eta^\circ}(\|\tilde{\xi}\| + \mathsf{M}_{\xi^\star}) + \bar{\alpha}_4(\|\eta\|)\mathsf{M}_{G_\eta J^+}(\|K\|\|\tilde{\xi}\| + \mathsf{M}_{\kappa^\star}) - \mathsf{w}\frac{\|\tilde{\xi}\|}{\sigma_{\max}^{1/2}(X)} \\
&= -\bar{\alpha}_3(\|\eta\|) + (\mathsf{L}_{f_\eta^\circ}\mathsf{M}_{\xi^\star} + \mathsf{M}_{G_\eta J^+}\mathsf{M}_{\kappa^\star})\bar{\alpha}_4(\|\eta\|) - \left(\frac{\mathsf{w}}{\sigma_{\max}^{1/2}(X)} - \bar{\alpha}_4(\|\eta\|)(\mathsf{L}_{f_\eta^\circ} + \mathsf{M}_{G_\eta J^+}\|K\|)\right)\|\tilde{\xi}\|
\end{aligned}$$

对所有 $\mathsf{w} > 0$均成立。因此，对于足够大的 $\mathsf{w} > 0$ 以及足够小的 $\mathsf{M}_{\xi^\star}, \mathsf{M}_{\kappa^\star} > 0$，总能找到满足条件的 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2 > 0$, $0 < \delta < \delta_0$ 和 $0 < \varepsilon < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(\delta))$

$$\dot{V} \leq -W(\eta, \tilde{\xi}) \coloneqq -\mathsf{c}_1\bar{\alpha}_3(\|\eta\|) - \mathsf{c}_2\|\tilde{\xi}\|$$

~对于所有 $\varepsilon \leq \|(\eta, \xi)\| \leq \delta$。因此，根据 [7, 定理 4.18], ，存在类 $\mathcal{KL}$ 函数 β，并且对于满足 $\|(\eta(0)\ \tilde{\xi}(0))\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(\delta))$ 的每个初始状态 $(\eta(0)\ \tilde{\xi}(0))$，存在 $T_0 > 0$ （取决于 ~$(\eta(0)\ \xi(0))$ 和 ε），使得方程 (55) 的解满足

$$\|(\eta(t), \tilde{\xi}(t))\| \leq \begin{cases} \beta(\|(\eta(0), \tilde{\xi}(0))\|, t), & t \in [0, T_0] \\ \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\varepsilon)), & t \in [T_0, \infty). \end{cases}$$

G 引理 4.10 的证明

为简单起见，我们将 (72) 写作 $\dot{z}_0 \in \mathcal{F}(t, z_0)$。由于 $\xi^\star(t)$ 和 $\kappa^\star(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上有界，且 $(LQ)[z_0]$ 和 $\Gamma[z_0]$ 在紧集 $\mathcal{C}_0$上有界，因此 $\mathcal{F}(t, z_0)$ 在 $[0, \infty)$ 上有界 $\times\, \mathcal{C}_0$。于是，~存在一个有界上半连续集值映射 $\mathcal{F}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$，其取值为闭凸~，并满足对所有 $(t, z_0) \in [0, \infty) \times \mathcal{C}_0$ [27, Lemma 2.10], $\mathcal{F}(t, z_0) = \mathcal{F}(t, z_0)$。由此可知，对每个 $z_0^\circ \in \mathrm{int}(\mathcal{C}_0)$，存在一个绝对连续函数 $z_0 : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$，满足 $\sim z_0(0) = z_0^\circ$，且 $\dot{z}_0(t) \in \mathcal{F}(t, z_0(t))$ 几乎处处成立 [36, 第 4 章、推论 1.12、习题1.14],，由此证明得证。

H 引理4.11 的证明

首先，定义集值映射 $\mathcal{M}_{ij}\colon \Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0) \to 2^{\mathbb{R}^{m\times p_j}}$ for $1 \le i,j \le k$ and $\mathcal{U}_{i_0+1:k+1}\colon [0,\infty) \times\Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0) \to 2^{\mathbb{R}^m}$ 如下:

$$\mathcal{M}_{ij}(x) \coloneqq \mathcal{K}[Q_i^T L_{ii}^T \Gamma_{ij}](x),$$
$$\mathcal{U}_{i_0+1:k+1}(t,x) \coloneqq \sum_{i=i_0+1}^{k}\sum_{j=1}^{i} \mathcal{M}_{ij}(x)(-K_j\tilde{\xi}_j(t,x) + \kappa_j^\star(t) + \kappa_j(x)) + N(x)\mathcal{U}_f.$$

由于 $N_0 = I_m - J_0^+ J_0$ 在 $\Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0)$ 上是光滑的，且对于所有 (t,x)，$N_0 u^\pi_{i_0+1:k+1} = u^\pi_{i_0+1:k+1}$，因此我们在 $[0,\infty) \times \Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0)$ 上有 $N_0\mathcal{U}_{i_0+1:k+1} = \mathcal{U}_{i_0+1:k+1}$。还需注意，$\mathcal{U}_{i_0+1:k+1}(t,x)$ 在 $[0,\infty) \times\Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0)$ 上是有界的，因此存在一个正常数 $\mathrm{M}_{\mathcal{U}}$，满足对于所有 $t \in [0,\infty)$，$\mathcal{U}_{i_0+1:k+1}(t,\Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0)) \subset \mathrm{M}_{\mathcal{U}}\mathcal{B}_m$。因此，可以找到一个上半连续集值映射 $\mathcal{U}\colon \Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0) \to 2^{\mathbb{R}^m}$，满足以下性质:

- $\mathcal{U}(x)$ 是包含 $\mathcal{U}_{i_0+1:\,k+1}(t,x)$ 的 0 的紧凸邻域，对所有 $(t,x) \in [0,\infty) \times \Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0)$ 均成立（因此引理的 (a) 项成立）；并且
- 引理 4.11 的 (b) 项成立。

虽然可以对所有 $x \in \Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0)$ 将 $\mathcal{U}$ 定义为 $\mathcal{U}(x) = \mathrm{M}_{\mathcal{U}}\mathcal{B}_m$，但需要注意，这种选择可能不满足假设 4.12。因此，选择 $\mathcal{U}$ 时需要谨慎考虑。若能证明

$$\mathcal{K}[f_0^\circ + G_0^\circ(-K_0\tilde{\xi}_0 + \kappa_0^\star) + G_0 u^\pi_{i_0+1:k+1}] \subset f_0^\circ + G_0^\circ(-K_0\tilde{\xi}_0 + \kappa_0^\star) + G_0\mathcal{U}_{i_0+1:k+1}$$

fo对所有 $(t,x) \in [0,\infty) \times \Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0)$ 均成立，由此可得引理的 (c) 项。

记 $f^* = f_0^\circ + G_0^\circ(-K_0 \quad \tilde{\xi}_0 + \kappa_0^\star) + G_0 u^\pi_{i_0+1:\,k+1}$。观察

$$\overline{\mathrm{co}}\left(f^*\left(t, x + \frac{1}{a}\mathrm{cl}(\mathcal{B}_n)\right)\right) = \begin{cases} \bigcap\limits_{1\le\delta<\infty} \overline{\mathrm{co}}(f^*(t, x+\delta\mathrm{cl}(\mathcal{B}_n))), & a = 1 \\ \bigcap\limits_{\frac{1}{a}\le\delta<\frac{1}{a-1}} \overline{\mathrm{co}}(f^*(t, x+\delta\mathrm{cl}(\mathcal{B}_n))), & a \ge 2 \end{cases}$$

对于 $a \in \mathbb{N}$，我们可以将 $f^*(t,x)$ 的 Krasovskii 正则化改写为

$$\mathcal{K}[f^*](t,x) = \bigcap_{\delta>0} \overline{\mathrm{co}}(f^*(t, x+\delta\mathrm{cl}(\mathcal{B}_n))) = \bigcap_{a\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{co}}\left(f^*\left(t, x + \frac{1}{a}\mathrm{cl}(\mathcal{B}_n)\right)\right).$$

由于 $\mathcal{C}_0$ 是紧集，且 Φ_0^{-1}在 $\Phi_0(\mathcal{D}_0)$上连续，因此根据定理 2.10]，$\Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0)$是紧集 $[34,$。由于 $\mathcal{D}_0$是开集，且 $\Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0) \subset \mathcal{D}_0$，对于每个 $x \in \Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0)$，都存在 $a_x \in \mathbb{N}$ 使得对于所有 $a \ge a_x$，$x + (1/a)\mathrm{cl}(\mathcal{B}_n) \subset \mathcal{D}_0$。根据假设 4.2，$\Gamma(x)$在 $\mathcal{D}_0$ 的每个紧子集上有界；又因为 $x + (1/a)\mathrm{cl}(\mathcal{B}_n) \subset \mathcal{D}_0$ 是紧集，所以对于所有 $x \in \Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0)$ 和$a \ge a_x$，$f^*(t, x + (1/a)\mathrm{cl}(\mathcal{B}_n))$有界。

引理 H.1. 若 $A \subset \mathbb{R}^n$ 有界，则 $\mathrm{co}(A) \coloneqq \mathrm{cl}(\mathrm{co}(A)) = \mathrm{co}(\mathrm{cl}(A))$。 □

证明。如果 $A \subset \mathbb{R}^n$ 有界，那么 $\mathrm{cl}(A)$ 是紧集，因此 $\mathrm{co}(\mathrm{cl}(A))$ 也是紧集 $[27,$ 推论 1.1]。于是，$\mathrm{co}(A) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{co}(\mathrm{cl}(A))) = \mathrm{co}(\mathrm{cl}(A))$。由于 $\mathrm{co}(A)$ 是凸集，我们有

$$A \subset \mathrm{co}(A) \implies \mathrm{cl}(A) \subset \overline{\mathrm{co}}(A) \implies \mathrm{co}(\mathrm{cl}(A)) \subset \overline{\mathrm{co}}(A).$$

因此，对于每个有界的 $A \subset \mathbb{R}^n$，$\mathrm{co}(A) = \mathrm{co}(\mathrm{cl}(A))$ □

根据引理 H.1，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}[f^*](t,x) &= \bigcap_{a\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{co}}\left(f^*\left(t, x+\frac{1}{a}\mathrm{cl}(\mathcal{B}_n)\right)\right) \\
&= \bigcap_{a\in\mathbb{N}} \mathrm{co}\left(\mathrm{cl}\left(f^*\left(t, x+\frac{1}{a}\mathrm{cl}(\mathcal{B}_n)\right)\right)\right) \\
&= \bigcap_{a\in\mathbb{N}} \mathrm{co}\left(\left\{\lim_{b\to\infty} f^*(t,x_b) : x_b \in x+\frac{1}{a}\mathrm{cl}(\mathcal{B}_n)\right\}\right) \\
&\downarrow \quad [37,\ \text{Lemma A.1}] \\
&= \mathrm{co}\left(\bigcap_{a\in\mathbb{N}} \left\{\lim_{b\to\infty} f^*(t,x_b) : x_b \in x+\frac{1}{a}\mathrm{cl}(\mathcal{B}_n)\right\}\right) \\
&= \mathrm{co}\left(\left\{\lim_{b\to\infty} f^*(t,x_b) : x_b \to x\right\}\right).
\end{aligned}$$

由于 $Q_i^T L_{ii}^T \Gamma_{ij}$ 对于 $1 \le i,\ j \le k$ 在 $\mathcal{D}_0$ 上局部有界，且 f_0、G_0、κ、$\tilde{\xi}$、$L_{ij}Q_j$ 和 Γ_{ij} 对于 $1 \le i,\ j \le i_0$ 在 $\mathcal{D}_0$ 上连续，对于每个满足 $\lim_{b\to\infty} f^*(t,x_b)$ 存在的序列 $x_b \to x$，都存在一个子序列 $x_{b_c} \to x$，使得对于所有 $1 \le i \le k$ 和 $1 \le j \le i$，$\lim_{c\to\infty}(Q_i^T L_{ii}^T \Gamma_{ij})(x_{b_c})$ 和 $\lim_{c\to\infty} u_f(t,x_{b_c})$ 均存在，并且给主人留下些什么吧

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} f^*(t,x_b) &= f_0(x) + G_0(x)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} \lim_{c\to\infty} (Q_i^T L_{ii}^T \Gamma_{ij})(x_{b_c})(v_j(t,x)-\kappa_j(x)) \\
&\quad + G_0(x)N(x)\lim_{c\to\infty} u_f(t,x_{b_c}) \\
&= f_0^\circ(x) + G_0^\circ(x)v_0(t,x) + G_0(x)\sum_{i=i_0+1}^{k}\sum_{j=1}^{i} \lim_{c\to\infty} (Q_i^T L_{ii}^T \Gamma_{ij})(x_{b_c})(v_j(t,x)-\kappa_j(x)) \\
&\quad + G_0(x)N(x)\lim_{c\to\infty} u_f(t,x_{b_c})
\end{aligned}$$

~ ~其中 $v_i = -K_i\xi_i + \kappa_i^\star$和 $v_0 = \text{col}(v_1, \ldots, v_{i_0}) = -K_0\xi_0 + \kappa_0^\star$。由此可知

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}[f^*](t,x) &= \text{co}\left(\left\{\lim_{b\to\infty} f^*(t,x_b) : x_b \to x\right\}\right) \\
&= \text{co}\Bigg(\Bigg\{f_0^\circ(x) + G_0^\circ(x)v_0(t,x) + \sum_{i=i_0+1}^{k}\sum_{j=1}^{i} G_0(x)\lim_{c\to\infty}(Q_i^T L_{ii}^T\Gamma_{ij})(x_{b_c})(v_j(t,x)-\kappa_j(x)) \\
&\qquad + G_0(x)N(x)\lim_{c\to\infty} u_f(t,x_{b_c}) : x_b \to x,\ \{x_{b_c}\}\subset\{x_b\}\Bigg\}\Bigg) \\
&\subset \text{co}\Bigg(\Bigg\{f_0^\circ(x) + G_0^\circ(x)v_0(t,x) + \sum_{i=i_0+1}^{k}\sum_{j=1}^{i} G_0(x)\lim_{b\to\infty}(Q_i^T L_{ii}^T\Gamma_{ij})(x_b)(v_j(t,x)-\kappa_j(x)) \\
&\qquad + G_0(x)N(x)\lim_{b\to\infty} u_f(t,x_b) : x_b \to x\Bigg\}\Bigg) \\
&\subset \text{co}\Bigg(f_0^\circ(x) + G_0^\circ(x)v_0(t,x) + \Bigg\{\sum_{i=i_0+1}^{k}\sum_{j=1}^{i} G_0(x)\lim_{b\to\infty}(Q_i^T L_{ii}^T\Gamma_{ij})(x_b)(v_j(t,x)-\kappa_j(x)) \\
&\qquad + G_0(x)N(x)\lim_{b\to\infty} u_f(t,x_b) : x_b \to x\Bigg\}\Bigg) \\
&= f_0^\circ(x) + G_0^\circ(x)v_0(t,x) + G_0(x)N(x)\text{co}\left(\left\{\lim_{b\to\infty} u_f(t,x_b) : x_b \to x\right\}\right) \\
&\quad + \sum_{i=i_0+1}^{k}\sum_{j=1}^{i} G_0(x)\text{co}\left(\left\{\lim_{b\to\infty}(Q_i^T L_{ii}^T\Gamma_{ij})(x_b) : x_b \to x\right\}\right)(v_j(t,x)-\kappa_j(x))
\end{aligned}
$$

其中，最后一个等号源于这样一个事实：两个集合之和的凸包等于这两个集合的凸包之和。采用推导

$$
\mathcal{K}[f^*](t,x) = \text{co}\left(\left\{\lim_{b\to\infty} f^*(t,x_b) : x_b \to x\right\}\right),
$$

我们可以得到

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}[Q_i^T L_{ii}^T\Gamma_{ij}](x) &= \text{co}\left(\left\{\lim_{b\to\infty}(Q_i^T L_{ii}^T\Gamma_{ij})(x_b) : x_b \to x\right\}\right) = \mathcal{M}_{ij}(x) \\
\mathcal{K}[u_f](t,x) &= \text{co}\left(\left\{\lim_{b\to\infty} u_f(t,x_b) : x_b \to x\right\}\right) \subset \mathcal{U}_f.
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}[f^*](t,x) &\subset f_0^\circ(x) + G_0^\circ(x)v_0(t,x) + \sum_{i=i_0+1}^{k}\sum_{j=1}^{i} G_0(x)\mathcal{M}_{ij}(x)(v_j(t,x)-\kappa_j(x)) + G_0(x)N(x)\mathcal{U}_f \\
&= f_0^\circ(x) + G_0^\circ(x)(-K_0\tilde{\xi}_0(t,x) + \kappa_0^\star(t)) + G_0(x)\mathcal{U}_{i_0+1:k+1}(t,x)
\end{aligned}
$$

对所有的 $(t,x) \in [0,\infty) \times \Phi_0^{-1}(\mathcal{C}_0)$。

I 定理 4.14 最后一步的证明

定理 4.14 最后一步的证明与 [7, 定理 4.18] 的证明思路相同。不过，我们在此给出该证明，以展示如何利用

微积分基本定理 [34,定理 7.20]。由于

$$0 < \varepsilon,\ \|(\eta_0(0), \tilde{\xi}_0(0))\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(\delta)) \le \delta,$$

我们有

$$0 < \sigma \coloneqq \alpha_2(\varepsilon),\ \alpha_2(\|(\eta_0(0), \tilde{\xi}_0(0))\|) < \rho \coloneqq \alpha_1(\delta) \le \alpha_2(\delta).$$

定义

$$\Omega_\bullet = \{(\eta_0, \tilde{\xi}_0) \in \delta\mathcal{B}_n : V(\eta_0, \tilde{\xi}_0) < \bullet\}$$

fo ˜r $\bullet \in \{\sigma, \rho\}$。由于 $V(\eta_0, \xi_0)$ 在 $\delta\mathcal{B}_n$ 上连续，$\Omega_\bullet$ 是开集，并且我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{bd}(\Omega_\bullet) &= \{(\eta_0, \tilde{\xi}_0) \in \delta\mathcal{B}_n : V(\eta_0, \tilde{\xi}_0) = \bullet\}\\ \mathrm{cl}(\Omega_\bullet) &= \{(\eta_0, \tilde{\xi}_0) \in \delta\mathcal{B}_n : V(\eta_0, \tilde{\xi}_0) \le \bullet\}\end{aligned}$$

对 $\bullet \in \{\sigma, \rho\}$ 成立。于是，

$$\varepsilon\mathcal{B}_n \subset \Omega_\sigma \subset \mathrm{cl}(\Omega_\sigma) \subset \Omega_\rho \subset \{\alpha_1(\|(\eta_0, \tilde{\xi}_0)\|) < \rho\} = \delta\mathcal{B}_n.$$

定义

$$W(\eta_0, \tilde{\xi}_0) \coloneqq \mathsf{c}_1\bar{\alpha}_3(\|\eta_0\|) + \mathsf{c}_2\|\tilde{\xi}_0\|.$$

由于 W 在 $\delta\mathcal{B}_n$ 上连续且正定，我们有

$$c \coloneqq \min_{\varepsilon \le \|(\eta_0, \tilde{\xi}_0)\| \le \delta} W(\eta_0, \tilde{\xi}_0) > 0.$$

˜集合 Ω_σ 和 Ω_ρ 具有这样的性质：任何始于˜$\mathrm{cl}(\Omega_\sigma)$ 或 Ω_ρ 的 Krasovskii 解（$\eta_0(t)$ $\xi_0(t)$）都不能分别离开 $\mathrm{cl}(\Omega_\sigma)$ 或 Ω_ρ。为证明这一点，首先令 $(\eta_0(0)$ $\xi_0(0)) \in \mathrm{cl}(\Omega_\sigma)$ ˜，并假设存在满足 $(\eta_0(T)$ $\xi_0(T)) \in \Omega_\rho \setminus \mathrm{cl}(\Omega_\sigma)$ 的 $T > 0$。那么，存在 ˜ ˛$0 < t_1 < t_2 \le T$，使得 $(\eta_0(t_1)$ $\xi_0(t_1)) \in \mathrm{bd}(\Omega_\sigma)$，且对于所有 $t \in (t_1, t_2]$，均有 $(\eta_0(t)$ $\xi_0(t)) \in \Omega_\rho \setminus \mathrm{cl}(\Omega_\sigma)$。由此可得

$$\dot{V}(t, \eta_0(t), \tilde{\xi}_0(t)) \le -W(\eta_0(t), \tilde{\xi}_0(t)) \le -c$$

对几乎所有的 $t \in [t_1, t_2]$ 均成立。因此，我们有

$$\begin{aligned}V(\eta_0(t), \tilde{\xi}_0(t)) &= V(\eta_0(t_1), \tilde{\xi}_0(t_1)) + \int_{t_1}^{t} \dot{V}(s, \eta_0(s), \tilde{\xi}_0(s))ds\\ &\le V(\eta_0(t_1), \tilde{\xi}_0(t_1)) - c(t - t_1)\\ &\le V(\eta_0(t_1), \tilde{\xi}_0(t_1))\\ &= \sigma\end{aligned}$$

˜ ˜矛盾。因此，对于 $t \in [t_1, t_2]$ 中的所有元素，$(\eta_0$ (t) $\xi_0(t)) \in \Omega_\sigma$。其次，令 $(\eta_0(0)$ $\xi_0(0)) \in \Omega_\rho$，并假设存在满足 ˜ ˜$(\eta_0(T)$ $\xi_0(T)) \in \mathrm{bd}(\Omega_\rho)$ 的 $T > 0$。那么，存在 $0 < t_1 < t_2 \le T$，使得对于˜ 中的所有元素，$(\eta_0(t)$ $\xi_0(t)) \in \Omega_\rho \setminus \mathrm{cl}(\Omega_\sigma)$，且 $(\eta_0(t_2)$ $\xi_0(t_2)) \in \mathrm{bd}(\Omega_\rho)$。与上文类似，我们有

$$\begin{aligned}\rho &= V(\eta(t_2), \tilde{\xi}(t_2))\\ &= V(\eta(t_1), \tilde{\xi}(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \dot{V}(s, \eta(s), \tilde{\xi}(s))ds\\ &\le V(\eta(t_1), \tilde{\xi}(t_1)) - c(t_2 - t_1)\\ &< V(\eta(t_1), \tilde{\xi}(t_1))\\ &< \rho,\end{aligned}$$

˜矛盾。因此，对于 $t \in [0, \infty$ 中的所有元素，$(\eta_0(t)\ \xi_0(t)) \in \Omega_\rho$。

由于

$$\|(\eta_0(0), \tilde{\xi}_0(0))\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(\delta)) \implies (\eta_0(0), \tilde{\xi}_0(0)) \in \Omega_\rho,$$

˜我们得出，对于所有 $t \geq 0$，$(\eta_0(t)\ \xi_0(t)) \in \Omega_\rho$。每个从 $\Omega_\rho \setminus \text{cl}(\Omega_\sigma)$ ˙出发的 Krasovskii 解都必须在有限时间内进入 $\text{cl}(\Omega_\sigma)$，因为在 $\Omega_\rho \setminus \text{cl}(\Omega_\sigma)$ 上 $V \leq -c < 0$，因此

$$V(\eta_0(t), \tilde{\xi}_0(t)) \leq V(\eta_0(0), \tilde{\xi}_0(0)) - ct \leq \rho - ct$$

˜这表明 $V(\eta_0(t)\ \xi_0(t))$ 在时间区间 $[0, (\rho - \sigma)/c]$ 内收敛至 σ。对于从 $\text{cl}(\Omega_\sigma)$ 内部开始的 Krasovskii 解，不等式

$$\|(\eta_0(t), \tilde{\xi}_0(t))\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\varepsilon))$$

˜对所有 $t \geq 0$ 均成立，因为 $\text{cl}(\Omega_\sigma) \subset \{\alpha_1(\|(\eta_0, \xi_0)\|) \leq \sigma = \alpha_2(\varepsilon)\}$。对于一个从 Ω_ρ 内部、但在 $\text{cl}(\Omega_\sigma)$ 外部开始的 Krasovskii 解，设 T_0 为其首次进入 $\text{cl}(\Omega_\sigma)$ 的时刻。对于几乎所有的 $t \in [0, T_0]$,

$$\dot{V} \leq -W(\eta_0, \tilde{\xi}_0) \leq -\alpha_3(\|(\eta_0, \tilde{\xi}_0)\|) \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)) \coloneqq -\alpha(V)$$

其中，α_3 和 α 是 $\mathcal{K}$ 类函数。α_3 的存在性由 [7, 引理 4.3]保证。因此，我们有

$$\begin{aligned}
D^+V(\eta_0(t), \tilde{\xi}_0(t)) &= \limsup_{h \downarrow 0} \frac{V(\eta_0(t+h), \tilde{\xi}_0(t+h)) - V(\eta_0(t), \tilde{\xi}_0(t))}{h} \\
&= \limsup_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \dot{V}(s, \eta_0(s), \tilde{\xi}_0(s)) ds \\
&\leq \limsup_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (-\alpha(V(\eta_0(s), \tilde{\xi}_0(s)))) ds \\
&\downarrow \quad \dot{V} < 0 \implies V(\eta_0(s), \tilde{\xi}_0(s)) \geq V(\eta_0(t+h), \tilde{\xi}_0(t+h)) \\
&\leq \limsup_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (-\alpha(V(\eta_0(t+h), \tilde{\xi}_0(t+h)))) ds \\
&= \limsup_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} h(-\alpha(V(\eta_0(t+h), \tilde{\xi}_0(t+h)))) \\
&= -\alpha(V(\eta_0(t), \tilde{\xi}_0(t)))
\end{aligned}$$

对所有 $t \in [0, T_0$ 均成立）。不失一般性，我们假设 $\alpha(\cdot)$ 是局部 Lipschitz 连续的。于是，存在一个满足以下条件的唯一解 $v(t)$【。

$$\dot{v} = -\alpha(v), \quad v(0) = V(\eta_0(0), \tilde{\xi}_0(0)).$$

由比较引理 [7,引理 3.4],

$$V(\eta_0(t), \tilde{\xi}_0(t)) \leq v(t), \quad \forall t \in [0, T_0].$$

根据 [7, 引理 4.4],，存在一个类 $\mathcal{KL}$ 函数 $\beta_0(r, s)$，定义在 $[0, \delta] \times [0, \infty)$ 上，使得

$$V(\eta_0(t), \tilde{\xi}_0(t)) \leq \beta_0(V(\eta_0(0), \tilde{\xi}_0(0)), t), \quad \forall t \in [0, T_0].$$

定义 $\beta(r, s) = \alpha_1^{-1}(\beta_0(\alpha_2(r)\ s))$，可得

$$\|(\eta_0(t), \tilde{\xi}_0(t))\| \leq \beta(\|(\eta_0(0), \tilde{\xi}_0(0))\|, t), \quad \forall t \in [0, T_0].$$

J 推论 4.15 被省略部分的证明设

$$\tilde{\mathsf{c}}_i = \frac{\tilde{\sigma}_i}{\vartheta_i}\sum_{j=1}^{i}\mathsf{M}_{E_{ij}}^{\circ}\big(\mathsf{L}_{\kappa_j}(\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\varepsilon)) + \mathsf{M}_{\xi_0^\star}) + \mathsf{M}_{\kappa_j^\star}\big)$$

对于 $1 \le i \le i_{1\circ}$ 由（82）可得

$$\|\tilde{\xi}_1(t)\| \le \sqrt{\tilde{\sigma}_1}\|\tilde{\xi}_1(t_0)\|e^{-\vartheta_1(t-T_1)} + \tilde{\mathsf{c}}_1.$$

因此，当 $i=1$ 取 $\mathsf{a}_{11}=\sqrt{\tilde{\sigma}_1}$、$\mathsf{b}_{11}=\vartheta_1$ 和 $\mathsf{c}_1=\tilde{}\mathsf{c}_1$ 时，(81) 成立。假设 that

$$\|\tilde{\xi}_j(t)\| \le \sum_{a=1}^{j}\mathsf{a}_{ja}\|\tilde{\xi}_a(T_1)\|e^{-\mathsf{b}_{ja}(t-T_1)} + \mathsf{c}_j$$

对所有 $t \in [T_1,\infty)$ 和 $1 \le j < i$ 均成立。令

$$\mathsf{c}_i = \frac{\tilde{\sigma}_i}{\vartheta_i}\sum_{j=1}^{i-1}\mathsf{M}_{E_{ij}}^{\circ}\|K_j\|\mathsf{c}_j + \tilde{\mathsf{c}}_i.$$

然后，由（82）式可得

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\xi}_i(t)\| &\le \sqrt{\tilde{\sigma}_i}\|\tilde{\xi}_i(T_1)\|e^{-\vartheta_i(t-T_1)} + \tilde{\sigma}_i\sum_{j=1}^{i-1}\mathsf{M}_{E_{ij}}^{\circ}\|K_j\|\int_{T_1}^{t}\left(\sum_{a=1}^{j}\mathsf{a}_{ja}\|\tilde{\xi}_a(T_1)\|e^{-\mathsf{b}_{ja}(s-T_1)} + \mathsf{c}_j\right)e^{-\vartheta_i(t-s)}ds + \tilde{\mathsf{c}}_i \\
&\le \sqrt{\tilde{\sigma}_i}\|\tilde{\xi}_i(T_1)\|e^{-\vartheta_i(t-T_1)} + \tilde{\sigma}_i\sum_{j=1}^{i-1}\mathsf{M}_{E_{ij}}^{\circ}\|K_j\|\left(\sum_{a=1}^{j}\mathsf{a}_{ja}\|\tilde{\xi}_a(T_1)\|e^{\mathsf{b}_{ja}T_1-\vartheta_i t}\int_{T_1}^{t}e^{(\vartheta_i-\mathsf{b}_{ja})s}ds + \frac{\mathsf{c}_j}{\vartheta_i}\right) + \tilde{\mathsf{c}}_i \\
&= \sqrt{\tilde{\sigma}_i}\|\tilde{\xi}_i(T_1)\|e^{-\vartheta_i(t-T_1)} + \tilde{\sigma}_i\sum_{j=1}^{i-1}\mathsf{M}_{E_{ij}}^{\circ}\|K_j\|\sum_{a=1}^{j}\mathsf{a}_{ja}\|\tilde{\xi}_a(T_1)\|e^{\mathsf{b}_{ja}T_1-\vartheta_i t}\int_{T_1}^{t}e^{(\vartheta_i-\mathsf{b}_{ja})s}ds + \mathsf{c}_i \\
&= \sqrt{\tilde{\sigma}_i}\|\tilde{\xi}_i(T_1)\|e^{-\vartheta_i(t-T_1)} + \sum_{a=1}^{i-1}\sum_{j=1}^{a}\tilde{\sigma}_i\mathsf{M}_{E_{ia}}^{\circ}\|K_a\|\mathsf{a}_{aj}\|\tilde{\xi}_j(T_1)\|e^{\mathsf{b}_{aj}T_1-\vartheta_i t}\int_{T_1}^{t}e^{(\vartheta_i-\mathsf{b}_{aj})s}ds + \mathsf{c}_i \\
&= \sqrt{\tilde{\sigma}_i}\|\tilde{\xi}_i(T_1)\|e^{-\vartheta_i(t-T_1)} + \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{a=j}^{i-1}\tilde{\sigma}_i\mathsf{M}_{E_{ia}}^{\circ}\|K_a\|\mathsf{a}_{aj}\|\tilde{\xi}_j(T_1)\|e^{\mathsf{b}_{aj}T_1-\vartheta_i t}\int_{T_1}^{t}e^{(\vartheta_i-\mathsf{b}_{aj})s}ds + \mathsf{c}_i
\end{aligned}$$

对所有 $t \in [T_1,\infty)$。我们可以计算

$$e^{\mathsf{b}_{aj}T_1-\vartheta_i t}\int_{T_1}^{t}e^{(\vartheta_i-\mathsf{b}_{aj})s}ds = (t-T_1)e^{-\vartheta_i(t-T_1)} \le \left(\max_{t\in[T_1,\infty)}(t-T_1)e^{-(\vartheta_i/2)(t-T_1)}\right)e^{-(\vartheta_i/2)(t-T_1)}$$

如果 $\vartheta_i = \mathsf{b}_{aj}$ and

$$e^{\mathsf{b}_{aj}T_1-\vartheta_i t}\int_{T_1}^{t}e^{(\vartheta_i-\mathsf{b}_{aj})s}ds = \frac{e^{-\mathsf{b}_{aj}(t-T_1)} - e^{-\vartheta_i(t-T_1)}}{\vartheta_i-\mathsf{b}_{aj}} < \begin{cases} \dfrac{e^{-\mathsf{b}_{aj}(t-T_1)}}{\vartheta_i-\mathsf{b}_{aj}}, & \vartheta_i > \mathsf{b}_{aj} \\ \dfrac{e^{-\vartheta_i(t-T_1)}}{\mathsf{b}_{aj}-\vartheta_i}, & \vartheta_i < \mathsf{b}_{aj} \end{cases}$$

如果 $\vartheta_i \neq \mathsf{b}_{aj}$。因此，存在满足条件的 a_{ija}、$\mathsf{b}_{ija} > 0$

$$e^{\mathsf{b}_{aj}T_1 - \vartheta_i t} \int_{T_1}^{t} e^{(\vartheta_i - \mathsf{b}_{aj})s} ds \leq \mathsf{a}_{ija} e^{-\mathsf{b}_{ija}(t-T_1)}$$

对所有 $t \in [T_1, \infty)$ 和 $1 \leq j \leq a \leq i-1$。令

$$\mathsf{a}_{ij} = \begin{cases} \sqrt{\tilde{\sigma}_i}, & i = j \\ \tilde{\sigma}_i \sum_{a=j}^{i-1} \mathsf{M}_{E_{ia}}^{\circ} \|K_a\| \mathsf{a}_{aj} \mathsf{a}_{ija}, & j < i \end{cases}$$

$$\mathsf{b}_{ij} = \begin{cases} \vartheta_i, & i = j \\ \min\{\mathsf{b}_{ija} : j \leq a \leq i-1\}, & j < i \end{cases}$$

对 $1 \leq j \leq i$。于是，我们有

$$\begin{aligned} \|\tilde{\xi}_i(t)\| &\leq \sqrt{\tilde{\sigma}_i} \|\tilde{\xi}_i(T_1)\| e^{-\vartheta_i(t-T_1)} + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{a=j}^{i-1} \tilde{\sigma}_i \mathsf{M}_{E_{ia}}^{\circ} \|K_a\| \mathsf{a}_{aj} \|\tilde{\xi}_j(T_1)\| \mathsf{a}_{ija} e^{-\mathsf{b}_{ija}(t-T_1)} + \mathsf{c}_i \\ &\leq \mathsf{a}_{ii} \|\tilde{\xi}_i(T_1)\| e^{-\mathsf{b}_{ii}(t-T_1)} + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\tilde{\sigma}_i \sum_{a=j}^{i-1} \mathsf{M}_{E_{ia}}^{\circ} \|K_a\| \mathsf{a}_{aj} \mathsf{a}_{ija} \right) \|\tilde{\xi}_j(T_1)\| e^{-\mathsf{b}_{ij}(t-T_1)} + \mathsf{c}_i \\ &= \sum_{j=1}^{i} \mathsf{a}_{ij} \|\tilde{\xi}_j(T_1)\| e^{-\mathsf{b}_{ij}(t-T_1)} + \mathsf{c}_i \end{aligned}$$

对所有 $t \in [T_1, \infty)$。

参考文献

[1] S.-i. An、G. Park 和 D. Lee，“当优先级分配遇到输入-输出线性化：基于优先级的多目标控制及其双连杆操作臂案例研究”，载于《IEEE 决策与控制会议论文集》，2022 年，第 2560–2565 页。[2] ——，“优先级控制问题中基于严格正实性的非理想输入-输出反馈线性化反馈增益设计”，已投稿发表。[3] R. W. Brockett，“非线性系统的反馈不变量”，载于《IFAC 世界大会论文集》，1978 年，第 1115–1120 页。[4] A. Isidori、A. Krener、C. Gori-Giorgi 和 S. Monaco，“通过反馈实现非线性解耦：一种微分几何方法”，《IEEE 自动控制汇刊》，第 26 卷，第 2 期，第 331–345 页，1981 年。[5] C. I. Byrnes 和 A. Isidori，“非线性系统的频域思想及其在稳定化和自适应控制中的应用”，载于《IEEE 决策与控制会议论文集》，1984 年，第 1569–1573 页。[6] ——，“最小相位非线性系统的局部稳定化”，《系统与控制快报》，第 11 卷，第 1 期，第 9–17 页，1988 年。

[7] H. K. Khalil，《非线性系统》。Pearson，纽约，2015 年。[8] A. Isidori，《非线性控制系统》。Springer-Verlag，伦敦，1995 年。[9] L. M. Silverman，“多变量线性系统的求逆”，《IEEE 自动控制汇刊》，第 14 卷，第 3 期，第 270–276 页，1969 年。[10] R. M. Hirschorn，“多变量非线性控制系统的可逆性”，《IEEE 自动控制汇刊》，第 24 卷，第 6 期，第 855–865 页，1979 年。[11] S. N. Singh，“非线性系统可逆性的一种改进算法”，《IEEE 自动控制汇刊》，第 26 卷，第 2 期，第 595–598 页，1981 年。[12] A. Isidori，《多变量系统反馈设计讲义》。Springer，2017 年。[13] Y. Nakamura、H. Hanafusa 和 T. Yoshikawa，“机器人操作臂的基于任务优先级的冗余控制”，《国际机器人研究杂志》，第 6 卷，第 2 期，第 3–15 页，1987 年。[14] S. Chiaverini，“机器人操作臂实时运动学控制的奇异鲁棒任务优先级冗余解析”，《IEEE 机器人与自动化汇刊》，第 13 卷，第 3 期，第 398–410 页，1997 年。[15] S.-i. An 和 D. Lee，“优先级逆运动学：推广”，《IEEE 机器人与自动化快报》，第 4 卷，第 4 期，第 3537–3544 页，2019 年。[16] N. Mansard、O. Khatib 和 A. Kheddar，“在任务栈中整合单边约束的统一方法”，《IEEE 机器人学汇刊》，第 25 卷，第 3 期，第 670–685 页，2009 年。[17] O. Kanoun，“不等式约束下冗余操作臂的实时优先级运动学控制”，载于《机器人学、科学与系统会议论文集》，2012 年，第 145–152 页。[18] J. Lee、N. Mansard 和 J. Park，“运动学控制中机器人任务转换的中间期望值方法”，《IEEE 机器人学汇刊》，第 28 卷，第 6 期，第 1260–1277 页，2012 年。[19] S.-i. An 和 D. Lee，“具有多任务定义的优先级逆运动学”，载于《IEEE 国际机器人与自动化会议论文集》，2015 年，第 1423–1430 页。[20] O. Khatib，“机器人操作臂运动与力控制的统一方法：操作空间公式”，《IEEE 机器人与自动化杂志》，第 3 卷，第 1 期，第 43–53 页，1987 年。[21] C. Ott、A. Dietrich 和 A. Albu-Sch¨affer，“冗余操作臂的优先级多任务柔顺控制”，《自动化》，第 53 卷，第 416–423 页，2015 年。[22] Y. Nakamura 和 H. Hanafusa，“机器人操作臂的最优冗余控制”，《国际机器人研究杂志》，第 6 卷，第 1 期，第 32–42 页，1987 年。[23] M. Geisert、A. Del Prete、N. Mansard、F. Romano 和 F. Nori，“正则化分层微分动态规划”，《IEEE 机器人学汇刊》，第 33 卷，第 4 期，第 819–833 页，2017 年。[24] M. Saveriano、S.-i. An 和 D. Lee，“末端执行器与零空间运动基元的增量式动觉示教”，载于《IEEE 国际机器人与自动化会议论文集》，2015 年，第 3570–3575 页。[25] S. Calinon，“利用任务参数化生成模型进行机器人学习”，载于《机器人研究》。Springer，2018 年，第 111–126 页。

[26] A. F. Filippov，《具有不连续右端项的微分方程》。Kluwer Academic Publishers，1988年。[27] G. V. Smirnov，《微分包含理论导论》。American Mathematical Society，2002年。[28] T. N. E. Greville，“关于矩阵乘积广义逆的注记”，SIAM Rev.，第8卷，第4期，第518–521页，1966年。[29] K. Miettinen，《非线性多目标优化》。Springer Science & Business Media，1999年。[30] M. Ehrgott，《多准则优化》。Springer Science & Business Media，2005年。[31] R. J. Plemmons，“M-矩阵的刻画。I——非奇异 M-矩阵”，Linear Algebra Appl.，第18卷，第2期，第175–188页，1977年。[32] S.-i. An 和 D. Lee，“优先级逆运动学：非光滑性、轨迹存在性、任务收敛性与稳定性”，2019年，arXiv:1905.03416。[33] J. Cortes，“不连续动力系统”，IEEE Control Syst. Mag.，第28卷，第3期，第36–73页，2008年。[34] W. Rudin，《实分析与复分析》。McGraw-Hill，1987年。[35] P. Baerlocher 和 R. Boulic，“一种可强制执行任意数量严格优先级的逆运动学架构”，Vis. Comput.，第20卷，第6期，第402–417页，2004年。[36] F. H. Clarke、Y. S. Ledyaev、R. J. Stern 和 P. R. Wolenski，《非光滑分析与控制理论》。纽约：Springer-Verlag，1998年。[37] B. Paden 和 S. Sastry，“一种用于计算 Filippov 微分包含的微积分及其在机器人操作臂变结构控制中的应用”，IEEE Trans. Circuits Syst.，第34卷，第1期，第73–82页，1987年。